ILMU PASTI DALAM ENGINEERING DAN PEMBANGUNAN

oleh :

Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie

N NASIONAL RI

1092/81

CERAMAH PADA KONPERENSI
MATEMATIKA NASIONAL KE II
Di
YOGYAKARTA

Jakarta, 28 Nopember 1977

No. : 01/III/E/1977

Diterbitkan oleh :
Sekretariat Menteri Negara Riset dan Teknologi R.I.
Jalan Imam Bonjol No. 58 Jakarta

JAKARTA, 1979

79.607/1092

163.550

ILMU PASTI DALAM ENGINEERING DAN PEMBANGUNAN

oleh :

Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie

CERAMAH PADA KONPERENSI
MATEMATIKA NASIONAL KE II
Di
YOGYAKARTA

Jakarta, 28 Nopember 1977

BIDANG BIBLIOGRAFI
DAN DEPOSIT

No. : 01/III/E/1977

309.230 959 8
HAB
1

Diterbitkan oleh :
Sekretariat Menteri Negara Riset dan Teknologi R.I.
Jalan Imam Bonjol No. 58 Jakarta

JAKARTA, 1979

PERPUSTAKAAN NASIONAL

ILMU PASTI DALAM
ENGINEERING DAN PEMBANGUNAN

Berbicara didepan para Sarjana Ilmu Pasti pada suatu Konperensi Nasional mengenai Ilmu Pasti, tanpa memakai bahasa Ilmu Pasti adalah kurang tepat.
Perkenankanlah kami memberi sedikit tanggapan mengenai Ilmu Pasti sebagai suatu alat, bahkan sebagai suatu bahasa seorang Insinyur dalam menggambarkan, menganalisa dan menyelesaikan persoalan-persoalan yang dihadapinya.

Pertama-tama, Insinyur tersebut harus memahami dan mengerti kehendak pemberi tugasnya dan berdasarkan ini disusunlah suatu model yang disesuaikan dengan keadaan sebenarnya yang terdapat pada sekitarnya dengan membatasi variabel-variabel pada unsur-unsur utama yang harus diperhatikan benar untuk menyelesaikan persoalan tersebut. Pembatasan variabel-variabel tidak hanya bersangkut paut dengan susah mudahnya suatu penyelesaian secara Ilmu Pasti tetapi sangat erat pula hubungannya dengan biaya ataupun harga dari prosedur yang dipakai untuk penyelesaian persoalan.

Setelah model tersebut selesai dan melalui pengecekan berdasarkan nilai extrim dan dihasilkan model yang benar-benar mencerminkan keadaan sebenarnya, maka tibalah peningkatan dari model ini menjadi suatu "Model Matematis". Model Matematis dari "Model Persoalan" tersebut diatas lah yang akan menghasilkan persamaan-persamaan integral dan differensial yang mengandung unsur-unsur utama persoalan dalam bentuk variabel, yang fungsinya masih harus dicari.

Penemuan fungsi variabel-variabel tersebut yang memenuhi persamaan-persamaan integral dan differensial didalam ruangan dan daerah perbatasan sistim koordinat tertentu sudah merupakan problem Ilmu Pasti.

Mendapatkan fungsi variabel tersebut secara exakt analitis hanyalah mungkin untuk persamaan-persamaan elementer, sedangkan persamaan-persamaan yang dihadapi didalam praktek, sudah ruwet dan komplex bentuknya.

Oleh karena itu, penyelesaian persamaan-persamaan yang komplex biasanya dilaksanakan dengan cara pendekatan atau approximasi dari fungsi variabel tersebut. Konvergensi dari approximasi menentukan kwalitas penyelesaian, dan dengan demikian pula harga dari penyelesaian tersebut.

Dalam pembentukan approximasi dari fungsi variabel-variabel, sering fungsi-fungsi yang memenuhi persamaan-persamaan elementer dipakai atau setidak-tidaknya dijadikan sebagai orientasi.

Biasanya diadakan transformasi seperti misalnya transformasi Laplace, Fourier dan sebagainya daripada persamaan-persamaan differensial dan integral yang diperoleh, untuk mendapatkan persamaan-persamaan yang lebih sederhana, sehingga suatu penyelesaian secara analitis dimungkinkan. Persoalan-persoalan yang timbul disini ialah mengembalikan fungsi-fungsi variabel yang didapat kedalam ruangan sebelum transformasi dilaksanakan.

Seringkali transformasi ini hampir tak bisa terlaksana. Jikalau suatu penyelesaaan persamaan-persamaan differensial dan integral yang ruwet itu tidak bisa dilaksanakan secara approximasi ataupun transformasi dan retransformasi, maka diambillah jalan untuk merubah persmaan-persamaan differensial dan integral tersebut menjadi suatu persamaan "Finite Difference" yang berbentuk persamaan algebrais [1], [2].

Persoalannya disini terletak pada dapat tidaknya dipenuhi syarat batas, yang seringkali tidak dapat dilaksanakan oleh karena batas-batas tersebut tidak merupakan batas sederhana seperti garis lurus, lingkaran dan sebagainya.

Namun demikian dengan cara "Finite Difference" sudah banyak persoalan yang dapat dipecahkan, sehingga persoalan-persoalan engineering tersebut dapat pula diselesaikan. Tentunya terdapat perbedaan dengan penyelesaian secara analitis karena disini hubungan analitis antara unsur-unsur utama satu sama lainnya tidak dimiliki.

Sampai saat ini hanya disinggung penyelesaian dari persamaan-persamaan differensial dan integral sekitar model matematis.
Bentuk persamaan-persamaan tersebut yang tersederhana tercermin pada persamaan-persamaan Euler dan Teori Teuler [3], [4], [5] yang dicantumkan sebagai berikut :

$$E = \int_V f\left(x, y, z, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dV + \int_B \left(q\varphi + \alpha \varphi^2/2\right) dF \qquad (1)$$

dimana fungsional E harus diminimumkan, sedangkan f merupakan suatu fungsi yang sembarang (arbitrary) dari pada x, y, z, φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ dsb., B adalah daerah perbatasan, dV adalah volumina infinitesimal dan dF adalah permukaan infinitesimal. Untuk mendapatkan E yang minimum, maka dibentuklah variasi δ dari E yang dalam hal ini harus sama dengan nol.

$$\delta E = \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \delta\varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi_x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi) + \frac{\partial f}{\partial \varphi_y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\delta\varphi) + \right.$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \varphi_z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\delta\varphi) \right) dV + \int_B (q\,\delta\varphi + \alpha\varphi\,\delta\varphi)\, dF = 0 \qquad (2)$$

dimana :

$$\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad ; \quad \varphi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Melalui integrasi partiel dari pada integrand integral (2) masing-masing seperti :

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial \varphi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \varphi)\, dV = \int_B \frac{\partial f}{\partial \varphi_x} \delta \varphi . \ell_x . dF - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_x} \right) \delta \varphi . dV$$

maka berubahlah persamaan (2) menjadi :

$$\delta E = \int_V \delta \varphi \left\{ \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_z} \right) \right\} dV +$$

$$\int_B \delta \varphi \left\{ q + \alpha \varphi + \ell_x \frac{\partial f}{\partial \varphi_x} + \ell_y \frac{\partial f}{\partial \varphi_y} + \ell_z \frac{\partial f}{\partial \varphi_z} \right\} dF \qquad (3)$$

dimana,

dimana,

ℓ_x , ℓ_y , ℓ_z = cosinus arah dari vektor normal permukaan dengan sumbu x, y dan z.

Agar supaya persamaan (3) berlaku untuk setiap variasi maka integrand dari kedua integral tersebut harus sama dengan nol. Dan ini berarti

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_z}\right) = 0 \qquad (4.a)$$

berlaku didalam ruangan ataupun volumina tertentu V ; dan

$$\ell_x \frac{\partial f}{\partial \varphi_x} + \ell_y \frac{\partial f}{\partial \varphi_y} + \ell_z \frac{\partial f}{\partial \varphi_z} + q + \alpha\varphi = 0 \qquad (4.b)$$

berlaku pada batas permukaan B dari volumina V tersebut.

Persamaan-persamaan diatas ditemukan oleh Euler dan telah membuktikan bahwa sesungguhnya "model matematis" tersebut dapat digambarkan dengan persamaan integral atau differensial. Pada perhitungan kekuatan rangka atau continuum mechanics E merupakan energi potensial yaitu jumlah dari pada energi dalam dan luar.

Hanya jika $\delta E = 0$, maka gaya dalam dan luar akan berada dalam keadaan keseimbangan. Seperti telah dikemukakan maka persamaan-persamaan integral dan differensial dari "model matematis" suatu problem engineering seperti hydrodynamik, aerodynamik, kekuatan rangka, getaran, arus panas dan sebagainya, semuanya berbentuk komplex dan sukar diselesaikan, mengingat bentuk dari benda yang dihadapi komplex pula .(kapal terbang, kapal, jembatan, reaktor).

Dengan adanya komputer, maka timbullah ide-ide untuk menyelesaikan persoalan engineering tanpa lebih dahulu membentuk persamaan-persamaan differensial atau integral dari seluruh benda, tetapi langsung menyusun persamaan-persamaan numeris dengan hanya memperhatikan serta membatasi perhitungan differensial dan integral pada bentuk yang sederhana yang merupakan bagian daripada bentuk benda ataupun konstruksi yang komplex tersebut.

Untuk hal itu, benda atau struktur konstruksi yang serba komplex di-idealisir dan dianggap seperti terdiri dari elemen-elemen standard, seperti pelat segi tiga, pelat lengkung, segi empat, tetraeder, balok lurus, balok lengkung dan sebagainya, yang semuanya satu sama lain saling dihubungkan pada "Nodal Point" (titik penghubung) sedemikian rupa sehingga merupakan suatu unit yang mendekati benda atau konstruksi komplex yang sebenarnya.

Tentunya dapat dibayangkan bahwa suatu benda atau struktur konstruksi yang komplex itu hanya dapat di-idealisir oleh beberapa ratus bahkan ribuan "elemen standard" yang satu sama lain dihubungkan pada "titik-titik penghubung" yang bersangkutan.

Dengan demikian, "model matematis" tersebut identik dengan "elemen standard" yang berbentuk sederhana dimana ditentukan bahwa fungsi variabel pada titik penghubung itu menentukan fungsi variabel dalam seluruh "elemen standard"

$$\{\varphi\} = [A]\{\varphi\}^e \qquad (5.a)$$

dimana $\{\varphi\}^e$ adalah nilai dari φ pada titik-titik penghubung, sedangkan $[A]$ adalah matrix yang hanya terdiri dari koordinat dan ditentukan oleh bentuk "elemen standard" dan jumlah titik penghubungnya.

Dengan persamaan Euler (1) maka dapatlah dihitung fungsional E untuk setiap elemen standard. Selanjutnya untuk seluruh benda jumlah variasi dari tiap fungsional pada elemen standar dapat dituntut sama dengan nol. Hal ini perlu agar supaya fungsional seluruh benda atau struktur komplex merupakan suatu minimum.

Ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\delta E = \sum \delta E^e = 0 \qquad (5.b)$$

dimana index e = elemen.

Untuk keadaan khusus dimana fungsional E merupakan fungsi kwadratis daripada fungsi variabel $\{\varphi\}$, maka dari persamaan (1), (5.a) dan (5.b) dapatlah digambarkan :

$$[K]\{\varphi\} + \{R\} = 0 \qquad (6.a)$$

$$[K_{ij}] = \sum [k_{ij}]^e \qquad (6.b)$$

$$\{R_i\} = \sum \{R_i\}^e \qquad (6.c)$$

dimana $[K_{ij}]$ dan $\{R_i\}^e$ merupakan matrix yang terdiri dari angka-angka konstan.

$[K]$ = Super Matrix

$\{\varphi\}$ = Matrix Kolom Fungsi variabel

$\{R\}$ = Matrix Kolom Gaya luar dalam arti yang luas.

Persamaan (6.a) , (6.b) , dan (6.c) sudah merupakan persamaan dasar Finite Element Method dalam bentuk umum.

Untuk Ilmu Konstruksi Ringan [6], maka

$[K_{ij}]$ = Stiffness Matrix seluruh struktur

$[k_{ij}]$ = Stiffness Matrix Elemen Standard

$\{R_i\}$ = Matrix Kolom Gaya Luar.

Disini kami dengan sengaja tidak bermaksud menyinggung penggunaan Finite Element Method dalam perhitungan kekuatan rangka, oleh karena soal ini telah kami jelaskan pada pidato pengukuhan kami di ITB pada bulan Maret yang lalu. Untuk mereka yang menaruh minat kami persilahkan membacanya dan memperdalam pada literatur yang tercantum disitu.

Sekarang kami lanjutkan dengan pembahasan persamaan Navier - Stokes yang menggambarkan arus yang viscous.
Persamaan tersebut terdiri dari empat persamaan yang bentuknya sebagai berikut :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (7.a)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (7.b)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (7.c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.d)$$

dimana tiga persamaan pertama merupakan persamaan gaya atau gerakan, sedang persamaan keempat merupakan persamaan kontinuitas [7]

u, v, w = kecepatan pada arah x, y, z.

p = tekanan setempat

ρ = kepadatan

μ = viscositas

t = waktu

X, Y, Z = gaya-gaya massa dalam arah x, y, z.

dimana :

$[A]$ = Matrix yang ditentukan oleh bentuk Elemen Standard

$\{p\}; \{u\}; \{v\}$ = Matrix kolom pada titik-titik penghubung Elemen Standard daripada p, u, dan v.

Jika persamaan (8.a) dikalikan dengan $[A]$ atau A_i dan setelah persamaan (8.b) dimasukan dalam persamaan (8.a), maka dengan integrasi partiel dapatlah dijabarkan persamaan-persamaan sebagai berikut :

$$\int_V \left[A_i X - A_i \frac{\partial [A]}{\partial x}\{p\} - \left(\mu \frac{\partial A_i}{\partial x}\frac{\partial [A]}{\partial x} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial y}\frac{\partial [A]}{\partial y}\right)\{u\}\right] dV$$

$$+ \int_B \mu A_i \frac{\partial u}{\partial n} dF = 0 \qquad (9.a)$$

$$\int_V \left[A_i Y - A_i \frac{\partial [A]}{\partial y}\{p\} - \left(\mu \frac{\partial A_i}{\partial x}\frac{\partial [A]}{\partial x} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial y}\frac{\partial [A]}{\partial y}\{v\}\right)\right] dV$$

$$+ \int_B \mu A_i \frac{\partial v}{\partial n} dF = 0 \qquad (9.b)$$

$$\int_V \left[A_i \left(\frac{\partial [A]}{\partial x}\{u\} + \frac{\partial [A]}{\partial y}\{v\}\right)\right] dV = 0 \qquad (9.c)$$

Setelah mengadakan penyesuaian dengan fungsi variabel-variabel pada titik penghubung dari elemen standard, maka dengan persamaan (6.a) (6.b) dan (6.c) persamaan Navier-Stokes tersebut dapat dihitung dimana untuk elemen-elemen standard dalam hal ini berlaku

$$\left[k_{ij}\right]^e = -\int_{V^e} \mu \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{bmatrix} dV \qquad (10.a)$$

$$A_{11} = A_{22} = \frac{\partial A_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_j}{\partial x} + \frac{\partial A_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_j}{\partial y}$$

$$A_{13} = A_{31} = \frac{1}{\mu} N_i \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} \qquad (10.b)$$

$$A_{23} = A_{32} = \frac{1}{\mu} N_i \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y}$$

$$\left\{R_i\right\}^e = \int_{V^e} N_i \begin{Bmatrix} x \\ y \\ o \end{Bmatrix} dV + \int_{B^e} N_i \mu \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \frac{\partial v}{\partial n} \\ o \end{Bmatrix} dF \qquad (10.c)$$

Dari persamaan (10.a) (10.b) dan (10.c) tanpaklah betapa pentingnya matrix $[A]$, yang sangat ditentukan oleh bentuk elemen standard. Bentuk $[A]$ tersebut sangat menentukan pula konvergensi daripada Finite Element Method.

Untuk mendapatkan konvergensi yang baik, maka pada perbatasan elemen standard, φ dan $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ harus kontinu dan didalam fungsional E pun φ atau $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ selalu harus ada, pula pada limit elemen standard mendekati nol. Ini semuanya sangat dipengaruhi oleh matrix $[A]$.

Salah satu kekuatan Finite Element Method ialah bahwa jika elemen standard untuk suatu persoalan telah dimiliki dengan sifat-sifat konvergensi yang baik, maka elemen standard tersebut dapat dipergunakan terus menerus untuk menyelesaikan berbagai macam bentuk atau konstruksi yang komplex dari pada persoalan fisika atau engineering yang sama. Juga dalam satu idealisasi benda atau konstruksi komplex dapat dipergunakan beberapa bentuk elemen standard yang disesuaikan dengan bentuk dan syarat-syarat batas benda tersebut tanpa mengganggu prosedur perhitungan.

Prosedur untuk perhitungan adalah :

1. Penentuan "Gaya Luar" dalam arti yang luas dan syarat-syarat batas.

2. Penentuan idealisasi benda atau struktur komplex, dan topologi.

3. Implementasi berbagai elemen-elemen standard sesuai dengan kebutuhan.

4. Membentuk super matrix $[K_{ij}]$ dari seluruh struktur dan mengadakan inversinya $[K_{ij}]^{-1}$

5. Menghitung fungsi variabel $\{\varphi\}$ pada tiap titik penghubung dari seluruh idealisasi benda atau struktur komplex tersebut.

6. Menghitung fungsi variabel $\{\varphi\}^e$ didalam tiap elemen standard.

7. Menginterpretasi fungsi-fungsi variabel $\{\varphi_i\}$ secara fisika, mekanika, termodinamik dan engineering.

Prosedur tersebut diatas berlaku untuk segala perhitungan seperti kekuatan rangka, getaran rangka, arus panas, arus udara, arus cairan dan semua persoalan dalam engineering dan fisika yang dapat dikembalikan kepada type fungsional E.

Untuk dapat melaksanakan prosedur tersebut dibutuhkan suatu komputer dengan core (inti) dan storage yang besar untuk menyimpan data-data dan program-program seperti :

* Program Organisasi / Topologi.
* Program pembentukan masing-masing elemen standard dan super matrix $[K]$.
* Perhitungan matrix operation secara besar-besaran.
* Menyimpan data-data dan memberi input untuk graphic display dan printing.

Disiplin Finite Element Method didunia engineering kini semakin penting peranannya. Disiplin ini erat hubungannya dengan konstruksi ringan [6] dan banyak diterapkan kepada applied science, proses pembangunan suatu masyarakat, suatu sistim pertahanan, suatu sistim perekonomian dan lain-lain.

Banyak sekali investasi yang telah dilakukan untuk mengembangkan Finite Element Method. Demikian juga dalam pengembangan peralatannya (misalnya computer aided design dan sebagainya) dan dalam mendapatkan pengalaman dan keterampilan pada penggunaan teknologi tersebut.
Berbagai disiplin Ilmu Pasti banyak dipergunakan dalam pengembangan teknologi diatas. Misalnya untuk mendapatkan matrix suatu elemen standard, dipergunakan segala sarana Ilmu Pasti analitis baik klasik maupun modern. Sedangkan untuk operasi dengan super matrix $[K_{ij}]$ yang besarnya sampai mendekati 40.000 x 40.000 atau lebih dipergunakan segala metode dalam bidang Numerik dan Informatik. Tetapi walaupun demikian semuanya ini tergantung kepada pengembangan teknologi dari masyarakat sekitarnya serta mempunyai pengaruh timbal balik dengan tingkat pembangunan suatu negara.

Akhirnya bersama ini kami serukan kepada Saudara-saudara untuk mengembangkan dan membina Ilmu Pasti dibumi Indonesia untuk pembangunan dari kita untuk kita.

Atas perhatian para hadirin kami mengucapkan diperbanyak terima kasih.

ooOOOOOOOOOOOOoo

BIDANG BIBLIOGRAFI
DAN DEPOSIT

LITERATUR

[1] Southwell, R.V.

"Relaxation methods in theoritical physics"
Oxford Univ. Press 1946.

[2] Forsythe G.E. and Wasow, W.R.

"Finite difference methods for partial differential equation".
Y. Wiley & Sons, 1960.

[3] Weinstock, R.

"Calculus of Variations"
MC. Graw - Hill, 1952.

[4] Berg P.N.

"Calculus of Variations" in Handbook of Engineering Mechanics Chapter 16, ed
W. Flügge, MC. Graw Hill 1962.

[5] Washizu, K.

"Variational Methods in Elasticity and plasticity,
Pergamon Press. 1968.

[6] Habibie, B.J.

"Ilmu Konstruksi Ringan"

Pidato Pengukuhan sebagai Guru Besar Luar Biasa dalam mata pelajaran Ilmu Konstruksi Pesawat Terbang di I.T.B. 26.3.1977.

[7] Schichting / Truc'enbrodt

"Aerodynamik des Fluges"

Erste Band, Springer - Verlag.
Berlin / Heidelberg / New York 1967

[8] Doctors, L.Y.

An Application of the finite element technique for boundary value problems of potential flaw.
Int. Y. Num - Meth. Eng, 2
243 - 52, 1970.

[9] Oden, Y.T.

A general theory of finite elements :

I. Topological Consideration pp. 205 - 21;

II. Applications pp. 247 - 60;
Int. Y. Num. Meth. Eng. 1, 1969.

[10] Zurmühl, R

" Praktische Mathematik"
Springer - Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg.

BIDANG BIBLIOGRAFI
DAN DEPOSIT

PERPUSTAKAAN NASIONAL