GRAFISCHE VOORSTELLINGEN

VOOR HET MIDDELBAAR ONDERWIJS

DOOR

L. C. VOGEL



TA AN NASIONAL RI
V-
14

IJ J. B. WOLTERS
RON , DEN HAAG, BATAVIA, 1933

V - 148

GRAFISCHE VOORSTELLINGEN

VOOR HET MIDDELBAAR ONDERWIJS

DOOR

L. C. VOGEL

LEERAAR AAN DE CHR. A. M. S. AFD. B
EN DE CHR. KWEEKSCHOOL TE BATAVIA

f 1,25

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.

BIJ J. B. WOLTERS' UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ N.V.
GRONINGEN — DEN HAAG — BATAVIA — 1933
Gang Scott 5

KON. BAT. GENOOTSCHAP VAN K. EN W.

BOEKDRUKKERIJ VAN J. B. WOLTERS

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.
Tanggal : 28-6-2016
Nomor Induk : 245/pp-Musium/16
BIB - ID : 0010-36509060
ITEM - ID : 060911809G
Asal : Museum Pusat

VOORBERICHT.

Voor het Onderwijzersexamen in Ned. Indië wordt eenige kennis verlangd vân grafische voorstellingen. De stof omvat de lineaire en de kwadratische functie.

Voor 't eindexamen van de B-afdeelingen der H. B. S. en A. M. S. wordt bovendien geeischt de gebroken lineaire functie.

In hoofdstuk VI zijn cirkel en ellips behandeld, terwijl in de herhaling vraagstukken ter uitbreiding te vinden zijn. 't Hangt van omstandigheden af, hoe ver men wil uitgaan boven de programma's.

Verschillende verbeteringen en vraagstukken zijn mij aan de hand gedaan door den heer E. H. de Haan, Directeur der Chr. Kweekschool te Batavia, waarvoor ik hem zeer erkentelijk ben.

Op- en aanmerkingen zullen gaarne overwogen worden.

BATAVIA, Juli 1932. L. C. VOGEL.

INHOUD.

Hfdst.		Blz.
I.	Inleiding	5
II.	Grondbegrippen	13
III.	De lineaire functie	19
IV.	De tweedegraads functie	37
V.	De gebroken lineaire functie	54
VI.	Eenige andere functies	68
	§ 46. Herhaling en uitbreiding	82

Voor de Kweekschool moeten behandeld worden de hoofdstukken I—IV.
Voor de H. B. S. en de A. M. S. bovendien hoofdstuk V.

HOOFDSTUK I.

INLEIDING.

§ 1. Wanneer 't aantal abonné's van een dagblad in enkele jaren snel toeneemt, zal de administratie uit een oogpunt

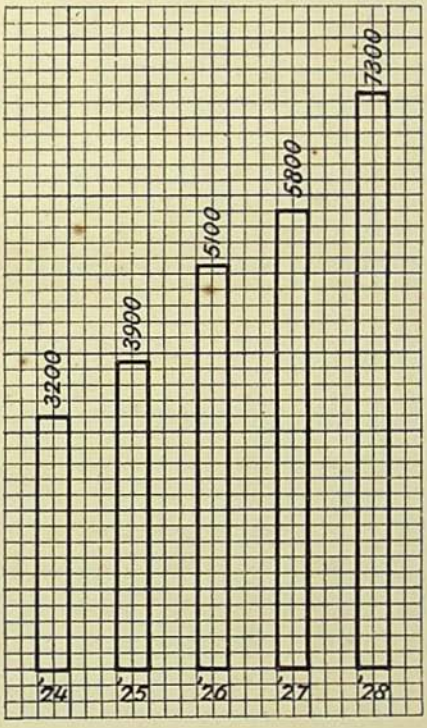

Fig. 1.

van reclame de aantallen abonné's voor elk van die jaren publiceeren. De getallen zonder meer maken echter niet de gewenschte indruk. Een **grafische voorstelling** spreekt duidelijker taal.

Stel b.v. 't aantal abonné's, bedroeg

eind	1924 (afgerond in honderdtallen)	3200
„	1925	3900
„	1926	5100
„	1927	5800
„	1928	7300

dan kan men hiervan de grafische voorstelling geven, afgebeeld in fig. 1.

't Is duidelijk, dat aan deze figuur meer aandacht gewijd zal worden dan aan bovenstaande getallen en vooral, dat zij beter in 't geheugen bewaard zal blijven.

§ 2. De oppervlakte der bezittingen, enz. van koloniale mogendheden kan men opgeven in een tabel. Een grafische voorstelling (zie hiervoor b.v. de Wereldkaart van Noordhoff en Zeeman) geeft echter beter overzicht. Gebruikt men vierkanten, dan dient men in 't oog te houden, dat de oppervlakte van een vierkant evenredig is met 't *kwadraat* van de zijde.

§ 3. De temperatuur van een zieke kan men opgeven in een tabel. Overzichtelijker is echter ook hier weer een grafische



Fig. 2.

voorstelling, die nu echter als volgt ingericht wordt: men teekent twee onderling loodrechte lijnen; op de verticale zet men de graden af (van 36° tot 41° is voldoende), op de horizontale de uren (of dagen). Is de temperatuur om 12 uur b.v. 38,4, dan zet men op de verticale lijn van de 12 een punt, op één horizontale lijn met 38,4 gelegen. De temperatuurpunten voor opeenvolgende tijden worden door rechte streepjes verbonden. Er ontstaat dan een lijn, als fig. 2 weergeeft.

In alle ziekenhuizen worden deze temperatuurcurven geteekend en vaak gebruikt bij 't stellen der diagnose.

§ 4. *De Wet van Boyle.*

Wil men deze grafisch voorstellen, dan gebruikt men weer twee onderling loodrechte lijnen. Op de horizontale zet men de volumina uit, b.v. in dm^3, op de verticale de spanningen, b.v. in atmospheren. Heeft men 1 dm^3 afgesloten massa gas

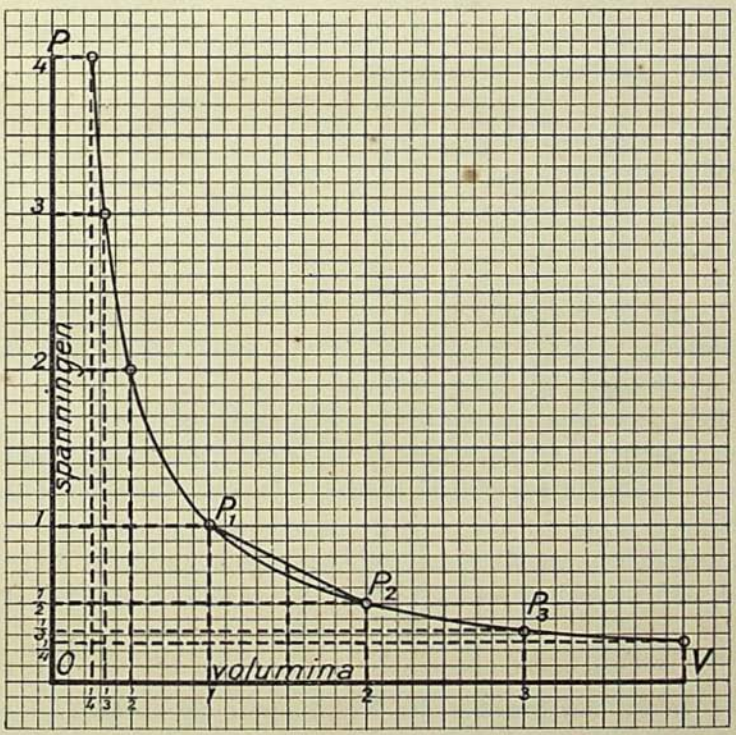

Fig. 3.

van 1 atm., dan geeft 't punt P_1 de toestand weer van die gasmassa bij zekere temperatuur. 't Punt P_2 geeft de toestand weer van diezelfde (ideale) gasmassa bij dezelfde temperatuur; 't volume is nu 2 dm^3, de spanning dus $\frac{1}{2}$ atm. De beteekenis der punten P_3 enz. is nu duidelijk. P_1, P_2, enz. worden nu niet door een rechte verbonden. Dit zou onjuist zijn. Bij 't midden der rechte P_1P_2 b.v. zou behooren een volume van 1,5 dm^3 en een spanning van $\frac{3}{4}$ atm.; de spanning, behoorende bij een volume van 1,5 dm^3 is echter $\frac{2}{3}$ atm. Men zou voor ieder volume 't daarmee correspondeerende punt moeten teekenen. Dit is ondoenlijk en daarom volstaat men met uit de hand een voldoend aantal punten te verbinden door een z.g. vloeiende kromme, d. i. een kromme zonder knikken, enz.

Het is niet noodig de eenheden voor volume en spanning gelijk te nemen. In den regel doet men dit wel om vergissingen bij 't teekenen te voorkomen. De kromme is echter in beide gevallen van dezelfde soort. Zij draagt den naam van orthogonale hyperbool.

§ 5. *Grafieken van den treinenloop.*

Wij ontwerpen aan de hand van een dienstregeling der Nederlandsche Spoorwegen een grafiek van den treinenloop tusschen Amsterdam C.S. en Utrecht C.S. en wel van 6 u. (v.m.) tot 18 u. (= 6 u. n.m.).[1])

Langs de verticale lijn links zetten wij van bovenaf de afstanden in km tusschen de verschillende stations af; langs de horizontale lijn naar rechts de uren.

Een trein vertrekt om 6.35 van A'dam C.S., komt ongeveer een kwartier later te A'dam W.P., stopt daar eenige minuten en vertrekt om 6.53 in de richting Utrecht. De hellende lijn tusschen beide stations stelt de in beweging zijnde trein voor (de snelheid is gemakshalve eenparig genomen). Staat de trein stil, dan verandert alleen de tijd: 't horizontale streepje stelt

---

[1]) In de dienstregeling der Ned.-Indische Spoorwegen worden geen afstanden aangegeven, zoodat 't niet mogelijk is daaruit een grafiek van een Indische lijn af te leiden.

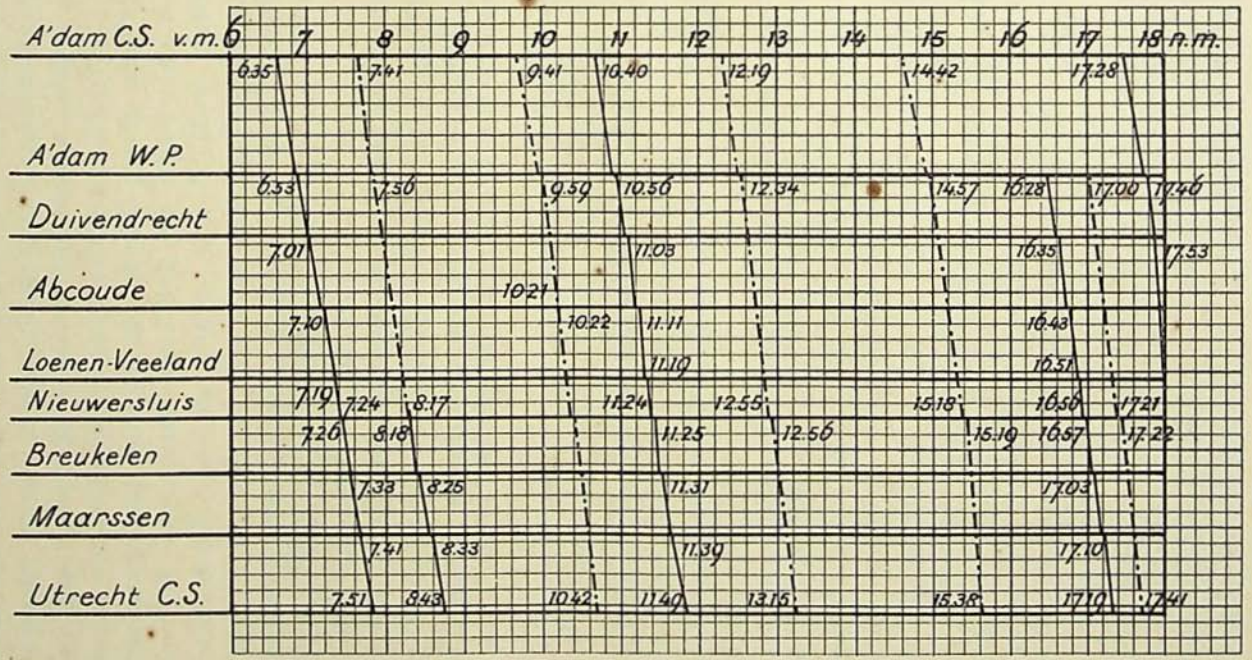
A'dam C.S. v.m. 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 n.m.
A'dam W.P.
Duivendrecht
Abcoude
Loenen-Vreeland
Nieuwersluis
Breukelen
Maarssen
Utrecht C.S.
6.35 7.41 9.41 10.40 12.19 14.42 17.28
6.33 7.36 9.59 10.56 12.34 14.57 16.28 17.00 17.46
7.01 11.03 16.35 17.53
10.21
7.10 10.22 11.11 16.43
11.19 16.51
7.19 7.24 8.17 11.24 12.55 15.18 16.56 17.21
7.26 8.18 11.25 12.56 15.19 16.57 17.22
7.33 8.25 11.31 17.03
7.41 8.33 11.39 17.10
7.51 8.43 10.42 11.40 13.15 15.38 17.10 17.41

Fig. 4.

dus de stilstaande trein voor. De grafiek is nu verder gemakkelijk te begrijpen.

De sneltreinen zijn in —·—·— geteekend. Hun grafieken zijn steiler dan van z.g. stoptreinen (waarom?). Tusschen A'dam C.S. en W.P. rijdt de trein door de stad en langs havens; de snelheid kan dus niet groot zijn. Op een veel langer traject door polderland als b.v. A'dam W.P.—Nieuwersluis kan een veel grootere snelheid ontwikkeld worden. (Zie b.v. de trein, die te 14.42 van A'dam C.S. vertrekt.

Teekent men de treinen in omgekeerde richting, dan hellen de lijnen naar rechts (waarom?).

Op de aangeduide wijze worden de dienstregelingen ontworpen en daarna in tabellen overgebracht. Men kan nu gemakkelijk zorgen voor goede aansluitingen op de hoofdstations, terwijl men op lijnen met enkel spoor 't passeeren van treinen in tegengestelde richting op de daarvoor ingerichte stations kan regelen.

Op groote stations, b.v. te Weltevreden, hangen soms enkele grafieken. Deze maken een zeer bonte indruk, daar de goederentreinen en losse machines er eveneens op voorkomen.

§ 6. Er is een groot onderscheid tusschen de **grafieken** in de §§ 1—3 en die in § 4.

Men kan voor de kromme in fig. 3 nauwkeurig aangeven hoe zij verloopen zal. Bij een bepaald volumen behoort een bepaald spanning, enz. 't verband tusschen beide grootheden wordt (hier) mathematisch uitgedrukt door de formule $pv = 1$ (p = spanning, v = volume).

Voor de kromme in fig. 2 geldt dit niet. Men kan b.v. om 8 uur onmogelijk nauwkeurig voorspellen hoe hoog de temperatuur om 12 uur zal zijn. Dat men *ongeveer* kan aangeven welke temperatuur men, in verband met de reeds gestelde diagnose, mag verwachten, doet niet ter zake. *Zeker* weet men 't ten slotte niet. Door allerlei factoren kan de werkelijke temperatuur aanmerkelijk afwijken van de verwachte.

Een kromme als in fig. 3 is een **wiskundige** kromme. Zij ontstaat steeds als 't verband tusschen de beide grootheden voor de grafiek uitgedrukt kan worden door een wiskundige formule.

KON. BAT. GENOOTSCHAP VAN K. EN W.

Een kromme als in fig. 2 noemt men **empirische** kromme. Zij ontstaat steeds als men 't resultaat van een reeks waarnemingen wil vastleggen in een grafiek.

Wij gaan in 't volgende ons uitsluitend bezig houden met de wiskundige krommen.

Opgaven.

1. Ontwerp een grafiek van de maximum spanning van waterdamp in cm kwik tusschen 0° en 100° C.

Temp.	Spanning	T.	Sp.	T.	Sp.	T.	Sp.
0°	0,46	30°	3,15	60°	14,88	90°	52,54
5°	0,65	35°	4,18	65°	18,69	95°	63,38
10°	0,92	40°	5,49	70°	23,31	100°	76
15°	1,27	45°	7,14	75°	28,85		
20°	1,74	50°	9,20	80°	35,46		
25°	2,35	55°	11,75	85°	43,30		

De temperatuur langs een horizontale lijn (eenheid 1 mm), de spanningen langs een verticale lijn (eenheid 2 mm). De spanningen afronden.

2. In Oct. 1929 bedroeg de gemiddelde temperatuur (in graden Celsius) te De Bilt:

op 1 Oct.	13	op 9 Oct.	9,5	op 17 Oct.	12,5	op 25 Oct.	8
„ 2 „	14	„ 10 „	10,5	„ 18 „	10	„ 26 „	6,5
„ 3 „	12	„ 11 „	12,5	„ 19 „	9	„ 27 „	5
„ 4 „	11,5	„ 12 „	12	„ 20 „	6	„ 28 „	5,5
„ 5 „	11	„ 13 „	13	„ 21 „	7	„ 29 „	9,5
„ 6 „	11,5	„ 14 „	13,5	„ 22 „	6,5	„ 30 „	9
„ 7 „	11	„ 15 „	13	„ 23 „	9,5	„ 31 „	7,5
„ 8 „	10	„ 16 „	13	„ 24 „	12		

De dagen langs een horizontale lijn (eenheid 3 mm), de temperaturen langs een verticale lijn (eenheid 1 cm). Alleen 't bedrag afzetten, waarmee een temperatuur 5° C. overtreft.

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.

3. Van 100.000 personen, gelijktijdig geboren, zijn nog in leven na

1 jaar	76.614	45 jaar	53.037
2 „	72.631	50 „	49.002
5 „	69.194	55 „	44.133
10 „	67.369	60 „	38.308
15 „	66.462	65 „	31.294
20 „	65.049	70 „	23.195
25 „	63.168	75 „	14.730
30 „	61.274	90 „	492
35 „	59.111	100 „	2
40 „	56.402		

De jaren langs een horizontale lijn (voor 1 jr. 2 mm nemen); de aantallen langs een verticale lijn (voor 1000 personen 1 dubbele mm nemen).

4. Een baby van normaal gewicht weegt bij de geboorte 3,1 kg; na

1 maand	4 kg	6 maanden	7 kg	11 maanden	8,7 kg
2 maanden	4,7 „	7 „	7,5 „	12 „	8,9 „
3 „	5,3 „	8 „	7,8 „		
4 „	5,9 „	9 „	8,2 „		
5 „	6,5 „	10 „	8,5 „		

Voor 1 maand nemen 1 cm (horizontaal); voor 1 kg 1 cm (verticaal).

HOOFDSTUK II.

GRONDBEGRIPPEN.

§ 7. **Plaatsbepaling van een punt in 't platte vlak.**

Een punt in een plat vlak is bepaald o. a. door zijn afstanden tot twee gegeven elkaar snijdende lijnen.

Voorbeeld. Een punt op den vloer van 't schoollokaal is bepaald, indien we weten, dat 't 2 m van den voorwand en 3 m van den linkerzijwand ligt.

De snijdende lijnen noemt men **assen.** Men neemt ze bij voorkeur onderling loodrecht. De assen vormen te zamen een **assenstelsel** of **assenkruis.** Snijden de assen elkaar onder een scheeven hoek, dan heeft men een scheefhoekig (assen)-stelsel, staan ze loodrecht op elkaar, dan gebruikt men een rechthoekig stelsel.

In 't volgende worden uitsluitend **rechthoekige** stelsels gebruikt.

't Snijpunt der assen heet **oorsprong** (van coördinaten), 't punt wordt steeds aangeduid door **O.** De **horizontale** as noemt men **OX of X-as,** de **verticale OY of Y-as.**

In fig. 5 zijn de coördinaten van P resp. PR en PQ. Uit de fig. blijkt direct: PR = QO, PQ = RO. Men kan dus ook OQ en OR als coördinaten beschouwen. Gewoonlijk neemt men OQ en QP als coördinaten. De gebroken lijn PQO heet **coördinatentrek.**

De coördinaten worden gemeten met een zekere maat. Meet men in fig. 5 met een maat van 1 cm, dan zijn de coördinaten 3 en 4, meet men met de dubbele centimeter dan zijn de coördinaten 1,5 en 2, enz.

Coördinaten zijn *getallen.*

De coördinaat OQ, gemeten met zijn bijbehoorende maat, heet de **abscis** of x van P, de coördinaat QP noemt men de

ordinaat of y van P. Men noemt altijd eerst de x, dan de y van een punt. Een punt P wordt aangeduid als volgt: P(x; y). In fig. 5 dus P(3; 4) (maat 1 cm).

Vraag. Wat zijn de coördinaten van Q, van R, van O?

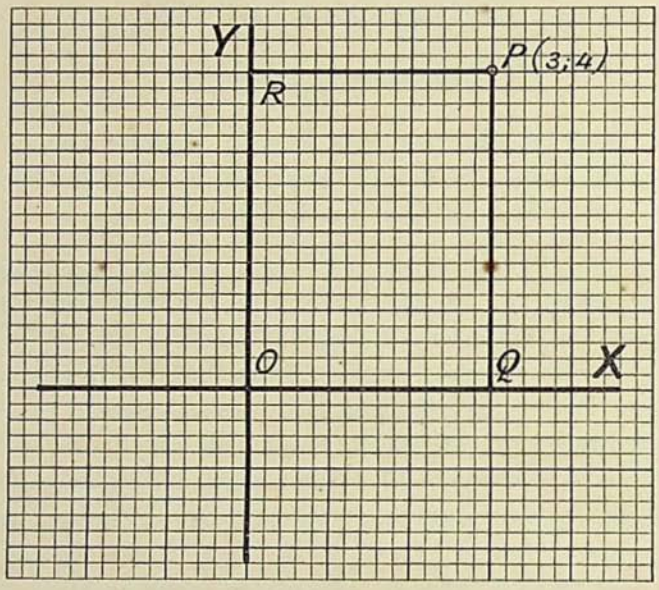

Fig. 5.

§ 8. *Uitbreiding van 't voorgaande.*

In § 7 zijn alleen punten beschouwd in hoek XOY. Deze punten bepalen hun coördinaten en zijn omgekeerd door hun coördinaten bepaald (de toevoeging: „bij gegeven maat" wordt verder weggelaten).

Opgave. Construeer de punten S(1; 2), T(3; 0), U(0; $2\frac{1}{2}$).

Verlengt men echter de assen door O, dan bepaalt een punt nog wel zijn coördinaten, maar omgekeerd bepalen de coördinaten niet meer één punt.

In fig. 6 b.v. hebben de punten P, Q, R en S alle een abscis 3 en een ordinaat 2 (maten in cm). Vraag ik dus naar 't punt (3; 2), dan kan 't antwoord luiden: P, Q, R of S.

Om deze onbepaaldheid op te heffen, voert men teekens in: een abscis **rechts** van O noemt men **positief**, een abscis **links**

van O **negatief**; een ordinaat **boven** de X-as is **positief**, een **ordinaat** beneden de X-as is **negatief.**

De punten P, Q, R en S in fig. 6 worden nu aangeduid als volgt: P(3; 2; Q(—3; 2); R(—3; —2); S(3; —2).

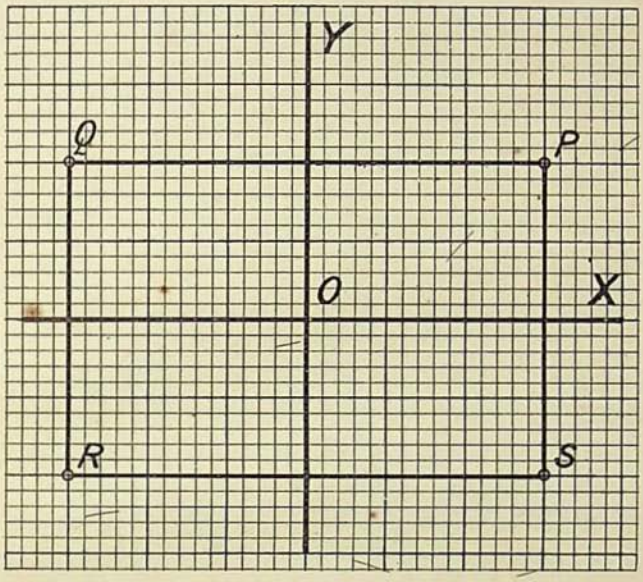

Fig. 6.

De assen verdeelen 't platte vlak in 4 deelen, die kwadranten heeten, XOY is 't eerste kwadrant, YOX' 't tweede, X'OY' 't derde, Y'OX 't vierde kwadrant (men telt dus in tegenwijzerrichting). Zie fig. 7.

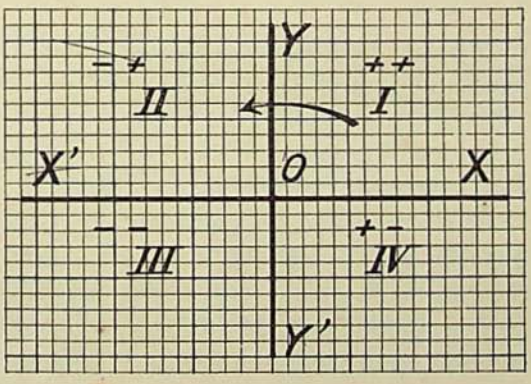

Fig. 7.

De volgende tabel geeft een overzicht der teekens:

	x	y
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

Opgave. Teeken de volgende punten: A(−1; 2); B(−3; −4); C(2; 0); D(2; −2); E(0; −5).

Opmerkingen.

1. In een scheefhoekig stelsel trekt men PQ en PR bij voorkeur niet $\perp$ OX en $\perp$ OY, maar // OY en // OX. Men gebruikt

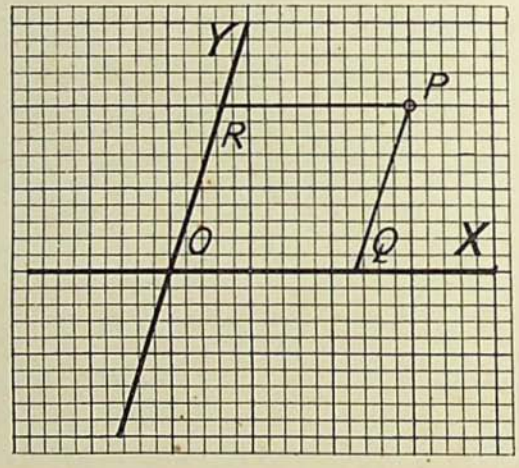

Fig. 8.

dan evenwijdige coördinaten. Rechthoekige coördinaten (in 't voorgaande gebruikt) zijn ook evenwijdige coördinaten (ga na waarom).

2. Evenwijdige coördinaten (rechth. en scheefh.) zijn ingevoerd door Descartes (Cartesius) en Fermat. Naar den eerste heeten evenwijdige coördinaten. Cartesische of Cartesiaansche coördinaten.
3. Plaatsbepaling in 't platte vlak is ook mogelijk door aan te geven den afstand van P tot O en den hoek, dien OP met een vaste lijn (poolas) maakt. OP heet radius vector (aangeduid door r) of voerstraal, $\angle$ XOP heet anomalie

(aangeduid door φ) of afwijking; O heet in dit geval de pool.
r en φ heeten samen poolcoördinaten.
r wordt steeds positief gerekend, φ vanaf OX in tegenwijzerrichting doorgeteld tot 360° (dus juist als in de goniometrie).

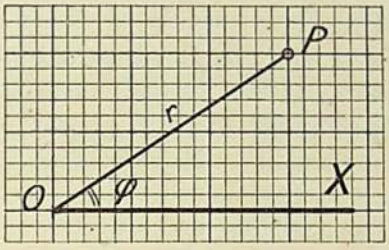

Fig. 9.

4. Voor plaatsbepaling in de ruimte heeft men noodig b.v. 3 vlakken, door één punt gaande. Liggen de beschouwde punten op een bol, dan kan men ze bepalen met behulp van meridianen en parallelcirkels (nulmeridiaan en nulparallel). Denk aan de plaatsbepaling op aarde.

§ 9. **Functies.**

De tweeterm $3x + 5$ neemt voor $x = -4$ de waarde -7 aan, voor $x = 0$ de waarde 5, voor $x = 3$ de waarde 14.

De drieterm $9x^2 - 2x - 71$ wordt voor $x = 2$ gelijk aan -39, voor $x = 3$ daarentegen 4.

Wanneer men in 2^x voor x de waarde -3 substitueert, wordt de macht $\frac{1}{8}$, voor $x = 0$ echter 1 en voor $x = 5$ neemt zij de waarde 32 aan.

De waarde van $3x + 5$; $9x^2 - 2x - 71$ en 2^x hangt dus af van de waarde voor x. Men zegt nu, dat genoemde vormen **functies** zijn van x.

Gemakshalve duidt men een functie in den regel aan door y. Dus schrijft men voor $3x + 5$, enz.

$y = 3x + 5$;
$y = 9x^2 - 2x - 71$;
$y = 2x$.

(Let er op, dat y slechts een andere naam of aanduiding is der functie, dus verder niets van de functie bepaalt).

Door $y = 3x + 5$ wordt een **functionaal verband** uitgedrukt tusschen x en y.

Opmerking. Van een functie zonder meer te spreken, heeft (in de lagere wiskunde tenminste) geen zin.

In $2x + 4y - 7 = 0$ hangt de waarde van y eveneens af van die van x. 't Is dus ook een functie van x. In dezen vorm is 't echter voor ons lastiger een goed denkbeeld van de functie te vormen. We drukken dus y uit in x en vinden $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4}$.

Door $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4}$ is de functie **expliciet** gegeven, door $2x + 4y - 7 = 0$ is dezelfde functie **impliciet** gegeven.

't Is niet altijd mogelijk en vaak omslachtig een impliciet gegeven functie door haar explicieten vorm te vervangen.

B.v. $2y^7 + 3xy^4 + 2x^2y^3 - 5x + 4y = 0$. (Een zevendemachtsvergelijking — hier in y — is in 't algemeen niet op te lossen).

Lost men $x^2 - 13x - 4y^2 + 6y = 0$ op, dan krijgt men $4y = 3 \pm \sqrt{4x^2 - 52x + 9}$.

Wanneer y een functie is van x, kan men natuurlijk ook x beschouwen als een functie van y. Uit $y = 3x + 5$ volgt $x = \frac{1}{3}y - 1\frac{2}{3}$.

In den regel vat men echter y op als functie van x, of anders gezegd:

men beschouwt x als **onafhankelijk veranderlijke** (of variable); dan is y de **afhankelijk veranderlijke** (variable).

Vat men x en y op als coördinaten, dan is 't mogelijk (theoretisch altijd, practisch in bijzondere gevallen alleen) een functie graphisch voor te stellen.

HOOFDSTUK III.

DE LINEAIRE FUNCTIE.

§ 10. **De eerste-graads of lineaire functie.**

In $y = ax + b (a \neq 0)$ treedt x (de onafhankelijk veranderlijke) slechts tot de eerste macht op, de vorm $y = ax + b$ of $ax - y + b = 0$ is van den eersten graad t. o. v. x en y (a en b zijn gegeven getallen, hebben dus geen invloed op den graad van den vorm).

a. We beschouwen eerst 't geval: $a \neq 0$, $b = 0$ en stellen dus grafisch voor $y = ax$.

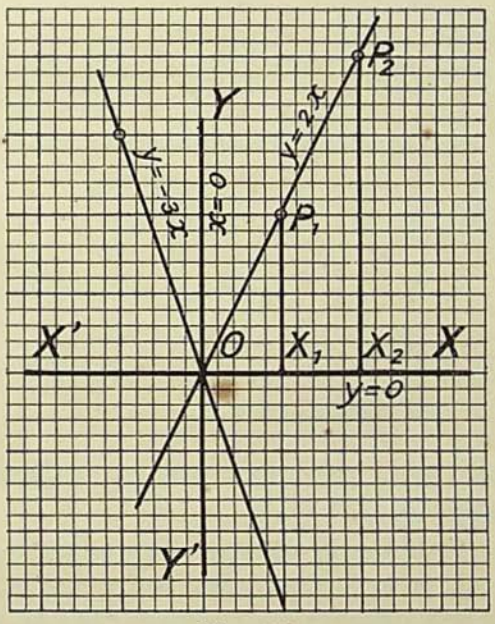

Fig. 10.
Maat = 5 dubbele mm.

Als voorbeeld nemen we $y = 2x$.

Met $x = 0$ correspondeert $y = 0$;
„ $x = 1$ „ $y = 2$;
„ $x = 2$ „ $y = 4$; enz.

De bijbehoorende punten zijn: O, P_1, P_2, enz. Wij toonen nu aan, dat deze punten op één rechte liggen:

$OX_1 : X_1P_1 = 1 : 2$;
$OX_2 : X_2P_2 = 1 : 2$;
dus: $OX_1 : X_1P_1 = OX_2 : X_2P_2$.

Bovendien is $\angle OX_1P_1 = 90° = \angle OX_2P_2$.

De $\triangle\triangle$ OX_1P_1 en OX_2P_2 zijn dus $\sim$ (Waarom?).

Hieruit volgt: $\angle P_1OX_1 = \angle P_2OX_2$, m. a. w. O_1, P_1 en P_2 liggen op één rechte. Dit geldt voor alle punten P, m. a. w. de grafiek der functie $y = 2x$ is een rechte door O, die door 't eerste en derde kwadrant gaat (dit laatste blijkt door aan x negatieve waarden toe te kennen).

De grafiek van $y = -3x$ blijkt te zijn een rechte door O, gaande door 't tweede en vierde kwadrant (ga dit na!).

Samenvattend kunnen we zeggen:

de grafiek van $y = ax$ (a eindig en $\neq 0$) is een *rechte*, gaande door O.

't Getal a heet de **richtingscoëfficient** der grafiek (afgekort tot **r.c.**).

Vraag. Wat zijn de r.c. van de bissectrices der kwadranten?

Opgaven. Teeken de grafieken der volgende functies: $y = \frac{1}{2}x$; $y = -4x$.

(Niet meer dan 2 punten voor elke grafiek teekenen, maar deze zoo gunstig mogelijk kiezen).

Opmerking. De grafiek van $y = ax$ is *on*afhankelijk van de gekozen eenheid (cm, dubbele cm, enz.).

b. Is $a = 0$ en $b = 0$, dan is y voor iedere waarde van x gelijk aan nul, m. a. w. de grafiek van $y = 0$ is de **x-as.**

c. Laat men a steeds grooter worden (van 0 af, dus positief), dan komt de lijn steeds steiler te staan, nadert meer en meer tot de Y-as. Voor $a = \infty$ ($b = 0$) gaat de grafiek nu over in de Y-as (dit kan hier niet nader uiteengezet worden).

d. We gaan nu behandelen: $y = ax + b$ (a en b beide eindig en $\neq 0$) en nemen als voorbeeld

$$y = 2x + 3.$$

Vervangen we $2x$ door y', dan gaat

$$y = 2x + 3 \text{ over in:}$$

$$\begin{cases} y = y' + 3. \\ y' = 2x. \end{cases}$$

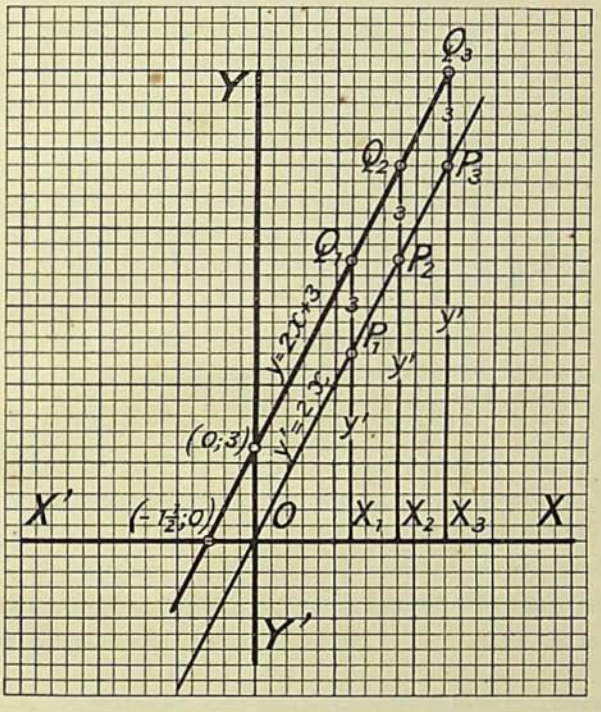

Fig. 11.
Maat = 2 dubbele mm.

$y' = 2x$ wordt grafisch voorgesteld door een rechte, gaande door O. Voor de ordinaten y moeten we de ordinaten y' langer maken en wel 3-maal de gekozen maat.

Met X_1 correspondeert nu Q_1, met X_2 't punt Q_2, enz.

Men ziet gemakkelijk in (of toont planimetrisch eenvoudig aan), dat de meetkundige plaats der punten Q is een rechte, evenwijdig aan OP_1P_2. Men kan zich dus de rechte OP_1P_2 opgeschoven denken in de richting der Y-as, over een afstand 3.

Wil men $y = 2x - 4$ teekenen, dan construeert men eerst $y = 2x$ en denkt zich daarna deze lijn evenwijdig aan de Y-as verschoven over een afstand 4, maar nu naar beneden.

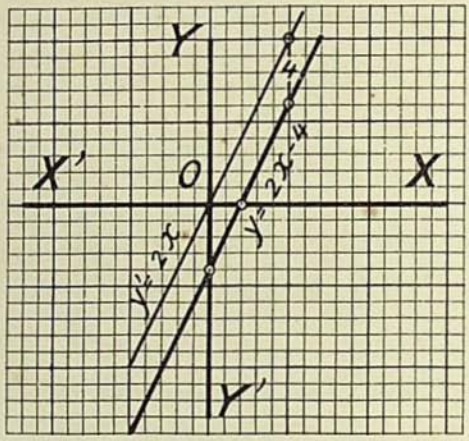

Fig. 12.
Maat = 1 dubbele mm.

't Zal nu duidelijk zijn, dat de grafiek van $y = ax + b$ (a en b eindig en beide $\neq 0$) gevonden wordt als volgt:

Men construeert eerst de lijn $y' = ax$, daarna verschuift men deze lijn evenwijdig aan de Y-as, wanneer $b > 0$ is, in positieven zin (d. i. naar boven), als $b < 0$ is, in negatieven zin (naar beneden).

Opgaven. Teeken de grafieken der functies $y = -x + 4$; $y = 2x - 3$; $x + y = 2$; $x - y - 5 = 0$.

e. Is $a = 0$ en $b \neq 0$, dan is de grafiek van $y = ax + b$ een rechte, evenwijdig aan de X-as. (Ga dit na!).

f. Wanneer $a = \infty$ en b eindig, dan vervangt men $y = ax + b$ door $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$. 't Rechterlid wordt voor $a = \infty$ gelijk aan nul, de vergelijking gaat dus over in: $x = 0$; de grafiek is dus de Y-as.

Is b ook oneindig groot, maar de verhouding $\frac{b}{a}$ eindig, dan gaat de vergelijking over in $x = -\frac{b}{a} = c$. De grafiek wordt

dan een rechte, evenwijdig aan de Y-as. (Een nadere uiteenzetting moet hier achterwege blijven).

§ 11. **Andere methode voor 't construeeren der grafiek van de lineaire functie.**

In de voorgaande § is bedoelde grafiek — een rechte lijn — bepaald door zijn **richting** en **één punt.** (Voor $y = 2x + 3$ wordt de richting bepaald door die van $y' = 2x$, terwijl 't bedoelde punt kan zijn 't punt (0; 3). Ga dit na!).

Men kan een rechte echter óók bepalen door **twee punten.** 't Is 't eenvoudigst hiervoor te nemen de snijpunten met de assen. Voor 't snijpunt van $y = 2x + 3$ met de Y-as is $x = 0$, dus volgt uit $y = 2 \times 0 + 3$, dat $y = 3$. We vinden dus 't punt (0; 3). 't Snijpunt met de X-as wordt bepaald door $y = 0$; $0 = 2x + 3$, dus $x = -1\frac{1}{2}$. 't Is dus 't punt $(-1\frac{1}{2}; 0)$.

Opmerking. Houd steeds dit in gedachten: *de grafiek van* $y = 2x + 3$ *is* **die verzameling van punten,** *waarvan de coördinaten* (de x en de y) *steeds gebonden zijn door* **de betrekking** $\mathbf{y = 2x + 3}$.

Opgaven. Teeken op de laatste manier: $y = 3x + 6$; $y = 2x - 8$; $2x + 3y + 5 = 0$.

Opmerking. De laatste manier is verre te verkiezen boven de eerste. Pas haar dus steeds toe.

§ 12. *Andere vorm voor de vergelijking eener rechte lijn.*

Zij $P(x_1; y_1)$ een willekeurig punt der rechte, die van de X-as een stuk 5 en van de Y-as een stuk 3 afsnijdt. Uit de gelijkvormige driehoeken BPR en PAQ leidt men af:

$$\text{BR} : \text{RP} = \text{PQ} : \text{QA}.$$
$$(3 - y_1) : x_1 = y_1 : (5 - x_1).$$
$$15 - 3x_1 - 5y_1 + x_1y_1 = x_1y_1.$$
$$3x_1 + 5y_1 = 15.$$
$$\frac{x_1}{5} + \frac{y_1}{3} = 1.$$

Daar P willekeurig gekozen is, geldt deze betrekking voor iedere x en y, m. a. w. de vergelijking der lijn is:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1.$$

Merk op, dat x tot noemer heeft 't stuk van de X-as afgesneden en y tot noemer 't stuk, dat de rechte van de Y-as afsnijdt.

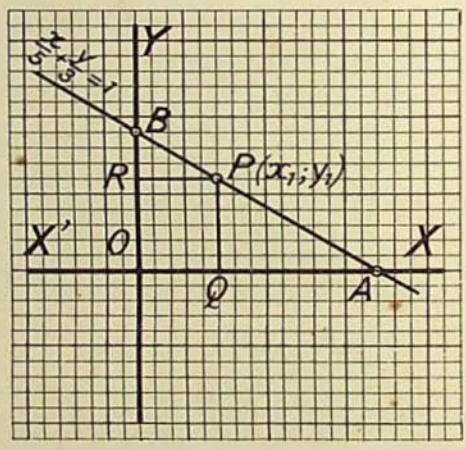

Fig. 12*a*.
Maat = 4 dubbele mm.

Opgave. Toon aan: 1°. dat men dezelfde vergelijking krijgt, als men P in 't tweede of vierde kwadrant kiest;

2°. dat men voor de vergelijking eener rechte, die b.v. van de X-as een stuk 4 en van de Y-as een stuk -3 afsnijdt, vindt:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1.$$

Omgekeerd kan men de stukken a en b, die een rechte resp. van de X-as en de Y-as afsnijdt, vinden door de vergelijking der rechte te herleiden tot $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Voorbeelden. *a.* $2x + 3y - 6 = 0.$

$2x + 3y = 6.$ Beide leden door 6 deelen.

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$ De rechte $2x + 3y - 6 = 0$

snijdt dus van de X-as een stuk 3 en van de Y-as een stuk 2 af. Hieruit kan zij geconstrueerd worden.

b. $3x - y + 9 = 0.$

$-3x + y = +9.$

$\frac{x}{-3} + \frac{y}{9} = 1.$ Van de X-as wordt een stuk -3, van de Y-as een stuk 9 afgesneden.

Deze methode voert echter niet vlugger tot het doel dan die van de voorgaande paragraaf.

§ 13. **Twee lineaire functies.**

a. Teekent men: $2x + y - 5 = 0$ en $4x - y - 1 = 0$, dan blijkt 't dat deze lijnen elkaar snijden in 't punt (1; 3). 't Snijpunt is als volgt te berekenen:

De coördinaten (x en y) van dit snijpunt voldoen aan beide betrekkingen $2x + y - 5 = 0$ en $4x - y - 1 = 0$. Vat men deze coördinaten op als onbekenden, dan zijn zij dus bepaald door de beide vergelijkingen $2x + y - 5 = 0$ en $4x - y - 1 = 0$, die nu dus een stelsel vergelijkingen vormen:

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0. \\ 4x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Oplossing geeft werkelijk: $x = 1$, $y = 3$. (Onderzoek de juistheid door de gevonden waarden in de beide vergelijkingen te substitueeren).

b. Teekent men: $2x + y - 5 = 0$ en $4x + 2y - 10 = 0$ (met behulp van de snijpunten met de assen), dan blijkt, dat de beide grafieken samenvallen. Achteraf is dit duidelijk; immers voor $4x + 2y - 10 = 0$ kan men schrijven $2(2x + y - 5) = 0$. Nu is een product slechts nul, als minstens één der factoren nul is; de factor 2 is verschillend van nul, dus moet $2x + y - 5 = 0$ zijn. Doch dit is eenvoudig de eerste vergelijking. Deze beide lijnen hebben dus **oneindig veel** snijpunten.

c. Teekent men: $2x + y - 5 = 0$ en $2x + y + 1 = 0$, dan blijken beide lijnen evenwijdig te zijn. Zij hebben dus geen snijpunt.

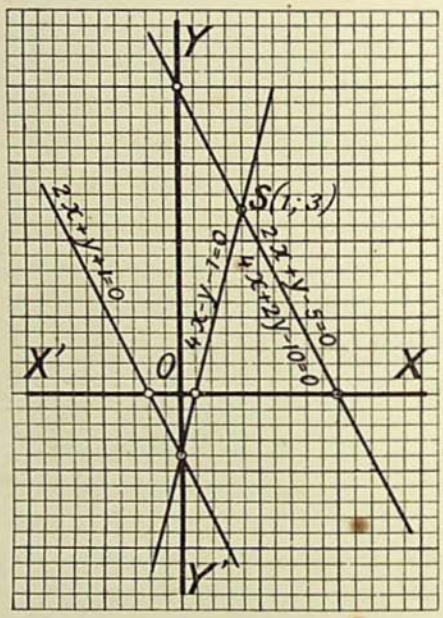

Fig. 13.
Maat = 4 dubbele mm.

§ 14. **Nadere beschouwing van 't voorgaande.**

a. Van $2x + y - 5 = 0$ heeft de grafiek tot r.c. -2. (Schrijf voor $2x + y - 5 = 0$ eerst $y = -2x + 5$); van $4x - y - 1 = 0$ heeft de grafiek echter 4 tot r.c. (Ga dit na!). Beide lijnen moeten elkaar dus **snijden.**

Van $ax + by + c = 0$ heeft de grafiek tot r.c. $-\frac{a}{b}$, terwijl deze voor $px + qy + r = 0$ is $-\frac{p}{q}$. Wanneer nu $-\frac{a}{b}$ en $-\frac{p}{q}$ ongelijk zijn, dan zullen beide lijnen elkaar snijden. Men schrijft dit: $-\frac{a}{b} \neq -\frac{p}{q}$. Dit is te vervangen door $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$ en dit weer door $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ (vermenigvuldig eerst beide leden der ongelijkheid met b en deel ze daarna door p).

Samenvattend krijgt men dus:

Wanneer voor $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$ geldt $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$, dan zullen beide lijnen elkaar **snijden.**

Maar dit kan ook zóó worden opgevat, dat 't stelsel vergelijkingen $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$ één (en niet meer dan één) oplossing heeft, zoodra voldaan is aan de voorwaarde: $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$. (Merk op, dat c en r hier geen rol spelen).

b. van $2x + y - 5 = 0$ heeft de grafiek tot r.c. -2, van $4x + 2y - 10 = 0$ echter ook. Beide lijnen zullen dus evenwijdig zijn of samenvallen. Dit laatste gebeurt, zoodra ze één punt gemeen hebben. Men kan hiervoor kiezen 't snijpunt met de X-as ($y = 0$). De eerste lijn snijdt de X-as in 't punt $(2\frac{1}{2}; 0)$, de laatste ook. Ze vallen dus samen.

De lijnen $ax + by + c = 0$ en $px + qy + r = 0$ zullen evenwijdig zijn, indien $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$ (zie onder *a*). De snijpunten met de X-as hebben tot abscis resp. $-\frac{c}{a}$ en $-\frac{r}{p}$. Zijn nu $-\frac{c}{a}$ en $-\frac{r}{p}$ gelijk, dan zullen de beide lijnen samenvallen. Uit $-\frac{c}{a} = -\frac{r}{p}$ leidt men gemakkelijk af: $\frac{a}{p} = \frac{c}{r}$.

Samenvattend krijgt men nu:

De lijnen $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$ vallen samen als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$.

Men kan dit ook zóó opvatten:

't Stelsel vergelijkingen $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$ heeft ∞^1) oplossingen (of: is enkelvoudig onbepaald), indien de coëfficienten voldoen aan $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$.

c. de grafiek van $2x + y - 5 = 0$ heeft tot r.c. -2, die van $2x + y + 1 = 0$ eveneens. Beide grafieken zijn dus evenwijdig. De eerste snijdt de Y-as ($x = 0$) in 't punt $(0; 5)$, de tweede in 't punt $(0; -1)$, dus in een ander punt. De

---

1) ∞ beteekent: oneindig veel.

rechten kunnen dus niet samenvallen, zij zijn evenwijdig in den gewonen zin, hebben dus geen enkel snijpunt.

De lijnen $ax + by + c = 0$ en $px + qy + r = 0$ hebben tot r.c. $-\frac{a}{b}$ en $-\frac{p}{q}$, zullen dus evenwijdig zijn, indien $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$ (zie boven). Zij snijden de X-as ($y = 0$) resp. in de punten $(-\frac{c}{a}; 0)$ en $(-\frac{r}{p}; 0)$. Deze punten zullen niet samenvallen indien $-\frac{c}{a} \neq -\frac{r}{p}$ of, omgevormd, $\frac{a}{p} \neq \frac{c}{r}$, dus tevens $\frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$.

Samenvattend krijgt men nu:

De lijnen $ax + by + c = 0$ en $px + qy + r = 0$ zullen **evenwijdig** zijn (geen enkel punt gemeen hebben), indien

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}.$$

Men kan dit ook zóó opvatten:

De vergelijkingen $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$ hebben geen enkele oplossing, indien de coëfficiënten voldoen aan de betrekking:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}.$$

d. Een stelsel vergelijkingen, bedoeld in
- *a.* heet oplosbaar of **onafhankelijk.**
- *b.* heet **afhankelijk.**
- *c.* heet **strijdig.**

§ 15. **De hoek, waaronder twee rechten elkaar snijden.** [1])

Wanneer de rechten $ax + by + c = 0$ (I) en $px + qy + r = 0$ (II) elkaar snijden, kan men de hoeken, waaronder dit plaats heeft, bepalen uit de coëfficiënten. Is de hoek, waaronder (I) de X-as snijdt, α, dan is $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b}$; is de bedoelde hoek voor (II) φ, dan is $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{p}{q}$. De hoek ψ, waaronder (I) en (II) elkaar snijden, is bepaald door $\psi = \alpha - \varphi$ (of 't supplement daarvan). Nu is $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} (\alpha - \varphi) =$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi} = \frac{-\frac{a}{b} + \frac{p}{q}}{1 + \frac{ap}{bq}} = \frac{-aq + bp}{ap + bq}.$$

Hierdoor is ψ bepaald.

[1]) Deze § kan zonder bezwaar overgeslagen worden.

De lijnen (I) en (II) zullen elkaar loodrecht snijden ($\psi = 90°$), indien tg $\psi = \infty$, dus de noemer $1 + \frac{ap}{bq} = 0$. Hieruit volgt: $\frac{ap}{bq} = -1$ of $-\frac{a}{b} \cdot -\frac{p}{q} = -1$, in woorden: **'t product der r.c. moet —1 zijn.**

§ 16. **Opgeloste vraagstukken.**

1. Welke lijn met r.c. 2 gaat door 't punt (—3; 5)?

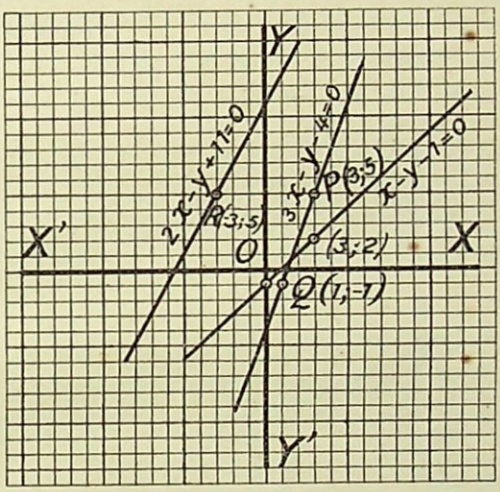

Fig. 14.
Maat = 1 dubbele mm.

Oplossing. De vergelijking dezer lijn zij $y = 2x + p$. Men vindt p door de coördinaten van 't punt (—3; 5) in de vergelijkingen der lijn te substitueeren, waardoor deze overgaat in $5 = -6 + p$. Dus $p = 11$, de vergelijking der gevraagde lijn is derhalve $y = 2x + 11$ of $2x - y + 11 = 0$.

2. Bepaal de vergelijking der rechte door de punten (1; —1) en (3; 5).

Oplossing. Zij de vergelijking der lijn $y = px + q$. Uit de voorwaarden: gaan door de punten (1; —1) en (3; 5), leiden we af de vergelijking:

$\begin{cases} -1 = p + q \\ 5 = 3p + q, \end{cases}$ waaruit volgt: $p = 3$, $q = -4$. De vergelijking der rechte is dus: $y = 3x - 4$ of $3x - y - 4 = 0$.

3. Welke rechte gaat door (3; 2) en snijdt van de Y-as een stuk -1 af?

Oplossing. Zij de vergelijking der rechte: $y = ax + b$, dan volgt uit de eerste voorwaarde: $2 = 3a + b$. 't Snijpunt met de Yas vinden we door $x = 0$ te stellen; dan is $y = b$. Dus is $b = -1$ en $a = 1$. De gevraagde rechte is: $y = x - 1$ of $x - y - 1 = 0$.

4. Gevraagd de rechte door (5; 4), evenwijdig aan $y = -\frac{1}{2}x + 7$.

Oplossing. Een rechte $// y = -\frac{1}{2}x + 7$ heeft tot vergelijking $= y - \frac{1}{2}x + p$ (de term $+ 7$ speelt absoluut geen rol!). Men vindt $p = + 6\frac{1}{2}$ (als in n°. 1), dus voor de gevraagde rechte $y = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$ of $x + 2y - 13 = 0$.

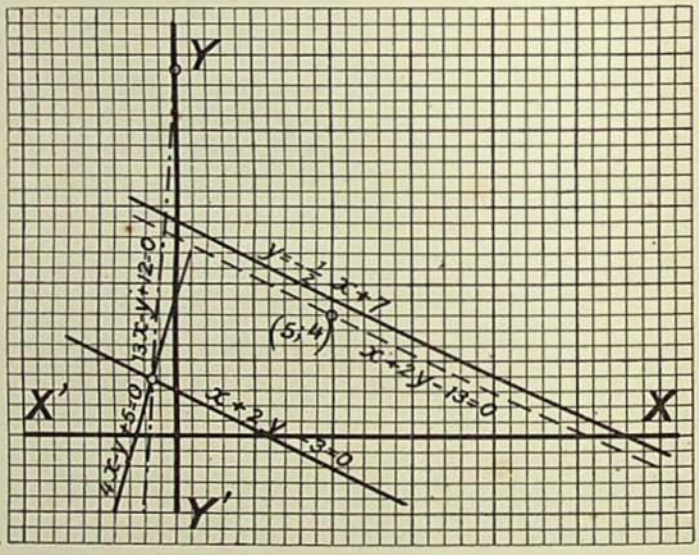

Fig. 15.
Maat = 2 dubbele mm.

5. Wat is de vergelijking der rechte door 't punt $(-1; -1)$, die tevens gaat door 't snijpunt der lijnen $x + 2y - 3 = 0$ en $4x - y + 5 = 0$?

Oplossing. Men kan dit vraagstuk tot n°. 2 terugbrengen door eerst 't snijpunt der beide lijnen te berekenen (§ 13, *a*). Mooier is de volgende oplossing.

Een lijn door 't snijpunt van $x + 2y - 3 = 0$ en $4x - y + 5 = 0$ kan voorgesteld worden door $(x + 2y - 3) +$

$+ k(4x - y + 5) = 0$, waarin k een willekeurig eindig getal is. Men kan immers voor $(x + 2y - 3) + k(4x - y + 5) = 0$ schrijven $(1 + 4k)x + (2 - k)y + 5k - 3 = 0$. Dit stelt een rechte voor. Deze rechte gaat door 't snijpunt der gegeven lijnen, want in dit punt wordt $x + 2y - 3$ gelijk nul, eveneens $4x - y + 5$. Dus gaat voor dit punt $(x + 2y - 3) + k(4x - y + 5)$ over in $0 + k \times 0 = 0$, m. a. w. de coördinaten van dit snijpunt voldoen aan de vergelijking, wat te bewijzen was.

De gevraagde rechte is dus $(x + 2y - 3) + k(4x - y + 5) = 0$. De voorwaarde: gaan door $(-1; -1)$, geeft: $(-1 - 2 - 3) + k(-4 + 1 + 5) = 0$, $2k - 6 = 0$, $k = 3$. De lijn heeft dus tot vergelijking: $(x + 2y - 3) + 3(4x - y + 5) = 0$, of $13x - y + 12 = 0$.

§ 17. **Over 't teeken van een lineaire functie.**

Vraagt men wanneer $2x + 9$ positief is, dan is dit vraagstuk heel eenvoudig op te lossen als volgt:

$$2x + 9 > 0$$
$$2x > -9$$
$$x > -4\tfrac{1}{2}.$$

't Antwoord is dus: wanneer x grooter is dan $-4\frac{1}{2}$.

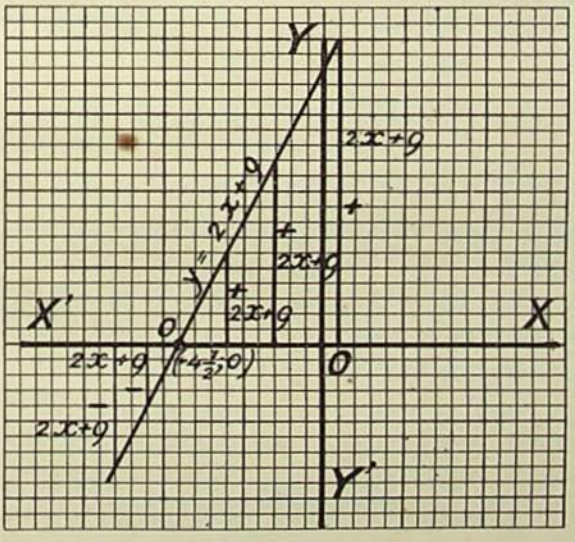

Fig. 16.

Grafisch behandelt men dit op de volgende manier: Construeer $y = 2x + 9$, dan komt de vraag hierop neer: wanneer is de functie, d.i. de ordinaat, positief (dus boven de X-as gelegen)?

De rechte snijdt de X-as in 't punt $(-4\frac{1}{2};\ 0)$ en daar de r.c. positief is, is de ordinaat nu positief rechts van 't snijpunt. In 't snijpunt is de functie nul, links daarvan negatief.

§ 18. Over 't teeken van den kwadratischen drieterm, die in reëele eerste-graadsfactoren te ontbinden is.

I. Vraagstuk. Wanneer is $2x^2 - 5x - 3$ positief?

Oplossing. $2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$.

Een product is positief, indien: *a.* beide factoren positief; *b.* beide negatief zijn.

a. Beide positief.

$1^0.\ 2x + 1 > 0$ $\qquad$ $2^0.\ x - 3 > 0$

$2x > -1$

$x > -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x > 3$

Beide voorwaarden zijn niet met elkaar in strijd; zij kunnen vervangen worden door $x > 3$ (dan is aan de eerste zeker voldaan!).

b. Beide negatief.

$1^0.\ 2x + 1 < 0$ $\qquad$ $2^0.\ x - 3 < 0$

$2x < -1$

$x < -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x < 3$

$x < -\frac{1}{2}$.

De drieterm is dus positief voor $x < -\frac{1}{2}$ en voor $x > 3$.

II. Vraagstuk. Voor welke waarden van x is $2x^2 - 5x - 3$ negatief?

Oplossing. $2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$.

Een product is negatief, indien de eene factor positief, de andere negatief is.

a. $1^0.\ 2x + 1 > 0$ $\qquad$ $2^0.\ x - 3 < 0$

$2x > -1$

$x > -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x < 3$

$-\frac{1}{2} < x < 3$

d.i. voor waarden van x tusschen $-\frac{1}{2}$ en 3.

b. 1°. $2x + 1 < 0$ 2°. $x - 3 > 0$

$x < -\frac{1}{2}$ $x > 3.$

Deze beide voorwaarden sluiten elkaar uit. 't Antwoord onder *a.* is dus 't eenige.

Opmerking. Men kan de oplossingen van vraagstuk I en II bekorten als volgt:

$$2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$$
$$= 2(x + \tfrac{1}{2})(x - 3).$$

De factor 2 heeft geen invloed op 't teeken van 't product, dit hangt alleen af van $x + \frac{1}{2}$ en $x - 3$. Voor iedere waarde van x is $x + \frac{1}{2}$ grooter dan $x - 3$. Zullen dus beide factoren positief zijn, dan is 't voldoende, dat de **kleinste** positief is. Dit geeft

$$x - 3 > 0, \; x > 3.$$

Zullen ze beide negatief zijn, dan is 't voldoende, dat de **grootste** negatief is. Dit geeft

$$x + \tfrac{1}{2} < 0, \; x < -\tfrac{1}{2}.$$

Opdat 't product negatief zij, moet de eene factor positief, de andere negatief zijn. Een positief getal is steeds grooter dan een negatief, dus moet

$$x + \tfrac{1}{2} > 0 \text{ en tegelijkertijd } x - 3 < 0,$$

waaruit volgt: $x > -\frac{1}{2}$ en $x < 3$,

of samengevat: $-\frac{1}{2} < x < 3$.

III. Vraagstuk. Wanneer is $2x^2 - 5x - 3$ nul?

Antwoord. Als $x = -\frac{1}{2}$ en als $x = 3$.

I, II en III samenvattend, vindt men dus:
$2x^2 - 5x - 3$ is:

voor x links van $-\frac{1}{2}$ positief;
„ $x = -\frac{1}{2}$ nul;
„ x tusschen $-\frac{1}{2}$ en 3 negatief;
„ $x = 3$ nul;
„ x rechts van 3 positief.

Met „links van" wordt bedoeld „kleiner dan"; met „rechts van" bedoelt men „grooter dan".

Grafisch worden de vraagstukken uit deze § behandeld in fig. 17 en 17*a* (waarin D drieterm beteekent). Denk er om, dat beide lijnen samen **niet** de grafiek der functie $y = 2x^2 - - 5x - 3$ voorstellen. (Zie hiervoor § 20 e. v.).

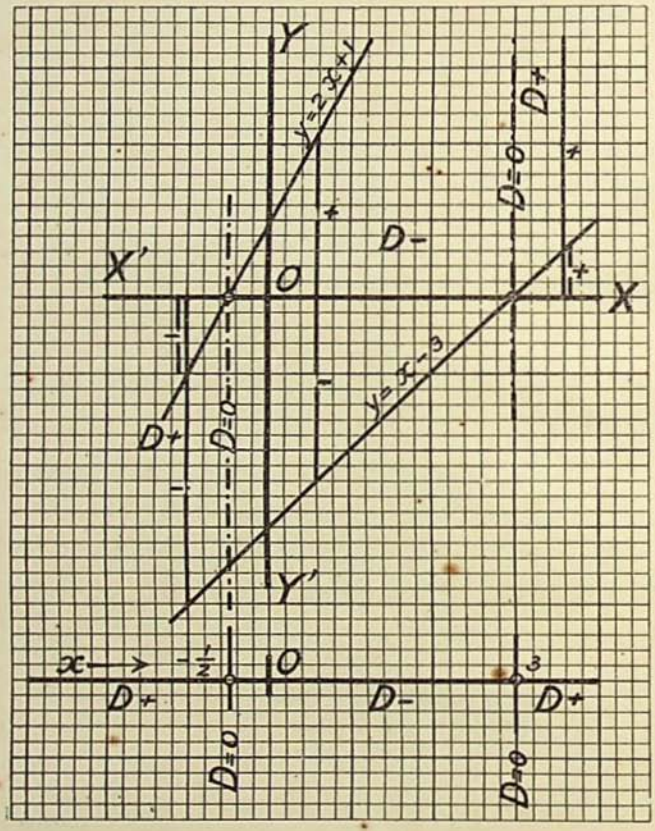

Fig. 17 en 17*a*.
Maat = 1 cm.

§ 19. **De gebroken lineaire functie.**

Een gebroken lineaire functie is 't quotiënt van twee lineaire functies. (De teller mag vervangen worden door een constant getal, de noemer niet. Waarom niet?).

Voorbeeld. $y = \frac{2x + 1}{x - 3}$.

1. Vraagstuk. Wanneer is $\frac{2x+1}{x-3}$ positief?

Oplossing. Een quotiënt is positief, indien deeltal en deeler 't zelfde teeken hebben.

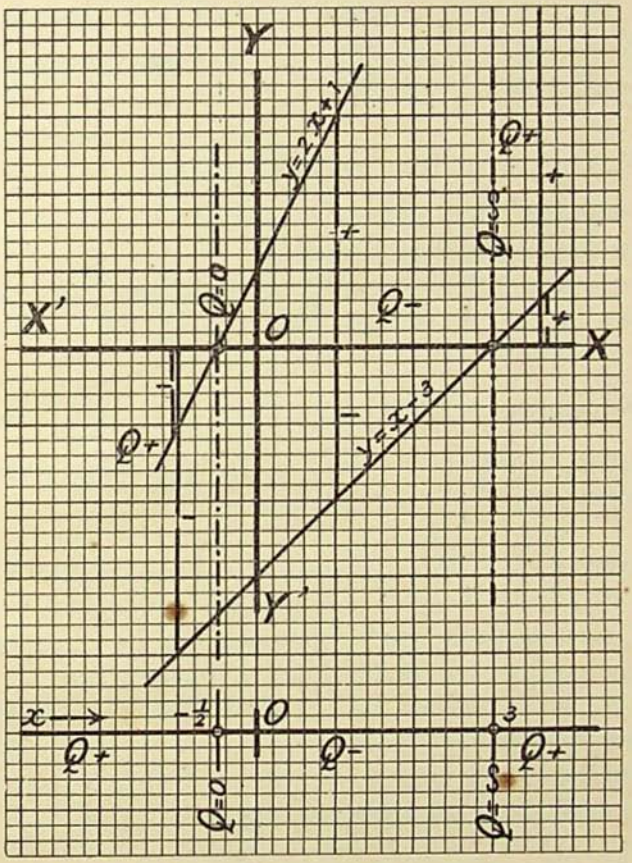

Fig. 18 en 18*a*.
Maat = 1 cm.

a. Beide positief.

$1^0.\ 2x+1>0$ $\qquad$ $2^0.\ x-3>0$

$x > -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x > 3$

$x > 3.$

b. Beide negatief.

Antwoord. Voor $x < -\frac{1}{2}$ (Ga dit na!).

II. Vraagstuk. Wanneer is $\frac{2x+1}{x-3}$ negatief?

Oplossing. Deeltal en deeler moeten verschillend teeken hebben.

a. 1e. $2x+1>0$, dus $x>-\frac{1}{2}$
2e. $x-3<0$, dus $x<3$
} Samengevat: $-\frac{1}{2}<x<3$.

b. 1e. $2x+1<0$, dus $x<-\frac{1}{2}$
2e. $x-3>0$, dus $x>3$
} Sluiten elkaar uit.

III. Vraagstuk. Wanneer is $\frac{2x+1}{x-3}$ nul?

Oplossing. Een quotiënt is nul, indien 't deeltal nul is en de deeler van nul verschilt.
$2x+1=0$ voor $x=-\frac{1}{2}$; $x-3$ is voor $x=-\frac{1}{2}$ gelijk aan $-3\frac{1}{2}$, dus ongelijk nul. 't Antwoord is dus: voor $x=-\frac{1}{2}$.

Opmerking. 't Vraagstuk: Wanneer is $\frac{2x+1}{x-3}$ oneindig groot (Antwoord: voor $x=3$) blijft hier buiten beschouwing.

Vergelijkt men de uitkomsten der vraagstukken I en II uit de §§ 18 en 19, dan blijken deze gelijk te zijn. Dit is duidelijk, indien men bedenkt, dat 't product van twee algebraïsche vormen 't zelfde teeken heeft als 't quotiënt.

Bij de vraagstukken III treedt echter 't wezensverschil tusschen een product en een quotiënt naar voren. De grafische behandeling vindt men in fig. 18 en 18*a* [1]). De opmerking aan 't eind van § 18 geldt ook hier.

---

[1]) Q = Quotient.

HOOFDSTUK IV.

DE TWEEDEGRAADS FUNCTIE.

§ 20. **De tweedegraads of kwadratische functie.**

$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ is de algemeene (expliciete) vorm der tweedegraads functie.

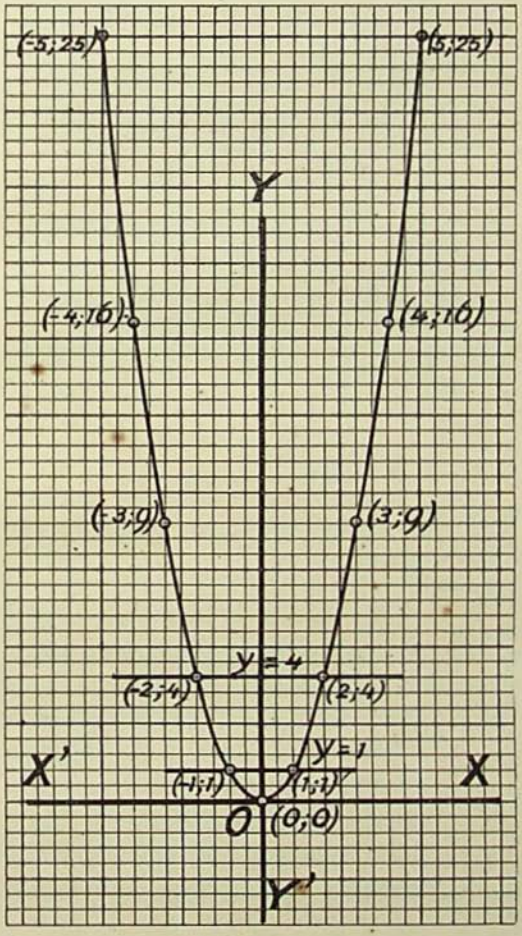

Fig. 19.
Maat = 2 dubbele mm.

Bijzondere vormen zijn:

$y = ax^2 + bx.$ $(a \text{ en } b \neq 0).$
$y = ax^2.$ $(a \neq 0).$
$y = x^2 + bx + c.$ $(b \text{ en } c \neq 0).$
$y = x^2 + bx.$ $(b \neq 0).$
$y = x^2.$

Om de grafiek van de eenvoudigste tweedegraads functie

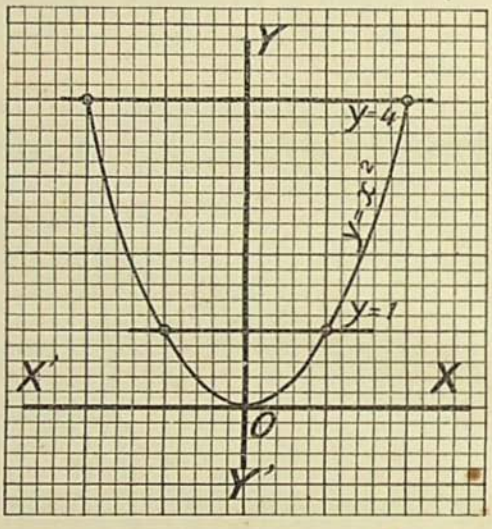

Fig. 20.
Maat = 10 mm.

$y = x^2$ te teekenen, construeeren we meerdere punten, met behulp van de volgende tabel:

x	$y=(x^2)$
—4	16
—3	9
—2	4
—1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

We vinden de punten (—4; 16); (—3; 9), enz. De grafiek blijkt een kromme te zijn, die slechts gevonden kan worden door ze punt voor punt te construeeren. Daar dit practisch onmogelijk is, stellen we ons tevreden met een benadering en verbinden daartoe de geconstrueerde punten uit de hand door een z.g. vloeiende kromme. Deze kromme draagt den naam van **parabool.**

Een **parabool** is dus de grafiek van $y = x^2$. **(Algebraïsche** definitie van de parabool).

De parabolen in de fig. 19, 20 en 21 maken niet denzelfden indruk. 't Lijken verschillende krommen. Beschouwt men echter de deelen tusschen de X-as en de lijn $y = 1$ in elk der genoemde figuren, dan ziet men dat deze gelijkvormig zijn. Vergelijk ook nog de deelen tusschen de X-as en de lijn $y = 4$ in de fig. 19 en 20. Het blijkt dus, dát alle parabolen (met vergelijking $y = x^2$) gelijkvormig zijn. Verderop blijkt dat de toevoeging tusschen haakjes vervallen kan.

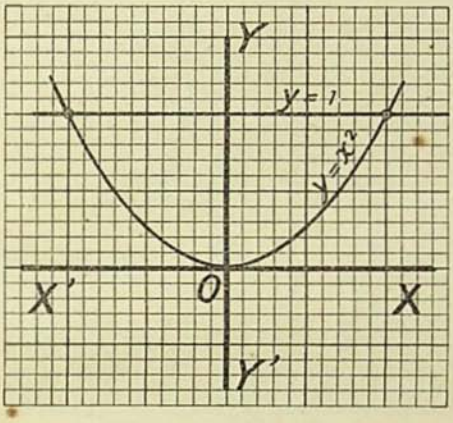

Fig. 21.
Maat = 20 mm.

§ 21. **De grafiek van $y = x^2 + bx + c$.**

Vraagstuk. Wat wordt de vergelijking van de parabool $y = x^2$ indien de assen evenwijdig aan zichzelf verplaatst worden, zóó dat O in 't punt (2; 3) komt?

Oplossing. We noemen de coördinaten van een willekeurig punt P(x, y) ten opzichte van 't nieuwe assenstelsel $\overline{x}$ en $\overline{y}$ (spreek uit: x en y gestreept). Tusschen x, y, $\overline{x}$ en $\overline{y}$ bestaan nu de betrekkingen:

$$x = \overline{x} + 2; \quad y = \overline{y} + 3.$$

Zie fig. 22 rechts onderaan.

Substitutie in $y = x^2$ doet deze vergelijking overgaan in:

$$\overline{y} + 3 = (\overline{x} + 2)^2 \text{ of } \overline{y} + 3 = \overline{x}^2 + 4\overline{x} + 4 \text{ of}$$
$$\overline{y} = \overline{x}^2 + 4\overline{x} + 1.$$

Denkt men zich 't oude assenkruis weg, dan blijkt de parabool ($y = x^2$) tot vergelijking te hebben:

$$y = x^2 + 4x + 1.$$

(De — —, die slechts ter onderscheiding dienden, kunnen nu zonder bezwaar weggelaten worden).

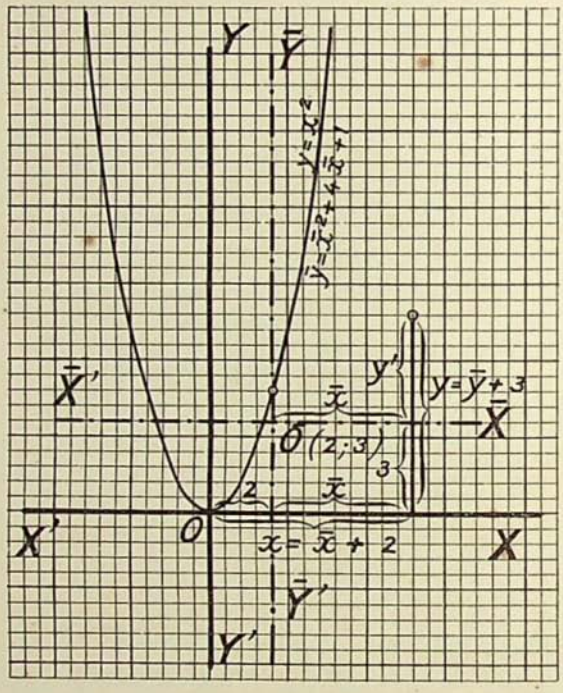

Fig. 22.
Maat = 2 dubbele mm.

Kiest men $\bar{O}$ in een ander punt, dan krijgt men een andere vergelijking van den vorm: $y = x^2 + bx + c$.

Wij keeren nu 't vraagstuk om en vragen: Stelt b.v. $y = x^2 - 6x + 4$ een parabool voor?

Oplossing. $y = x^2 - 6x + 4$ stelt een parabool voor, indien de vergelijking door evenwijdige verschuiving van 't assenkruis, d. i. een verschuiving, waarbij de assen evenwijdig blijven aan hun oorspronkelijke stand (verandert de richting, dan spreekt men van draaiing) terug te brengen is tot $\bar{y} = \bar{x}^2$.

Stellen we $\overline{O}\ (p;\ q)$, dan wordt $x = \overline{x} + p$ (onverschillig of p positief of negatief is. Ga dit na!) en $y = \overline{y} + q$, dus gaat $y = x^2 - 6x + 4$ over in:

$$\overline{y} + q = (\overline{x} + p)^2 - 6(\overline{x} + p) + 4, \text{ of}$$
$$\overline{y} + q = \overline{x}^2 + 2p\overline{x} + p^2 - 6\overline{x} - 6p + 4, \text{ of}$$
$$\overline{y} = \overline{x}^2 + \overline{x}(2p - 6) + p^2 - 6p - q + 4.$$

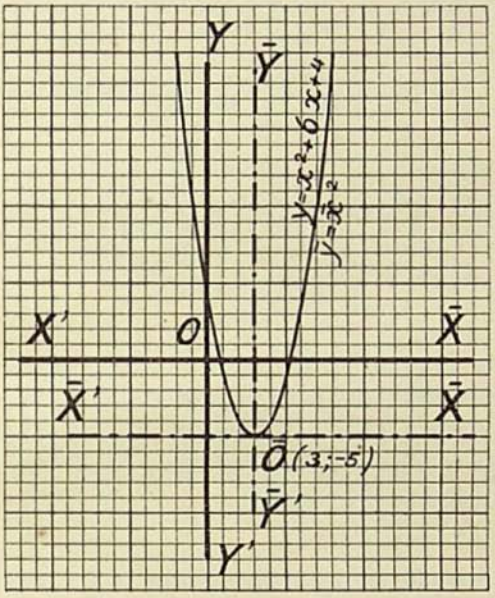

Fig. 23.

Zal dit identiek zijn met: $\overline{y} = \overline{x}^2$, dan moet $2p - 6 = 0$ [1]) en $p^2 - 6p - q + 4 = 0$. Hieruit volgt: $p = 3$, $q = -5$. Dus: verplaatst men O naar $(3; -5)$, dan gaat $y = x^2 - 6x + 4$ over in: $\overline{y} = \overline{x}^2$.

---

[1]) $\overline{x}(2p - 6) + p^2 - 6p - q + 4$ moet steeds nul zijn, dus constant; $p^2 - 6p - q + 4$ is constant, dus moet ook $\overline{x}(2p - 6)$ constant zijn. $\overline{x}$ kan echter iedere waarde aannemen; zal nu $\overline{x}(2p - 6)$ voor veranderlijke $\overline{x}$ en constante $2p - 6$ steeds dezelfde waarde behouden, dan moet dit de waarde nul zijn, waaruit volgt: $2p - 6 = 0$.

Immers, als $\overline{x}_1$ en $\overline{x}_2$ bij twee verschillende punten van de grafiek behooren, heeft men:

$$\overline{x}_1(2p - 6) = \text{c(onstant)}$$
$$\overline{x}_2(2p - 6) = \text{c(} \quad ,, \quad \text{)}$$
$$\therefore\ (\overline{x}_1 - \overline{x}_2)\ (2p - 6) = 0.$$

$\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$, dus $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \neq 0$, waaruit volgt: $2p - 6 = 0$.

De kromme $y = x^2 - 6x + 4$ stelt dus werkelijk een parabool voor.

't Zal duidelijk zijn, dat men op overeenkomstige wijze aantoont: $y = x^2 + bx + c$ stelt een parabool voor.

't Punt, waarheen men O verplaatsen moet om de vergelijking terug te voeren tot haar eenvoudigste gedaante $\overline{y} = \overline{x}^2$, heet de **top** der parabool, de nieuwe Y-as heet **as** (van symmetrie) der parabool, de nieuwe X-as is de **topraaklijn** der parabool.

Opgaven. Bepaal top, as en topraaklijn der volgende parabolen:

a.	$y=x^2-2x+3.$	Antw.$(1;2)$;	$x=1$;	$y=2.$
b.	$y=x^2+10x+27.$	„ $(-5;2)$;	$x=-5$;	$y=2.$
c.	$y=x^2+2x-3.$	„ $(-1;-4)$;	$x=-1$;	$y=-4.$
d.	$y=x^2-4ax+4a^2+a.$	„ $(2a;a)$;	$x=2a$;	$y=a.$

(a stelt een getal voor).

Opmerking. De in 't bovenbehandelde toegepaste **transformatie van coördinaten** heet **translatie. Draaiing** heet **rotatie.** Men kan beide na elkaar toepassen en ook de coördinaten nog op andere wijze transformeeren. In dit werkje wordt alleen de translatie behandeld.

§ 21*a*. **Eenvoudiger behandeling van 't voorgaande.**

De in de voorgaande § besproken translatie kan eenvoudiger uitgevoerd worden door in het rechterlid een kwadraat af te splitsen.

Men schrijft dan voor $x^2 - 6x + 4$ in de plaats $x^2 - 6x + + 9 - 5 = (x - 3)^2 - 5$. Het afgesplitste constante getal brengt men over naar links en gaat daarna over op $\overline{x}$ en $\overline{y}$.

Aldus:
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 4 \\ y &= x^2 - 6x + 9 - 5 \\ y &= (x-3)^2 - 5 \\ y + 5 &= (x-3)^2 \\ \overline{y} &= \overline{x}^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $\begin{cases} \overline{x} = x - 3. \\ \overline{y} = y + 5 \end{cases}$ en dit geeft weer:

$$\begin{cases} x = \overline{x} + 3 \\ y = \overline{y} - 5. \end{cases}$$

We lezen uit de laatste vergelijkingen af, dat de parabool tot top heeft 't punt (3; —5). Verder als in § 21.

§ 22. **Over de snijpunten van de parabool met de coördinaatassen.**

't Snijpunt met de Y-as wordt gevonden door $x = 0$ te stellen. (Waarom?).

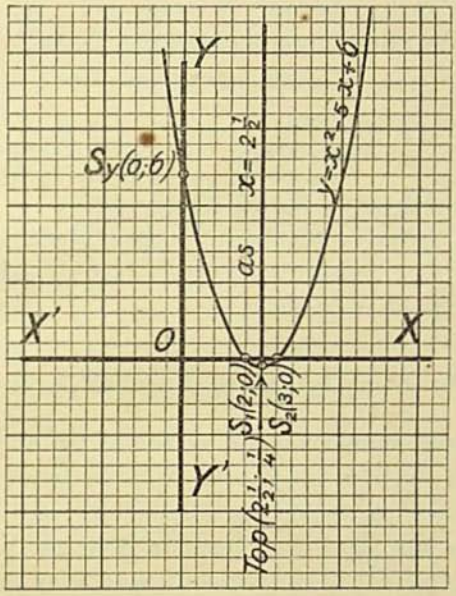

Fig. 24.

B.v. $y = x^2 - 5x + 6$ (bepaal eerst top, as en topraaklijn) snijdt de Y-as in 't punt (0; 6).

$y = x^2 + bx + c$ snijdt de Y-as in 't punt $(0; c)$.

De parabool snijdt de Y-as steeds in één (en niet meer dan één) punt.

't Snijpunt met de X-as wordt gevonden door $y = 0$ te stellen. (Waarom?).

B.v. $y = x^2 - 5x + 6$. Voor $y = 0$ gaat de vergelijking over in $x^2 - 5x + 6 = 0$, dus een vierkantsvergelijking met de wortels $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. Deze parabool snijdt de X-as dus in twee punten.

Daar een vierkantsvergelijking niet steeds twee (reële) wortels heeft, zal niet elke parabool de X-as in twee punten snijden.

't Al of niet-reëel-zijn van de wortel eener vierkantsvergelijking hangt af van de discriminant. Deze is voor $ax^2 + bx + c = 0$ gelijk aan $b^2 - 4ac$; voor de discriminant van $x^2 + px + q = 0$ kan men nemen $\frac{1}{4}p^2 - q$ of $p^2 - 4q$. Daar de laatste vorm volledig in overeenstemming is met $b^2 - 4ac$, gebruiken wij in 't volgende de vorm $p^2 - 4q$.

Stelt men de discriminant voor door D, dan geldt:

1°. $D > 0$, twee verschillende reële wortels } $D \geqslant 0$.
2°. $D = 0$, „ gelijke „ „ } 2 reële w.
3°. $D < 0$, „ toegevoegd complexe wortels.

Hieraan beantwoordt nu bij de parabool:

1°. $D > 0$, twee verschillende snijpunten } $D \geqslant 0$.
2°. $D = 0$, „ samenvallende „ } 2 snijp.
3°. $D < 0$, geen snijpunten.

In geval 1°. snijdt de parabool de X-as; in geval 2°. raakt zij de X-as; in geval 3°. ligt zij er geheel boven.

§ 23. **Andere manier om de as en de top te bepalen.**

Noemen we de snijpunten met de X-as resp x_1 en x_2, dan snijdt de as der parabool, die immers as van symmetrie is en evenwijdig aan de Y-as loopt, de X-as in 't midden van $x_1 - x_2$ (bedoeld is 't stuk (segment) der X-as van x_1 tot x_2). Dit punt heeft tot abscis $\frac{x_1 + x_2}{2}$. In $x^2 + bx + c = 0$ is echter $x_1 + x_2 = -b$, dus is **de vergelijking der as van de parabool**

$$x = -\frac{b}{2}.$$

De top is 't snijpunt van de as (der parabool) en de parabool heeft dus tot abscis: $x = -\frac{b}{2}$, terwijl de ordinaat gevonden wordt door in $y = x^2 + bx + c$ te substitueeren $x = -\frac{b}{2}$. Deze substitutie geeft:

$$y = (-\frac{b}{2})^2 + b(-\frac{b}{2}) + c = -\tfrac{1}{4}b^2 + c = -\tfrac{1}{4}(b^2 - 4c).$$

De vorm $b^2 - 4c$ is echter de D van $x^2 + bx + c = 0$. Men kan dus zeggen: **de coördinaten van den top zijn:**

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2} \\ y = -\frac{D}{4}. \end{cases}$$

Dit laatste is weer in overeenstemming met 't slot van § 22.

Is $D > 0$, dan is $-\frac{D}{4} < 0$, dus ligt de top beneden de X-as, en daar de parabool zeker punten heeft boven de X-as, moet zij de X-as snijden.

Is de $D = 0$, dan is ook $-\frac{D}{4} = 0$, de top ligt dus op de X-as, de parabool raakt aan de X-as.

Is $D < 0$, dan is $-\frac{D}{4} > 0$, de top ligt dus boven de X-as en dus de geheele parabool.

De **topraaklijn** der parabool heeft tot **vergelijking:**

$$y = -\frac{D}{4}.$$

§ 24. **De grafiek van $y = ax^2$.**

Teekent men de parabool $y = x^2$, waarbij een willekeurige maat voor abscis en ordinaat is aangenomen, dan kan men een nieuwe maat gebruiken, die b.v. 3 maal zoo klein is.

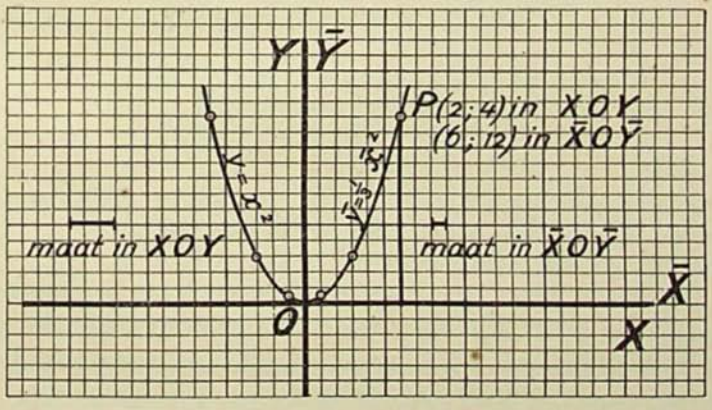

Fig. 25.
Maat in XOY = 3 dubbele, in $\bar{X}O\bar{Y}$ = 1 dubbele mm.

Noemt men de nieuwe coördinaat $\overline{x}$ en $\overline{y}$, dan geldt dus: $x = \frac{1}{3}\overline{x}$ en $y = \frac{1}{3}\overline{y}$. De vergelijking $y = x^2$ gaat dus over in: $(\frac{1}{3}\overline{y}) = (\frac{1}{3}\overline{x})^2$ of $\overline{y} = \frac{1}{3}\overline{x}^2$. Neemt men als maat de laatstbedoelde, dan blijkt de parabool ook de grafiek te zijn van $y = \frac{1}{3}x^2$.

Wat hier afgeleid is voor de coëfficiënt $\frac{1}{3}$, geldt voor elk getal $a > 0$.

't Blijkt dus:

de grafiek van $y = ax^2$ $(a > 0)$ is een *parabool*.

§ 25. **De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$. $(a > 0)$.**

Op dezelfde wijze als in § 14 voor $y = x^2 + bx + c$ is gedaan, kan men aantoonen, dat $y = ax^2$ door translatie kan overgaan in $y = ax^2 + bx + c$ (de coëfficiënt a kan door translatie nimmer verdwijnen).

Wat in de §§ 22 en 23 is gezegd omtrent de snijpunten met de assen, de as en de top geldt ook hier.

Samenvattend wordt dit:

de parabool $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$
snijdt de Y-as steeds in één (en niet meer dan één) punt,
snijdt de X-as, indien $D > 0$ is;
raakt de X-as, „ $D = 0$ is;
ligt boven de X-as, „ $D < 0$ is;
heeft tot as: $x = -\frac{b}{2a}$;
„ „ top: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$;
„ „ topraaklijn: $y = -\frac{D}{4a}$.

§ 26. **De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ voor $a < 0$.**

Nemen we als voorbeeld $y = -2x^2 + 7x - 6$.

Door beide leden met -1 te vermenigvuldigen, gaat de vergelijking over in $-y = 2x^2 - 7x + 6$. De grafiek van $y = 2x^2 - 7x + 6$ is een parabool met de opening naar boven. Die van $-y = 2x^2 - 7x + 6$ wordt nu gevonden, door de ordinaten van $y = 2x^2 - 7x + 6$ in plaats van boven (beneden) de X-as uit te zetten naar beneden (boven). Men

zegt ook: de parabool $y = 2x^2 - 7x + 6$ wordt gespiegeld t. o. v. de X-as.

De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ voor $a < 0$ is dus een parabool met de opening naar beneden. 't Blijkt, dat 't meegedeelde in § 25 ook doorgaat voor 't geval $a < 0$. De beperking $a > 0$ kan dus vervallen.

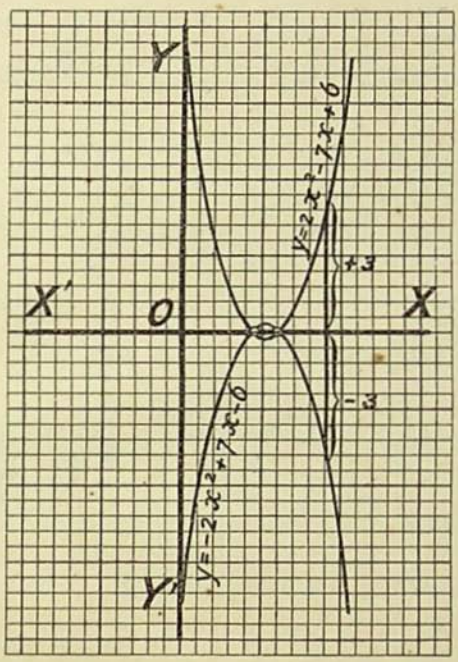

Fig. 26.
Maat = 3 dubbele mm.

Opmerking. Voor $a = 0$ gaat de kwadratische functie $y = ax^2 + bx + c$ over in de lineaire functie $y = bx + c$.

§ 27. **Over 't teeken van den drieterm $ax^2 + bx + c$.**

Noemt men den drieterm $ax^2 + bx + c$ ter bekorting y en stelt $y = ax^2 + bx + c$ grafisch voor, dan vindt men een parabool. Omtrent 't teeken van $ax^2 + bx + c$, dat is van y, dus van de ordinaat, valt 't volgende op te merken:

I. $a > 0$ (dus positief).

1°. Is $D(= b^2 - 4ac) < 0$, dan snijdt de parabool de X-as niet, ligt er dus geheel boven en de ordinaat is derhalve steeds positief. Zie fig. 27*a*.

Dus: is in $ax^2 + bx + c$ de cofactor a positief en $b^2 - 4ac < 0$, dan is de drieterm voor alle waarden van x positief.

2°. Is $D = 0$, dan raakt de parabool de X-as in 't punt $(-\frac{b}{2a}; 0)$, maar ligt er overigens geheel boven. Zie fig. 27*b*.

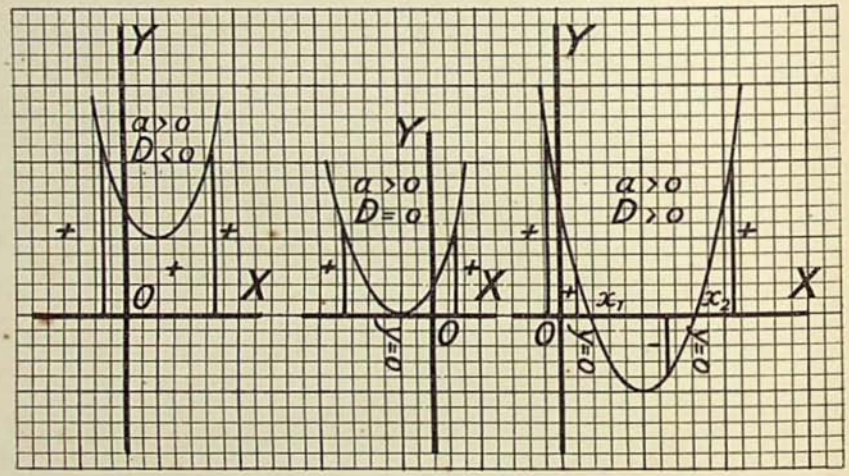

Fig. 27*a*, *b*, *c*.

Dus: is in $ax^2 + bx + c$ de cofactor a positief en $b^2 - 4ac = 0$, dan is de drieterm voor $x = -\frac{b}{2a}$ gelijk aan nul; voor iedere andere waarde van x is zij positief.

3°. Is $D < 0$, dan snijdt de parabool de X-as in twee punten $(x_1; 0)$ en $(x_2; 0)$, waarbij wij veronderstellen $x_1 < x_2$. Uit fig. 27*c* volgt nu:

voor	$x < x_1$	is de drieterm		positief;
,,	$x = x_1$	,,	,,	nul;
,,	$x_1 < x < x_2$	,,	,,	negatief;
,,	$x = x_2$	,,	,,	nul;
,,	$x > x_2$	,,	,,	positief.

II. $a < 0$ (dus negatief).

1°. Is $D < 0$, dan ligt de parabool geheel beneden de X-as en dus blijkt de drieterm in dit geval steeds negatief te zijn. Zie fig. 28*a*.

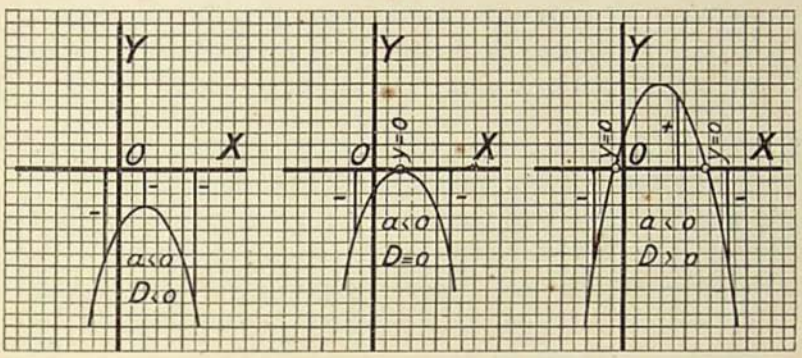

Fig. 28*a*, *b*, *c*.

2°. Is $D = 0$, dan raakt de parabool aan de X-as in 't punt $(-\frac{b}{2a}; 0)$ en vindt men:
de drieterm is nul voor $x = -\frac{b}{2a}$, voor iedere andere waarde van x echter negatief. Zie fig. 28*b*.

3°. Is $D > 0$, dan snijdt de parabool de X-as en vindt men (fig. 28*c*):

voor	$x < x_1$	is de drieterm	negatief;
,,	$x = x_1$	,, ,, ,,	nul;
,,	$x_1 < x < x_2$	,, ,, ,,	positief;
,,	$x = x_2$	,, ,, ,,	nul;
,,	$x > x_2$	,, ,, ,,	negatief.

Samenvattend blijkt:

1°. Is $D < 0$, dan heeft de drieterm steeds 't teeken van a;

2°. Is $D = 0$, dan is de drieterm nul voor $x = -\frac{b}{2a}$, voor alle andere waarden van x heeft ze steeds 't teeken van a;

3°. Is $D > 0$, dan heeft de drieterm voor:

$x < x_1$	't zelfde teeken als a;
$x = x_1$	de waarde nul;
$x_1 < x < x_2$	't tegengestelde teeken van a;
$x = x_2$	de waarde nul;
$x > x_2$	't zelfde teeken als a.

§ 28. Voorbeelden en opgaven.

1. Voor welke waarden van m heeft de drieterm $2x^2 + (4m + 1)x + 2m^2 + 3m - 5$ steeds 't zelfde teeken?
Oplossing. De voorwaarde is $(4m + 1)^2 - 8(2m^2 + 3m - 5) < 0$ of $-16m + 41 < 0$, waaruit volgt $m > 2\frac{9}{16}$.
Voor $m > 2\frac{9}{16}$ heeft de drieterm dus steeds 't zelfde teeken en wel 't positieve, daar hier $a = 2$.

2. Voor welke waarden van a heeft de drieterm $-3y^2 + (a + 2)y + a + 2$ steeds 't zelfde teeken?
Oplossing. De voorwaarde is $(a + 2)^2 + 12(a + 2) < 0$ of $(a + 14)(a + 2) < 0$, dus moet de kleinste factor $a + 2$ negatief, de grootste $a + 14$ positief zijn, waaruit volgt $a < -2$ en $a > -14$, samengevat $-14 < a < -2$ (a tusschen -14 en -2).
De drieterm is dan steeds negatief.

3. Voor welke (reëele) waarden van p is $5z^2 - (2p + 5)z + 4p - 10$ steeds positief?
Oplossing. De voorwaarde is $(2p + 5)^2 - 80p + 200 < 0$ of $4p^2 - 60p + 225 < 0$ of $(2p - 15)^2 < 0$.
Daar een volkomen vierkant nimmer negatief kan zijn, blijkt dat aan de vraag niet voldaan kan worden, d. w. z. de drieterm kan positief, nul en negatief zijn.

4. Voor welke waarden van a heeft de drieterm $y = ax^2 + (a + 1)x + (a + 2)$ steeds 't zelfde teeken?
(Staatsexamen, A. 1922).

5. Voor welke waarden van m is:
1°. $2x^2 - 15x + m$ steeds positief?
2°. $x^2 + (m - 3)x + 16$ steeds positief?
3°. $-x^2 + mx - m + \frac{3}{4}$ steeds negatief?

6. $(m - 2)x^2 - mx + (m - 2)$.
Voor welke waarden van m is deze drieterm steeds positief en voor welke steeds negatief?

7. $(m - 3)x^2 + 20mx + (m - 2) = 0$.
Voor welke waarden van m zijn de wortels reëel?

§ 29. **Over maxima en minima van den drieterm $ax^2 + bx + c$.**

Stelt men $ax^2 + bx + c$ gelijk aan y, dan is de grafiek

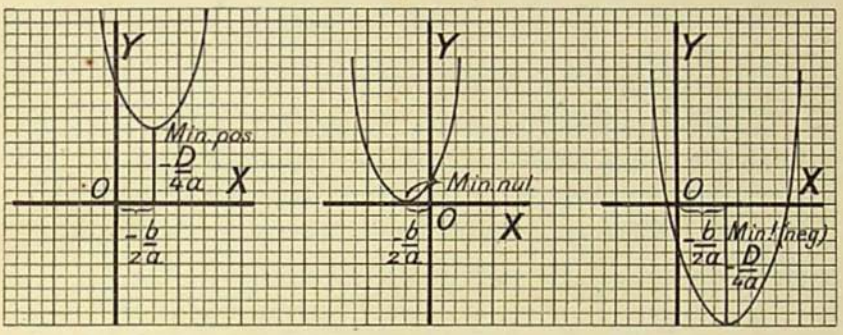

Fig. 29*a*, *b*, *c*.

van $y = ax^2 + bx + c$, zooals bekend, een parabool. Onder alle waarden, die de drieterm, d. i. y, dus de ordinaat, kan aannemen, is die van den top de grootste of de kleinste.

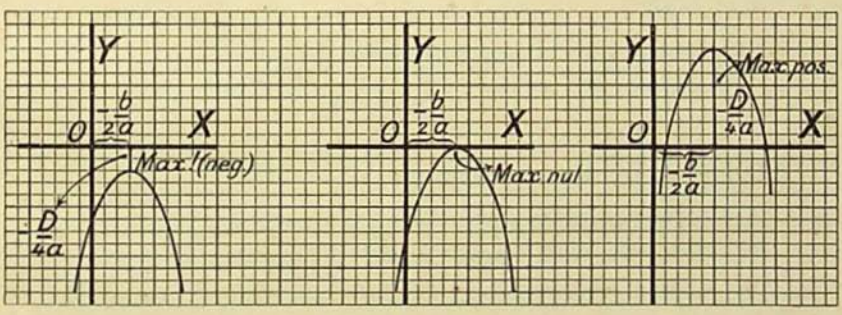

Fig. 30*a*, *b*, *c*.

Wanneer a positief is, blijkt er een minimum te zijn, dat bereikt wordt voor $x = -\frac{b}{2a}$.

Is a negatief, dan heeft men te doen met een maximum, dat eveneens bereikt wordt voor $x = -\frac{b}{2a}$.

De uiterste (extreme) waarden van $ax^2 + bx + c$ worden dus bereikt voor $x = -\frac{b}{2a}$ en blijken te zijn $-\frac{D}{2a}$ (vergelijk § 25.)

Algebraïsch gaat men als volgt te werk:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}.(4a^2x^2 + 4abx + 4ac) =$$

$$= \frac{1}{4a}\{(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)\}.$$

De vorm tusschen accoladen bestaat uit een veranderlijk kwadraat $(2ax + b)^2$ en een constant getal $-(b^2 - 4ac) = -D$. De kleinste waarde, die een kwadraat kan aannemen, is nul; de vorm tusschen accoladen heeft dus tot minimum $-D$; dit wordt bereikt als $2ax + b = 0$, dus voor $x = -\frac{b}{2a}$.

Is nu a positief, dan heeft de drieterm $ax^2 + bx + c$ dus een minimum $-\frac{D}{4a}$; is echter a negatief, dan heeft $ax^2 + bx + c$ een maximum $-\frac{D}{4a}$ (daar b.v. -4 grooter is dan -12).

Samenvattend:

de drieterm $ax^2 + bx + c$ heeft voor $x = -\frac{b}{2a}$ een uiterste waarde $-\frac{D}{4a}$;

is a **positief**, dan is een ***minimum*** aanwezig;
is a **negatief**, dan is er sprake van een ***maximum***.

§ 30. **Voorbeelden en opgaven.**

1. De uiterste waarde van $2x^2 + 7x - 19$ bedraagt $-25\frac{1}{8}$ en wordt bereikt als $x = -1\frac{3}{4}$. 't Is een minimum.

2. De uiterste waarde van $ay^2 + (a + 2)y - 2a + 3$ is $\frac{-9a^2 + 8a - 4}{4a}$ en wordt bereikt voor $y = -\frac{a + 2}{2a}$. Is a positief, dan is er een minimum, is a negatief dan een maximum.

3. Voor welke waarde van x is $20 - 6x - x^2$ maximum of minimum? Bepaal de grootte van 't maximum en licht de uitkomst toe met een grafische voorstelling.

Staatsexamen. A. '21.

4. De minimum waarde, die de vorm $mx^2 - (m + 3)x + + 2m - 1$ voor reëele waarden van x kan aannemen, bedraagt 2. Bepaal m. (Idem).

5. Hoeveel bedraagt de som van de kwadraten der wortels van de vergelijking:

$$x^2 - (2a - 5)x - a + 3 = 0?$$

Voor welke waarde van a is die som een minimum?

6. Op de zijden van een vierkant ABCD kiest men, in de aangeduide richting vanuit A rondgaande de punten P, Q, R en S, zóódanig, dat $AP = BQ = CR = DS = x$. Als $AB = 6$, hoe groot moet dan x zijn, opdat 't oppervlak van PQRS minimum zij?

7. Van een regelmatig vierzijdig prisma zijn de 3 hoofdribben samen 12 dm. Hoe groot is elke ribbe, als de oppervlakte van het lichaam maximum is?

8. Van een biscuitblik zonder deksel verhouden de afmetingen van den bodem zich als 2 : 1, terwijl de 3 afmetingen samen 36 cm zijn. Hoe moeten de afmetingen gekozen worden, opdat de 5 begrenzende vlakken samen een zoo groot mogelijk oppervlak hebben.

9. Van twee getallen is de som 12. Bepaal de maximum waarde van hun product.

10. Op de rechthoekszijden AC en BC van den rechthoekigen gelijkbeenigen $\triangle$ ABC neemt men resp. de punten P en Q zóó, dat CP = CQ. De projecties van P en Q op de hypotenusa zijn P_1 en Q_1. Als $AC = a$, waar moet dan P op AC worden gekozen, opdat de rechthoek PQQ_1P_1 maximaal oppervlak heeft?

HOOFDSTUK V.

DE GEBROKEN LINEAIRE FUNCTIE.

§ 31. De grafiek van $y = \frac{k}{x}$.

In § 12 is de gebroken lineaire functie reeds gedefinieerd. Als algemeene gedaante is daar opgegeven $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Om de grafiek te bestudeeren kiezen wij eerst 't bijzondere geval, dat $b = d = 0$ is, dus $y = \frac{a}{cx}$. Hierin moeten a en c beide van nul verschillen; a, omdat b reeds gelijk is aan nul en c volgens definitie. Het quotiënt $\frac{a}{c}$ is dus eindig en ongelijk nul. Stellen wij 't gelijk aan k, dan gaat $y = \frac{a}{cx}$ over in $y = \frac{k}{x}$.

Wij nemen als getallenvoorbeeld: $y = \frac{12}{x}$. Kent men aan x resp. de waarden 1, 2, 3, 4, 5, ... toe, dan wordt y resp. 12, 6, 4, 3, $2\frac{2}{5}$, ... Terwijl dus de waarden van x toenemen, blijken die van y af te nemen. Wordt x zeer groot, dan wordt y zeer klein, zonder ooit nul te worden. De kromme zal dus nooit de X-as snijden. Men kan echter de kromme zóó dicht tot de X-as laten naderen als men zelf wil, door x maar groot genoeg te kiezen. Verlangt men b.v. dat de afstand van een zeker punt der kromme tot de X-as kleiner zij dan één duizendste van de aangenomen maat, dan moet dus $y < \frac{1}{1000}$ zijn of $\frac{12}{x} < \frac{1}{1000}$ dus $\frac{x}{12} > 1000$ of $x > 12000$. Voor ieder punt der kromme, waarvan de abscis dus grooter is 12.000, is de afstand tot de X-as kleiner dan $\frac{1}{1000}$. Men kan in plaats van $\frac{1}{1000}$ ieder willekeurig klein positief getal kiezen, steeds blijken er (oneindig veel) punten te zijn, waarvoor de afstand tot de X-as kleiner is dan 't gekozen getal.

Men zegt, dat de kromme **asymptotisch** nadert tot de X-as en noemt de X-as een **asymptoot** van de kromme.

Neemt men voor x kleine positieve getallen, dan blijkt de kromme steeds steiler naar boven te loopen. Kiest men voor y een zeer groote waarde, dan blijkt x zeer klein te worden, zonder ooit gelijk te worden aan nul.

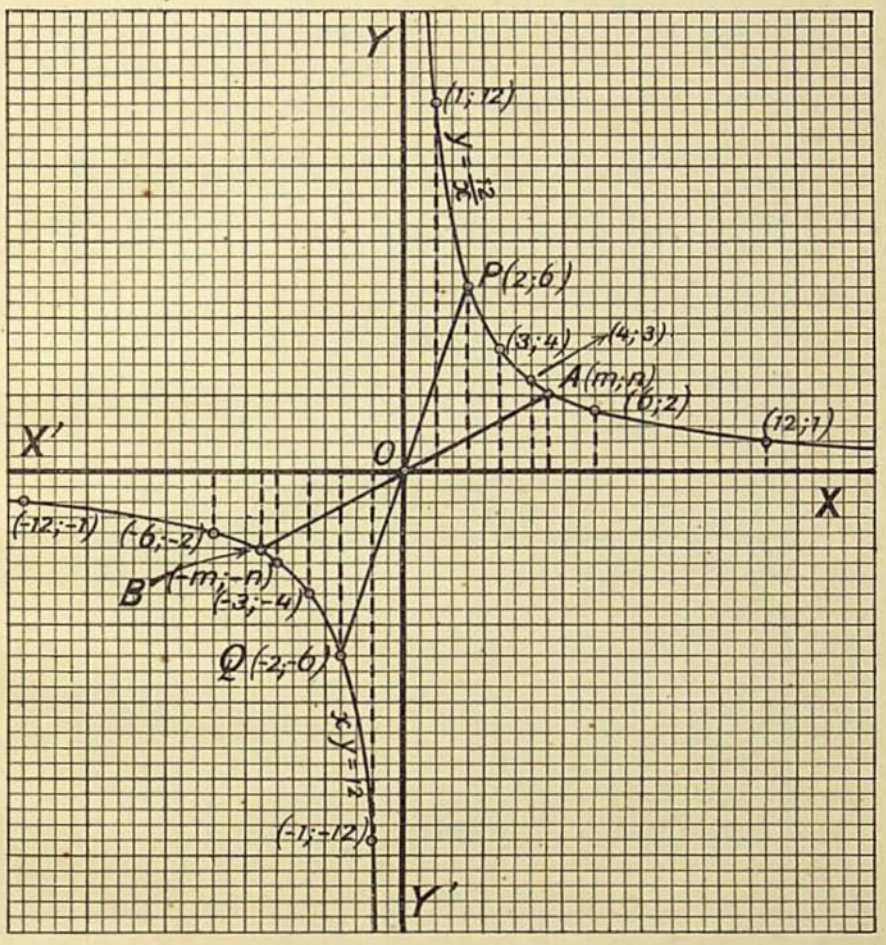

Fig. 31.
Maat = 2 dubbele mm.

De kromme nadert dus ook asymptotisch tot de Y-as en deze as zelf is dus eveneens een asymptoot van de kromme.

Het beschouwde deel der kromme blijkt geheel in 't eerste kwadrant te liggen.

Kent men aan x resp. de waarden $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$ toe, dan wordt y resp. $-12, -6, -4, -3, -2\frac{2}{5}, \ldots$. De bijbehoorende punten liggen alle in 't derde kwadrant. De beide assen van 't coördinatenstelsel zijn ook hier asymptoten.

De volledige grafiek bestaat dus uit twee deelen, die in verschillende (tegenoverstaande) kwadranten liggen. Men zegt, dat de kromme uit **twee takken** bestaat. Zij is de reeds vroeger genoemde **orthogonale hyperbool** (vergelijk § 4).

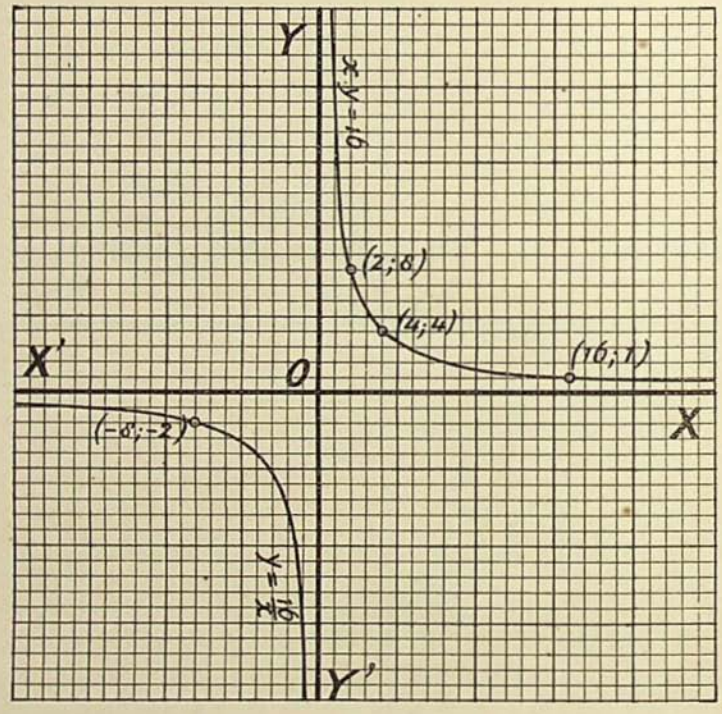

Fig. 31*a*.
Maat = 1 dubbele mm.

Opmerking. Er zijn ook hyperbolen met asymptoten, die **scheeve** hoeken insluiten. Omdat hier de asymptoten rechthoekig op elkaar staan, spreekt men van rechthoekige of orthogonale hyperbool.

Er is 'n punt P(2; 6) en óók 'n punt Q (—2; —6). Dit is te verwachten. Vervangt men $y = \frac{12}{x}$ door $xy = 12$, dan ziet men

direct in, dat ook $(-x)(-y) = 12$ is. Dit beteekent, dat met een punt A $(m;\ n)$ een punt B $(-m;\ -n)$ correspondeert.

De verbindingslijn der punten P en Q (en evenzoo die van de punten A en B) gaat door O en wordt in O middendoor gedeeld. Men zegt, dat P en Q symmetrisch liggen t. o. v. O, noemt **PQ** een **middellijn** der kromme en **O** ('t snijpunt van alle middellijnen) 't **middelpunt.**

§ 32. *Uitbreiding van 't voorgaande.*

Het getal 12 speelde in het voorgaande een ondergeschikte rol. Kiezen wij een ander positief getal, b.v. 16 (zie fig. 31*a*) of 25, dan zijn de coördinaatassen nog steeds asymptoten en is O nog altijd 't middelpunt der kromme. Is k negatief, b.v. -12, dus de

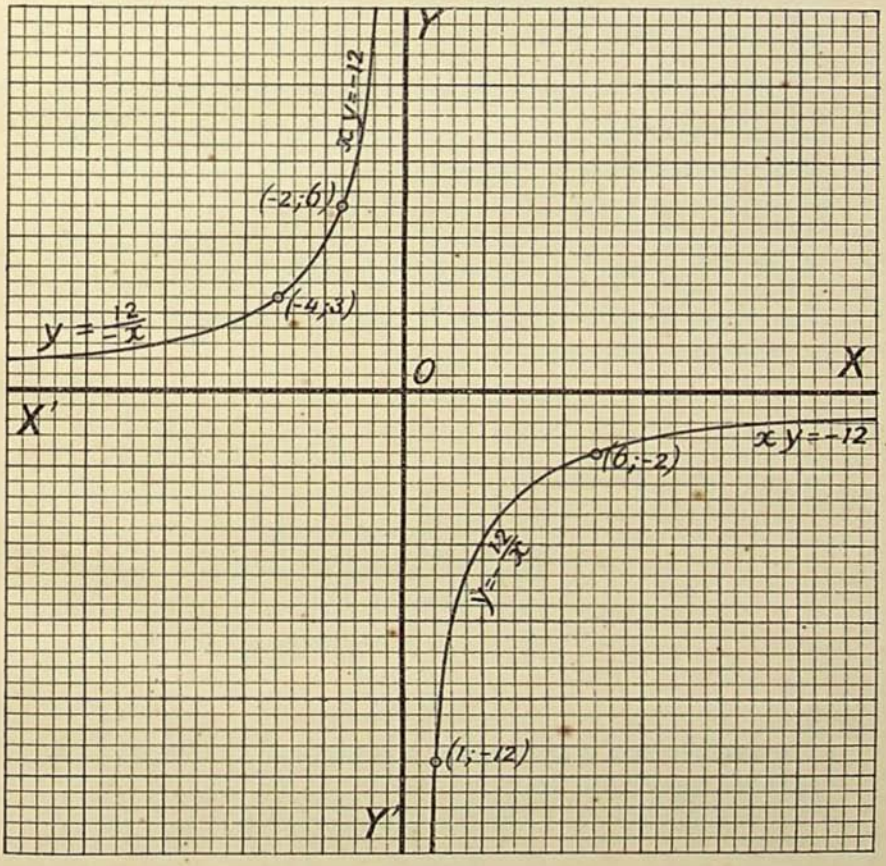

Fig. 32.
Maat = 2 dubbele mm.

vergelijking der kromme $y = -\frac{12}{x}$, waarvoor men ook schrijven kan $y = \frac{12}{-x}$, dan wordt elk punt der bijbehoorende grafiek verkregen, door de abscissen naar links in plaats van naar rechts (en omgekeerd) uit te zetten, terwijl dan de ordinaten onveranderd blijven. Dit komt daarop neer, dat men de kromme uit de voorgaande § **spiegelt** t. o. v. de Y-as. Men kan ook zeggen, dat fig. 31 omgevouwen moet worden langs de Y-as. Schrijft men voor de gegeven vergelijking $-y = \frac{12}{x}$, dan blijkt de grafiek ook te ontstaan door spiegeling t. o. v. de X-as.

De coördinaatassen blijven asymptoten en O is ook hier weer middelpunt. De takken der kromme liggen nu resp. in 't tweede en vierde kwadraat.

Samenvattend kunnen wij zeggen: *de grafiek van* $y = \frac{a}{x}$, waarin a een reëel getal is, verschillend van nul, **is een orthogonale hyperbool,** *die* **O** *tot* **middelpunt** *en de* **coördinaatassen** *tot* **asymptoten** *heeft.*

§ 33. *Translatie der vergelijking* $y = \frac{a}{x}$.

a. Kiest men $\overline{O}(-3; -5)$ tot nieuwe oorsprong, dan zijn de transformatieformules:

$$\begin{cases} x = \overline{x} - 3 \\ y = \overline{y} - 5 \end{cases}$$

en gaat $xy = 12$ over in:

$$\begin{aligned} &(\overline{x} - 3)(\overline{y} - 5) = 12; \\ &\overline{xy} - 5\overline{x} - 3\overline{y} + 15 = 12; \\ &\overline{xy} - 3\overline{y} = 5\overline{x} - 3; \\ &(\overline{x} - 3)\overline{y} = 5\overline{x} - 3; \\ &\overline{y} = \frac{5\overline{x} - 3}{\overline{x} - 3}. \end{aligned}$$

Denkt men zich 't oude assenkruis weg, dan kunnen de — — vervallen en vinden we:

de vergelijking der orthogonale hyperbool t. o. v. 't nieuwe assenkruis is: $y = \frac{5x - 3}{x - 3}$.

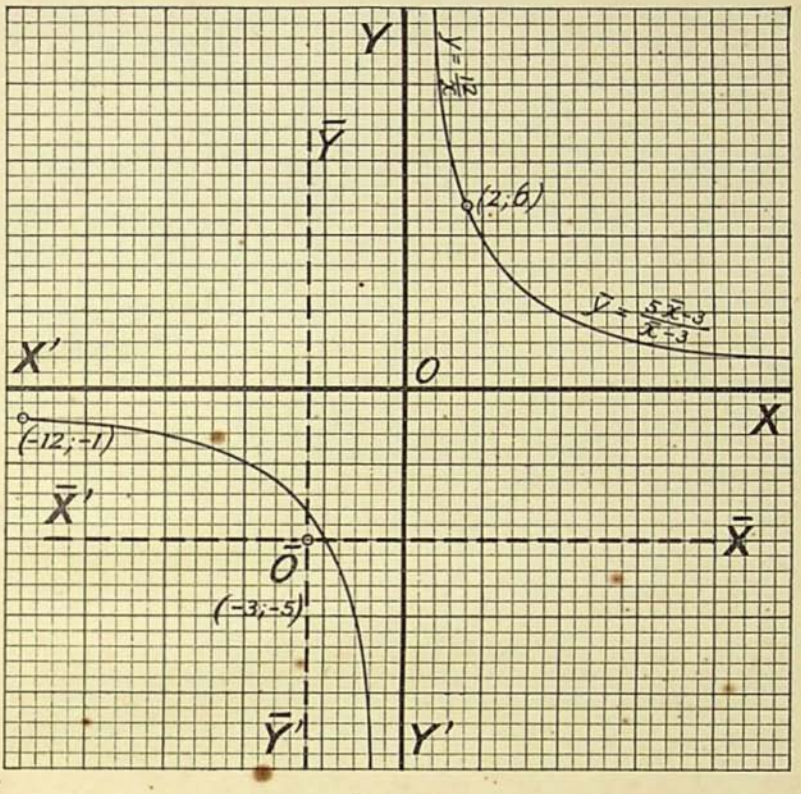

Fig. 33.
Maat = 2 dubbele mm.

b. Kiest men als nieuwe oorsprong P(5; 4) dan zijn de transformatieformules:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + 5 \\ y = \bar{y} + 4 \end{cases}$$

en wordt de vergelijking:

$$y = \frac{-4x - 8}{x + 5}.$$

c. Ten opzichte van Q(2; —1) blijkt de vergelijking te zijn:

$$y = \frac{x + 14}{x + 2}.$$

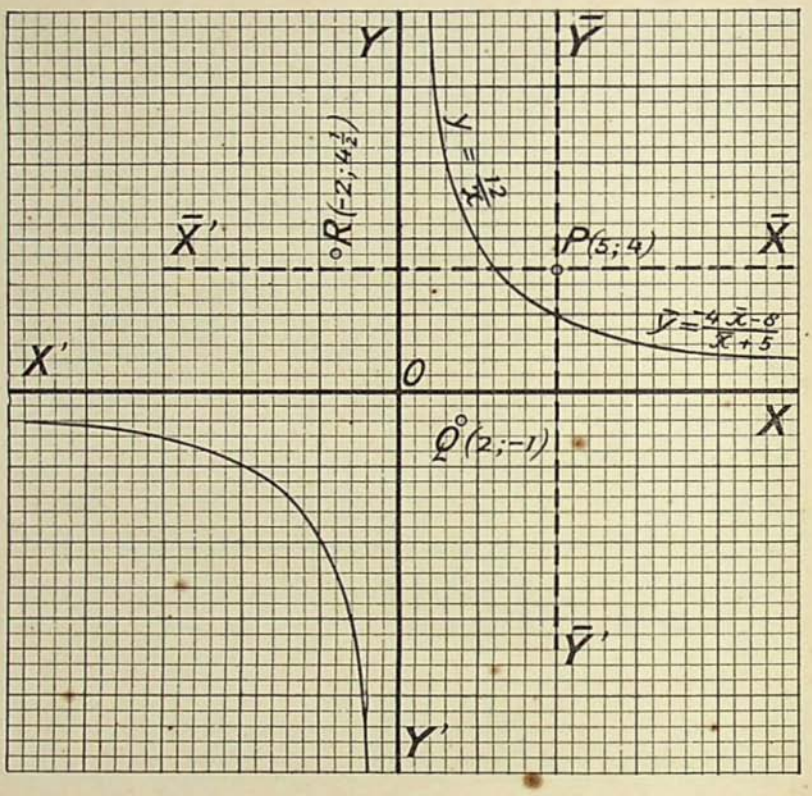

Fig. 34.
Maat = 2 dubbele mm.

d. Voor R(—2; $4\frac{1}{2}$) wordt de vergelijking:

$$y = \frac{-9x + 42}{2x - 4}.$$

Al deze vergelijkingen zijn van 't type $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Wij vermoeden dus, dat de grafiek van de gebroken lineaire functie steeds een orthogonale hyperbool is.

§ 34. **Onderzoek van** $\mathbf{y = \frac{ax + b}{cx + d}}$.

Het aan 't slot der voorgaande § uitgesproken vermoeden zal juist blijken te zijn, indien $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ zich door transformatie laat herleiden tot $y = \frac{k}{x}$.

Kiezen wij als nieuwe oorsprong $\overline{O}(p; q)$, dan zijn de transformatieformules:

$$\begin{cases} x = \overline{x} + p \\ y = \overline{y} + q. \end{cases}$$

Substitueert men deze waarden in $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, dan blijkt de vergelijking, na uitwerking en weglating der — —, te worden:

$$cxy + (cp + d)y + (cq - a)x = ap + b - cpq - dq \quad . \quad (1)$$

Zal deze vergelijking van den vorm $xy = k$ zijn, dan moet:

$$cp + d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en

$$cq - a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zijn, waaruit volgt:

$$p = -\frac{d}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en

$$q = \frac{a}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Daar $c \neq 0$ moet zijn, blijken p en q steeds eindig te zijn, waarmee 't gestelde bewezen is.

§ 35. De afgeleide formules zijn niet noodig voor 't teekenen van de grafiek. Zij behoeven dus niet gememoriseerd te worden. Daarom zijn de waarden voor p en q ook niet gesubstitueerd in 't rechterlid van (1).

Nu wij weten, dat $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ steeds een orthogonale hyperbool voorstelt, kunnen de asymptoten en 't middelpunt eenvoudiger bepaald worden.

Voor de punten, die liggen op dat gedeelte der kromme, dat nadert tot de verticale asymptoot neemt de absolute waarde van y steeds toe, dus ook 't rechterlid. De teller daarvan neemt slechts langzaam toe (of af) voor waarden van x in de nabijheid en aan denzelfden kant der asymptoot gelegen, dus moet de noemer steeds kleiner worden. Voor zeer groote waarden van y moet de noemer zeer klein worden. Ten slotte nadert y tot oneindig groot, dus de noemer tot nul. De ver-

gelijking der asymptoot wordt nu gevonden door de noemer gelijk aan nul te stellen.

Dit geeft als *vergelijking der* **verticale** *asymptoot.*

$$cx + d = 0.$$

Voor de *abscis van 't* **middelpunt**, dat immers op deze asymptoot ligt, volgt hieruit: $x = -\frac{d}{c}$, welke uitkomst reeds in de vorige §, formule (4), langs anderen weg gevonden werd.

Van $y = \frac{-4x + 12}{x + 5}$ is dus de verticale asymptoot $x + 5 = 0$ of $x = -5$.

Om de **horizontale** *asymptoot* te vinden, laten wij de x

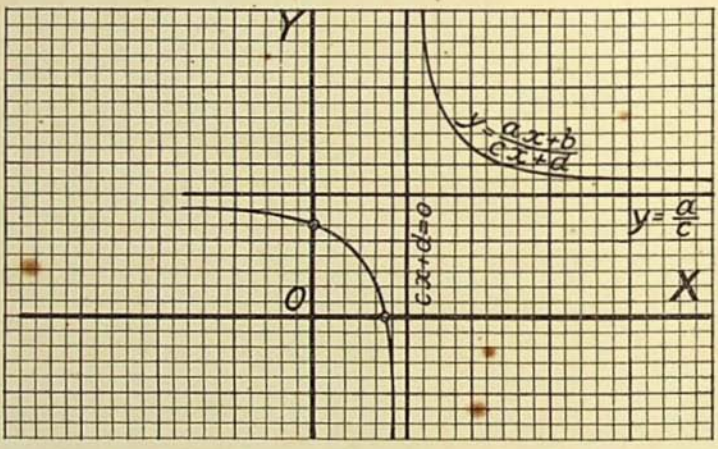

Fig. 35.

tot ∞ naderen. Ter bepaling van de limiet, waartoe y nadert, deelen wij eerst teller en noemer door x en krijgen dus:

$$y = \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}}.$$

Voor $x = \infty$ gaat dit over in:

$$y = \frac{a}{c}.$$

De *ordinaat van 't* **middelpunt** is dus $y = \frac{a}{c}$. (Zie § 34, formule (5)).

Van $y = \dfrac{-4x + 12}{x + 5}$ is dus de horizontale asymptoot

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x + 12}{x + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{-4 + \frac{12}{x}}{1 + \frac{5}{x}} = -4.$$

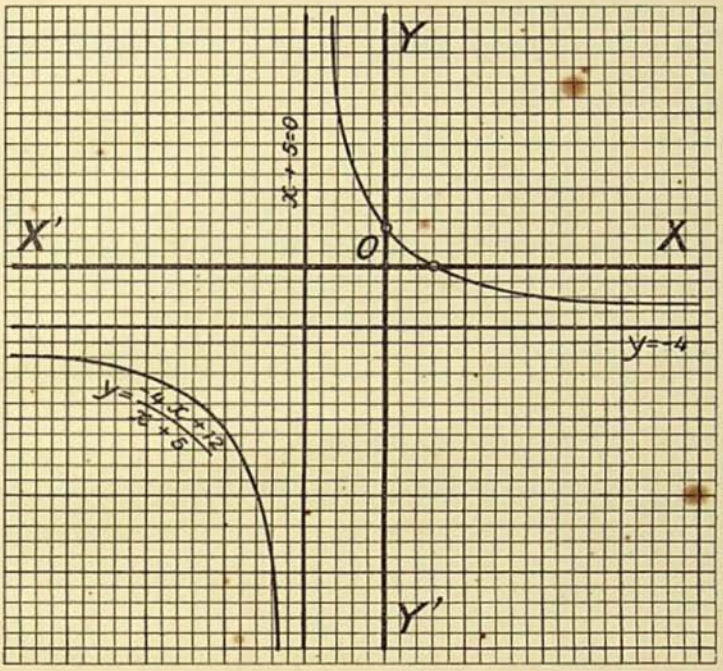

Fig. 36.
Maat = 1 dubbele mm.

Men kan de horizontale asymptoot op dezelfde manier vinden als de verticale, door x uit te drukken in y.

Voor $y = \dfrac{-4x + 12}{x + 5}$ b.v. wordt dit:

$$\begin{aligned} y(x + 5) &= -4x + 12; \\ xy + 5y &= -4x + 12; \\ xy + 4x &= -5y + 12; \\ x(y + 4) &= -5y + 12; \end{aligned}$$

$$x = \frac{-5y + 12}{y + 4}.$$

Op overeenkomstige wijze redeneerende als voor de verticale vinden wij hieruit voor de horizontale asymptoot

$$y + 4 = 0, \quad y = -4.$$

De eerste manier voert echter sneller tot het doel en wordt dus steeds toegepast.

Het teekenen van de grafiek biedt nu geen moeilijkheden meer.

Men bepaalt:

1°. de verticale asymptoot.

2°. de horizontale asymptoot.

3°. een voldoend aantal punten, b.v. 6 rechts en ook 6 links van de verticale asymptoot. Het verdient aanbeveling de snijpunten met de assen afzonderlijk te bepalen.

De gevonden punten worden uit de hand door een vloeiende kromme verbonden.

§ 36. *Eenige nadere beschouwingen.*

Hiervoor kiezen wij vraagstuk 3 van 't Eindexamen H. B. S. en A. M. S. 1932.

Dit luidde:

Gegeven de functie $y = \frac{9x - 3b}{2x + 8}$.

Indien men deze functie in een rechthoekig assenstelsel grafisch voorstelt, vraagt men:

a. In welke punten de kromme lijn de assen snijdt.

b. Voor welke waarde van x, y oneindig groot wordt.

c. De plaats van de asymptoot, die evenwijdig loopt aan de y-as.

d. Tot welke waarde y nadert, als x nadert tot oneindig.

e. De plaats van de asymptoot, die evenwijdig loopt aan de x-as.

f. Het beloop van de kromme, als x de waarde -4 passeert.

g. De veranderingen in het teeken van y, als x alle waarden van negatief oneindig tot positief oneindig doorloopt; in het bizonder als x de waarden -4 en $+4$ passeert.

h. De teekening van de kromme, met inachtneming van de antwoorden op de voorafgaande vragen.

Oplossing. De vragen *a*—*e* kunnen volledig beantwoord worden met behulp van de voorgaande theorie. Wij volstaan

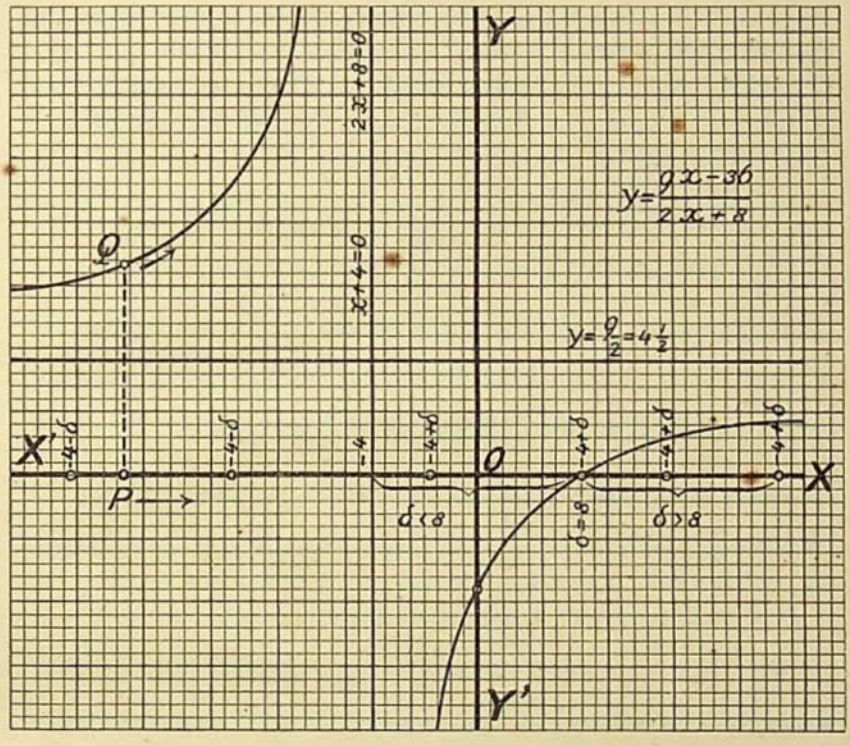

Fig. 37.

Maat = 2 dubbele mm.

dus met de antwoorden. De teekening (vraag *h.*) vindt men in fig. 37.

a. In de punten (4; 0) en (0; $-4\frac{1}{2}$).

b. Voor $x = -4$.

c. $2x + 8 = 0$, $x = -4$.

d. Tot $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$.

e. $y = 4\frac{1}{2}$.

Ter beantwoording van de vragen *f.* en *g.* schrijven wij eerst voor de gegeven functie:

$$y = 4\tfrac{1}{2} - \frac{36}{x+4}.$$

Wij laten nu een punt P de X-as doorloopen van links naar rechts en gaan na hoe 't bijbehoorende punt Q van de grafiek zich beweegt.

Links van $(-4; 0)$ is de abscis van P voor te stellen door $x = -4 - \delta$, rechts daarvan door. $x = -4 + \delta$. Hierin stelt δ een positief getal voor.

$y = 4\tfrac{1}{2} - \frac{36}{x+4}$ gaat voor $x = -4 - \delta$ over in $y = 4\tfrac{1}{2} + \frac{36}{\delta}$; δ is positief, dus $\frac{36}{\delta}$ eveneens. De ordinaat is dus steeds grooter dan $4\tfrac{1}{2}$. Voor δ oneindig groot, is $\frac{36}{\delta}$ oneindig klein, m. a. w. $y = 4\tfrac{1}{2}$ is de vergelijking der horizontale asymptoot (reeds bóven gevonden). Neemt δ af, dan neemt $\frac{36}{\delta}$ toe, de ordinaat wordt dus steeds grooter. Als $\delta \to 0$, nadert $\frac{36}{\delta}$ tot ∞. Komt dus P aan in $(-4; 0)$, dan is Q oneindig ver weg gelegen op de kromme, maar ligt tevens op de verticale asymptoot.

Is P 't punt $(-4; 0)$ gepasseerd, dan wordt $x = -4 + \delta$ en $y = 4\tfrac{1}{2} - \frac{36}{\delta}$. Aanvankelijk is δ zeer klein, dus $\frac{36}{\delta}$ zeer groot en 't verschil $4\tfrac{1}{2} - \frac{36}{\delta}$ een negatief getal met zeer groote absolute waarde.

Wordt δ grooter, dan neemt $\frac{36}{\delta}$ af en 't verschil $4\tfrac{1}{2} - \frac{36}{\delta}$ dus toe. Voor $\delta < 8$, is $\frac{36}{\delta} > 4\tfrac{1}{2}$, dus y negatief, voor $\delta = 8$ is $y = 0$ en voor $\delta > 8$ is y positief en neemt steeds toe, blijft echter kleiner dan $4\tfrac{1}{2}$. Is $\delta < 8$, dan ligt P tusschen -4 en $+4$, voor $\delta = 8$, passeert P 't punt $(+4; 0)$, is $\delta > 8$, dan bevindt P zich rechts van $+4$.

't Punt Q bevindt zich dus aanvankelijk beneden de X-as, passeert voor $x = +4$ die as en bevindt zich daarna boven de x-as. Het nadert asymptotisch tot de lijn $y = 4\tfrac{1}{2}$.

Samenvattend kunnen wij zeggen: *f.* passeert x (van links naar rechts gerekend) de waarde -4, dan springt de functie van $+\infty$ naar $-\infty$.

De toevoeging „van links naar rechts gerekend" is niet overbodig; laat men P zich in tegengestelde richting bewegen, dan blijkt de functie bij 't passeeren van -4 te springen van $-\infty$ naar $+\infty$.

g. Doorloopt x alle waarden van $-\infty$ tot $+\infty$, dan is y aanvankelijk positief en $> 4\frac{1}{2}$ en neemt steeds toe. Bij 't passeeren van -4 springt de functie van $+\infty$ naar $-\infty$, neemt dan weer toe (dus aanvankelijk in absoluten zin af), wordt voor $x = +4$ gelijk aan nul en is voor $x > 4$ positief, doch $< 4\frac{1}{2}$. Zij nadert asymptotisch tot $4\frac{1}{2}$ (van den kleinen kant).

§ 37. *Vraagstukken.*

1. Behandel op overeenkomstige wijze als in de voorgaande § de volgende functies:

   a. $y = \dfrac{2x + 4}{x - 3}$ (neem als maat 2 dubbele mm).

   b. $y = \dfrac{3x + 5}{2x + 1}$ (maat 4 dubbele mm).

   c. $y = \dfrac{-x + 1}{4x - 6}$ (idem).

   d. $y = \dfrac{\frac{1}{2}x - 4}{x - 1}$ (idem).

2. Teeken de grafiek van

   $$2xy - x + 5y + 3 = 0.$$

   Dit is de impliciete vorm van de gebroken lineaire functie. Druk dus eerst y uit in x.

3. Teeken en bereken de snijpunten van:

   $$2xy - x + 5y + 3 = 0$$

   en de rechten:

   a. $x + 2y - 5 = 0$.

   b. $2x - y - 6 = 0$.

   c. $x = 1$.

   d. $3x - 1 = 0$.

4. Teeken en bereken de snijpunten van:

   $$y = x^2 - 4x - 5 \text{ en } y = \frac{x - 49}{x + 5}.$$

HOOFDSTUK VI.

EENIGE ANDERE FUNCTIES.

§ 38. In 't voorgaande gingen wij uit van de functie; de grafiek werd daaruit afgeleid. Wij ontmoetten daarbij de

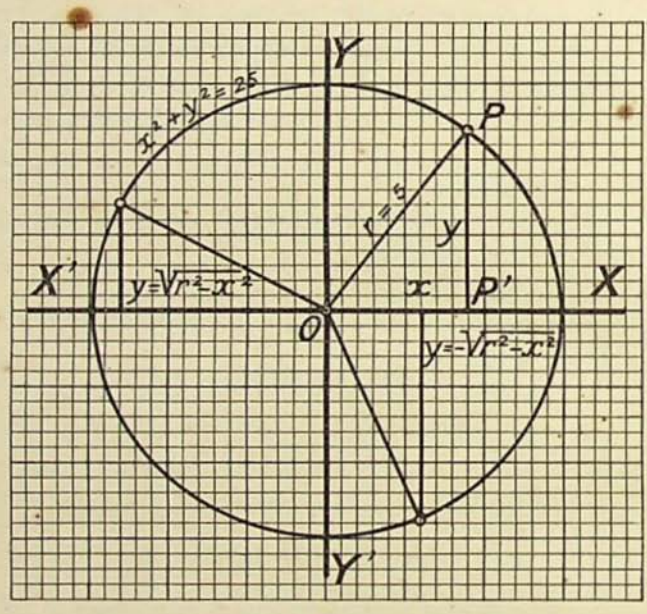

Fig. 38.
Maat = 3 dubbele mm.

rechte lijn, de parabool, enz., maar niet de ons reeds lang bekende cirkel. Dit is niet vreemd: van te voren weten wij immers niet, welke vorm de grafiek zal hebben.

Wij gaan nu de volgorde omkeeren en vragen: van welke functie is een gegeven kromme lijn de grafiek? In 't algemeen is dit een zeer moeilijk vraagstuk.

Als eenvoudig voorbeeld kiezen wij den cirkel, die we aanvankelijk zoo gunstig mogelijk kiezen, d. i. met 't middelpunt in O.

Zij P een punt van den cirkel O, $OP = r = 5$, $PP' \perp OX$, $OP' = x$, $PP' = y$.

Uit den rechthoekigen driehoek POP' volgt nu onmiddellijk $x^2 + y^2 = r^2 = 25$. Dit geldt voor ieder punt van den cirkel, onverschillig in welk kwadrant. (Let op de snijpunten met de assen).

De impliciete vorm der functie is dus eenvoudig genoeg, maar de expliciete vorm is vrij samengesteld: $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

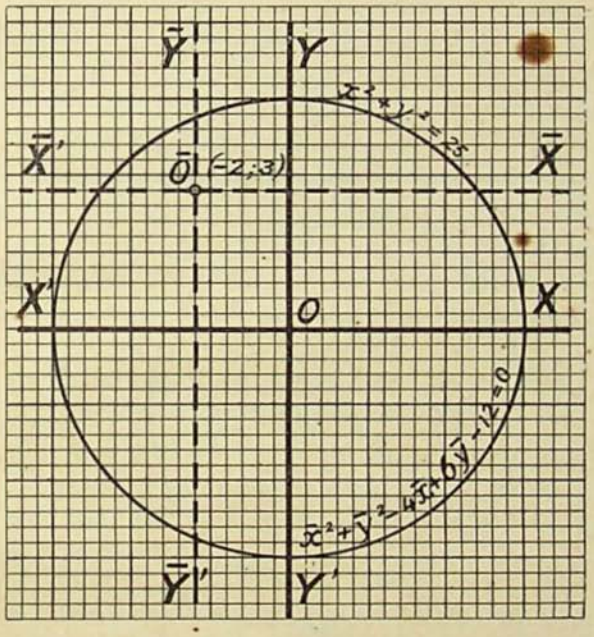

Fig. 39.
Maat = 3 dubbele mm.

Achteraf is 't nu duidelijk, dat wij volgens de vroegere methode te werk gaande, niet licht den cirkel zullen ontmoeten.

§ 39. *Invloed van de translatie op de vergelijking van den cirkel.*

Verschuiven wij 't assenkruis naar 't punt $\bar{O}(-2; 3)$, dan zijn de transformatieformules $x = \bar{x} - 2$ en $y = \bar{y} + 3$.

Substitutie in $x^2 + y^2 = r^2 = 25$ geeft:

$(\bar{x} - 2)^2 + (\bar{y} + 3)^2 = 25$ of $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 4\bar{x} + 6\bar{y} - 12 = 0$.

Wij merken op:

1°. dat 't linkerlid van den tweeden graad is t. o. v. x en y;

2°. dat x^2 en y^2 *gelijke* coëfficiënten hebben;

3°. dat de term met xy ontbreekt.

Kiezen wij als oorsprong een willekeurig punt $(a; b)$, dan zijn de transformatieformules $x = \overline{x} + a$ en $y = \overline{y} + b$, dus gaat $x^2 + y^2 = r^2$ over in $(\overline{x} + a)^2 + (\overline{y} + b) = r^2$ of $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + 2a\overline{x} + 2b\overline{y} + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. (Denkt men zich het

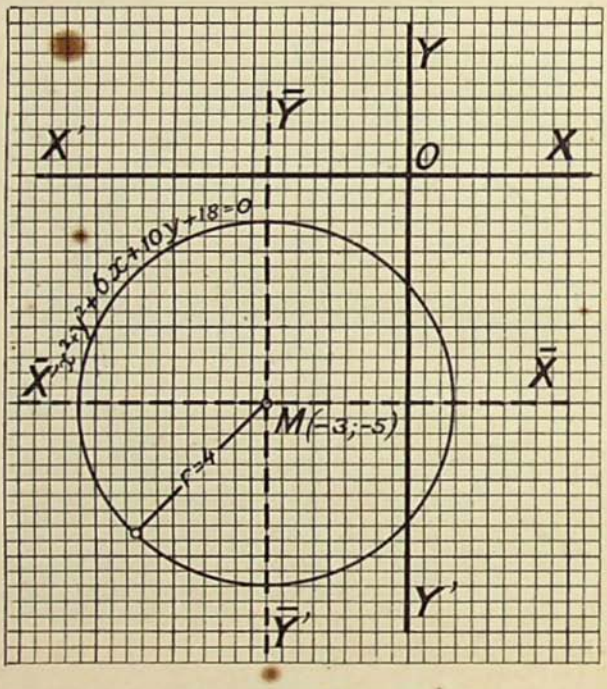

Fig. 40.
Maat = 3 dubbele mm.

oude assenkruis weg, dan kunnen weer de — — verdwijnen).

Wij vragen ons nu af, of een vergelijking, die aan bovengenoemde drie voorwaarden voldoet, een cirkel tot grafiek heeft.

Als voorbeeld nemen wij:

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 18 = 0.$$

Noemen we de coördinaten van 't middelpunt voorloopig $(p; q)$ en verschuiven wij O naar $(p; q)$, dan zijn de transformatieformules $x = \overline{x} + p$ en $y = \overline{y} + q$. Substitutie in de

gegeven vergelijking doet deze overgaan in $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + (2p + 6)\overline{x} + (2q + 10)\overline{y} + p^2 + q^2 + 6p + 10q + 18 = 0$, waarin men nu de — — kan weglaten. Zal deze vergelijking een cirkel voorstellen, dan moet zij overeenstemmen met $x^2 + y^2 = r^2$.

Voor x^2 en y^2 is 't in orde; de termen van den eersten graad moeten wegvallen, dus moet $2p + 6 = 0$ en $2q + 10 = 0$, waaruit volgt: $p = -3$ en $q = -5$. De vorm $p^2 + q^2 + 6p + 10q + 18$ wordt voor de gevonden waarden van p en q gelijk aan -16. De vergelijking gaat dus over in $x^2 + y^2 - 16 = 0$ of $x^2 + y^2 = 16$, waaruit volgt, dat zij een cirkel voorstelt met straal 4 en middelpunt $(-3; -5)$. Zie fig. 40.

Behandelt men de vergelijking $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$ op dezelfde wijze, dan vindt men $p = 1$, $q = -3$ en gaat de vergelijking over in $x^2 + y^2 = 0$. Alleen de coördinaten van 't middelpunt (nieuwe oorsprong) voldoen hieraan. De vergelijking stelt dus alleen dit punt voor. Naar analogie van 't voorafgaande noemt men dit punt vaak een puntcirkel.

Onderzoekt men $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 28 = 0$, dan blijkt $p = 1$, $q = 4$ te zijn; de vergelijking gaat echter over in $x^2 + y^2 = -11$. 't Linkerlid is steeds positief (of nul), 't rechterlid is negatief, dus voldoet geen enkel punt aan de vergelijking. Om in overeenstemming met 't voorafgaande te blijven zegt men wel, dat zij een imaginaire cirkel met reëel middelpunt voorstelt.

Opgave. De cirkel met $(a; b)$ tot middelpunt en r tot straal heeft tot vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Laat dit zien met een figuur en controleer 't aan de besproken cirkels.

§ 40. *Snijpunten van een cirkel en de assen.*

De snijpunten van een cirkel en een rechte lijn, beide door hun vergelijkingen gegeven, kan men vinden door de grafieken te teekenen en daaruit de coördinaten van de eventueele snijpunten af te lezen. In verreweg de meeste gevallen komt dit neer op een ruwe benadering en daarom geeft men aan de algebraïsche wijze ('t bepalen van de gemeenschappelijke wortels van de beide vergelijkingen) de voorkeur.

De eenvoudigste rechten (wat de ligging aangaat) zijn wel de assen.

a. Bepaal de snijpunten van de assen met den cirkel $x^2 + y^2 = 9$.

Oplossing. De vergelijking van de X-as is $y = 0$. Om dus de snijpunten van de X-as en den gegeven cirkel te vinden moet men oplossen 't stelsel

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 0. \end{cases}$$

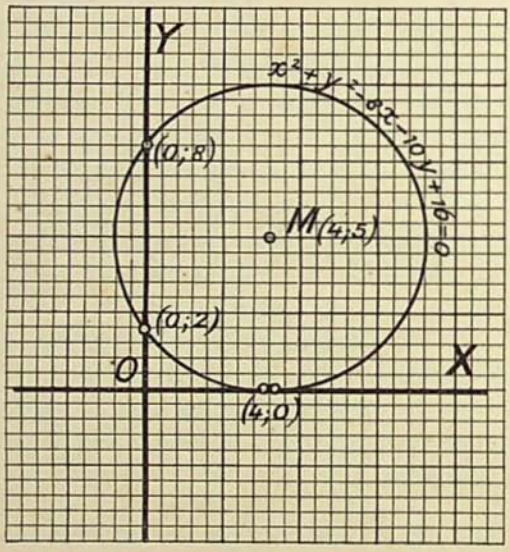

Fig. 41.
Maat = 2 dubbele mm.

Substitutie van $y = 0$ in $x^2 + y^2 = 9$ geeft $x^2 = 9$, $x_1 = +3$; $x_2 = -3$. De gevraagde punten zijn dus (3; 0) en (—3; 0). Bepaal nu zelf de snijpunten met de Y-as.

b. In welke punten wordt de cirkel $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$ door de assen gesneden?

Oplossing. De snijpunten met de Y-as worden bepaald door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Voor $x = 0$ gaat de eerste vergelijking over in $y^2 - 10y + 16 = 0$, dus $y_1 = 2$, $y_2 = 8$. De snijpunten zijn (0; 2) en (0; 8).

De gemeenschappelijke punten van den cirkel en de X-as vindt men uit $x^2 - 8x + 16 = 0$. Hiervan zijn x_1 en x_2 beide gelijk aan 4, de twee snijpunten vallen dus samen, m. a. w. de cirkel en de X-as raken elkaar in 't punt (4; 0).

c. Voor de snijpunten van den cirkel $x^2 + y^2 - 7x - 4y + 10 = 0$ met de X-as vindt men (2; 0) en (5; 0).

Voor die met de Y-as moet men oplossen $y^2 - 4y + 10 = 0$.

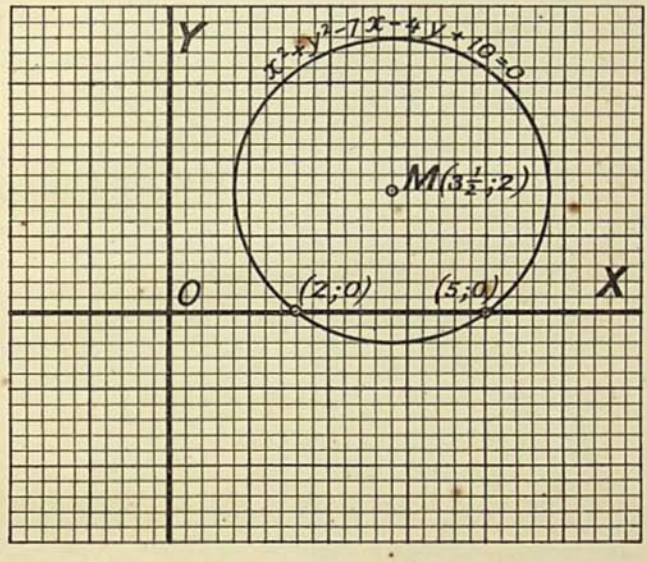

Fig. 42.
Maat = 4 dubbele mm.

Deze laatste vergelijking heeft echter geen reëele wortels, zoodat de cirkel en de Y-as elkaar **niet snijden.**

Opgave. Bepaal van de besproken cirkels 't middelpunt en den straal.

§ 41. *Snijpunten van een cirkel en een willekeurige lijn.*

Deze worden op overeenkomstige wijze bepaald; alleen zijn de berekeningen ingewikkelder.

Voorbeeld. Bepaal de snijpunten van $x - y - 1 = 0$ en $x^2 + y^2 + 4x - 18y + 5 = 0$.

Oplossing. Om de ordinaten der gevraagde punten te bepalen, leidt men uit de eerste vergelijking af $x = y + 1$. Dit ingezet in de tweede vergelijking geeft na herleiding $y^2 - 6y + 5 = 0$, dus $y_1 = 1$, $y_2 = 5$. Met behulp van $x = y + 1$ vindt men nu $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. De gevraagde punten zijn dus (2; 1) en (6; 5).

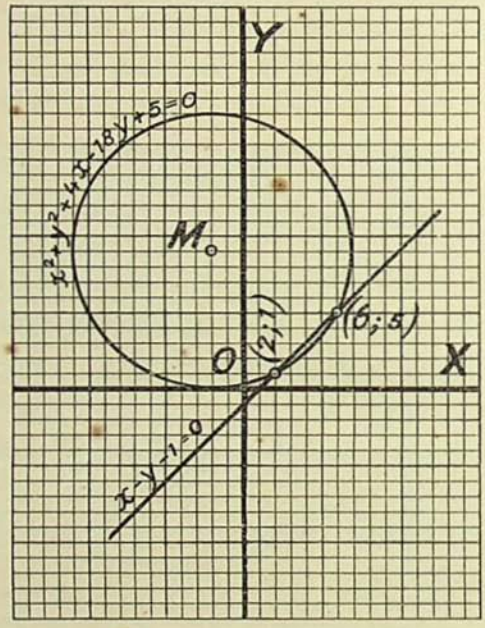

Fig. 43.
Maat = 1 dubbele mm.

§ 42. *De snijpunten van twee cirkels.*

Laten twee cirkels gegeven zijn door hun vergelijkingen b.v. $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ en $x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$, dan vindt men hun snijpunten (zoo deze er zijn) met behulp van de grafieken. Om de reeds eerder genoemde reden lost men echter liever op 't stelsel:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + qx + by + c = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (1) \\ x^2 + y^2 + px + qy + r = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (2) \end{cases}$$

Door aftrekking vindt men:

$$(a - p)x + (b - q)y + c - r = 0 \quad . \ . \ . \quad (3)$$

Daar deze vergelijking van den eersten graad in x en y is,

stelt zij een rechte voor. Wij zullen hiervan eerst de beteekenis onderzoeken.

Laat $S_1(x_1; y_1)$ een der gezochte snijpunten zijn, dan voldoen x_1 en y_1 beide aan (1) en (2), dus gaan (1) en (2) door substitutie over in resp. $x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0$ en $x_1^2 + y_1^2 + px_1 + qy_1 + r = 0$, waarin x_1 en y_1 nu niet meer onbekende getallen voorstellen, maar bepaalde getallen. Door aftrekking leidt men uit de laatste betrekkingen af $(a - p)x_1 + (b - q)y_1 + c - r = 0$. Hieruit volgt, dat x_1 en y_1 voldoen aan vergelijking (3), m. a. w. $S_1(x_1; y_1)$ is een punt van de rechte, voorgesteld door vergelijking (3). Voor 't tweede snijpunt $S_2(x_2; y_2)$ geldt dezelfde redeneering. De rechte, voorgesteld door (3), gaat dus door S_1 en S_2, of anders gezegd, is de snijlijn der beide cirkels (1) en (2).

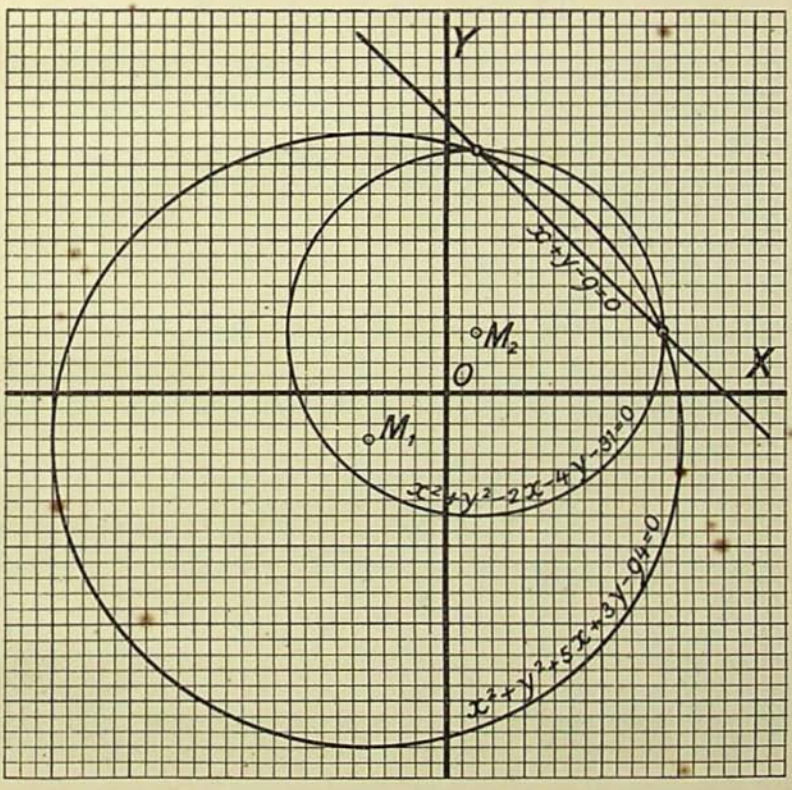

Fig. 44.
Maat = 2 dubbele mm.

't Vraagstuk: „bepaal de snijpunten van twee cirkels" is hiermee teruggebracht tot „bepaal de snijpunten van een cirkel en een rechte". Dit is in de voorgaande § behandeld.

Voorbeelden. *a.* Bepaal de snijpunten van de cirkels:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5x + 3y - 94 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0. \end{cases}$$

Vergelijking (3) wordt hier $7x + 7y - 63 = 0$, dus $x + y - 9 = 0$, waaruit volgt: $x = -y + 9$.

Substitutie in de eerste vergelijking geeft $y^2 - 10y + 16 = 0$, $y_1 = 8$, $y_2 = 2$. Uit $x = -y + 9$ volgt nu $x_1 = 1$, $x_2 = 7$.

De gevraagde snijpunten zijn $S_1(1; 8)$ en $S_2(7; 2)$. Zie fig. 44.

b. Bepaal de snijpunten der cirkels:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 - 20x - 15y + 100 = 0. \end{cases}$$

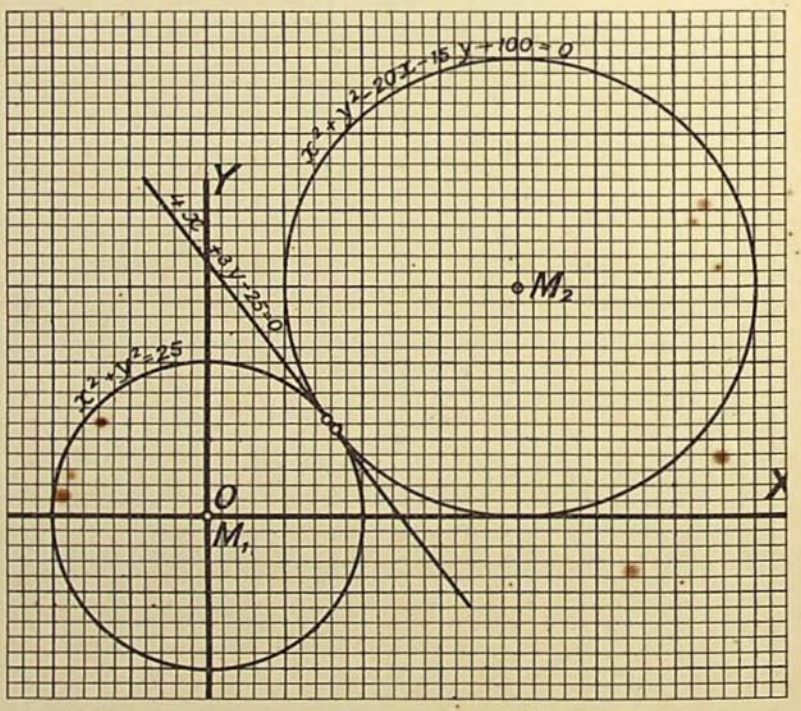

Fig. 45.
Maat = 2 dubbele mm.

Vergelijking (3) wordt hier $4x + 3y - 25 = 0$, waaruit $4x = -3y + 25$. Om breuken te vermijden vervangen we, vóór we substitueeren $x^2 + y^2 - 25 = 0$ door $(4x)^2 + (4y)^2 - -400 = 0$. Vervangen we nu $4x$ door $-3y + 25$, dan vinden we $25y^2 - 150y + 225 = 0$, $y^2 - 6y + 9 = 0$ met $y_1 = 3$, $y_2 = 3$, dus $x_1 = 4$, $x_2 = 4$. De gezochte snijpunten $S_1(4; 3)$ en $S_2(4; 3)$ vallen dus samen, m. a. w. de beide cirkels raken elkaar en vergelijking (3) stelt nu de gemeenschappelijke raaklijn der cirkels voor.

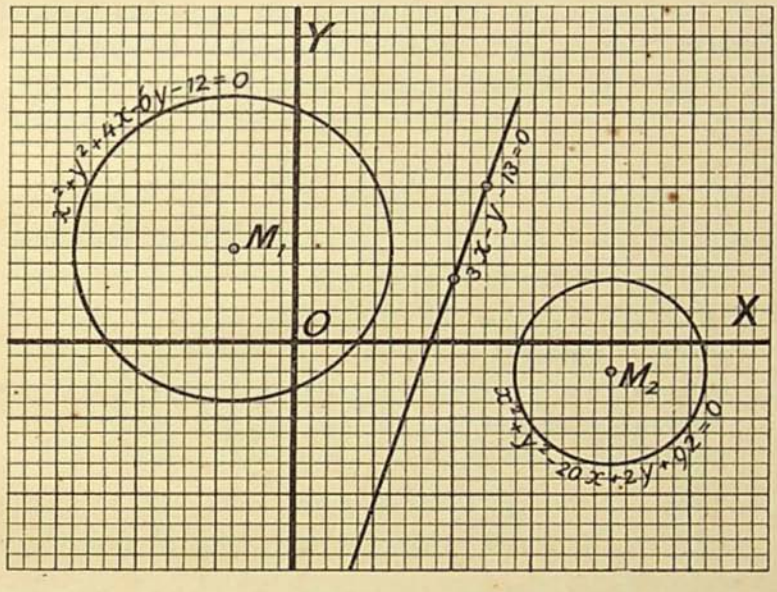

Fig. 46.
Maat = 2 dubbele mm.

c. Bepaal de snijpunten der cirkels:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 20x + 2y + 92 = 0. \end{cases}$$

Vergelijking (3) wordt hier $3x - y - 13 = 0$. Leidt men hieruit af $y = 3x - 13$ en substitueert men deze waarde voor y in $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ dan vindt men $10x^2 - -92x + 235 = 0$. De discriminant hiervan is $46^2 - 10 \times 235 = = -234$, dus negatief. Er zijn dus geen reëele waarden voor x, derhalve ook niet voor y, m. a. w. de cirkels snijden elkaar niet.

Vergelijking (3) stelt echter steeds een rechte lijn voor; op de beteekenis hiervan in voorbeeld *c.* gaan wij hier niet in.

Opmerking. 1°. Een stelsel van twee vergelijkingen van den tweeden graad met twee onbekenden heeft $2 \times 2 = 4$ gemeenschappelijke stellen wortels. Wij zouden dus eigenlijk vier snijpunten moeten vinden. Ook deze moeilijkheid laten wij verder rusten.

2°. 't Bepalen van de snijpunten van een cirkel en een parabool biedt nu geen moeilijkheden meer. 't Aantal snijpunten (zoo die er zijn) bedraagt hoogstens 4, waarvan er echter 2 of 3 of 2×2 of zelfs alle 4 kunnen samenvallen.

§ 43. *Opgaven.*

1. Bepaal van den cirkel $x^2 + y^2 - 8x = 0$ op eenvoudige wijze 't middelpunt. Bereken den straal en de snijpunten met de assen. Wat merkt ge verder op?
   Teeken de grafiek.

2. Onderzoek de onderlinge ligging van den cirkel uit 't vorige vraagstuk en de rechten:

   a. $x - y + 10 = 0.$
   b. $2x + y - 8 = 0.$
   c. $15x - 8y + 8 = 0.$

3. Bepaal de rechten met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$ die raken aan den cirkel uit vraagstuk 1.

   Aanwijzing. De rechten met r.c. $-\frac{3}{4}$ hebben tot vergelijking $y = -\frac{3}{4}x + p$. Bepaal nu p zóódanig, dat de beide snijpunten met den cirkel samenvallen.

4. Bepaal de vergelijkingen der raaklijnen uit 't punt $P(4\frac{1}{2}; 6)$ aan den cirkel uit vraagstuk 1.

   Aanwijzing. De rechten door $P(4\frac{1}{2}; 6)$ kan men voorstellen door $(x - 4\frac{1}{2}) + q(y - 6) = 0$. Verder als in n°. 3.

5. Bepaal de vergelijkingen van de beide cirkels met een straal 5 en die de Y-as raken in 't punt (0; 3).

6. Bepaal de vergelijking van den cirkel, die gaat door de punten P(0; 8), Q(1; 1) en R(8; 2). Bepaal ook de snijpunten met de assen. Wat merkt ge op?

7. Bepaal de vergelijking van den cirkel met straal 4, waarvan 't middelpunt ligt op de lijn $x = 5$ en die raakt aan de rechte $4x - 3y - 12 = 0$.

Aanwijzing. 't Middelpunt van den cirkel kan men stellen M(5; p). De vergelijking van den cirkel wordt dan .... verder als in nº. 3.
Er voldoen twee cirkels.
Bepaal de snijpunten met de assen.

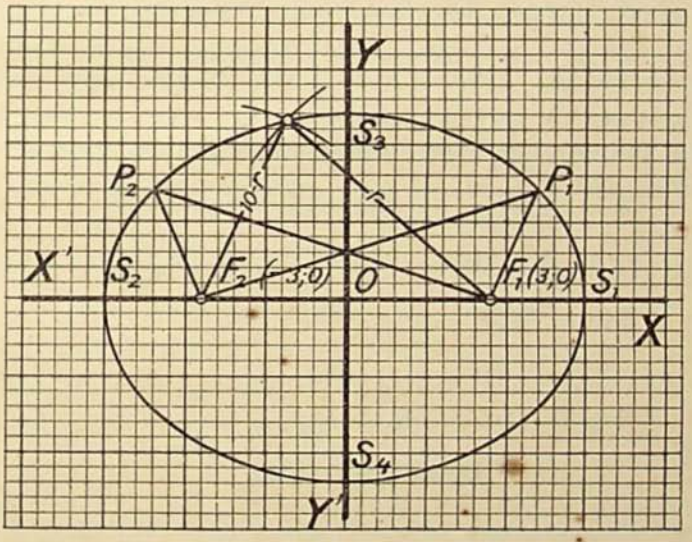

Fig. 47.
Maat = 3 dubbele mm.

§ 44. De ellips.

Wij definieeren de ellips als volgt:

De meetkundige plaats der punten, waarvoor de som der afstanden tot twee gegeven punten constant is, noemt men ellips.

De gegeven punten heeten brandpunten; de lijnen, die een punt der ellips verbinden met de brandpunten, heeten voerstralen. Als voorbeeld kiezen wij de ellips, die tot brandpunten heeft $F_1(3; 0)$ en $F_2(-3; 0)$, terwijl wij voor de som der voerstralen 10 nemen.

Voor $P_1(x_1, y_1)$ geldt:

$$P_1F_2 + P_1F_1 = \sqrt{(x_1 + 3)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 - 3)^2 + y_1^2} = 10.$$

Voor $P_2(x_2, y_2)$:

$$P_2F_2 + P_2F_1 = \sqrt{(x_2 - 3)^2 + y_2^2} + \sqrt{(3 - x_2)^2 + y_2^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - 3)^2 + y_2^2} + \sqrt{(x_2 - 3)^2 + y_2^2} = 10.$$

$[(x - 3)^2$ is immers gelijk aan $(3 - x)^2]$. enz.

Voor alle punten der ellips vinden wij dus:

$$\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = 10.$$

Dit is dus de vergelijking der ellips.

Wij kunnen deze echter rationaal maken als volgt:

$$\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}.$$

$$(x + 3)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} + (x - 3)^2 + y^2.$$

$$20\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = 100 - 12x.$$

$$5\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = 25 - 3x.$$

$$25x^2 - 150x + 225 + 25y^2 = 625 - 150x + 9x^2.$$

$$\mathbf{16x^2 + 25y^2 = 400.}$$

Voor de snijpunten met de assen vinden we:

op de X-as: $S_1(5; 0)$, $S_2(-5; 0)$,

op de Y-as: $S_3(4; 0)$, $S_4(-4; 0)$.

De punten S dragen den naam van toppen.

De afstand S_1S_2 noemt men de groote as der ellips, de afstand S_3S_4 de kleine as.

De lengte der groote as bedraagt 10, is dus gelijk aan de som der voerstralen.

De halve groote as is 5, de halve kleine as is 4.

Men herleidt de vergelijking der ellips vaak als volgt:

$$16x^2 + 25y^2 = 400.$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

't Grondtal van den noemer in de eerste breuk is dus gelijk aan de halve groote as, dat van den noemer in de tweede breuk gelijk aan de halve kleine as.

Het teekenen der ellips gebeurt op de volgende wijze: uit F_1 beschrijft men een cirkel met straal $r < 10$ (doch grooter dan $5 - 3 = 2$), uit F_2 een cirkel met straal $10 - r$. De snijpunten dezer cirkels, die steeds aanwezig zijn (waarom?) zijn punten der ellips. Wanneer men een voldoend aantal punten geconstrueerd heeft, vereenigt men deze uit de hand door een vloeiende kromme.

't Bepalen van de snijpunten van een ellips met een rechte, enz. geschiedt op dezelfde wijze als bij een cirkel en een rechte, enz.

§ 45. Opgaven.

1. Bepaal de snijpunten van de ellips $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ met de rechten:
   a. $3x - 5y = 0.$
   b. $4x + 3y - 24 = 0.$
   c. $16x + 15y - 100 = 0.$

2. Leid uit de vergelijking der ellips in n°. 1 af, dat deze symmetrisch is t. o. v. de coördinaatassen.
   Let ook op de constructie.

3. Bepaal de snijpunten van den cirkel $25x^2 + 25y^2 - 360x + 896 = 0$ met de ellips in n°. 1.

4. Bepaal de vergelijking van de ellips, die tot brandpunten heeft $F_1(12; 0)$ en $F_2(-12; 0)$ en waarvan de groote as 26 is.

5. Waarin gaat de vergelijking van de ellips $16x^2 + 9y^2 = 144$ over als men den oorsprong verplaatst naar 't punt (1; 2)? Zoek de brandpunten van deze ellips.

§ 46. Herhaling en uitbreiding.

1. Bepaal de vergelijking en de grafiek van de rechte met richtingscoëfficiënt 2 door het punt P(—3; 4).
2. Idem van de rechte door Q(3; 5), evenwijdig aan de rechte $2x + y - 8 = 0$.
3. Idem van de rechte, evenwijdig aan $y = 3x - 2$ en gaande door het snijpunt van $x + y = 3$ en $x - y = 1$ (op twee manieren).
4. Los grafisch op de ongelijkheid

$$2x^2 > -x + 15.$$

5. Bepaal de vergelijking der parabool door P(1; 4), Q(0; 3) en R(—1; 6) en waarvan de as evenwijdig is aan de Y-as.
6. Los algebraïsch en grafisch op het stelsel

$$\begin{cases} 8x + 3y = -8 \\ y = x^2 - 2x - 8. \end{cases}$$

7. Van de vergelijking: $x^2 + Ax + 4 = 0$ is de verhouding der wortels gelijk aan: $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$. Bereken A als bovendien gegeven is, dat A een negatief getal voorstelt. Teeken daarna de grafische voorstelling van de functie: $y = x^2 + Ax + 4$, waarin A de gevonden waarde heeft. Voor welke waarden van x is het eerste lid der vergelijking negatief en voor welke waarde van x heeft dat eerste lid de kleinste waarde?

(Examen Eur. onderwijzer, Ned. Indië, 1930).

8. Los op het stelsel vergelijkingen:

$$3x - 4y = 4$$
$$4y = x^2 - 4x - 12.$$

Beschouw daarna de y in bovenstaande vergelijkingen als functies van x, teeken de grafieken en verklaar het resultaat. (Idem, 1931).

9. De vorm $y = ax^2 + abx + a^2 - 7$ bereikt haar maximumwaarde 5 voor $x = 1$. Bepaal a en b en maak een grafische voorstelling van den vorm. (Idem, 1932).

10. Los algebraïsch en grafisch op:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$$

11. Idem:
$$\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x. \end{cases}$$
In woorden: Zoek een paar getallen, die elkaars kwadraten zijn. Hoeveel reëele paren zijn er? En hoeveel complexe?

12. Idem:
$$\begin{cases} y = \dfrac{3x - 1}{2x - 3} \\ y = \dfrac{4x}{3x - 5}. \end{cases}$$

13. De cirkel $x^2 + y^2 + 5x - 7y = 0$ gaat door O. Leid dit af uit de vergelijking. Hoe groot is r?

14. Los algebraisch en grafisch op:
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 - 10y = 0. \end{cases}$$

15. Idem:
$$\begin{cases} (x - 3)(x - y - 2) = 0 \\ x^2 + y^2 - 10y = 0. \end{cases}$$

16. Eveneens:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0. \end{cases}$$

17. Teeken de grafiek van: $y = x^3 - x$.

18. En van: $y^2 = x(x - 6)^2$.

19. Stel grafisch voor de functie:
$$y = \frac{1}{1 + x^2}.$$
Welke lijn treedt op als as van symmetrie?

20. Eveneens:
$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 2}.$$
Toon aan, dat de functie steeds positief is.

21. Onderzoek en teeken de kromme, die de grafiek is van de functie:

$$y = \frac{(2x+1)^2}{x+1}.$$

Bepaal de maximum- en de minimumwaarde der functie, benevens de waarden van x, waarvoor ze bereikt worden.
(Staatsexamen, 1929).

22. Als in n°. 21 voor de functie:

$$y = \frac{x^2+x+1}{x}.$$

(Id., id.).

23. Bepaal het beloop van de functie:

$$y = 2\frac{x-1}{(x-2)^2},$$

en maak er een grafische voorstelling van. Voor welke waarde van x bereikt deze functie een uiterste waarde?
(Sted. Gymnasium, Groningen, 1928).

24. Bepaal de extreme waarde(n) van:

$$y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+9}.$$

Voor welke waarden van x is y positief, negatief of nul? Maak een grafische voorstelling van het verloop der functie.
(St Thomas College, Venlo, 1928).

25. Bepaal van de functie:

$$y = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4x-5}$$

a. maximum en minimum, als die aanwezig zijn;
b. snijpunten met de assen;
c. asymptoten.
Teeken de grafische voorstelling. (Staatsexamen, 1928).

26. Bepaal a zoodanig, dat het maximum van de functie

$$y = \frac{2x^2+ax+5}{x^2+3}$$

gelijk is aan 3. Maak daarna een grafische voorstelling van de functie. (Id. 1929).

27. Schets het verloop van de functie

$$y = \frac{(x-1)^2 + p}{x^2 - 2x - 15} \quad (p > 0)$$

in het interval $-3 \leqslant x \leqslant +5$. Voor welke waarde van p heeft het hiermee in verband staande extreem de waarde -1? (Id., id.).

28. Verdeel een gegeven lijnstuk a in twee deelen x en y, zóó dat de waarde $5x^2 + 8y^2$ zoo klein mogelijk is en wat is die kleinste waarde? Ook grafisch toelichten.
(Sted. Gymn., Utrecht, 1928).

29. Onderzoek: $y = 2^x$.

30. Teeken de kromme $y = {}^2\log x$. Laat uit de figuur zien, dat $\log \frac{a+b}{2} \neq \frac{\log a + \log b}{2}$ (Interpoleeren!).

Dr. L. YNTEMA, A. J. DREWES B.Fzn. en TH. B. BLOTEN

ALGEBRA

VOOR VOORBEREIDEND HOOGER EN MIDDELBAAR ONDERWIJS

Eerste deel, ingenaaid f 1,90, gebonden . 3e druk f 2,10
Tweede deel, ingenaaid - 1,90, gebonden . 2e druk - 2,10
Derde deel, ingenaaid - 2,25, gebonden . 2e druk - 2,50
Vierde deel, ingenaaid - 2,25, gebonden . . . . - 2,50

VOOR LEERAREN ZIJN ANTWOORDEN
OP AANVRAAG GRATIS VERKRIJGBAAR

Nieuw is het, nieuw en frisch. Naast den indruk van oorspronkelijkheid maakt het ook den indruk, dat het met zorgvuldigheid is geschreven.
Chr. M. O.

W. REINDERSMA

INLEIDING TOT DE VLAKKE MEETKUNDE

Met 93 zwarte en gekleurde figuren

Prijs, ingenaaid f 1,75, gebonden . . . . 3e druk f 1,90

BEKNOPT LEERBOEK DER VLAKKE MEETKUNDE

VOOR LYCEA, GYMNASIA, H. B. S. EN KWEEKSCHOLEN

Met 246 figuren

Prijs, ingenaaid f 3,25, gebonden . . . . 4e druk f 3,50

Voor een behoorlijk aantal vraagstukken is zorg gedragen. Het boek ziet er goed verzorgd uit. Wij kunnen het zonder voorbehoud aanbevelen.
Het Onderwijs.

AANVULLINGEN OP
GRAFISCHE VOORSTELLINGEN
VOOR HET MIDDELBAAR ONDERWIJS
DOOR L. C. VOGEL

Door de plaatsing van *L. C. Vogel, Grafische Voorstellingen* op de uniforme boekenlijst voor de H. B. S. zijn enkele aanvullingen noodzakelijk geworden, die hieronder zijn afgedrukt. Van deze gelegenheid werd tevens gebruik gemaakt ook nog enkele verbeteringen aan te geven, die de gebruikers, voorzoover dit noodig mocht blijken, op de betreffende plaatsen zouden kunnen aanbrengen.

Aan 't eind van § 16 (pag. 31) toevoegen:

Opgaven.

1. Welke lijn met r.c. $-\frac{2}{3}$ gaat door 't punt (3; 2)? Teeken de grafiek.
2. Een rechte lijn gaat door de punten (2; 1) en (— 1; 5). Bepaal de impliciete vorm van haar vergelijking.
3. De grafiek van $2x + 3y - 1 = 0$ gaat door 't punt $(5; p)$. Bepaal p.
4. De rechte $3x - 4y + 12 = 0$ gaat door 't punt $(2p; 3p)$. Hoe groot is p?
5. Welke rechte gaat door 't snijpunt der lijnen $x + 4y - 9 = 0$ en $3x + y - 5 = 0$ en tevens door 't punt (5; 4)?
6. Bepaal de vergelijking der rechte, die evenwijdig loopt met $x - y + 8 = 0$ en tegelijk gaat door 't snijpunt der rechten $x + 2y - 1 = 0$ en $4x - 3y + 7 = 0$.

7. Voor welke waarde van a is 't stelsel

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y - 7 = 0 \\ 4x + 3ay + 5 = 0 \end{cases}$$

strijdig?

8. Bepaal p, als gegeven is, dat 't stelsel

$$\begin{cases} px - (p+1)y - 2 = 0 \\ (p+2)x - 3py - 4 = 0 \end{cases}$$

afhankelijk is?

9. Bereken a, als gegeven is, dat de grafieken van $ax + (a+1)y - 2a + 1 = 0$ en $(a+1)x + (3a+1)y - a - 1 = 0$ samenvallen.

Aan 't eind van § 19 (pag. 36) invoegen:

Opgaven. Los de volgende opgaven *grafisch* en *algebraïsch* op.

1. $6x^2 - 7x + 2 \begin{matrix} \leqq \\ \geqq \end{matrix} 0.$
2. $2x^2 + 3x - 2 \begin{matrix} \leqq \\ \geqq \end{matrix} 0.$
3. $-2x^2 - x + 3 > 0.$
4. Bepaal de waarden van x, waarvoor $x(3x-2) < 8$.
   Aanwijzing: 't Linkerlid eerst uitwerken, daarna zorgen, dat 't rechterlid nul wordt, enz.
5. Wanneer is $\frac{x+2}{2x-1}$ positief?
6. Geef aan, wanneer de breuk $\frac{x+1}{2x-1}$ kleiner is dan 3.
   Aanwijzing: $\frac{x+1}{2x-1} < 3.$

$$\frac{x+1}{2x-1} - 3 < 0$$

$$\frac{x+1-3(2x-1)}{2x-1} < 0$$

$$\frac{x+1-6x+3}{2x-1} < 0$$

$$\frac{-5x+4}{2x-1} < 0, \text{ enz.}$$

7. Los op: $\frac{x+3}{1-4x} > 2.$

Aan § 20 (pag. 39) toevoegen:

Opgaven. Teeken de grafiek van $y = x^2$; neem als maat

a. 1 dubbele mm. *c.* 3 dubbele mm.

b. 2 „ „ *d.* 5 „ „

Aan 't eind van § 21, vóór de opgaven (pag. 42) inlasschen:

Om de parabool $y = x^2 - 6x + 4$ te *teekenen* ontwerpen we een tabel als in § 20, gaan nu echter niet uit van $x = 0$, maar van $x = 3$ en kiezen nu links en rechts daarvan een aantal waarden voor x en berekenen de bijbehoorende waarden van y. De tabel ziet er uit als volgt:

x	y
0	4
1	— 1
2	— 4
3	— 5
4	— 4
5	— 1
6	4

Met behulp van deze zeven punten is de parabool voldoende nauwkeurig uit de hand te teekenen. Let op de symmetrie.

Tusschen de opgaven en de „opmerking" van § 21 (pag. 42) invoegen:

Teeken de parabolen. Kies zelf een geschikte maat (1 dubbele mm, 2 dubbele mm, enz.) Bij *d.* een waarde voor a aannemen (b.v. $a = 3$).

Aan 't eind van § 21*a* (pag. 43) inlasschen:

Men kan uit $y + 5 = (x - 3)^2$ ook afleiden, dat de grafiek een parabool is, door de volgende redeneering:

Verschuift men de X-as over een afstand $= 5$ naar *beneden*, dan worden alle ordinaten 5 langer, men heeft dus voor de ordinaat t. o. v. de nieuwe X-as $\bar{y} = y + 5$ (waarin y voorstelt de ordinaat t. o. v. de oude X-as). Verplaatst men de Y-as over een afstand van 3 naar *rechts*, dan is de nieuwe abscis $\bar{x} = x - 3$. Dus gaat $y + 5 = (x - 3)^2$ over in: $\bar{y} = \bar{x}^2$. Volgens § 20 is de grafiek hiervan een parabool. De symmetrieas hiervan heeft tot vergelijking $x = 3$. De parabool is nu gemakkelijk te teekenen.

We geven nog een voorbeeld.

Teeken de grafiek van $y = x^2 + 8x + 3$.

Oplossing:

$$y = x^2 + 8x + 3.$$
$$y = x^2 + 8x + 16 - 13.$$
$$y = (x + 4)^2 - 13.$$
$$y - 13 = (x + 4)^2.$$

We lezen hieruit af, dat de symmetrie-as gevonden wordt door de Y-as te verschuiven over een afstand $= 4$ naar *links*. Voor de tabel gaan we dus uit van $x = -4$ en krijgen nu:

x	y
0	3
−1	− 4
−2	− 9
−3	−12
−4	−13
−5	−12
−6	− 9
−7	− 4
−8	3

Teeken zelf de parabool.

Vraag: Waarom zouden hier *negen* punten gekozen zijn?

Opgave. Maak nu de opgaven van § 21 op de manier van deze paragraaf.

Aan het eind van § 23 (pag. 45) toevoegen:

De beschouwingen van § 21*a* en § 22 dienen uitsluitend ter verdieping van 't inzicht. De uitkomsten van deze paragrafen dus **niet uit 't hoofd leeren!**

Voor 't *teekenen* van de grafiek houde men zich aan § 21*a*.

Aan het eind van § 25 (pag. 46) toevoegen:

Deze samenvatting *niet* uit 't hoofd leeren!

Om b.v. $y = 2x^2 - 8x + 3$ te teekenen, herleiden we 't rechterlid eerst als volgt:

$$y = 2x^2 - 8x + 3$$
$$= 2(x^2 - 4x + 1\tfrac{1}{2})$$
$$= 2(x^2 - 4x + 4 - 2\tfrac{1}{2})$$
$$= 2\{(x - 2)^2 - 2\tfrac{1}{2}\}$$
$$= 2(x - 2)^2 - 5.$$

We lezen hieruit af, dat de as der parabool tot vergelijking heeft: $x = 2$ en stellen weer een tabel op.

x	y
-1	13
0	3
1	-3
2	-5
3	-3
4	3
5	13

't Teekenen biedt nu verder geen moeilijkheden meer. Indien men voor de snijpunten met de X-as geheele of eenvoudige gebroken waarden vindt, gebruike men deze voor 't teekenen. 't Samenstellen van de tabel vordert hier in den regel meer rekenwerk dan in de vorige gevallen.

Tusschen de §§ 25 en 26 (pag. 46) invoegen:

Opgaven. Teeken de grafieken van:

a. $y = 2x^2 - 8x + 1$.
b. $y = 3x^2 + 6x - 2$.
c. $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$.
d. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 6$.
e. $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$.
f. $y = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 2$.

Aan het eind van § 26 (pag. 47) toevoegen:

Moeten we $y = -3x^2 + 4x - 1$ teekenen, dan herleiden we eerst het rechterlid op de volgende wijze:

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 4x - 1 \\ &= -3(x^2 - \tfrac{4}{3}x + \tfrac{1}{3}). \\ &= -3(x^2 - \tfrac{4}{3}x + \tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{9}) \\ &= -3\{(x - \tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{1}{9}\} \\ &= -3(x - \tfrac{2}{3})^2 + \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Voor de tabel gaan we dus uit van $x = \frac{2}{3}$.

x	y
$-\frac{2}{3}$	-5
0	-1
$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0
$1\frac{1}{3}$	-1
2	-5

Opgaven. Teeken de grafieken van:

a. $y = -x^2 + 2x - 3$.
b. $y = -2x^2 + x + 6$.
c. $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$.
d. $y = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - 5$.

Aan § 28 (pag. 50) toevoegen:

8. Voor welke waarden van p is de drieterm $(p + 2)x^2 - - 3x + (p - 2)$ steeds negatief?
9. Voor welke waarden van k geldt altijd $5x^2 + kx + 3 > \frac{3}{16}$?
10. Als $(4 - k)x^2 - 3x + (4 + k)$ steeds positief is voor alle reëele waarden van x, tusschen welke grenzen ligt dan k?
11. De drieterm $(a - 3)x^2 - (a - 1)x + a - 2$ is steeds negatief voor alle reëele waarden van x. Bepaal a.

Aan het eind van § 29 (pag. 52) toevoegen:
Deze samenvatting **niet** uit 't hoofd leeren!

De voorbeelden 1 en 2 van § 30 (pag. 52) vervangen door de volgende uitwerkingen:

1. Bepaal de uiterste waarde van $2x^2 + 7x - 19$.
   Oplossing. $2x^2 + 7x - 19 =$
   $2(x^2 + 3\frac{1}{2}x - 9\frac{1}{2}) =$
   $2(x^2 + 3\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{16} - 12\frac{9}{16}) =$
   $2\{(x + 1\frac{3}{4})^2 - 12\frac{9}{16}\} =$
   $2(x + 1\frac{3}{4})^2 - 25\frac{1}{8}$.
   Er treedt dus een uiterste waarde op voor $x = -1\frac{3}{4}$, deze uiterste waarde is een *maximum* en dit bedraagt $-25\frac{1}{8}$.
2. Bepaal de uiterste waarde van $ay^2 + (a + 2)y - 2a + 3$.
   Oplossing. $ay^2 + (a + 2)y - 2a + 3 =$
   $$a\left(y^2 + \frac{a+2}{a}y - 2 + \frac{3}{a}\right) =$$
   $$a\left\{y^2 + \frac{a+2}{a}y + \frac{(a+2)^2}{4a^2} - \frac{(a+2)^2}{4a^2} - 2 + \frac{3}{a}\right\} =$$
   $$a\left\{\left(y + \frac{a+2}{2a}\right)^2 + \frac{-(a+2)^2 - 8a^2 + 12a}{4a^2}\right\} =$$
   $$a\left(y + \frac{a+2}{2a}\right)^2 + \frac{-9a^2 + 8a - 4}{4a}.$$
   't Extreem wordt bereikt voor $y = -\frac{a+2}{2a}$ en bedraagt $\frac{-9a^2 + 8a - 4}{4a}$.
   Is a *positief*, dan treedt er een *minimum* op, voor a *negatief* een *maximum*.

Na opg. 3, § 30, onderaan pag. 52, toevoegen:

3*a*. De drieterm $ax^2 + bx + c$ bereikt voor $x = 1$ de minimumwaarde 3. Voor $x = 2$ wordt de drieterm 5. Bepaal a, b en c.

Op pag. 85 (§ 46) toevoegen:

31. Los x en y op uit het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} a. & x = \sqrt{y + 9}. \\ b. & y = 2x + 6. \end{cases}$$

Teeken daarna de grafieken *a*. en *b*. op één assenstelsel en licht de teekening toe.

(Ex. Eur. ond., Ned.-Indië, 1933).

32. *a*. Voor welke reëele waarden van p is de vorm

$$(p - 2)x^2 + (3p - 6)x + 2p - 3\tfrac{1}{2}$$

positief voor alle reëele waarden van x?

b. Het geheele getal p, dat voldoet aan de onder *a*. gestelde vraag, substitueert men in:

$$y = (p - 2)x^2 + (3p - 6)x + 2p - 3\tfrac{1}{2}.$$

Voor welke waarde van x is y dan een minimum?

c. Licht dit laatste grafisch toe.

(Eindex. H. B. S. en A. M. S., afd. B, Ned.-Indië, 1933).

ERRATA.

In § 2, pag. 6, de laatste zin te vervangen door:
Gebruikt men vierkanten of cirkels, dan dient men in 't oog te houden, dat de oppervlakte van een vierkant evenredig is met 't *kwadraat* van de zijde en de oppervlakte van een cirkel evenredig is met 't *kwadraat* van de straal.

§ 5, pag. 8, reg. 2 v. o. „eenparig" vervangen door „constant".
Op pag. 11, reg. 4 v. b. „in 't volgende" te veranderen in: „in de volgende hoofdstukken".

§ 9, pag. 17, reg. 3 v. o.: $y = 2x$ vervangen door $y = 2^x$.
Op pag. 18, reg. 4 v. b. „'t Is dus ook" veranderen in:
„$2x + 4y - 7 = 0$ is dus ook".
Op pag. 20 (§ 10) vóór de „vraag" invoegen:
De richtingscoëfficient is de *tangens* van de *hoek*, die de rechte maakt met de *positieve* richting van de *X-as*, gemeten in *tegenwijzerrichting* (denk aan de goniometrie!).
Reg. 2 v. o. staat: Voor $a = \infty$, dit moet zijn: Voor $a \to \infty$.

Op pag. 23, reg. 1—6 v. o. te vervangen door:

Uit de gelijkvormige driehoeken BPR, PAQ en BXO leidt men af:

$$\frac{x_1}{5} = \frac{PR}{AO} = \frac{BP}{BA} \quad \text{en}$$

$$\frac{y_1}{3} = \frac{PA}{BA}, \text{ waaruit volgt:}$$

$$\frac{x_1}{5} + \frac{y_1}{3} = \frac{BP}{BA} + \frac{PA}{BA} = \frac{BP + PA}{BA} = \frac{BA}{BA} = 1.$$

Op pag. 30 (§ 16), reg. 10 v. b.: $= y - \frac{1}{2}x + p$ vervangen door $y = -\frac{1}{2}x + p$.

Op pag. 37 (§ 20), reg. 3 „der tweedegraads functie" veranderen in: „der geheele rationale tweedegraads functie".

Pag. 38, reg. 1 v. b. staat: Bijzondere vormen, dit moet zijn: Bijzondere gevallen.

Pag. 39, reg. 4 v. b. staat: gelijkvormig, dit moet zijn: gelijk van vorm.

Fig. 23, pag. 41: $y = x^2 + 6x + 4$ moet zijn:

$$y = x^2 - 6x + 4.$$

Onder de fig. toevoegen: maat = 1 dubbele mm.

In § 26, pag. 47, reg. 5 v. b. achter $a < 0$ toevoegen: (met dien verstande, dat de parabool geheel *beneden* de X-as ligt, indien $D < 0$ is).

In § 27, pag 48, reg. 8 v. o. staat: $D < 0$, dit moet zijn: $D > 0$.

Op pag. 52, reg. 2 v. b. staat: $-\frac{D}{2a}$, dit moet zijn: $-\frac{D}{4a}$.

De eerste alinea van § 31, pag. 54, te vervangen door:

In § 19 is de gebroken lineaire functie reeds gedefinieerd: Als algemeene gedaante is daar opgegeven $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Om de grafiek te bestudeeren kiezen wij eerst 't bijzondere geval, dat $a = d = 0$ is, dus $y = \frac{b}{cx}$. Hierin moeten b en c beide van nul verschillen; b omdat a reeds gelijk is aan nul en c volgens definitie. Het quotient $\frac{b}{c}$ is dus eindig en ongelijk nul. Stellen wij 't gelijk aan k, dan gaat $y = \frac{b}{cx}$ over in $y = \frac{k}{x}$.

Pag 54, reg. 4 v. o. te wijzigen in: steeds blijkt er een punt te zijn, waarvoor de afstand tot de X-as kleiner is dan 't gekozen getal, terwijl alle volgende punten 'n nog kleinere afstand tot de X-as hebben.

Pag. 75, reg. 6 (en 7) v. b. staat: onbekende getallen, dit moet zijn: veranderlijke getallen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.

PERPUS