Sammlung Göschen

Darstellende Geometrie

Erster Teil

Elemente Ebenflächige Gebilde

von

Lemb. Keb. Ind.
Kon. Bat. Gen.
V - 72.

ert Haußner

Figuren

hnk 230 — Rp- 299800

Sammlung Göschen

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen

Jede Nummer in eleg. Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Göschen" ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Ein ausführliches Verzeichnis der bisher erschienenen befindet sich am Schluß dieses Bändchens

ANTON A. MITTELMEIJER
BOEKVERKOOPER
1e WETERINGSCHANS 1
AMSTERDAM

Mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden **80 Pfennig.**

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik u. Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.

Ebene Geometrie m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haußner. Nr. 142.

— — **II.** Mit 40 Figuren. Nr. 143.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Figuren von Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.

Stereometrie mit 44 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.

Niedere Analysis m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.

Vierstellige Logarithmen von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Prof. Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 250.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.

Höhere Analysis II: Integralrechnung mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.

Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung m. 46 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung m. 50 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 147.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Professor Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.

Versicherungsmathematik v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate m. 15 Fig. u. 2 Taf. v. Prof. Wilh. Weitbrecht. Nr. 302.

Vektoranalysis mit 11 Figuren von Privatdoz. Dr. Siegfr. Valentiner. Nr. 354.

Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.

Astronomie mit 36 Abbildungen und einer Karte von Professor Dr. Walter F. Wislicenus. Nr. 11.

Astrophysik mit 11 Abb. von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Nr. 91.

Geodäsie mit 66 Abbildungen von Prof. Dr. C. Reinhertz. Nr. 102.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schiffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.

Geometrisches Zeichnen mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.



V-72

Sammlung Göschen.

Darstellende Geometrie

Erster Teil

Elemente; Ebenflächige Gebilde

Von

Dr. Robert Haußner

O. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena

Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage

Zweiter, neu durchgesehener Abdruck

Mit 110 Figuren im Text

GJG

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1908

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.
Tanggal : 28-6-2010
Nomor Induk : 173/BN-MUSEUM/10
BIB - ID :
ITEM - ID : 0000 3790912
Asal : Museum Pusat

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Literatur.

I. Grundlegendes Werk.

G. Monge, Géométrie descriptive (Leçons données aux écoles normales). Paris 1799. 2.—7. Auflage 1800 bis 1847. In deutscher Übersetzung:

G. Monge, Darstellende Geometrie. Herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von *Robert Haußner*. Leipzig 1900 (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 117).

II. Lehrbücher.

K. Pohlke, Darstellende Geometrie. Berlin, I. Abteilung, 4. Auflage 1876; II. Abteilung 1876.

W. Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Leipzig, I. Teil, 4. Auflage 1904; II. und III. Teil, 3. Auflage 1885 und 1888.

Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig, I. Band 1884; II. Band 1887.

K. Rohn und *E. Papperitz*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig, 3. Auflage in drei Bänden, 1906.

R. Sturm, Elemente der darstellenden Geometrie. Leipzig, 2. Auflage 1900.

R. Müller, Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie an der Herzoglichen Technischen Hochschule zu Braunschweig. Braunschweig, 2. Auflage 1903.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Inhalt.

Seite

Tafel der angewandten Bezeichnungen 7

Einleitung.

1. Aufgabe der darstellenden Geometrie 9
2. Das Projektionsverfahren 11
3—7. Projektionen bestimmter Gebilde 11
8. Die verschiedenen Arten der Projektion 16

I. Abschnitt.

Parallelprojektion ebener Gebilde und Affinität.

9—10. Parallelprojektionen von Strecken 19
11—12. Parallelprojektion einer ebenen Figur; Affinität . . 21
13—14. Perspektiv-affine Figuren in derselben Ebene . . . 25
15—17. Konstruktion der Ellipse als affiner Figur eines Kreises . 28
18—21. Zwei konjugierte Durchmesser bestimmen eine Ellipse; ihre Konstruktion aus denselben 32
22—23. Konstruktion der Ellipse aus den Achsen; Papierstreifenkonstruktionen 39
24. Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern; Normale 42
25. Scheitelkrümmungskreise der Ellipse 45
26. Die Ellipse als Parallelprojektion des Kreises . . . 47
27. Brennpunktseigenschaften der Ellipse 48
28. Konstruktion der zu einer beliebigen Kurve affinen Kurve 50

II. Abschnitt.

Schiefe Parallelprojektion räumlicher Gebilde.

29—30. Bestimmung der Richtung der Projektionsstrahlen . . 52
31—32. Schiefe Projektion eines Würfels. Bemerkung über das Ausziehen der Linien 55

Seite

33–34. Vorteile und Nachteile der schiefen Projektion . . . 58
35–37. Schiefe Projektion ebenflächiger Gebilde. Wahrer und scheinbarer Umriß 60
38–41. Schiefe Projektion von Kegel, Zylinder und Kugel . . 64

III. Abschnitt.

Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen.

42. Einführung zweier Projektionsebenen 71
43–44. Darstellung des Punktes 73
45–47. Einführung einer dritten Projektionsebene 77
48–50. Darstellung der Geraden; Spurpunkte einer Geraden . 81
51 Besondere Lagen der Geraden gegen die Projektionsebenen 84
52–53. Eine Gerade ist durch Grund- und Aufriß im allgemeinen bestimmt; Ausnahmefall 85
54–55. Tafelneigungen und wahre Länge einer Strecke . . 87
56. Gegenseitige Lage zweier Geraden 92
57. Darstellung der Ebene; Spuren einer Ebene . . . 95
58. Besondere Lagen einer Ebene gegen die Tafeln . . 97
59. Die beiden Halbierungsebenen 98
60–65. Gerade in einer Ebene; Haupt- und Falllinien einer Ebene 98
66. Tafelneigungen einer Ebene 108
67–68. Gegenseitige Lage zweier Ebenen 110
69–71. Gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene . . 115
72–74. Gerade Linien und Ebenen in rechtwinkliger Stellung . 119
75–79. Umlegung ebener Gebilde in eine Tafel (Winkel zweier Geraden und zweier Ebenen; wahre Gestalt eines Dreiecks) 123
80. Drehung ebener Gebilde um eine Hauptlinie . . . 130
81–82. Drehung um eine zu einer Tafel senkrechte Achse . . 132
83–85. Einführung neuer Projektionsebenen 134

IV. Abschnitt.

Ebenflächige Gebilde.

86–87. Das n-Kant und das Polar-n-Kant 140
88–97. Das Dreikant; die sechs Grundaufgaben über dasselbe . 141
98. Allgemeines über Vielflache. Sichtbarer und unsichtbarer Teil. Wahrer und scheinbarer Umriß . 158

Seite

99—100. Beispiele der Darstellung von Prisma und Pyramide . 160
101—109. Darstellung der regelmäßigen Vielflache 164
110. Allgemeines über ebene Schnitte von Vielflachen; Kanten- und Flächenverfahren 181
111—113. Beispiele für das Kantenverfahren; Netze . . . 182
114—115. Beispiele für das Flächenverfahren; Netze . . . 189
116. Allgemeines über die Durchdringung zweier Vielflache 192
117—121. Beispiele für das Kantenverfahren 193
122—124. Das für die Durchdringung von Prismen und Pyramiden abgeänderte Kantenverfahren 200
125. Beispiel für das Flächenverfahren 205

Die Figuren

mußten dem Format der Sammlung Göschen entsprechend in kleinem Maßstabe gezeichnet werden. Dieser Nachteil vermag aber deshalb nicht schwer in das Gewicht zu fallen, weil der Leser, welcher sich mit der darstellenden Geometrie erst vertraut machen will, alle Figuren am besten unter Annahme anders gelagerter Ausgangselemente in größerem Maßstabe selbst neu zeichnen muß. Nur dadurch kann er sich die Methoden und Konstruktionen der darstellenden Geometrie wirklich zu eigen machen und sich zugleich die nötige zeichnerische Geschicklichkeit, welche für die darstellende Geometrie von kaum geringerer Bedeutung als ihr theoretisches Verständnis ist, erwerben. Deshalb entwerfe sich der Leser auch für alle Aufgaben und Konstruktionen, bei welchen Figuren als nicht unbedingt nötig in Rücksicht auf den verfügbaren Raum nicht gegeben sind, entsprechende Figuren. Ferner ist warm zu empfehlen, sich bei schwierigeren Aufgaben, um eine klare Vorstellung der räumlichen Verhältnisse zu erhalten, zunächst eine Skizze in schiefer Parallelprojektion zu entwerfen, wie dies auch im Text verschiedentlich geschehen ist.

Tafel der angewandten Bezeichnungen.

Es sind stets bezeichnet:

Punkte mit großen lateinischen, in einigen Fällen auch mit großen deutschen Buchstaben: $A, \ldots$, $P, \ldots$; $\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \ldots$

Linien (gerade oder krumme) mit kleinen lateinischen, in einigen Fällen auch mit kleinen deutschen Buchstaben: $a, \ldots, g, \ldots$; $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{u}$;

Ebenen mit großen griechischen Buchstaben: $\mathsf{A}, \ldots$, $\mathsf{E}, \ldots$;

Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben: $\alpha, \ldots$, $\varphi, \ldots$

	Projektions-Ebene	Punkt P	Linie g	Spur einer Geraden g	Spur einer Ebene ε
Zentral-Proj. . .	Π	P_c	g_c	G	e
Schiefe Proj. . .	Π	P_s	g_s	G	e
Senkrechte Proj. auf zwei Ebenen	Π_1	P'	g'	G_1	e_1
	Π_2	P''	g''	G_2	e_2

Elemente, welche um eine Gerade in eine neue Lage gedreht sind, werden durch die ihrer alten Bezeichnung angefügten oberen oder unteren Indices 0, Δ und Schatten von Elementen durch oben oder unten angefügte Sterne * bezeichnet.

$g = AB$ bedeutet die Verbindungsgerade der Punkte A und B; $\mathsf{E} = ABC$ die Verbindungsebene der drei Punkte A, B, C.

Das Schneiden zweier Gebilde wird durch das Symbol $\times$ bezeichnet, und es bedeutet also

$P = g \times h$ den Schnittpunkt von g und h,
$G = g \times \mathsf{E}$ „ „ „ g und E,
$s = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ die Schnittgerade von A und B.

Abst. (P, g), bzw. Abst. (P, E) bezeichnet den senkrechten Abstand eines Punktes P von einer Geraden g, bzw. Ebene E.

Die Zeichen $=$, $<$, $>$, $\parallel$, $\perp$, $\sphericalangle$, $\triangle$ haben die gewöhnliche Bedeutung gleich, kleiner, größer, parallel, senkrecht, Winkel, Dreieck.

Die vorstehende Bezeichnungsweise stimmt im wesentlichen mit der von *Wiener* und *Rohn-Papperitz* (siehe Literaturverzeichnis) benutzten überein.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Einleitung.

Aufgabe der darstellenden Geometrie.

1. Ebene Gebilde können in ihrer wahren Gestalt unmittelbar durch Zeichnung in einer Ebene dargestellt und auf jene bezüglichen Konstruktionen dann an diesen Zeichnungen direkt ausgeführt werden. Für räumliche Gebilde ist dies nicht mehr möglich, da sie sich im allgemeinen nach drei Dimensionen erstrecken, während die Ebene nur zwei Dimensionen besitzt.

Die Aufgabe der darstellenden Geometrie ist es nun, zu lehren, wie man räumliche Gebilde ihrer Gestalt, Größe und Lage nach durch genaue ebene Abbildungen, aus denen sich wiederum jene selbst bestimmen lassen, darstellen kann, und wie man Aufgaben über räumliche Gebilde mit Hilfe ihrer ebenen Abbildungen durch Zeichnung lösen kann.

Der erste Teil dieser Aufgabe hat eine Verallgemeinerung nach zwei Richtungen dahin erfahren, daß die räumlichen Gebilde nicht auf eine Ebene, sondern auf irgend eine andere Fläche, z. B. auf die Oberfläche eines Kreiszylinders, einer Kugel u. a., abgebildet (Rundpanoramen, Kartenprojektionen), oder daß von den räumlichen Gebilden Abbildungen, welche selbst wieder drei

Dimensionen haben, hergestellt werden sollen (Modelle, Reliefperspektive). Beide Verallgemeinerungen sind in diesem Werke nicht berücksichtigt, da sie an allgemeiner Bedeutung hinter der Abbildung der räumlichen Gebilde auf die Ebene weit zurückstehen und jenseits der Grenzen liegen, welche diesen vorliegenden Grundzügen gesteckt werden mußten.

Die darstellende Geometrie ist die unentbehrliche Grundlage für viele Zweige der Technik und der Kunst. Denn einerseits ermöglicht sie, von vorhandenen Bauwerken, Maschinen und anderen räumlichen Objekten anschauliche und genaue Bilder herzustellen, andererseits aber für projektierte Bauwerke, Maschinen usw. Pläne anzufertigen, auf Grund deren ihre wirkliche Herstellung erst möglich ist. Über diese praktische Bedeutung hinaus hat die darstellende Geometrie noch hervorragenden allgemein bildenden Wert, indem sie in ausgezeichneter Weise das räumliche Vorstellungsvermögen auszubilden geeignet ist.

Die wissenschaftliche Ausbildung der darstellenden Geometrie verdankt man dem französischen Mathematiker Monge*).

---

*) Gaspard Monge, geb. 10. Mai 1746 in Beaune in dem Département Côte d'or, gest. 28. Juli 1818 in Paris. M. wirkte von 1765—1783 als Lehrer an der Militärschule in Mézières, während welcher Zeit er die wissenschaftliche Grundlage der darstellenden Geometrie schuf. Öffentlich gelehrt aber hat M. die darstellende Geometrie erst an der École normale und dann an der École polytechnique vom Jahre 1794 ab. Betr. der geschichtlichen Entwickelung vgl. G. Monge, Darstellende Geometrie (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 117) Anmerkungen, S. 177—193.

Das Projektionsverfahren.

2. Das Verfahren, dessen sich die darstellende Geometrie bedient, um von räumlichen Gegenständen Bilder zu erhalten, welche einen ähnlichen Eindruck wie die Originale hervorbringen, ist das der Projektion.

Zieht man von einem gegebenen Punkte O Strahlen nach den sämtlichen Punkten der Oberfläche eines gegebenen räumlichen Gebildes G und bestimmt dann die Schnittpunkte dieser Strahlen (bzw. ihrer Verlängerungen) mit einer gleichfalls gegebenen Ebene Π, so nennt man die Gesamtheit aller dieser Schnittpunkte die Projektion G_c des räumlichen Gebildes G auf die Ebene Π für den Punkt O als Projektionszentrum. Die von O ausgehenden Strahlen heißen Projektionsstrahlen und die Ebene Π die Projektionsebene.

Die folgenden Betrachtungen über die Projektionen bestimmter Gebilde geben zugleich erläuternde Beispiele für die soeben gegebene Beschreibung des Projektionsverfahrens.

Projektionen bestimmter Gebilde.

3. Ist (Fig. 1) ein Punkt P gegeben, so ist seine Projektion wieder ein Punkt, nämlich der Schnittpunkt P_c des Strahles OP mit der Ebene Π. Liegt P speziell in der Ebene Π, so fällt er mit seiner Projektion zusammen.

Wählt man auf dem Strahle OP beliebige andere Punkte Q, R, S, ..., so erkennt man sofort, daß sie (nach § 2) denselben Punkt P_c zur Projektion haben. Während also, wenn das Projektionszentrum O und die Projektionsebene Π gegeben sind, für jeden Raumpunkt sich nur ein bestimmter Punkt in Π als Projektion

ergibt, gehören zu jedem Punkte in Π unendlich viele Punkte des Raumes, deren Projektionen in jenen Punkt fallen, nämlich alle Punkte des durch ihn hindurchgehenden Projektionsstrahles. Nur wenn der abzubildende Punkt in das Zentrum O fällt, wird das Projektionsverfahren unbestimmt.

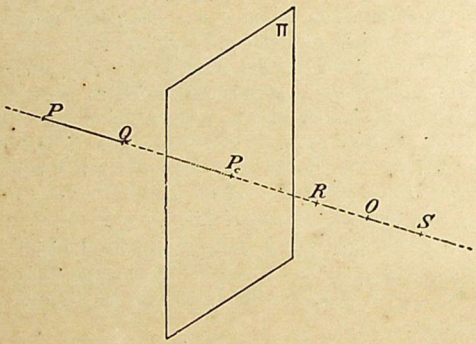

Fig. 1.

Aber der Punkt P_c ist auch die Projektion der ganzen unendlichen Geraden, welche durch O und P_c hindurchgelegt werden kann, sowie die Projektion einer beliebigen Strecke PQ, QR, ... derselben. Denn verbindet man jeden Punkt der unendlichen Geraden oder einer in ihr gelegenen Strecke mit dem Projektionszentrum O, so fallen alle Projektionsstrahlen in diese Gerade und schneiden folglich die Projektionsebene Π sämtlich in dem Punkte P_c.

4. Soll (Fig. 2) eine Gerade g, welche nicht durch das Projektionszentrum geht, projiziert werden, so liegen

die Projektionsstrahlen aller Punkte von g in der durch die Gerade g und den Punkt O bestimmten Ebene, welche die projizierende Ebene Γ der Geraden g genannt wird. Folglich liegen die Projektionen aller Punkte von g auf der Schnittgeraden g_c dieser projizierenden Ebene Γ mit der Projektionsebene Π, und mithin ist die Projektion einer nicht durch das Projektionszentrum gehenden Geraden g wieder eine Gerade g_c.

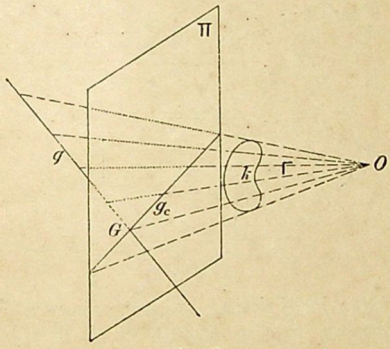

Fig. 2.

In der gleichen Weise wie in § 3 erkennt man aber, daß auch jede andere Gerade, welche in der projizierenden Ebene Γ der Geraden g liegt, dieselbe Gerade g_c in Π zur Projektion hat, ja daß sogar jedes in der Ebene Γ gelegene ebene Gebilde (ebene Kurve k oder begrenztes Ebenenstück) die Gerade g_c bzw. ein Stück von g_c zur Projektion besitzt. Während also eine gegebene Gerade ihre Projektion eindeutig bestimmt, ge-

hören zu einer in der Projektionsebene gegebenen Geraden unendlich viele ebene Gebilde, deren Projektion sie ist.

Der Schnittpunkt G der Geraden g und der Projektionsebene Π fällt nach dem Früheren mit seiner Projektion zusammen, liegt also auch auf g_c und heißt der in Π gelegene Spurpunkt der Geraden g.

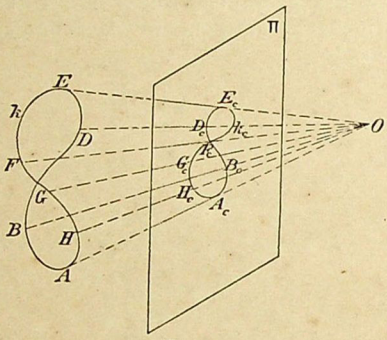

Fig. 3.

5. Die Projektion einer ebenen Kurve, deren Ebene nicht durch das Projektionszentrum geht, oder einer Raumkurve (auch doppelt gekrümmte Kurve genannt, d. i. eine Kurve, deren Punkte nicht sämtlich in derselben Ebene liegen) ist eine ebene Kurve. Ist k (Fig. 3) eine solche Kurve, so liegen ihre sämtlichen Projektionsstrahlen OA, OB, ... nicht mehr in einer Ebene, sondern bilden die Oberfläche eines Kegels, des projizierenden Kegels oder Strahlenkegels, dessen Spitze das Projektionszentrum O ist. Die von der Projektionsebene Π ausgeschnittene ebene Kurve k_c ist die Projektion der Kurve k.

6. Die Projektion eines beliebigen räumlichen Gebildes endlich setzt sich zusammen aus den Projektionen aller Punkte, ebenen und krummen Linien, welche das gegebene Gebilde enthält. Die von dem Projektionszentrum O nach allen Punkten des Gebildes gezogenen Strahlen bilden ein Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt das Projektionszentrum O ist. Als Beispiel diene die Projektion einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$

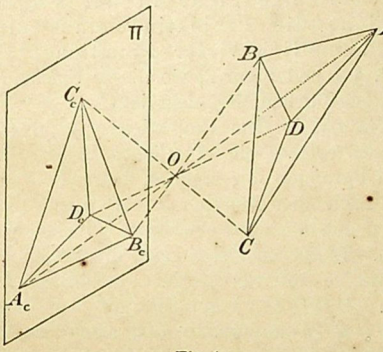

Fig. 4.

in der Figur 4, welche zugleich den Fall veranschaulicht, daß das Projektionszentrum zwischen dem Gebilde und der Projektionsebene liegt. Die vier Seitenflächen der Pyramide projizieren sich auf Π in die vier Dreiecke $A_cB_cC_c$, $A_cB_cD_c$, $A_cC_cD_c$, $B_cC_cD_c$.

Die Projektion eines räumlichen Gebildes ist also eindeutig bestimmt, sobald das Projektionszentrum und die Projektionsebene gegeben sind. Da aber, wie in § 3 ausführlich gezeigt

ist, jeder Punkt A_c der Projektionsebene die Projektion von den unendlich vielen Punkten des durch ihn hindurchgehenden Projektionsstrahles, sogar die Projektion jedes Stückes des nach beiden Seiten in das Unendliche verlängerten Strahles ist, so erkennt man, daß durch jeden Punkt der Projektionsebene nur der durch ihn gehende Projektionsstrahl bestimmt wird. Hieraus folgt unmittelbar weiter, daß eine beliebige Figur in der Projektionsebene nicht die Projektion eines einzigen, sondern unendlich vieler räumlichen Gebilde ist. (Vgl. § 4 und Figur 2, wo dieser Umstand für die Gerade g_c ausführlich dargelegt ist.)

7. Für ein in dem Projektionszentrum O befindliches Auge, welches ein räumliches Gebilde, z. B. die dreiseitige Pyramide der Figur 4, betrachtet, fallen die von ihm nach den Punkten der Pyramide gehenden Sehstrahlen mit den oben erwähnten Projektionsstrahlen zusammen. Denkt man sich noch die Projektionsebene durchsichtig, so fällt für das in O befindliche Auge die Projektion $A_cB_cC_cD_c$ scheinbar mit der dreiseitigen Pyramide $ABCD$ zusammen und macht auf dasselbe den gleichen Eindruck wie die Pyramide selbst. Infolgedessen ist die Projektion eines räumlichen Gebildes auf eine Ebene eine Abbildung desselben, und man nennt daher die Projektionsebene auch Bildebene.

Die verschiedenen Arten der Projektion.

8. Das Projektionszentrum kann in jedem beliebigen Punkte des Raumes außerhalb der Projektionsebene angenommen werden. Je nachdem nun das Projektionszentrum in endlicher oder unendlich großer Entfernung

von der Projektionsebene liegt, nennt man die Projektion Zentralprojektion (Perspektive) oder Parallelprojektion. Liegt nämlich das Projektionszentrum unendlich weit, d. h. ist sein Abstand von der Projektionsebene größer als jede noch so große endliche Strecke, so schneiden sich je zwei beliebige Projektionsstrahlen ebenfalls erst in unendlich großer Entfernung von der Projektionsebene, sind also und folglich alle Projektionsstrahlen einander parallel.

Die Parallelprojektion wird speziell als senkrechte (orthogonale) Projektion bezeichnet, wenn die Projektionsstrahlen senkrecht auf der Projektionsebene stehen. Treffen die Projektionsstrahlen unter irgend einem anderen, als einem rechten Winkel auf die Projektionsebene auf, so nennt man die Projektion schiefe Projektion.

Die Zentralprojektion ist von besonderer Wichtigkeit für die Malerei, und ihre Ausbildung ist nicht zum wenigsten verschiedenen der größten Meister der Renaissance (z. B. Albrecht Dürer) zu danken. Die Parallelprojektion und vornehmlich die orthogonale Projektion ist für die Technik und Baukunst das unentbehrlichste Hilfsmittel. Dem Bedürfnisse der letzteren verdankt sie ihren Ursprung und zum Teil ihre Fortentwickelung.

Die Parallelprojektion ist eigentlich nur ein spezieller Fall der Zentralprojektion. Durch den Umstand aber, daß bei der ersteren alle Projektionsstrahlen einander parallel sind, gestalten sich ihre Konstruktionen weit einfacher als die der Zentralprojektion. Deshalb ist es üblich geworden, die darstellende Geometrie mit der Parallelprojektion zu beginnen.

Diesem Brauche folgend, ist das vorliegende Bändchen ausschließlich der Parallelprojektion ge-

widmet und zwar mit Ausnahme der beiden ersten Abschnitte der orthogonalen Parallelprojektion. In dem ersten Abschnitte wird die perspektive Affinität besprochen, welche für die Parallelprojektion von grundlegender Bedeutung ist; der zweite Abschnitt behandelt die schiefe Projektion. Da dieselbe anschauliche Skizzen von verwickelteren räumlichen Verhältnissen leicht herzustellen gestattet, so ist es zweckmäßig, sie vor der orthogonalen Projektion zu besprechen, um sie dann für kompliziertere Aufgaben der letzteren verwerten zu können. Die beiden letzten Abschnitte sind der orthogonalen Projektion auf zwei zueinander senkrechte Projektionsebenen gewidmet. Und zwar enthält der dritte Abschnitt die grundlegenden Betrachtungen und Konstruktionen, deren man sich bei allen Aufgaben und Anwendungen der darstellenden Geometrie fortwährend zu bedienen hat; in dem letzten Abschnitte sind die ebenflächigen Gebilde ausführlich behandelt.

In den folgenden Bändchen werden zunächst aus der Definition der Kegelschnitte als Zentralprojektionen des Kreises ihre wesentlichsten Eigenschaften abgeleitet, damit dieselben bei der Behandlung der einfacheren krummen Flächen bekannt sind. Im Anschlusse hieran werden diese Flächen selbst in senkrechter Projektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen dargestellt. Dann folgen die Schattenkonstruktionen und die Grundzüge der Beleuchtungslehre. Die kotierte Projektion, die Axonometrie und Grundzüge der Perspektive beschließen das Werk.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

I. Abschnitt.

Parallelprojektionen ebener Gebilde und Affinität.

Parallelprojektionen von Strecken.

9. Die Projektionsebene sei wieder mit Π bezeichnet, und p sei eine beliebige Gerade, welche die Richtung der Projektionsstrahlen angibt. Dann ist die Projektion einer Geraden g im allgemeinen wieder eine Gerade g_s*); nur wenn g parallel der Richtung der projizierenden Strahlen ist, reduziert sich ihre Projektion auf einen Punkt (§§ 3 und 4). Bezeichnet G (Fig. 5) den Spurpunkt (§ 4) der Geraden g, und sind A, B zwei Punkte auf g, so liegen ihre Projektionen A_s, B_s auf g_s, und es sind die Dreiecke AGA_s und BGB_s, einander ähnlich. Folglich verhält sich

$$GA : AB = GA_s : A_sB_s,$$

d. h. zwei Strecken einer Geraden verhalten sich wie ihre Projektionen.

Ist g der Projektionsebene parallel, so fällt der Spurpunkt G in das Unendliche und es ist AB parallel

*) Die frühere Bezeichnung g_c für die Projektion einer Geraden g, P_c für die eines Punktes P wird von jetzt an nur noch für Zentralprojektionen verwendet.

und gleich $A_s B_s$; folglich: die Projektion einer Strecke ist ihr parallel und gleich, wenn die Strecke der Projektionsebene parallel ist.

10. Sind zwei Gerade g und h parallel, so sind auch ihre Projektionen g_s und h_s parallel, da die projizierenden Ebenen beider Geraden der Richtung p und also einander parallel sind.

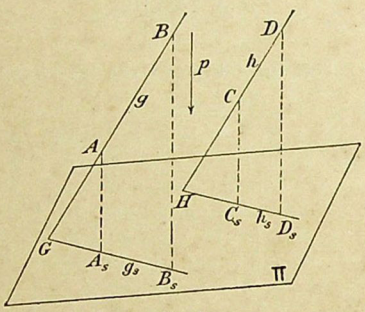

Fig. 5.

Ist noch (Fig. 5) H der Spurpunkt von h in Π, und faßt man zwei in g und h gelegene Strecken von beliebigen Längen, AB und CD ins Auge, so bestehen nach dem vorstehenden die Proportionen

$$GA : AB = GA_s : A_s B_s ,$$
$$HC : CD = HC_s : C_s D_s ,$$

und da auch die Dreiecke AGA_s und CHC_s einander ähnlich sind, so verhält sich

$$GA : HC = GA_s : HC_s$$

und folglich

$$AB : CD = A_s B_s : C_s D_s ,$$

d. h. parallele Strecken verhalten sich wie ihre Projektionen.

Parallelprojektion einer ebenen Figur; Affinität.

11. Projiziert man eine in einer Ebene E gelegene Figur, z. B. das Dreieck ABC (Fig. 6) durch parallele

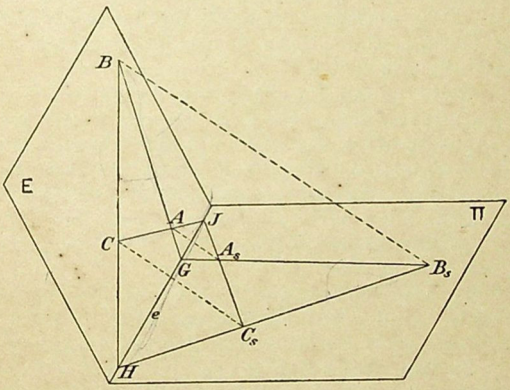

Fig. 6.

Strahlen auf die Ebene Π, so erhält man nach dem Obigen wieder ein Dreieck $A_s B_s C_s$, wenn die Projektionsstrahlen — wie vorausgesetzt werden soll — nicht der Ebene E parallel sind. Jede Seite und ihre Projektion müssen sich in der Spur der Ebene E, d. i. in ihrer Schnittgeraden e mit Π schneiden; z. B.

AB und A_sB_s schneiden sich in dem Punkte G auf e. Umgekehrt aber kann man offenbar auch das Dreieck ABC als Projektion des Dreiecks $A_sB_sC_s$ ansehen; jedes der beiden Dreiecke ist also die Parallelprojektion des anderen. Man erkennt hieraus: jedem Punkte und jeder Geraden der einen Ebene ist bzw. ein Punkt und eine Gerade der anderen Ebene so zugeordnet, daß sie Parallelprojektionen voneinander sind. Derartige einander zugeordnete Punkte oder Geraden sollen kurz entsprechende genannt werden. Jeder Figur der einen Ebene entspricht dann also eine bestimmte Figur der anderen Ebene; jeder Punkt der Schnittgeraden entspricht sich selbst.

Zwei ebene Figuren, von denen jede die Parallelprojektion der anderen ist, nennt man perspektiv-affin; die zwischen ihnen bestehende geometrische Abhängigkeit oder, wie man sagt, geometrische Verwandtschaft heißt perspektive Affinität oder Affinität bei perspektiver Lage. Die charakteristischen Eigenschaften zweier perspektiv-affinen Figuren sind:

1) Alle Verbindungslinien entsprechender Punkte sind (als Projektionsstrahlen) einander parallel; sie heißen auch Affinitätsstrahlen.

2) Die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Geraden liegen in einer Geraden, der Schnittlinie der Ebenen beider Figuren, welche Affinitätsachse genannt wird.

Ist im besonderen eine Gerade der Affinitätsachse parallel, so ist es auch die ihr entsprechende Gerade. Sind zwei Strecken einander parallel, so sind auch die ihnen entsprechenden einander parallel und haben dasselbe Streckenverhältnis (§ 10).

Zwei entsprechende Winkel, d. h. zwei Winkel, deren Schenkel entsprechende Geraden sind, haben aber im allgemeinen nicht gleiche Größe.

Wenn zwei Ebenen parallel sind, so ist jede Figur der einen Ebene kongruent ihrer Parallelprojektion auf die andere. Die Kongruenz ist demnach ein spezieller Fall der Affinität. Figur 7[a] veranschaulicht diesen speziellen Fall.

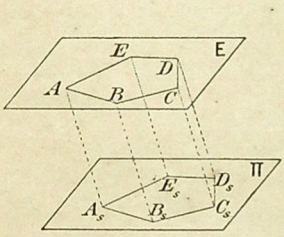

Fig. 7[a].

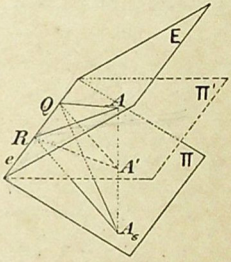

Fig. 7[b].

Ebenso sind die entsprechenden Figuren zweier Ebenen E und Π kongruent, wenn die Projektionsstrahlen gegen beide gleich geneigt sind. In diesem Falle (Fig. 7[b]) stehen nämlich die Projektionsstrahlen auf der Halbierungsebene Π′ des Neigungswinkels der Ebenen E und Π (und mithin auch auf ihrer Schnittgeraden) senkrecht; folglich sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke $AA'Q$ und $A_sA'Q$ kongruent, und mithin ist $QA = QA_s$. In analoger Weise folgt $RA = RA_s$. Mithin ist auch $\triangle QAR \cong \triangle QA_sR$ und folglich $\sphericalangle QAR = \sphericalangle QA_sR$, $\sphericalangle RQA = \sphericalangle RQA_s$. Bringt man nun die eine Ebene durch Drehung um die

Schnittlinie zur Deckung mit der anderen, so fallen entsprechende Punkte und Geraden zusammen, womit die Behauptung bewiesen ist.

Für entsprechende Figuren der Ebenen E und Π ist in diesem Falle die Ebene Π' Symmetrieebene.

12. Zwei perspektiv-affine Figuren bleiben zueinander perspektiv-affin, wenn die Ebene der einen um die Affinitätsachse in eine beliebige neue Lage gedreht wird.

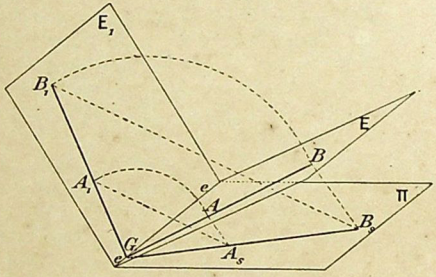

Fig. 8.

Beweis. (Fig. 8.) Die Ebene E ist um e in die neue Lage E_1 gedreht, wodurch die Figur $AB\ldots$ in die Lage $A_1B_1\ldots$ gekommen ist*). Wenn nun der Voraussetzung entsprechend $AB\ldots$ perspektiv-affin zu $A_sB_s\ldots$ in Π ist, so verhält sich (§ 9)

$$GA : AB = GA_s : A_sB_s\,,$$

*) Es sind nur die Geraden AB, A_sB_s, A_1B_1 gezeichnet, um die Figur nicht unübersichtlich zu machen.

und da infolge der Drehung $GA = GA_1$, $AB = A_1B_1$ ist, so folgt

$$GA_1 : A_1B_1 = GA_s : A_sB_s .$$

Mithin sind die Dreiecke A_1GA_s und B_1GB_s ähnlich und ähnlich gelegen, und es ist $A_1A_s \parallel B_1B_s$, d. h. die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind parallel. Es sind also auch die Figuren $A_1B_1, \ldots, A_sB_s, \ldots$ Parallelprojektionen voneinander, was zu beweisen war.

Der Satz gilt augenscheinlich noch, wenn die Ebene E in der einen oder anderen Richtung so weit gedreht wird, daß sie mit der Ebene Π zusammenfällt. Man sagt dann, die eine Ebene ist in die andere umgelegt. Folglich erhält man den wichtigen Satz:

Die Parallelprojektion einer ebenen Figur ist zu der in die Projektionsebene umgelegten Figur perspektiv-affin; die Schnittlinie beider Ebenen ist die Affinitätsachse.

Perspektiv-affine Figuren in derselben Ebene.

13. Man nennt umgekehrt zwei in derselben Ebene gelegene Figuren perspektiv-affin, wenn

1) alle Verbindungslinien entsprechender Punkte einander parallel sind und

2) die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Geraden in einer Geraden liegen.

Diese Eigenschaften sind mit den in § 11 angeführten zwei Kennzeichen der räumlichen Affinität übereinstimmend, und in der Tat ist die jetzige Definition der perspektiven Affinität mit der früheren übereinstimmend, wie noch gezeigt werden wird. Die frühere Definition wird für Figuren derselben Ebene

unbestimmt, da dann die Affinitätsstrahlen selbst in ihr liegen und mithin die Definition der Projektion eines Punktes (§ 2) versagt.

Will man auf Grund der jetzigen Definition zu einer Figur die ihr affine*) konstruieren, so kann man die Affinitätsachse und zwei einander affin entsprechende Punkte willkürlich wählen. Dann aber ist zu jedem anderen Punkte der Ebene der affine Punkt eindeutig bestimmt.

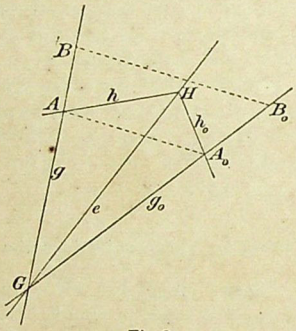

Fig. 9.

Sind (Fig. 9) e als Affinitätsachse und A, A_0 als affine Punkte gegeben, so bestimmt die Verbindungslinie dieser beiden Punkte die Richtung der Affinitätsstrahlen. Man findet dann zu einem beliebigen Punkte B den affinen B_0, indem man die Gerade AB bis zum Schnitt-

*) Statt „perspektiv-affin“ wird im folgenden kurz nur „affin“ gesagt, da die allgemeine Affinität in diesem Buche nicht betrachtet wird.

punkte G mit e verlängert, darauf G mit A_0 verbindet und durch B eine Parallele zu AA_0 zieht; der Schnittpunkt dieser Parallelen mit GA_0 ist der gesuchte Punkt B_0. Die Geraden AG, A_0G sind ebenfalls affin.

Dreht man eine der beiden affinen Figuren, z. B. A_0B_0 um e in eine beliebige räumliche Lage A_1B_1, so ist wieder $AA_1 \parallel BB_1$ (denn $GA : GB = GA_0 : GB_0$ und, da $GA_0 = GA_1$, $GB_0 = GB_1$ ist, auch $GA : GB = GA_1 : GB_1$ usw.), d. h. A_1B_1 und AB sind Parallelprojektionen voneinander und die Affinitätsachse ist die Schnittgerade der Ebenen beider Figuren. Damit ist aber gezeigt, daß die beiden Definitionen der Affinität gleichbedeutend sind.

14. Zwei Gerade g und h (Fig. 9) schließen im allgemeinen einen Winkel ein, welcher nicht gleich dem Winkel zwischen ihren affinen Geraden g_0 und h_0 ist (§ 11). Dreht man die Geraden g und h um ihren Schnittpunkt A so, daß sie immer denselben Winkel φ einschließen, so gibt es eine Lage, in welcher ihre affinen Geraden denselben Winkel φ einschließen.

Aufgabe. Es sollen für zwei affine Punkte A, A_0 die einander entsprechenden rechten Winkel konstruiert werden*).

Man zieht durch den Halbierungspunkt der Geraden AA_0 (Fig. 10) zu ihr eine Senkrechte, welche die Affinitätsachse e in dem Punkte M schneidet. Mit MA als Radius beschreibt man um M als Mittelpunkt einen Kreis, welcher auch durch A_0 gehen muß, da

*) Die Konstruktion für den allgemeinen Fall, daß die affinen Winkel gleich einem beliebig gegebenen Winkel φ sind, findet sich z. B. in Rohn-Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie Bd. 1, S. 15.

$MA = MA_0$ ist. Verbindet man die Schnittpunkte R, S des Kreises und der Affinitätsachse mit den Punkten A und A_0, so sind die Winkel RAS und RA_0S die gesuchten rechten Winkel.

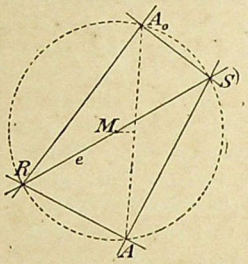

Fig. 10.

Es gibt also nur eine Lösung, ausgenommen den Fall, daß jede der beiden affinen Figuren das Spiegelbild der andern in bezug auf die Affinitätsachse ist, also e die Strecke AA_0 halbiert und senkrecht zu ihr ist; in diesem Falle gibt es unendlich viele Lösungen.

Die Ellipse.

15. Definition. Ellipse nennt man die zu dem Kreise affine Kurve. Auf Grund dieser Definition sollen jetzt einige Konstruktionen der Ellipse abgeleitet werden.

16. Die Affinitätsachse e, der Kreis k mit dem Mittelpunkt O und der zu O affine Punkt O_0 sind gegeben (Fig. 11). Es soll die zu k affine Ellipse konstruiert werden.

Man zieht durch O einen beliebigen Durchmesser AB, welcher e in P schneidet, und durch P die zu ihm affine Gerade PO_0. Die Schnittpunkte von PO_0 mit den durch A und B parallel zu OO_0 gezogenen Affinitätsstrahlen geben die zu A und B affinen Punkte A_0 und B_0. Da $OA = OB$ ist, so folgt (§ 9), daß auch $O_0A_0 = O_0B_0$ ist, d. h. O_0 ist für die Ellipse Mittelpunkt, da in ihm alle Durchmesser $A_0B_0, \ldots$ halbiert werden. Diese Konstruktion wiederholt man für beliebig

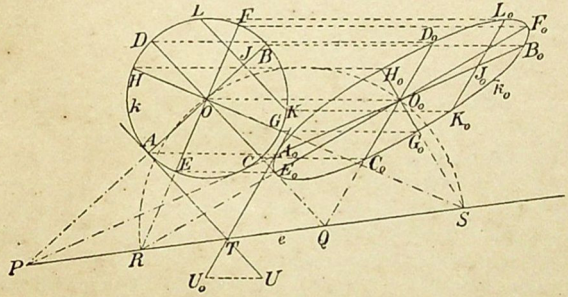

Fig. 11.

viele Kreisdurchmesser und erhält dadurch ebenso viele Ellipsenpunkte, so daß man die Ellipse mit jeder wünschenswerten Genauigkeit zeichnen kann.

Führt man diese Konstruktion für den zu AB senkrechten Kreisdurchmesser CD durch, so erhält man den entsprechenden Durchmesser C_0D_0 der Ellipse. Zwei Ellipsendurchmesser, welche zwei zueinander senkrechten Kreisdurchmessern entsprechen, nennt man konjugierte Durchmesser.

Sie stehen — im Gegensatze zu den entsprechenden Kreisdurchmessern — im allgemeinen nicht aufeinander senkrecht; wohl aber ist eine andere Eigenschaft der Kreisdurchmesser erhalten geblieben. Zieht man irgend eine parallele Sehne zu einem Kreisdurchmesser, z. B. $KL \parallel CD$, so wird diese von dem zu ihm senkrechten Durchmesser AB im Schnittpunkte J halbiert. Nach § 10 ist die zu KL affine Gerade

$$K_0 L_0 \parallel C_0 D_0$$

und

$$KJ : JL = K_0 J_0 : J_0 L_0 ,$$

folglich

$$K_0 J_0 = J_0 L_0 ,$$

da $KJ = JL$ ist. D. h.

Die zu einem Ellipsendurchmesser parallelen Sehnen werden von dem konjugierten Durchmesser halbiert.

Konstruiert man (nach § 14) die beiden affinen rechten Winkel in O und O_0, so erhält man die beiden aufeinander senkrechten Kreisdurchmesser EF und GH, welchen ebenfalls aufeinander senkrechte Ellipsendurchmesser $E_0 F_0$ und $G_0 H_0$ entsprechen. Diese beiden konjugierten Durchmesser nennt man die Achsen der Ellipse; ihre Endpunkte E_0, F_0, G_0, H_0 die Scheitel derselben. Da nun die zu einer Achse parallelen Sehnen nach dem Obigen von der anderen Achse halbiert werden, so ist von den beiden Hälften, in welche jede Achse die Ellipse zerschneidet, jede das Spiegelbild der anderen in bezug auf diese Achse. Die Ellipse ist also in bezug auf die beiden Achsen symmetrisch, und es genügt daher, einen Ellipsenquadranten genau zu zeichnen; die übrigen kann man dann durch bloßes Umklappen desselben um die Achsen erhalten.

17. Tangente an den Kreis nennt man jede in seiner Ebene liegende Gerade, welche mit ihm nur einen Punkt seines Umfanges, keinen seines Inneren gemeinsam hat oder — wie man sich ausdrückt — den Kreis in diesem Punkte berührt. Man kann die Tangente auch als Grenzlage einer Sekante auffassen, wenn man nämlich eine Sekante so dreht, daß ihre Schnittpunkte immer näher aneinander rücken, bis sie schließlich zusammenfallen. Deshalb sagt man auch, die Tangente hat mit der Kurve zwei unendlich benachbarte Punkte gemeinsam. Die zu einer Kreistangente affine Gerade kann folglich mit der zu dem Kreise affinen Ellipse auch nur einen Punkt ihres Umfanges, keinen ihres Inneren gemeinsam haben, und man nennt sie daher entsprechend Tangente der Ellipse.

Aus der obigen Definition folgt leicht, daß jede Kreistangente senkrecht zu dem nach ihrem Berührungspunkte gehenden Durchmesser und parallel zu dem auf dem letzteren senkrechten Durchmesser, z. B. die Tangente in A parallel zu CD ist. Mithin ist (§ 10) die Ellipsentangente, welche den zu A affinen Punkt A_0 zum Berührungspunkte hat, parallel zu $C_0 D_0$. Folglich:

Die Ellipsentangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel dem zu ihm konjugierten Durchmesser.

Die Tangenten in den Scheiteln einer Achse stehen auf ihr senkrecht.

Um eine Tangente an die Ellipse zu ziehen, ohne auf die Eigenschaften konjugierter Durchmesser Bezug zu nehmen und ohne die Ellipse selbst zeichnen zu müssen, verfährt man folgendermaßen. Zu dem Punkte A wird der affine Ellipsenpunkt A_0 bestimmt; man zieht dann die Kreistangente in A, verlängert sie bis zum Schnitte T

mit der Affinitätsachse e und zieht $T A_0$, welche Gerade die gesuchte Ellipsentangente sein muß.

Sollen von einem Punkt U_0 die Tangenten an die Ellipse gezogen werden, so ermittelt man zuerst den zu U_0 affinen Punkt U (nach § 13). Von U aus konstruiert man die beiden Kreistangenten in bekannter Weise (Kreis über $O U$ als Durchmesser schneidet den Kreis k in den Berührungspunkten der beiden Tangenten). In der Figur ist nur der eine Berührungspunkt A gezeichnet und nur für die Tangente UA die Konstruktion durchgeführt, um die Figur nicht unübersichtlich zu machen. Die Tangente UA schneidet e in T, und es ist $U_0 T$ dann die affine Ellipsentangente, welche man also ziehen kann, ohne den zu A affinen Berührungspunkt A_0 vorher konstruiert zu haben.

An einen Kreis können von einem Punkte zwei Tangenten, eine oder keine gezogen werden, je nachdem der Punkt außerhalb, auf oder innerhalb der Kreisperipherie liegt. Folglich gilt das gleiche für die Ellipse.

18. Eine Ellipse ist völlig bestimmt durch die Längen zweier beliebigen konjugierten Durchmesser und den von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Um diesen Satz zu beweisen, benutzt man die folgenden beiden Sätze über den Kreis.

Satz I: Verbindet man (Fig. 12) die Endpunkte A, B eines Durchmessers mit einem beliebigen Punkte P der Peripherie und halbiert die Strecken, welche von AP und BP (bzw. ihren Verlängerungen über P hinaus) auf beliebigen Parallelen zu den Tangenten in A und B ausgeschnitten werden, so ist die Verbindungslinie dieser Halbierungspunkte die Tangente in P.

Beweis: Ist $FG \| BE$, $BJ = JE$, $FK = KG$ und verbindet man J und K mit P, so folgt, da die Dreiecke BPE und FPG rechtwinklige sind, daß $JP = BJ = JE$ und $KP = FK = KG$ ist. Die Dreiecke BJP und GKP sind also gleichschenklige und — da ihre Winkel bei B und G gleich sind — ähnliche Dreiecke. Folglich ist JPK eine gerade Linie und zugleich Tangente in P, da JB Tangente in B und $JP = JB$ ist.

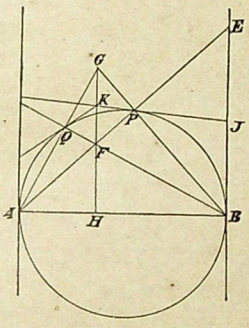

Fig. 12.

Satz II: Verbindet man die Punkte F und G, in denen eine beliebige Parallele zu den Tangenten in A und B von AP und BP geschnitten wird, mit B und A, so ist ihr Schnittpunkt $Q = BF \times AG$ ein Punkt der Peripherie. Beweis: $\triangle APB \sim \triangle GPF$ (da die entsprechenden Winkel gleich sind), folglich $AP : GP = BP : PF$. Hieraus schließt man weiter die Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke APG und BPF und mithin die Gleichheit der Winkel PAG

und PBF. Da also auch $\triangle BPF \sim \triangle AQF$ ist, so muß $\sphericalangle AQF$ ebenfalls ein Rechter sein und Q auf dem Kreise über dem Durchmesser AB liegen. QK ist (nach I) die Tangente in Q.

Unterwirft man nun die ganze Figur 12 einer affinen Verwandlung, indem man die Affinitätsachse und zwei einander affin entsprechende Punkte willkürlich annimmt, so geht (nach §§ 16 und 17) der Kreis in eine Ellipse über; jeder einem Punkte der Kreisperipherie entsprechende Punkt muß auf der Ellipse liegen und die Kreistangenten werden Ellipsen-Tangenten. Folglich gelten die Sätze I und II unverändert für jede beliebige Ellipse, und man erkennt, daß eine Ellipse (Fig. 13) durch einen beliebigen Durchmesser $A_0 B_0$, die Richtung der Tangenten in seinen Endpunkten und einen Punkt P_0 völlig bestimmt ist. Denn um irgend einen weiteren Punkt Q_0 der Ellipse zu erhalten, schneidet man $A_0 P_0$, $B_0 P_0$ durch eine beliebige Parallele zu der gegebenen Tangentenrichtung in F_0, G_0 und verbindet den ersteren mit B_0, den letzteren mit A_0, dann ist $Q_0 = B_0 F_0 \times A_0 G_0$. Halbiert man noch $F_0 G_0$ in K_0, so ist $K_0 Q_0$ die Ellipsentangente in Q_0. Auf diese Weise kann man

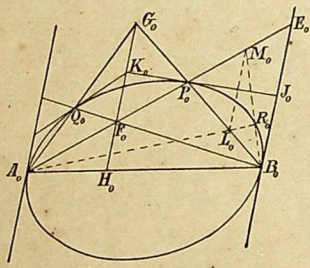

Fig. 13.

beliebig viele Ellipsenpunkte bestimmen, was in der Figur noch für den Punkt R_0 durchgeführt ist.

Da der zu $A_0 B_0$ konjugierte Durchmesser (nach § 17) der Richtung der Tangenten in A_0, B_0 parallel ist, so ist die vorstehende Konstruktion noch anwendbar, wenn $A_0 B_0$ und der zu ihm konjugierte Ellipsendurchmesser der Länge und Lage nach gegeben sind; als Punkt P_0 ist dann einer der Endpunkte dieses konjugierten Durchmessers zu benutzen. Hiermit ist aber der eingangs dieses Paragraphen aufgestellte Satz bewiesen.

19. Zur wirklichen Konstruktion einer Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern ist jedoch das in dem vorigen Paragraphen gegebene Verfahren nicht das bequemste. Dieses erhält man vielmehr, wenn man die Ellipse als affine Figur eines Kreises konstruiert.

Ist die affine Verwandtschaft zwischen einem Kreise k und einer Ellipse in der gleichen Weise wie in § 16 festgelegt, und konstruiert man (Fig. 14) zu dem der Affinitätsachse e parallelen Kreisdurchmesser MN den entsprechenden Ellipsendurchmesser $M_0 N_0$, so ist der letztere ebenfalls der Achse e und also auch MN parallel und folglich ist $M_0 N_0 = MN$. Dem zu der Achse e senkrechten Kreisdurchmesser VW entspricht der zu $M_0 N_0$ konjugierte Ellipsendurchmesser $V_0 W_0$.

Die Länge des Durchmessers $V_0 W_0$ und seine Lage gegen den konjugierten Durchmesser $M_0 N_0$ hängen wesentlich von der Wahl der Affinitätsachse e und des dem Punktes O entsprechenden Punktes O_0 ab, welche willkürlich war. Von der getroffenen Wahl hängt somit die Gestalt der zu dem Kreise k affin konstruierten Ellipse ab.

Umgekehrt gibt es zu einer gegebenen Ellipse, nachdem die Affinitätsachse willkürlich angenommen ist, nur einen einzigen Kreis, welcher zu ihr affin ist, und die vorstehenden Bemerkungen lassen leicht seine Konstruktion finden.

Ist die Ellipse (Fig. 14) durch die beiden ihrer Größe und Lage nach gegebenen konjugierten Durchmesser $M_0 N_0$, $V_0 W_0$ bestimmt, so ziehe man zu dem einen derselben, z. B. $M_0 N_0$, eine beliebige Parallele e

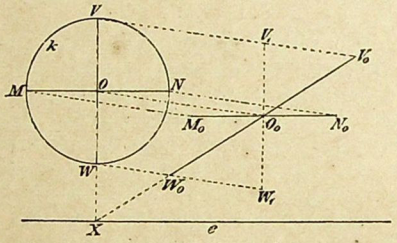

Fig. 14.

als Affinitätsachse. Diese werde von dem anderen Durchmesser $V_0 W_0$ in dem Punkte X getroffen, durch welchen man eine Senkrechte zu e ziehe. Auf dieser muß der zu $V_0 W_0$ affine Kreisdurchmesser liegen, während der zu $M_0 N_0$ affine Kreisdurchmesser parallel zu e ist; die Länge der Kreisdurchmesser wird durch $V_0 W_0$ bedingt. Um die Lage des Kreises zu finden, ziehe man durch O_0 eine Senkrechte zu $M_0 N_0$ und trage auf ihr den halben Ellipsendurchmesser $M_0 N_0$, d. i. $O_0 M_0$ nach oben oder unten ab, bis V_1, bzw. W_1. Dann geben die Parallelen $V_0 V_1$ und $W_0 W_1$ die Richtung der Affinitätsstrahlen und schneiden die durch

X gezogene Senkrechte zu e in den Endpunkten V, W des zu $V_0 W_0$ affinen Kreisdurchmessers; der durch O_0 gehende Affinitätsstrahl schneidet also VW in dem Kreismittelpunkte O.

Da die Affinitätsachse e eine beliebige Parallele zu $M_0 N_0$ war, so läßt sich die Konstruktion durch passende Verfügung über die Lage von e noch erheblich vereinfachen. Z. B. kann man e durch W_0 legen; dann ist die Affinitätsachse gemeinsame Tangente von Kreis und Ellipse und W_0 der Berührungspunkt beider. Am vorteilhaftesten aber läßt man die Achse e mit $M_0 N_0$ zusammenfallen. Hierdurch fallen auch M und M_0, N und N_0, O und O_0 zusammen, und der Kreis über $M_0 N_0$ als Durchmesser ist der zu der Ellipse affine Kreis. Der zu $M_0 N_0$ senkrechte Kreisdurchmesser VW ist affin zu $V_0 W_0$, wodurch die Richtung der Affinitätsstrahlen bestimmt ist.

Natürlich kann man auch die Affinitätsachse mit $V_0 W_0$ zusammenfallen lassen und die Ellipse als affine Kurve zu dem Kreise über dem Durchmesser $V_0 W_0$ konstruieren.

So ergibt sich die folgende Konstruktion.

20. Aufgabe. Es soll die Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern AB, CD konstruiert werden (Fig. 15).

Über AB als Durchmesser konstruiert man den Kreis k_0*) und zieht den zu AB senkrechten Durchmesser $C_0 D_0$, welcher dem konjugierten Ellipsendurchmesser CD affin entspricht. CC_0 oder DD_0 gibt die Richtung der Affinitätsstrahlen. Zieht man nun zu

*) Da im folgenden stets Elemente der Ellipse gegeben sind, so ist fortan der Index 0 an die Kreiselemente angehängt.

dem Durchmesser $C_0 D_0$ eine beliebige parallele Sehne, z. B. $E_0 F_0$, so muß die entsprechende Ellipsensehne, parallel zu CD sein und durch den Schnittpunkt P von $E_0 F_0$ und der Affinitätsachse AB gehen. Schneidet man diese Ellipsensehne noch mit den durch E_0 und F_0 gezogenen Affinitätsstrahlen, so sind die Schnittpunkte E und F zwei Punkte der gesuchten Ellipse k.

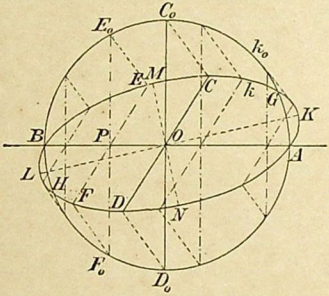

Fig. 15.

Bezeichnet man die Länge des größeren Halbmessers OA mit a, die des zu ihm konjugierten kleineren Halbmessers OC mit b und beachtet, daß die Dreiecke PEE_0 und OCC_0 einander ähnlich sind, so folgt

$$PE_0 : PE = OC_0 : OC = a : b; \quad PE = \frac{b}{a} \cdot PE_0 ,$$

d. h. jede zu dem Durchmesser CD parallele Ellipsensehne ist gleich der im Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkürzten affinen Kreissehne.

Zur Übung konstruiere man dieselbe Ellipse k als affine Kurve zu dem Kreise über dem Durchmesser CD,

indem man die Affinitätsachse jetzt mit CD zusammenfallen läßt.

Um in einem Punkte der Ellipse die Tangente oder von einem außerhalb gelegenen Punkte die beiden Tangenten an sie zu ziehen, benutzt man am bequemsten die affinen Kreistangenten (vgl. §§ 16 und 17) und vornehmlich den Umstand, daß die Kreistangente in E_0 und die Ellipsentangente in dem affinen Punkte E die Affinitätsachse AB in demselben Punkte treffen müssen.

21. Nachdem die Ellipse gezeichnet ist, kann man ihre Achsen mit Hilfe eines konzentrischen, die Ellipse schneidenden Kreises, z. B. des Kreises k_0, bestimmen. Ein solcher Kreis schneidet die Ellipse stets in vier Punkten, welche zu den Achsen symmetrisch liegen. Zieht man nämlich durch den Halbierungspunkt des Kreisbogens AG den Durchmesser KL, so halbiert dieser die dem Kreise und der Ellipse gemeinsame Sehne AG und steht auf ihr senkrecht. Folglich ist KL eine Achse der Ellipse. Die andere Achse MN liegt in dem Kreisdurchmesser, welcher den Kreisbogen BC_0G halbiert. Die beiden gefundenen Achsen müssen aufeinander senkrecht stehen, wenn die Ellipse genau gezeichnet ist. Man hat daher in diesem Umstande zugleich eine Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung.

Dies Verfahren hat den Nachteil, daß die Ellipse bereits genau gezeichnet sein muß. In § 24 wird ein sehr einfaches Verfahren gegeben, welches von diesem Nachteil frei ist und die Ellipsenachsen direkt aus zwei konjugierten Durchmessern zu bestimmen gestattet.

22. Die in § 20 gegebene Ellipsenkonstruktion versagt, wenn die beiden Achsen der Ellipse gegeben sind, denn dann fallen die beiden Richtungen

CC_0 und OC (Fig. 15) in eine einzige Richtung OC_0, damit aber auch E_0E und PE in PE_0 zusammen. In diesem Falle führt jedoch eine Bemerkung des vorigen Paragraphen zu der bequemsten Konstruktion der Ellipse aus ihren Achsen.

(Fig. 16.) Sind $AB = 2a$, $CD = 2b$ $(a > b)$ die beiden Ellipsenachsen, so konstruiert man um ihren Schnittpunkt O mit dem Radius $OA = a$ den Kreis k_0; dann ist die gesuchte Ellipse k affine Kurve zu

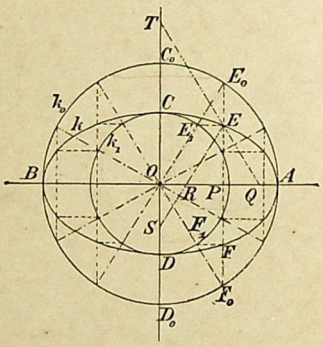

Fig. 16.

diesem Kreise und AB die Affinitätsachse. Eine auf AB senkrechte Kreissehne, z. B. E_0F_0, fällt dann mit der Ellipsensehne zusammen, und es müssen die E_0, F_0 entsprechenden Ellipsenpunkte E, F auf ihr liegen.

Um E z. B. zu finden, zieht man durch den Punkt E_1, in welchem die Gerade OE_0 von dem mit dem Radius $OC = b$ um O beschriebenen Kreise k_1 geschnitten wird, zu AB eine Parallele, welche PE_0 in E schneidet.

Da nämlich $\triangle E_0 E E_1 \sim \triangle E_0 P O$ ist, so folgt

$$PE : PE_0 = OE_1 : OE_0 = b : a$$

oder

$$PE = \frac{b}{a} \cdot PE_0,$$

wie es nach § 20 der Fall sein muß.

Die Ellipse k ist andererseits auch affin zu dem Kreise k_1 mit der Affinitätsachse CD. Hierbei entspricht dem Punkte E auf k der Punkt E_1 auf k_1, woraus in Verbindung mit der Affinität von k und k_0 ebenfalls die vorstehende Ellipsenkonstruktion folgt.

Zur Konstruktion der Tangente in einem Ellipsenpunkte führt hier ebenfalls die Bemerkung am Ende des § 20.

Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist

$$OP^2 = a^2 - PE_0^2$$

und folglich

$$OE^2 = OP^2 + PE^2 = a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot PE_0^2.$$

Wächst PE_0, so nimmt OE ab, d. h. die Halbmesser der Ellipse nehmen von der großen nach der kleinen Halbachse zu stetig ab.

23. Zieht man (Fig. 16) durch einen beliebigen Punkt E der Ellipse $SE \parallel OE_0$, so ist stets

$$SE = OE_0 = a, \quad RE = OE_1 = b.$$

Gleitet also die Strecke $SE = a$ mit dem Endpunkte S auf der Achse CD und zugleich mit dem um $a - b$ von S entfernten Punkte R auf der anderen Achse AB entlang, so beschreibt ihr anderer Endpunkt E die Ellipse k.

Macht man andererseits $PQ = PR$ und zieht die Gerade QE, deren Verlängerung die Achse CD in T schneidet, so ist $QE = RE = b$, $ET = OE_0 = a$ (denn

TE und OE_0 liegen zwischen Parallelen, gegen welche sie, nach entgegengesetzten Seiten, gleich geneigt sind. Läßt man daher die Strecke $QT = a + b$ mit ihren Endpunkten auf den Achsen entlang gleiten, so beschreibt der Punkt E, welcher die Strecke QT im Verhältnis $a : b$ teilt, ebenfalls die Ellipse k.

Derartige Konstruktionen, bei welchen die Ellipse durch einen bestimmten Punkt einer Strecke, die mit ihren Endpunkten auf den beiden Achsen entlang gleitet, erzeugt wird, werden Papierstreifenkonstruktionen der Ellipse genannt, da man zu ihrer praktischen Ausführung die Kante eines Papierstreifens, auf welchen die drei Punkte in den gegebenen Abständen markiert sind, verwenden kann.

Diese Papierstreifenkonstruktionen der Ellipse gestatten Apparate zu bauen, mit denen man Ellipsen mechanisch zeichnen kann und welche daher als Ellipsenzirkel bezeichnet werden.

24. Die zweite Papierstreifenkonstruktion führt zu einer sehr einfachen Konstruktion zweier konjugierten Durchmesser aus den Ellipsenachsen.

Sind $OA = a$, $OC = b$ (Fig. 17) die beiden Halbachsen der Ellipse k und zieht man zwischen ihnen bzw. ihren Verlängerungen die Strecke $QT = a + b$, so ist nach der zweiten Papierstreifenkonstruktion der Punkt E ein Punkt der Ellipse k, wenn $QE = b$ ist. Zu E konstruiert man die entsprechenden Punkte E_0 und E_1 der um O mit den Radien a, b konstruierten Kreise k_0, k_1; man findet (§ 22) den Punkt E_0 als Schnittpunkt der durch den Punkt E zu der Achse OC parallel gezogenen Geraden mit dem Kreise k_0 und E_1 als Schnittpunkt der durch denselben Punkt zu der Achse OA gezogenen Parallelen mit dem Kreise k_1.

Diese beiden Punkte E_0 und E_1 müssen mit O in gerader Linie liegen. Zieht man ferner durch E_0 eine Parallele zu OA und durch E_1 eine Parallele zu OC, so entsteht das Rechteck $EE_0\,GE_1$, dessen Diagonalen sich in H halbieren; folglich ist $GT = QE = b$, $OE_0 = QG = ET = a$. Errichtet man noch in dem Punkte O Lote auf den Geraden OE_0 und OG, von denen das erstere die Kreise k_0, k_1 in den Punkten F_0, F_1 schneidet, und zieht durch den Punkt F_0 die Parallele

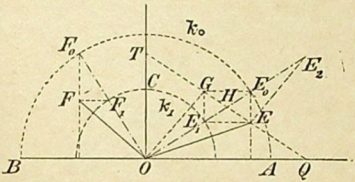

Fig. 17.

zu der Achse OC bis zu ihrem Schnittpunkte F mit dem zweiten Lote, so ist

$$\triangle E_0\,GO \cong \triangle F_0\,FO$$

(denn es ist $OE_0 = OF_0 = a$, $\sphericalangle\, GOE_0 = \sphericalangle\, FOF_0$, $\sphericalangle\, GE_0\,O = \sphericalangle\, FF_0\,O$), und folglich

$$GE_0 = FF_0\,.$$

Verbindet man jetzt noch die Punkte F und F_1 miteinander, so folgt weiter

$$\triangle E_0\,GE_1 \cong \triangle F_0\,FF_1$$

(denn es ist $GE_0 = FF_0$, $E_1E_0 = F_1F_0 = a - b$, $\sphericalangle\, GE_0\,O = \sphericalangle\, FF_0\,O$); mithin ist

$$\sphericalangle\, F_0\,FF_1 = \sphericalangle\, E_0\,GE_1 = 90°.$$

Da nun $F_0F \parallel OC$ gezogen war, so ist

$$F_1F \parallel OA$$

und mithin der Punkt F der dem Punkte F_0 des Kreises k_0 entsprechende Punkt der Ellipse k (§ 22). Die beiden Ellipsenhalbmesser OE und OF sind also konjugiert, da sie den aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern OE_0 und OF_0 des Kreises k_0, zu welchem die Ellipse k affin ist, entsprechen.

Hieraus ergibt sich umgekehrt die folgende Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern OE und OF (Fig. 18).

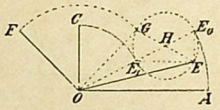

Fig. 18.

Man errichtet in O ein Lot auf OF und trägt auf ihm die Länge $OG = OF$ ab. Dann verbindet man G mit E und beschreibt über EG als Durchmesser einen Kreis, welcher die Verbindungslinie von O mit seinem Mittelpunkte H in den Punkten E_0 und E_1 schneidet. Die gesuchten Achsen sind dann die Parallelen zu EE_1 und EE_0 durch O und ihre halben Längen gegeben durch $OA = OE_0 = a$ und $OC = OE_1 = b$.

Verlängert man (Fig. 17) die Strecke OE_0 um die Strecke $E_0E_2 = b$ und verbindet den Endpunkt E_2 mit dem Punkte E, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke OE_1G und E_2E_0E, daß $E_2E \parallel OG$ und mithin senkrecht zu OF ist. Die Gerade E_2E steht also senkrecht auf der Ellipsentangente im Punkte E, da diese letztere der Geraden OF parallel ist (§ 17).

Eine Gerade, welche auf einer Tangente einer Kurve senkrecht steht und durch ihren Berührungspunkt geht, heißt Normale der Kurve. Auf Grund der obigen Bemerkung erhält man, wenn die Achsen der Ellipse bekannt sind, die Normale in einem Punkte E derselben, wenn man den dem Ellipsenhalbmesser OE entsprechenden Kreishalbmesser OE_0 verlängert bis zum Schnitte E_2 mit dem Kreise k_2, welcher mit dem Radius $a + b$ um O beschrieben ist. Die Gerade $E_2 E$ ist dann die gesuchte Normale.

25. Will man eine Ellipse möglichst genau zeichnen, so empfiehlt es sich, nicht nur Punkte der Ellipse in genügender Zahl nach einem der angegebenen Verfahren zu bestimmen, sondern auch in ihnen die Tangenten an die Ellipse (nach § 17, 18 oder 20) zu konstruieren. Ist die Ellipse durch Angabe der Länge und Lage zweier konjugierten Durchmesser bestimmt, so konstruiere man auch (nach § 24) die beiden Hauptachsen und beachte, daß man, je mehr man sich den Scheiteln der großen Achse nähert, um so mehr Punkte der Ellipse — in immer kleineren Abständen voneinander — bestimmen muß, da in diesen beiden Scheiteln die Ellipse am stärksten gekrümmt ist.

Mit Vorteil benutzt man zum genauen Zeichnen einer Ellipse noch die Krümmungskreise in den Scheitelpunkten. Unter allen Kreisen, welche in einem Punkte einer Kurve mit ihr die Tangente gemeinsam haben, und deren Mittelpunkte also auf der Normale dieses Kurvenpunktes liegen, gibt es einen, welcher sich der Kurve enger anschmiegt als jeder andere. Dieser Kreis heißt der Krümmungskreis, sein Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt des zugehörigen Kurvenpunktes.

Die Krümmungsmittelpunkte für die Scheitel der Ellipse erhält man durch folgende einfache Konstruktion (Fig. 19). Man zieht in dem einen Scheitel jeder Achse die Tangente, z. B. in B und C. In dem so entstandenen Rechteck $OBEC$ fällt man von dem Schnittpunkte E der Tangenten das Lot auf die beide Scheitel verbindende Diagonale BC. Dieses Lot schneidet die große Achse AB in dem Krümmungsmittelpunkte M des Scheitels B und die kleine Achse CD in dem

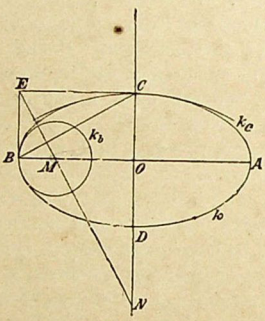

Fig. 19.

Krümmungsmittelpunkte N des Scheitels C; MB und NC sind die Radien der zugehörigen Krümmungskreise k_b und k_c. Die Figur 19 läßt deutlich das enge Anschmiegen der Krümmungskreise an die Ellipse erkennen. Es ist zu beachten, daß die Krümmungskreise k_a, k_b in den Scheiteln A, B der großen Achse ganz im Innern der Ellipse k liegen, daß aber umgekehrt die Krümmungskreise k_c, k_d in den Scheiteln C, D der kleinen Achse die Ellipse k einschließen.

Die Begründung dieser Konstruktion, welche — wie ausdrücklich hervorgehoben sei — nur für die Scheitelpunkte der Ellipse gilt, ist in dem zweiten Bändchen bei der Lehre von dem Krümmungskreise der Kegelschnitte zu finden.

26. Dreht man in Figur 11 eine der beiden Kurven, die Ellipse oder den Kreis, um die Affinitätsachse e aus der Ebene der anderen heraus in eine beliebige räumliche Lage, so ist dann jede der beiden Kurven die Parallelprojektion der anderen (nach § 13). Mit dem Winkel, welchen die Ebenen beider Kurven einschließen, ändert sich die Richtung der Projektionsstrahlen. Folglich ist die Parallelprojektion eines Kreises auf eine beliebige andere Ebene eine Ellipse; die Schnittgerade beider Ebenen ist die Affinitätsachse. Die Projektionsstrahlen des Kreises bilden den Mantel eines Kreiszylinders, der ein gerader oder schiefer ist, je nachdem die Projektionsstrahlen auf der Kreisebene senkrecht stehen oder nicht. Man kann daher den vorstehenden Satz auch in der Fassung aussprechen: Jeder Kreiszylinder wird von einer beliebigen Ebene im allgemeinen in einer Ellipse geschnitten. Zwei parallele Ebenen schneiden (nach § 11, S. 23) einen Kreiszylinder in kongruenten Ellipsen.

Schneidet man einen Kreiszylinder durch zwei beliebige Ebenen, welche ihn in Ellipsen schneiden, so kann man auch jede Ellipse als Parallelprojektion der andern ansehn. Legt man die Ebene der einen Ellipse dann in die der anderen um, so folgt, daß bei jeder affinen Verwandlung aus einer Ellipse stets wieder eine Ellipse entsteht; hierbei ist der Kreis als ein spezieller Fall der Ellipse ($a = b$) anzusehen.

Dreht man in Figur 16 den Kreis k_0 um AB, bis er mit der Ellipse einen spitzen Winkel ε einschließt, welcher

durch $\cos\varepsilon = \frac{b}{a}$ bestimmt ist, so erscheint die Ellipse k als senkrechte Projektion des Kreises k_0. — Dreht man dagegen den Kreis k_1 um CD, bis er mit der Ellipse den gleichen Winkel ε einschließt, so erscheint der Kreis als senkrechte Projektion der Ellipse. Die Projektionsstrahlen bilden die Mantellinien eines geraden Kreiskegels und sind gegen die Ellipsenebene unter dem Winkel $\sigma = 90^0 - \varepsilon$ geneigt.

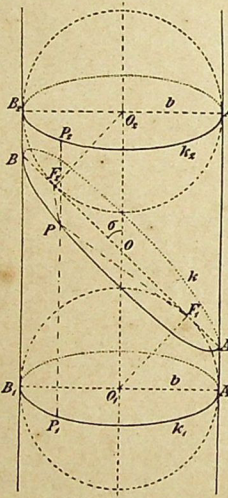

Fig. 20.

27. Schneidet man einen geraden Kreiszylinder (Figur 20) vom Radius b durch eine unter dem Winkel σ gegen die Zylinderachse (Schnittpunkt O) und die Mantellinien geneigte Ebene E, so ist also die Schnittkurve eine Ellipse k, deren Mittelpunkt O ist, da eine durch O senkrecht zur Zylinderachse gelegte Ebene Φ Symmetrieebene für die ganze Figur ist. Die Schnittgerade dieser Symmetrieebene mit E gibt die kleine Achse von der Länge $2b$, während eine durch die Zylinderachse senkrecht zu E gelegte Ebene Ψ die Ebene E in der großen Ellipsenachse $AB = 2a$ schneidet. Man erhält $OA = OB = a = \frac{b}{\sin\sigma}$.

Man konstruiert nun die beiden dem Zylinder einbeschriebenen Kugeln vom Radius b, welche die Schnittebene E in zwei Punkten F_1 und F_2 berühren. Da die Ebene Ψ durch die große Achse AB der Ellipse und die Zylinderachse Symmetrieebene*) für den Zylinder, die Schnittellipse und die beiden Berührungskugeln ist, so müssen die Punkte F_1 und F_2 auf der großen Achse AB liegen und zwar, wie aus der Symmetrie der ganzen Figur in bezug auf die Ebene Φ folgt, muß $OF_1 = OF_2$, also auch $AF_1 = BF_2$ sein. Der Zylindermantel berührt die Kugeln längs der größten Kreise k_1 und k_2 (vgl. § 40, 1. Absatz); jede Mantellinie ist Tangente an beide Kugeln. Man verbindet nun einen beliebigen Punkt P der Schnittellipse k mit den Punkten F_1, F_2 und zieht die durch ihn gehende Mantellinie P_1P_2 von dem Berührungskreise k_1 der einen Kugel bis zu dem der anderen, k_2. Da aber, wie in der Stereometrie gezeigt wird, alle von einem Punkt an eine Kugel gezogenen Tangenten gleiche Länge haben, so ist $PF_1 = PP_1$ und $PF_2 = PP_2$, folglich

$$PF_1 + PF_2 = P_1P + PP_2 = P_1P_2 .$$

Und da alle Mantellinien zwischen k_1 und k_2 die gleiche Länge haben, so ist P_1P_2 konstant. Läßt

*) Die Figur 20 ist in schiefer Parallelprojektion gezeichnet, wobei die Symmetrieebene $\Psi = A_1B_1B_2A_2$ als Projektionsebene benutzt ist. Von den beiden Berührungskugeln sind nur die in der Projektionsebene liegenden größten Kreise und die beiden Berührungskreise k_1 und k_2 gezeichnet. Die (im Interesse der Übersichtlichkeit nicht gezeichneten) scheinbaren Umrisse der Kugeln sind Ellipsen (vgl. § 40).

man P mit A zusammenfallen, so ist demnach, da

$$AF_2 = AF_1 + F_1F_2 = F_1F_2 + F_2B = F_1B$$

ist,

$$P_1P_2 = A_1A_2 = AF_1 + AF_2 = AF_1 + F_1B = AB = 2a$$

und folglich

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Die Ellipse ist daher auch der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten — den Brennpunkten — konstant ist. Durch diese Eigenschaft wird gewöhnlich die Ellipse definiert.

Verbindet man (Fig. 21) einen Scheitel der kleinen Achse, z. B. C mit den beiden Brennpunkten F_1, F_2, so folgt, da $CF_1 + CF = 2a$ ist, aus der Kongruenz der

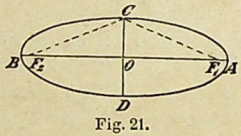

Fig. 21.

Dreiecke COF_1 und COF_2, daß $CF_1 = CF_2 = a$ ist. Daher ist der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte $OF_1 = OF_2 = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Konstruktion der zu einer beliebigen Kurve affinen Kurve.

28. Soll zu einer beliebigen Kurve k die affine k_0 konstruiert werden, so ermittelt man zu jedem Punkte P der gegebenen Kurve k den ihm entsprechenden, wobei ein Paar entsprechender Punkte A, A_0 und die Affinitätsachse e willkürlich gewählt werden können.

Das in § 13 angegebene Verfahren modifiziert man zweckmäßig dahin, daß man $AR \perp e$ zieht und R mit A_0 verbindet (Fig. 22). Um dann den einem beliebigen Punkte P entsprechenden Punkt P_0 zu finden, zieht man

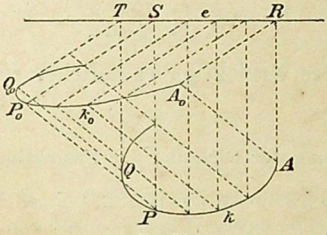

Fig. 22.

$PS \perp e$, durch S eine Parallele zu A_0R und schneidet diese mit der durch P gezogenen Parallelen zu AA_0; der Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt P_0. Berührt ein Lot QT die Kurve k in Q, so muß die ihm entsprechende Gerade Q_0T die Kurve k_0 in Q_0 berühren.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

II. Abschnitt.

Schiefe Projektion räumlicher Gebilde.

Bestimmung der Richtung der Projektionsstrahlen.

29. Die Strecke CD (Fig. 23), deren Endpunkt D in der Projektionsebene Π liegt, werde durch Projektionsstrahlen, parallel der durch den Pfeil p gegebenen Richtung, in die Strecke $C_s D$ projiziert. Die Länge

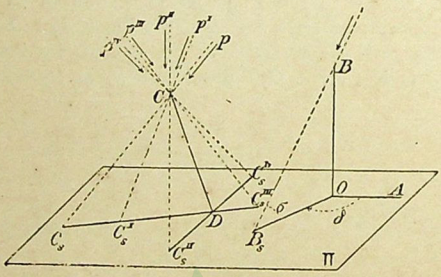

Fig. 23.

und Richtung dieser Projektion hängen von der Richtung der projizierenden Strahlen ab und ändern sich mit dieser. Ändert man zunächst die Richtung der pro-

jizierenden Strahlen so, daß sie der projizierenden Ebene CDC_s parallel bleiben, so fällt die Projektion zwar immer in die Schnittgerade C_sD dieser projizierenden Ebene und der Projektionsebene, aber die Länge der Projektion ändert sich; für die Richtung p^I z. B. ergibt sich die Strecke $C_s^I D$ als Projektion von CD. Wenn man aber die Richtung der Projektionsstrahlen sich so ändern läßt, daß auch die projizierende Ebene der Geraden CD ihre Lage ändert, sich also um CD dreht, so dreht sich auch die Projektion von CD auf die Ebene Π um D; für die Projektionsstrahlenrichtung p^{II} erhält man z. B. $C_s^{II} D$ als Projektion von CD, für die Richtungen p^{III}, p^{IV} die Projektionen $C_s^{III} D$, $C_s^{IV} D$, welche mit den Richtungen C_sD bzw. $C_s^{II} C$ Winkel von 180° einschließen. Durch geeignete Wahl der Richtung der Projektionsstrahlen kann man jede von dem Punkte D ausgehende Strecke von beliebiger Länge und Richtung als Projektion von CD erhalten.

Umgekehrt kann man die Richtung der Projektionsstrahlen dadurch festlegen, daß man eine von D ausgehende Strecke von willkürlich gewählter Richtung und Länge als Projektion von CD angibt. Setzt man z. B. fest, daß C_sD die Projektion von CD sei, so gibt die Verbindungslinie der nicht zusammenfallenden Endpunkte C und C_s die Richtung der Projektionsstrahlen.

30. Will man auf diese Weise die Richtung der Projektionsstrahlen angeben, so würde es im allgemeinen nicht zweckmäßig sein, die Projektion einer Strecke mit beliebigem Neigungswinkel gegen die Projektionsebene als Bestimmungsstück zu benutzen. Es empfiehlt sich vielmehr, hierzu eine senkrecht auf der Projektionsebene Π stehende Strecke, z. B. OB nebst ihrer Projektion OB_s

zu wählen (Fig. 23). In dem rechtwinkligen Dreiecke BOB_s gibt dann $\sphericalangle BB_sO$ den (stets spitzen) Neigungswinkel σ der Projektionsstrahlen gegen die Ebene Π, und es ist

$$\frac{OB_s}{OB} = \cot\sigma = v \ (0 < \sigma \leqq 90^0).$$

v wird gewöhnlich als das Verkürzungsverhältnis bezeichnet, da v fast immer nur kleiner als 1 oder höchstens gleich 1 gewählt wird. Um noch die Richtung leicht angeben zu können, zieht man durch O eine beliebige Gerade OA in Π als Grundrichtung und mißt den Winkel δ, welchen OB_s mit ihr einschließt. Damit die Angaben über die Richtung der Projektionsstrahlen eindeutig sind, sollen folgende Bestimmungen gelten:

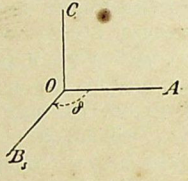

Fig. 24.

Die Projektionsebene Π ist die vertikal gestellte Zeichenebene. Durch einen beliebigen Punkt O derselben (Fig. 24)*) zieht man nach rechts (für den vor Π stehenden Beschauer) eine horizontale Gerade OA. Die

*) In Figur 24 ist die Projektionsebene nicht mehr abgegrenzt, da eben die ganze Zeichenebene als Projektionsebene zu betrachten ist.

gegen OA unter dem Winkel δ gezogene beliebig lange Strecke OB_s soll die Projektion des im Punkte O senkrecht zu Π nach vorn errichteten Lotes OB sein; dabei soll der Winkel δ von OA aus nach OB_s hin im Sinne des Uhrzeigers (Pfeilrichtung in der Figur) gemessen werden.

Durch Angabe des Winkels δ und des Verkürzungsverhältnisses v ist die Richtung der Projektionsstrahlen völlig bestimmt. Man hat nur unter dem Winkel δ gegen OA eine beliebig lange Strecke OB_s zu ziehen und auf Π nach vorn das Lot $OB = v \cdot OB_s$ zu errichten; die Gerade BB_s gibt dann die Richtung der Projektionsstrahlen.

In der Figur 24 ist noch $OC \perp OA$ gezogen und $OB_s = OA = OC$ gemacht, während $\delta = 135^0$ gewählt ist. Nimmt man noch $v = 1$ an, so ist $OB = OB_s$, d. h. die Projektionsstrahlen sind unter 45^0 gegen Π geneigt. OA, OB_s, OC können demnach betrachtet werden als die Projektionen dreier aufeinander senkrechten, gleich langen Strecken, von denen zwei der Ebene Π parallel sind und die dritte zu ihr senkrecht steht (vgl. die Anmerkung auf S. 59).

Schiefe Projektion eines Würfels; Bemerkung über das Ausziehen der Linien.

31. Der Würfel liege mit einer Seitenfläche $OADC$ so in der Projektionsebene Π, daß die eine Kante OA horizontal, die andere OC vertikal gerichtet ist. Die Richtung der Projektionsstrahlen ist durch die Größen δ und v gegeben.

Bei dieser Lage projiziert sich (Fig. 25) die gegenüberliegende Seitenfläche $BEGF$ ebenfalls in un-

veränderter Gestalt und Größe, da dieselbe zu Π parallel ist. Es kommt demnach nur darauf an, einen nicht in Π liegenden Eckpunkt, z. B. den Eckpunkt B zu projizieren. Da alle Würfelkanten gleiche Länge haben, und die Kante $OB \perp \Pi$ ist, so erhält man die Projektion B_s von B, indem man von O aus die

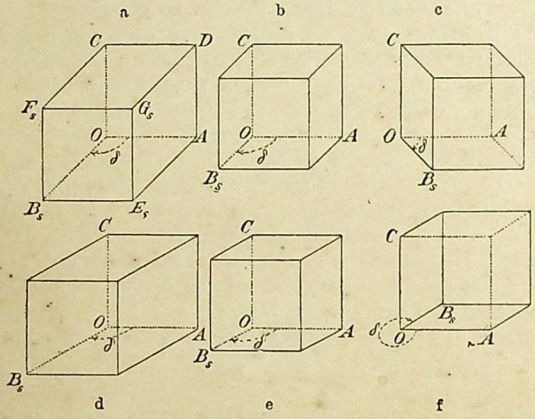

Fig. 25 a—f.

Strecke $OB_s = v \cdot OB = v \cdot OA$ unter dem gegebenen Winkel δ gegen OA zieht. Durch B_s zieht man dann Parallelen zu OA, OC und verbindet, nachdem man das Quadrat $B_sE_sG_sF_s$ gezeichnet hat, noch E_s, G_s, F_s bzw. mit A, D, C. Diese drei Geraden sind parallel der Strecke OB_s; alle vier Geraden sind die Projektionen der auf Π senkrechten Würfelkanten.

Die Figuren 25^{a-f} sind die Parallelprojektionen desselben Würfels für verschiedene Annahmen über δ und v, und zwar ist

Figur	a	b	c	d	e	f
δ	135^0	135^0	45^0	150^0	150^0	330^0
$v = \cot\sigma$	1	$1/2$	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$
also σ	45^0	$63^0\,26'$		45^0	$63^0\,26'$	

Verfolgt man die Projektionsstrahlen stets von vorn nach hinten, so gehen dieselben unter dem betreffenden Winkel σ gegen Π geneigt, in den Fällen a, b, d, e von rechts oben nach links unten, in dem Falle c von links oben nach rechts unten und in dem Falle f von links unten nach rechts oben.

32. Betrachtet man den Würfel in der Richtung der Projektionsstrahlen, so werden gewisse seiner Kanten durch vor ihnen liegende Seitenflächen, welche sämtlich als undurchsichtig gedacht werden, verdeckt. Die Projektionen dieser nicht sichtbaren Linien sind in den Figuren punktiert, während die der sichtbaren Linien voll ausgezogen sind. Durch diese Unterscheidungen zwischen sichtbaren und unsichtbaren Linien gewinnt das Bild bedeutend an Anschaulichkeit. Alle Hilfslinien, welche nur zu konstruktiven Zwecken dienen, werden dünn gestrichelt oder strichpunktiert.

Diese Festsetzungen sind in allen bisherigen Figuren bereits beachtet und werden auch in der Folge für alle Linien streng innegehalten werden.

Vorteile und Nachteile der schiefen Projektion.

33. Die Vorteile der schiefen Projektion liegen darin, daß alle der Projektionsebene parallelen Figuren in ihrer wahren Gestalt (§§ 9—11) und alle zur Projektionsebene senkrechten Geraden parallel einer beliebig gewählten Geraden abgebildet werden. Gegenüber der Perspektive hat sie dadurch den Vorteil, daß sich die von ihr gelieferten Abbildungen leicht konstruieren lassen und daß einander parallele Linien auch im Bilde parallel erscheinen. Damit diese Vorteile zur Geltung kommen, stellt man den Gegenstand am besten so auf, daß eine seiner Hauptebenen parallel zu Π ist.

Diesen Vorzügen steht aber der Nachteil gegenüber, daß die schiefe Projektion eines Gegenstandes nur dann einen annähernd richtigen Eindruck macht, wenn dieselbe in der Richtung der Projektionsstrahlen, also schief zur Bildebene, betrachtet wird. Selbst in dieser Richtung gesehen, würde wegen der parallelen Strahlen der Eindruck nur dann ganz der Wirklichkeit entsprechen, wenn die Projektion aus unendlicher Ferne betrachtet werden könnte. Der Eindruck, den das Bild erzeugt, ist ferner um so fehlerhafter, je größer v gewählt wird, weshalb man v nie größer als 1 nimmt. Man wählt $v = 1$, wenn man unmittelbar aus der Zeichnung nicht nur die richtigen Längen der zur Projektionsebene parallelen, sondern auch der zu ihr senkrechten Strecken entnehmen will (z. B. im Baufache bei Steinschnitten); dagegen wählt man v erheblich kleiner als 1, z. B. $v = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, wenn man ein möglichst wahrheitsgetreues Bild zu erhalten wünscht.

Es weicht das Bild eines Gegenstandes erheblich von seiner natürlichen Erscheinung ab, wenn $v > \frac{1}{2}$, also σ ungefähr kleiner als 60^0 ist. $v = 0$ gibt die senkrechte Projektion.

Die spezielle Wahl von δ ist ziemlich gleichgültig. Nur die Werte 0^0, 90^0, 180^0, 270^0 sind meistens zu vermeiden, da dann zwei der drei Hauptrichtungen sich in die nämliche Gerade projizieren; z. B. fiele für $\delta = 90^0$ die Richtung OB_s in die Vertikale OC (Fig. 24, 25). Bei dem Würfel in Figur 25 projizierten sich dann die Seitenfläche OB_sC und die ihr parallele in die Seitenkanten OC und AD, wodurch das Bild des Würfels wenig anschaulich wirken würde. Besondere Umstände nur können die Wahl eines dieser vier Werte von δ wünschenswert machen. Es empfiehlt sich für δ einen Winkel zu nehmen, welcher sich leicht konstruieren läßt, z. B. 45^0, 60^0, 135^0, 150^0. Die Werte $\delta < 180^0$ entsprechen einem Beschauer, welcher sich in bedeutender Entfernung oberhalb, die seltener und meist nur für spezielle Zwecke (z. B. für Einzelheiten von Gesimsen und dgl.) gebrauchten Werte $\delta > 180^0$ einem solchen, welcher sich unterhalb des dargestellten Gegenstandes befindet*).

*) In dem ersteren Falle wird die schiefe Projektion wohl auch Vogelperspektive, in dem letzteren Froschperspektive genannt. Die Projektion mit den Werten $v = 1$, $\delta = 45^0$ oder 135^0 heißt auch Kavalierperspektive (bzw. Militärperspektive, wenn Π horizontal liegend angenommen wird). Diese Benennungen sind aber schwankend und auch nicht gut, da man jetzt unter Perspektive nur die eigentliche Zentralprojektion versteht.

Man vergleiche bezüglich der Ausführungen dieses Paragraphen die sechs Würfelproiektionen Figur 25^{a-f}.

34. Die schiefe Projektion ist demnach besonders geeignet, um von komplizierten stereometrischen Figuren schnell und leicht ein anschauliches Bild zu entwerfen. Aus diesem Grunde benutzt man sie sehr häufig in der Kristallographie zum Zeichnen der Kristalle, wobei $v = \frac{1}{3}$ genommen zu werden pflegt.

In den folgenden Abschnitten wird die schiefe Projektion ausschließlich benutzt, um durch anschauliche Skizzen die gegenseitige Lage räumlicher Gebilde deutlich zu machen. Zunächst sollen für diese Werte die schiefen Projektionen einiger einfachen Körper konstruiert werden. Es sollen dabei stets die Werte $v = \frac{1}{2}$ und $\delta = 150^0$ genommen werden, welche eine bequeme Ausführung aller Konstruktionen gestatten. Auch bei den späteren Skizzen in schiefer Parallelprojektion sind diese Werte stets beibehalten, wenn nicht besondere Gründe für andere Annahmen sprachen*).

Schiefe Projektion ebenflächiger Gebilde.

35. Projektion einer Pyramide mit horizontaler Grundfläche.

---

*) Auch die Figuren 1—8, 20 und 23 sind schiefe Parallelprojektionen. In Figur 20 ist $\delta = 90^0$ gewählt, damit der scheinbare Umriß des Zylinders mit den Tangenten an die in der Projektionsebene liegenden Kugelkreise zusammenfalle.

Die Pyramide, welche vor der Bildebene Π liegen soll, sei gegeben durch ihre Grundfläche $ABCDE$, den Fußpunkt F und die Länge h ihrer Höhe FS. Damit auch die (willkürlich gewählte) Lage der Pyramide gegen Π bestimmt gegeben ist, denke man sich die Ebene der Grundfläche um ihre ebenfalls gegebene Schnittlinie x mit Π nach unten in diese Ebene umgelegt und die Grundfläche in der Lage $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$, in welche sie dadurch gekommen ist, gegeben (Fig. 26).

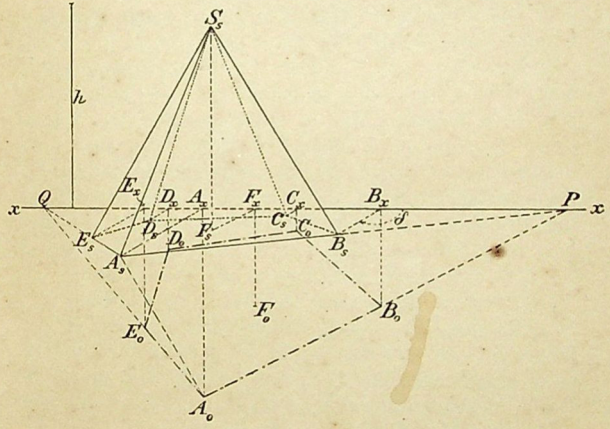

Fig. 26.

Die schiefe Projektion A von A findet man dann, indem man von A_0 das Lot $A_0 A_x$ auf die Gerade x fällt, durch den Fußpunkt eine Gerade unter dem Winkel $\delta = 150^0$ gegen x zieht und auf ihr

$$A_x A_s = \frac{1}{2} A_0 A_x$$

abträgt. Beachtet man, daß $\sphericalangle A_0 A_x A_s = 60^0$, also

$$\cos \overset{\frown}{A_0 A_x A_s} = \frac{1}{2} = \frac{A_x A_s}{A_0 A_x}$$

ist, so erkennt man, daß $A_0 A_s \perp A_s A_x$ ist; man kann daher, was zeichnerisch bequemer ist, A_s auch als Fußpunkt des von A_0 auf $A_s A_x$ gefällten Lotes bestimmen*). Auf gleiche Weise findet man die Projektionen der übrigen Eckpunkte der Grundfläche, sowie des Fußpunktes der Pyramidenhöhe.

Die Projektion $A_s B_s C_s D_s E_s$ ist nach den Darlegungen des § 13 affin zu $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$ für x als Affinitätsachse. Als Kontrolle für die Zeichnung ergibt sich daher, daß sich entsprechende Geraden auf x schneiden müssen, was in der Figur für zwei Seitenpaare gezeigt ist. Umgekehrt kann man aber auch diesen Umstand benutzen, um die Projektion der Grundfläche zu konstruieren, nachdem man auf die obige Weise die Projektion A_s eines ihrer Endpunkte A gefunden hat; man verbindet dann A_s mit dem Schnittpunkte $P = A_0 B_0 \times x$ und zieht durch B_0 eine Parallele zu $A_0 A_s$, welche die erstere Gerade in B_s schneidet.

Da die Höhe der Pyramide parallel Π ist, so projiziert sie sich unverkürzt. Es ist mithin nur durch F_s zu x eine Senkrechte $F_s S_s$ von der Länge h zu ziehen. Durch Verbindung von S_s mit $A_s, \ldots, E_s$ erhält man die gewünschte Projektion der Pyramide.

Man konstruiere zur Übung die schiefe Projektion eines geraden Prismas, dessen Grundfläche horizontal

*) Diese bequemere Konstruktion ist stets anwendbar, wenn $\delta = 150^0$, $v = \frac{1}{2}$ und der Körper vor Π liegt. Deshalb sind auch in § 34 für δ und v diese Werte gewählt.

liegt. Es ist dabei zu beachten, daß die obere Begrenzungsfläche kongruent der Grundfläche ist.

36. Projektion des regelmäßigen Vierflachs und Achtflachs mit der Kantenlänge a. (Vgl. über Vierflach und Achtflach §§ 101 und 102.)

a) Das Vierflach habe eine horizontal gelegene Seitenfläche, deren Höhe HA in der horizontalen Geraden x der Bildebene Π liege (Fig. 27).

Durch einen beliebigen Punkt H von x zieht man unter 150^0 gegen x die Strecken $B_sH = HC_s = \frac{1}{4}a$.

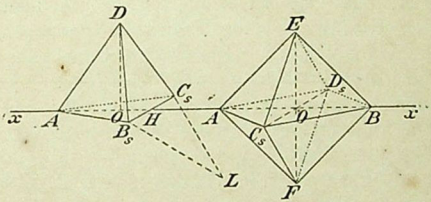

Fig. 27.

Fig. 28.

Nachdem noch die Höhe $\left(= \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ einer Seitenfläche mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks B_sC_sL ($B_sL = a$) konstruiert ist, macht man HA gleich dieser Höhe C_sL und teilt HA durch den Punkt O, so daß $HO = \frac{1}{2}OA$ ist. Senkrecht über O, als dem Mittelpunkte der Grundfläche, liegt der vierte Eckpunkt D, welchen man leicht erhält, da $AD = a$ ist und in Π liegt. Auch ist $HD = HA$.

b) Das Achtflach (Fig. 28) liege mit zwei seiner Diagonalen in Π, und zwar möge die eine in der

Horizontalen x liegen. Die halbe Diagonalenlänge erhält man als Kathete eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse a. Auf diese Weise erhält man die vier in Π gelegenen Eckpunkte A, B, E, F. Die dritte Diagonale steht auf den beiden vorigen senkrecht, projiziert sich daher in die unter 150^0 gegen x durch O gezogene Strecke $C_s D_s$, wo $C_s O = O D_s = \frac{1}{2} OA$ ist.

37. Den auf einer Fläche gelegenen Linienzug, längs dessen die projizierenden Strahlen die Fläche nur berühren, ohne sie zu schneiden, nennt man ihren wahren Umriß und die Projektion desselben ihren scheinbaren Umriß. Die wahre Umrißlinie trennt den (für einen in der Richtung der Projektionsstrahlen blickenden Beschauer) sichtbaren Teil der Oberfläche von dem unsichtbaren. (Siehe Weiteres in §. 98.)

Bei den drei bisher dargestellten Körpern sind hiernach die scheinbaren Umrisse: $S_s E_s A_s B_s$ bei der Pyramide in Figur 26; $A B_s C_s D$ bei dem Vierflach in Figur 27 und $AEBF$ bei dem Achtflach in Figur 28.

Schiefe Projektion des geraden Kreiskegels, Kreiszylinders und der Kugel.

38. Projektion des geraden Kreiskegels und Kreiszylinders mit horizontaler Grundfläche.

Der Grundkreis k vom Radius r projiziert sich (§ 26) in eine Ellipse k_s (Fig. 29 a, b), von welcher zwei konjugierte Durchmesser sich leicht angeben lassen. Der Π parallele Kreisdurchmesser projiziert sich unverkürzt gleich $2r$ und liegt horizontal, während der

zu ihm senkrechte Kreisdurchmesser sich in den konjugierten Ellipsendurchmesser projiziert, welcher unter 150^0 gegen den ersteren geneigt ist und die Länge r besitzt; beide halbieren sich in dem Ellipsenmittelpunkte M_s. Die Ellipsen selbst lassen sich dann nach § 20 leicht konstruieren*).

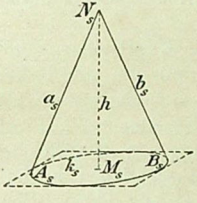

Fig. 29a.

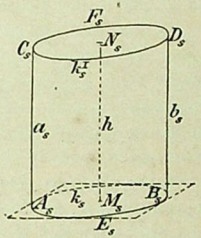

Fig. 29b.

Da die Höhe parallel zu Π ist, so zieht man durch M_s eine Vertikale und macht $M_s N_s = h$. Will man die Projektion des Kegels (Fig. 29a) erhalten, so hat man von N_s die beiden Tangenten a_s, b_s an die Ellipse k_s zu ziehen (§ 17). Um die Projektion des Zylinders (Fig. 29b)

*) In den Figuren 29a, b sind nur die diesen beiden konjugierten Durchmessern parallelen Tangenten angegeben. In beiden Figuren ist die Schnittgerade x der Ebene des Grundkreises und der Bildebene Π nicht angegeben. Infolgedessen ist durch die Projektion nur die Gestalt des Gebildes, nicht aber seine Lage im Raume völlig bestimmt; man kann vielmehr den Abstand des Gebildes von der Bildebene noch beliebig wählen. Soll aber auch dieser bestimmt sein, so muß die Gerade x (parallel zu den horizontalen Tangenten) angegeben sein.

zu erhalten, muß man noch die Projektion des oberen Kreises k^I konstruieren. Diese ist die der Ellipse k_s kongruente und parallel gelegene Ellipse k_s^I mit dem Mittelpunkte N_s auf h. Zieht man noch die beiden äußeren gemeinsamen Tangenten beider Ellipsen a_s, b_s, so hat man die gewünschte Projektion*). Bei beiden Flächen müssen offenbar die Projektionen aller anderen Mantellinien (welche man aber nicht zeichnet) innerhalb der gezogenen Tangenten liegen.

Zieht man den durch die Kegelspitze N gehenden Projektionsstrahl und legt durch ihn die beiden Tangentialebenen an den Kegel, so enthalten sie alle Projektionsstrahlen, welche den Kegelmantel nur berühren. Diese beiden Ebenen berühren die Kegelfläche längs der Mantellinien a, b, deren Projektionen a_s und b_s den scheinbaren Umriß des Kegelmantels bilden. Der wahre Umriß des Kegels wird also gebildet von den Mantellinien a, b und dem nach vorn zwischen ihnen gelegenen Teile der Peripherie des Grundkreises. Der scheinbare Umriß ist demnach identisch mit dem in Figur 29^a voll ausgezogenen Linienzuge.

Legt man an den Zylinder in Figur 29^b die beiden Tangentialebenen, welche der Richtung der Projektionsstrahlen und also einander parallel sind, so gehören die Mantellinien a und b, längs deren beide Ebenen die Zylinderfläche berühren, dem wahren Umrisse des Zylinders an. Diese Mantellinien liegen in derselben durch die Zylinderachse gehenden Ebene. Ferner wird

*) Es ist zu beachten, daß bei dem Kegel die Berührungspunkte A_s, B_s von a_s, b_s und k_s nicht auf demselben Durchmesser liegen, während dies bei dem Zylinder der Fall und ferner $A_s M_s B_s \parallel C_s N_s D_s$ ist.

der wahre Umriß des Zylinders von der zwischen a und b nach vorn gelegenen Hälfte AEB des unteren und der nach hinten gelegenen Hälfte CFD des oberen Kreises gebildet. Der scheinbare Umriß ist also der Linienzug

$$A_s C_s F_s D_s B_s E_s .$$

Während auf beiden Flächen die Kreise k, bzw. k^1 die Mantellinien a, b in den Punkten A, B, bzw. C, D schneiden, berühren die Projektionen der Kreise die Projektionen dieser Mantellinien in den entsprechenden Punkten A_s, B_s, bzw. C_s, D_s. (Vgl. bei der senkrechten Projektion die Paragraphen über die Tangentialebenen an Kegel und Zylinder.)

39. Wenn die Grundkreise beider Flächen der Bildebene Π parallel sind, so projizieren sie sich in ihrer wahren Gestalt; die Höhe h projiziert sich in eine durch die Kreismittelpunkte gehende und unter 150^0 gegen die Horizontale geneigte Strecke von der Länge $\frac{h}{2}$. Hiernach kann man die Projektionen leicht konstruieren.

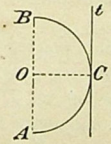

Fig. 30.

40. Projektion einer Kugel vom Radius r. Läßt man einen Halbkreis (Fig. 30) und die zu seinem Durchmesser AB parallele Tangente t um AB als Rotationsachse sich drehen, so erzeugt der Halbkreis

eine Kugel und die Tangente t einen Zylinder, welcher die Kugel längs des von dem Berührungspunkte ${}_0C$ beschriebenen größten Kreises der Kugel berührt und auf der Ebene dieses Kreises senkrecht steht.

Hieraus folgt, daß der wahre Umriß der Kugel derjenige größte Kreis k ist, dessen Ebene auf der Richtung der Projektionsstrahlen senkrecht steht; seine den scheinbaren Umriß liefernde Projektion ist mithin eine Ellipse k_s, deren Achsen sich leicht angeben lassen. Nimmt man den Kugelmittelpunkt O in Π gelegen an, so schneidet Π den Kreis k in dem Durchmesser CD, welcher senkrecht auf der, der Richtung der projizierenden Strahlen parallelen, Durchmesserebene der Kugel, also (Fig. 31 b) senkrecht auf der unter 150^0 gegen die Horizontale x gezogenen Geraden $A_s O B_s$ steht. Nach § 27 (erster Absatz) ist $CD = 2r$ die kleine Achse der Ellipse und der zu CD senkrechte Durchmesser AB projiziert sich in die Strecke

$$A_s B_s = \frac{2r}{\sin \sigma} = \sqrt{5} \cdot r \text{ *).}$$

Die Ellipse k_s läßt sich dann nach § 22 leicht konstruieren.

41. Um das Bild plastischer zu machen, kann man noch die Projektionen einer Anzahl von Kreisen, in welchen Parallelebenen zu Π die Kugel schneiden und welche sich als kongruente Kreise projizieren, einzeichnen. Die Radien dieser Kreise bestimmt man durch Umlegen desjenigen auf Π senkrechten größten Kugel-

---

*) Denn, da $\operatorname{ctg}\sigma = \frac{1}{2}$ und $1 + \operatorname{ctg}^2\sigma = \frac{1}{\sin^2\sigma}$ ist, folgt $\frac{1}{\sin^2\sigma} = \frac{5}{4}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

kreises EJF (Fig. 31[a]), welcher von Π in dem vertikalen Durchmesser EF geschnitten wird, in die Bildebene Π. Die im Abstande OG zu Π parallele Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise l, dessen Radius durch die im Abstande $OG_0 = OG$ parallel zu EF gezogene halbe Sehne G_0H_0 gegeben wird. Auf OB_s (Fig. 31[b]) macht man dann $OG_s = \frac{1}{2} OG_0$ und beschreibt um G_s mit dem Radius G_0H_0 den Kreis l_s, welcher die Pro-

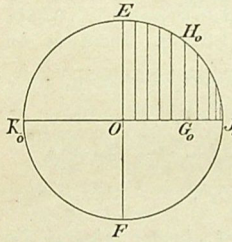

Fig. 31[a].

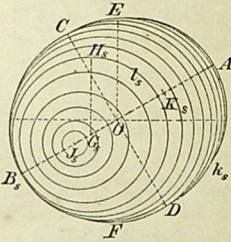

Fig. 31[b].

jektion des Kreises l ist. Dies Verfahren führt man für eine größere Anzahl von Kreisen durch, wobei es vorteilhaft ist, mit einem vor Π gelegenen Parallelkreise zugleich den gleich großen und gleich weit hinter Π gelegenen Parallelkreis zu projizieren. In Figur 31[b] ist dies Verfahren für zehn Parallelkreise durchgeführt; es sind der besseren Übersicht wegen aber die Kreise nur so weit gezeichnet, als sie sichtbar sind. Man wählt den Abstand der Kreise, welche man projiziert, um so kleiner, je näher dieselben dem Punkte J liegen, da mit wachsender Annäherung an J die Radien um so schneller abnehmen.

Es sei noch bemerkt, daß die Projektionen l_s aller der Parallelkreise l, welche den wahren Umriß k schneiden, die Ellipse k_s des scheinbaren Umrisses berühren müssen; der Beweis dieser Behauptung wird bei der Betrachtung der Tangentialebenen krummer Flächen erbracht. Zeichnet man genügend viele solcher berührenden Kreise l_s, so erhält man die Ellipse k_s als umhüllende Kurve derselben.

Die Ellipse k_s des scheinbaren Umrisses einer Kugel hat stets die Projektionen J_s, K_s der Endpunkte J, K des zu Π senkrechten Kugeldurchmessers zu Brennpunkten*). Denn es ist

$$OA_s = OB_s = \frac{r}{\sin\sigma} \text{ und } OJ_s = OK_s = r \cdot \cot\sigma, \text{ folglich ist}$$

$$CJ_s^2 = CK_s^2 = OC^2 + OJ_s^2 = r^2 + r^2 \cot^2\sigma$$
$$= \frac{r^2}{\sin^2\sigma} = OB_s^2,$$

d. h. J_s und K_s sind (nach § 27, letzter Absatz) die Brennpunkte der Ellipse k_s.

*) Der Satz gilt für beliebige Werte von δ und σ, wie ausdrücklich hervorgehoben sei.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

III. Abschnitt.

Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen.

Einführung zweier Projektionsebenen.

42. Die durch senkrechte Projektion gewonnenen Bilder sind zwar oft weniger anschaulich, als die durch schiefe Projektion erhaltenen, da zur Projektionsebene senkrechte Gerade und Ebenen sich als Punkte und Gerade projizieren, trotzdem aber ist die senkrechte Projektion für die meisten Anwendungen die weitaus wichtigste Projektionsart. Es hat dies seinen Grund in der wesentlichen Vereinfachung sehr vieler Konstruktionen bei Anwendung der senkrechten Projektion und in der bequemen Art, in welcher sich Gebilde durch Angabe ihrer senkrechten Projektionen auf zwei zueinander senkrechte Ebenen bestimmen lassen. Es ist früher (§§ 3—6) gezeigt worden, daß ein im Raume liegendes Gebilde durch Angabe seiner (Zentral- oder Parallel-)Projektion auf eine Ebene nicht bestimmt ist, sondern es müssen außer dieser Projektion noch weitere Bestimmungsstücke gegeben sein, und als solches genügt im allgemeinen seine Projektion auf eine zweite (der ersten nicht parallele) Ebene.

Der Winkel, welchen die beiden Projektionsebenen miteinander bilden, kann beliebig gewählt werden; es empfiehlt sich aber, vornehmlich für senkrechte Projektion, zwei zueinander senkrechte Ebenen zu nehmen. Gewöhnlich wird die eine dieser Ebenen Π_1 horizontal, die andere Π_2 vertikal gestellt angenommen. (Vgl. die Figur 32.) Man nennt dann

Π_1: Horizontalebene, Grundrißebene, erste Projektionsebene oder erste Tafel;

Π_2: Vertikalebene, Aufrißebene, zweite Projektionsebene oder zweite Tafel;

und die Schnittlinie x beider Projektionsebenen die Projektionsachse oder kurz Achse, wenn jeder Irrtum ausgeschlossen ist.

Die Achse teilt jede der Projektionsebenen in zwei Halbebenen. Die beiden Teile von Π_1 werden, je nachdem sie für den Beschauer vor oder hinter Π_2 liegen (Fig. 32), unterschieden als vorderer $(+\Pi_1)$ und hinterer Teil $(-\Pi_1)$, die beiden Teile von Π_2 nach ihrer Lage in bezug auf Π_1 als oberer $(+\Pi_2)$ und unterer Teil $(-\Pi_2)$*).

Der ganze Raum wird durch die beiden Projektionsebenen in vier Quadranten zerlegt, deren jeder von zwei der angegebenen Halbebenen begrenzt ist. Sie sollen in der folgenden Weise mit I—IV bezeichnet werden:

I. Quadrant	begrenzt von	$+\Pi_1$,	$+\Pi_2$,
II. Quadrant	„ „	$-\Pi_1$,	$+\Pi_2$,
III. Quadrant	„ „	$-\Pi_1$,	$-\Pi_2$,
IV. Quadrant	„ „	$+\Pi_1$,	$-\Pi_2$.

*) Die Projektionsebenen sind stets als unbegrenzt zu denken, wenn auch wie in Figur 32, nur endlich begrenzte Teile („Tafeln") gezeichnet sind.

Darstellung des Punktes.

43. Die senkrechte Projektion eines Punktes auf eine gegebene Ebene ist der Fußpunkt des von ihm auf diese Ebene gefällten Lotes.

Demnach sind (Fig. 32) die Fußpunkte P', P'' der von einem Punkte P auf die beiden Projektionsebenen Π_1, Π_2 gefällten Lote seine beiden Projektionen,

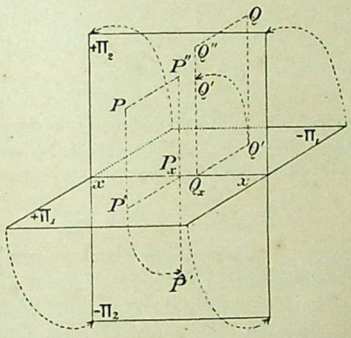

Fig. 32.

und umgekehrt ist P der Schnittpunkt der in P' auf Π_1 und in P'' auf Π_2 errichteten Lote. Man nennt in bezug auf den Punkt P, entsprechend der obigen Bezeichnung der Projektionsebenen,

P': Horizontalprojektion, erste Projektion, Grundriß;

P'': Vertikalprojektion, zweite Projektion, Aufriß;

$P'P$: ersten Tafelabstand;
$P''P$: zweiten Tafelabstand.

Der erste Tafelabstand wird mit positivem oder negativem Zeichen genommen, je nachdem der Punkt P über oder unter Π_1 liegt, und der zweite, je nachdem P vor oder hinter Π_2 liegt. Demnach gelten in dem ersten bis vierten Quadranten die folgenden Vorzeichenkombinationen für die beiden Tafelabstände:

$$++,\ +-,\ --,\ -+.$$

Der in der Figur 32 im zweiten Quadranten gezeichnete Punkt Q hat also einen positiven ersten und einen negativen zweiten Tafelabstand.

Liegt ein Punkt in Π_1, so ist sein erster Tafelabstand gleich Null, und liegt er in Π_2, so ist es sein zweiter Tafelabstand. Für einen Punkt der Achse sind beide Tafelabstände gleich Null.

Da

$$PP' \perp \Pi_1, \quad PP'' \perp \Pi_2$$

ist, so steht die durch diese beiden projizierenden Strahlen gelegte Ebene $P'PP''$ auf Π_1 und Π_2, mithin auf der Achse x senkrecht. Ist P_x der Schnittpunkt der letzteren mit der Ebene $P'PP''$, so steht x auch senkrecht auf den in dieser Ebene durch P_x gezogenen Geraden P_xP', P_xP'', P_xP und es ist $P_xP'PP''$ ein Rechteck. Der Punkt P_x heißt die Achsenprojektion des Punktes P, da er seine senkrechte Projektion auf die Achse x ist.

Folglich gelten die Sätze:

Die von den beiden Projektionen P' und P'' eines Punktes P auf die Achse gefällten Lote treffen die Achse in demselben Punkte, der Achsenprojektion P_x. Umgekehrt: Zwei Punkte

der beiden Projektionsebenen können nur dann die beiden Projektionen eines Raumpunktes sein, wenn ihre Lote auf die Achse denselben Fußpunkt besitzen.

Der erste (bzw. zweite) Tafelabstand eines Punktes ist, auch dem Vorzeichen nach, gleich dem Abstande seiner zweiten (bzw. ersten) Projektion von der Achse:

$$P'P = P_xP'', \quad P''P = P_xP'.$$

44. Um nun beide Projektionen eines räumlichen Gebildes in einer einzigen Zeichenebene darstellen zu können, denkt man sich die eine Projektionsebene um die Achse in die andere umgelegt.

Die zweite Projektionsebene falle, wie stets angenommen werden soll, mit der vertikal gestellten Zeichenebene zusammen, und es werde die erste Projektionsebene (im Sinne der Pfeile in Figur 32) so gedreht, daß $+\Pi_1$ mit $-\Pi_2$, $-\Pi_1$ mit $+\Pi_2$ zur Deckung kommt.

Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt der Ebene Π_1 einen Viertelkreis, durch dessen Mittelpunkt die Achse x senkrecht zu seiner Ebene hindurchgeht und dessen Radius gleich dem Abstande des Punktes von der Achse ist. Der von der ersten Projektion P' eines Punktes bei dieser Umlegung beschriebene Viertelkreis liegt also in der auf der Achse senkrechten Ebene $P'PP''$, und folglich fällt der Punkt P' nach ausgeführter Drehung in die Schnittgerade dieser Ebene mit Π_2, d. h. in die auf x senkrechte Gerade P_xP'', bzw. deren Verlängerung*).

---

*) In der Figur 32 ist der umgelegte Punkt P' mit $\hat{P}'$ bezeichnet, in Zukunft bleibt aber der Akzent ($\hat{}$) weg.

Nach erfolgter Umlegung der ersten Projektionsebene in die zweite, können zwei Punkte P', P'' dann und nur dann die Projektionen eines Raumpunktes P vorstellen, wenn ihre Verbindungslinie auf der Achse x senkrecht steht.

Um den Raumpunkt P zu erhalten, braucht man nur in dem Punkte P'' der Zeichenebene ein Lot auf Π_2 zu errichten und auf ihm $P''P = P_xP'$ abzutragen.

Die folgende Figur 33 veranschaulicht die verschiedenen möglichen Lagen der Projektionen eines

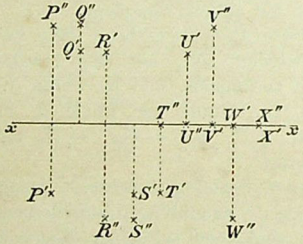

Fig. 33.

Punktes nach ausgeführter Umlegung von Π_1. Die bei der Figur 32 gezeichneten Begrenzungen der Projektionstafeln sind fortgelassen, wie dies in Zukunft meistens geschieht, da die Projektionsebenen als unbegrenzt zu denken sind. Es ist aber festzuhalten, daß die über der Achse x gelegene Hälfte der Zeichenebene mit $+\Pi_2$ und $-\Pi_1$ und ihre untere Hälfte mit $+\Pi_1$ und $-\Pi_2$ identisch ist. Die vier Punkte P, Q, R, S liegen in dem ersten bis vierten Quadranten;

ihre Tafelabstände haben gleiche Längen, aber verschiedene Vorzeichen; T, U sind Punkte der ersten Projektionsebene ($+\Pi_1$, bzw. $-\Pi_1$), V, W Punkte der zweiten Projektionsebene ($+\Pi_2$, bzw. $-\Pi_2$) und X ist ein Punkt der Achse.

45. Oft ist die Einführung einer dritten Projektionstafel Π_3, welche auf Π_1 und Π_2, also auch auf x senkrecht steht, sehr nützlich und erweist sich für manche Aufgaben als geschicktes Hilfsmittel, um ihre Lösung zu erleichtern. Man nennt

Π_3: Seitenriß-, Kreuzriß-, dritte Projektionsebene oder dritte Tafel

und entsprechend die Projektion eines Punktes auf dieselbe

P''': seinen Seitenriß, Kreuzriß oder seine dritte Projektion;

$P'''P$: seinen dritten Tafelabstand.

Durch Einführung von Π_3 treten die Schnittgeraden von Π_3 mit Π_1 und Π_2 als weitere Projektionsachsen auf, welche sich in dem Punkte O auf x schneiden; sie sollen mit y, bzw. z bezeichnet werden (s. Fig. 34). Jede der drei Projektionsebenen wird durch je zwei der drei Achsen in vier Felder, und der ganze Raum durch die drei Ebenen in acht Oktanten zerlegt.

46. Da ein Punkt durch Angabe seiner ersten und zweiten Projektion schon völlig bestimmt ist, so muß sich seine dritte Projektion aus ihnen allein, ohne Benutzung von P selbst, konstruieren lassen. Fällt man nämlich noch das Lot von P auf Π_3, dessen Fußpunkt die dritte Projektion P''' von P ist, und legt durch je zwei der drei projizierenden Lote Ebenen, so sind diese den Projektionsebenen parallel und schneiden

die Achsen in den Achsenprojektionen P_x, P_y, P_z (Fig. 34). Diese drei Punkte bilden zusammen mit P, seinen drei Projektionen P', P'', P''' und dem Punkte O die Ecken eines rechtwinkligen Parallelepipeds, von dessen zwölf Kanten je vier einander parallel und gleich sind und auf einer Projektionsebene senkrecht stehen. Folglich läßt sich, entsprechend der obigen Behauptung, P''' aus den beiden Projektionen P', P'' konstruieren,

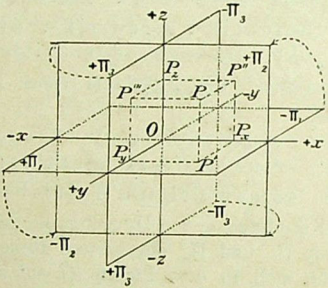

Fig. 34.

indem man von P' ein Lot auf die y-Achse, von P'' ein Lot auf die x-Achse fällt und durch die Fußpunkte zu den betreffenden Achsen Senkrechte $P_y P'''$, $P_z P'''$, welche in Π_3 liegen, zieht; ihr Schnittpunkt ist die gesuchte dritte Projektion.

Bezeichnet man die Längen der drei Kanten OP_x, OP_y, OP_z des Parallelepipeds mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, so ist der dritte Tafelabstand $P'''P = \mathfrak{x}$, der zweite $P''P = \mathfrak{y}$, und der erste $P'P = \mathfrak{z}$. Über das Vorzeichen des ersten und zweiten Tafelabstandes sind bereits Fest-

setzungen getroffen. Für den dritten Tafelabstand soll weiter angenommen werden, daß er positiv ist, wenn der Punkt P für einen auf Π_1 stehenden und Π_2 anschauenden Beobachter nach rechts von Π_3 gelegen ist. Da die drei Achsenabschnitte gleich den parallelen Tafelabständen sind, so ist durch diese Festsetzungen zugleich den drei Achsen ein bestimmter Sinn beigelegt, wie in Figur 34 durch $+x$, $-x$ usw. angegeben ist. Zu jedem Punkte P des Raumes gehören dann drei, auch ihrem Vorzeichen nach bestimmte Achsenabschnitte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, welche in der analytischen Geometrie als die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P bezeichnet werden. Umgekehrt ist die Lage eines Punktes P durch Angabe seiner drei Koordinaten völlig bestimmt, sobald die drei Projektionsebenen gegeben sind; man hat nur die Strecken $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in dem durch ihre Vorzeichen bestimmten Sinne auf den Achsen von O aus abzutragen und das durch diese drei Achsenabschnitte bestimmte rechtwinklige Parallelepiped zu vervollständigen, dessen O diagonal gegenüberliegende Ecke P dann der gesuchte Punkt ist.

Anmerkung. Bei bestimmten Beispielen pflegt man die Tafelabstände (Koordinaten), durch (positive oder negative) Zahlen anzugeben, durch welche ihre Längen in einer beliebig gewählten Längeneinheit gemessen sind (vgl. die Beispiele am Ende von § 47).

47. Um nun auch die dritte Projektion in derselben Zeichenebene darstellen zu können, denkt man sich die Ebene Π_1 wie vorhin (§ 44) und die Ebene Π_3 um z ebenfalls in Π_2 umgelegt, so daß die vordere Hälfte von Π_3 mit der linken Hälfte von Π_2, die hintere Hälfte von Π_3 also mit der rechten Hälfte von

Π_2 zusammenfällt, wie dies die Pfeile in Figur 34 andeuten. Da die y-Achse nun sowohl Π_1, als Π_3 angehört, so muß sie nach ausgeführter Umlegung doppelt auftreten, und zwar fällt die $+y$-Achse mit der $-x$- und $-z$-Achse, die $-y$-Achse mit der $+x$- und $+z$-Achse zusammen (Fig. 35).

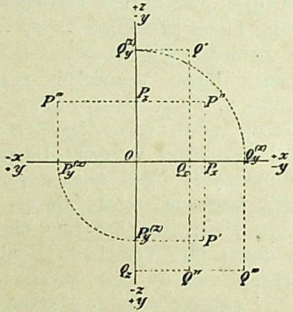

Fig. 35.

Stellt man nun die gleichen Überlegungen wie in § 44 hier auch noch für die umgelegte Π_3 an, so kann man leicht die folgende Aufgabe lösen:

Die dritte Projektion P''' eines Punktes P aus seiner ersten und zweiten Projektion P' und P'' bei gegebenem Achsenkreuze zu konstruieren.

Man zieht durch P' und P'' horizontale Geraden, welche die vertikale Achse*) in $P_y^{(z)}$ und P_z schneiden,

*) Nach ausgeführter Umlegung sollen die Achsen der Kürze wegen als horizontale und vertikale Achse unterschieden werden.

trägt $OP_y^{(z)}$ auf der horizontalen Achse von O aus in richtigem Sinne bis $P_y^{(x)}$ ab und zieht durch $P_y^{(x)}$ eine vertikale Gerade, welche die Gerade $P''P_x$ in P''' schneidet. — Hierbei ist zu beachten, daß die Punkte $P_y^{(z)}$ und $P_y^{(x)}$, welche vor dem Umlegen von Π_1 und Π_3 in demselben Punkte P_y der y-Achse gelegen sind*), entweder beide auf den negativen Hälften oder beide auf den positiven Hälften der doppelt auftretenden y-Achse liegen müssen. In der Figur 35 veranschaulicht die Konstruktion von P''' den ersten Fall und von Q''' den zweiten Fall; der erste oder zweite Fall liegt vor, je nachdem der zweite Tafelabstand des betreffenden Punktes positiv oder negativ ist. In Figur 35 sind die Koordinatenwerte in Millimetern für P: $\mathfrak{x} = 10{,}5$, $\mathfrak{y} = 12$, $\mathfrak{z} = 9$; für Q: $\mathfrak{x} = 8$, $\mathfrak{y} = -17$, $\mathfrak{z} = -16$.

Darstellung der Geraden.

48. In Rücksicht auf §§ 4 und 9 erhält man sofort den Satz:

Die beiden senkrechten Projektionen einer Geraden g sind im allgemeinen zwei Geraden g' und g'', welche die Schnittlinien der durch g senkrecht zu Π_1 und Π_2 gelegten Ebenen — der sogenannten ersten und zweiten projizierenden Ebene — mit Π_1 und Π_2 sind.

Die in §§ 43 und 45 für die Projektionen eines Punktes gegebenen Benennungen werden in gleicher Weise für die Projektionen einer Geraden benutzt.

---

*) Künftighin werden die doppelt auftretenden Punkte der y-Achse nicht mehr durch obere Marken (x), (z) unterschieden, sondern beide einfach mit demselben Buchstaben bezeichnet werden.

Ist P ein Punkt auf g, so muß seine erste Projektion P' auf g', seine zweite Projektion P'' auf g'' liegen, und nach ausgeführter Umlegung von Π_1 in Π_2 muß $P'P'' \perp x$ sein. Umgekehrt sind zwei in derselben Senkrechten zu x gelegenen Punkte von g' und g'' die Projektionen eines bestimmten Punktes der Geraden g. Hieraus folgt, daß eine Gerade g statt durch ihre beiden Projektionen g', g'', auch durch die Projektionen zweier auf ihr liegenden Punkte gegeben werden kann.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich ohne weiteres die Lösung der

Aufgabe. Die beiden Projektionen einer Geraden und die eine Projektion eines auf ihr liegenden Punktes sind gegeben; es ist die andere Projektion des Punktes zu finden. (Siehe Fig. 36 u. 37a.)

49. Besonders ausgezeichnete Punkte einer Geraden g sind ihre Schnittpunkte G_1, G_2 mit den beiden Projektionsebenen, welche Punkte erster und zweiter Spurpunkt der Geraden g heißen.

Der erste Spurpunkt G_1 von g (Fig. 36) liegt in dem Schnittpunkte von g mit g'; folglich fällt er mit seiner ersten Projektion zusammen. Seine zweite Projektion G_1'' muß also nicht nur auf g'', sondern auch auf x liegen und fällt daher in den Schnittpunkt von g'' und x. Der zweite Spurpunkt fällt mit seiner zweiten Projektion zusammen in den Schnittpunkt von g mit g'', während seine erste Projektion G_2' der Schnittpunkt von g' und x ist. Schneidet die Gerade die Achse, so fallen beide Spurpunkte in den Achsenschnittpunkt der Geraden.

50. *Aufgabe.* Es sind die beiden Spurpunkte einer durch ihre Projektionen g', g'' gegebenen Geraden g zu konstruieren.

Die Schnittpunkte von g' und g'' mit der Achse x bestimmen die Punkte G_2' und G_1'' (Fig. 36); die durch sie senkrecht zu x gezogenen Geraden schneiden g'', bzw. g' in den gesuchten Spurpunkten G_2, bzw. G_1.

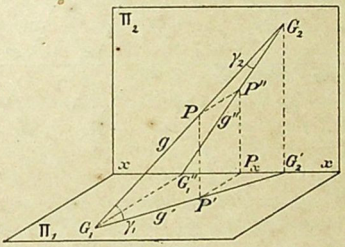

Fig. 36.

Ist die Gerade g gegen die beiden Projektionsebenen geneigt, so kann die zwischen ihren beiden Spurpunkten G_1, G_2 gelegene Strecke in jedem der vier Quadranten liegen; die Figuren 37^{a-d} zeigen die vier möglichen Fälle, je nachdem die Strecke G_1G_2 im ersten bis vierten Quadranten gelegen ist. Betreffs des Ausziehens der Linien sei bemerkt, daß die Projektionsebenen als undurchsichtig angenommen sind und daß infolgedessen für einen über Π_1 und vor Π_2 stehenden Beschauer die vordere Hälfte von Π_1 die untere Hälfte von Π_2, dagegen die obere Hälfte von Π_2 die hintere Hälfte von Π_1 verdeckt. In den Figuren sind daher g', g'' nur so weit ausgezogen, als sie die Projektionen eines im ersten Quadranten liegenden Teiles von g sind.

(Man zeichne für die Figuren 37^{b-d} Skizzen in schiefer Projektion; der Figur 37^{a} entspricht in schiefer Projektion Figur 36.)

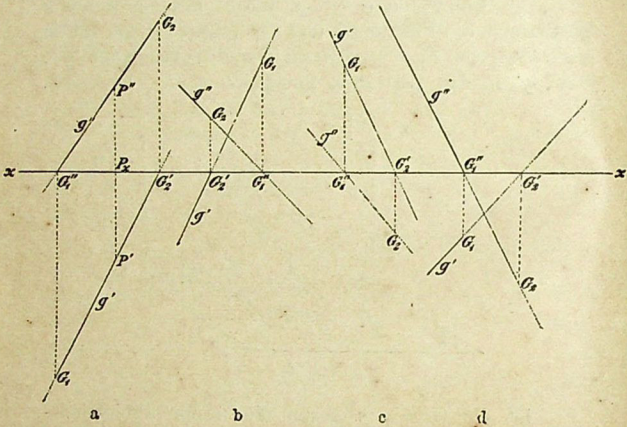

Fig. 37.

Sind umgekehrt die Spurpunkte G_1, G_2 gegeben, so bestimmen die Fußpunkte der von ihnen auf die Achse gefällten Lote ihre ungleichnamigen Projektionen G_1'', G_2', und die Geraden $G_1 G_2'$, $G_1'' G_2$ sind die beiden Projektionen der durch G_1 und G_2 bestimmten Geraden.

51. Besondere Lagen der Geraden g gegen die Projektionsebenen.

I. Ist $g \parallel \Pi_1$, so ist die zweite projizierende Ebene parallel zu Π_1, folglich $g'' \parallel x$ und G_1 unendlich fern gelegen;

ist $g \parallel \Pi_2$, so ist $g' \parallel x$ und G_2 unendlich fern gelegen.

II. Wenn $g \parallel \Pi_1$ und $\parallel \Pi_2$, also $\parallel x$ ist, so ist $g' \parallel g'' \parallel g$.

Steht g senkrecht auf Π_1, so reduziert sich die erste Projektion g' auf einen Punkt, welcher zugleich der erste Spurpunkt G_1 von g ist, die zweite Projektion g'' steht auf x senkrecht und muß durch G_1 hindurchgehen. Daher

III. Wenn $g \perp \Pi_1$ ist, so ist $g' = G_1$, $g'' \perp x$ und G_2 unendlich fern;
wenn $g \perp \Pi_2$ ist, so ist $g'' = G_2$, $g' \perp x$ und G_1 unendlich fern.

IV. Wenn g in einer zur Achse senkrechten Ebene liegt, so sind g' und g'' in derselben Senkrechten zu der Achse gelegen, da die beiden projizierenden Ebenen mit der senkrechten Ebene, in welcher g liegt, zusammenfallen*).

52. Eine Gerade bestimmt also stets ihre Projektionen; umgekehrt bestimmen zwei beliebige Gerade g' in Π_1 und g'' in Π_2 immer eine einzige Gerade g im Raume, deren Projektionen sie sind, wenn nicht g' und $g'' \perp x$ sind. Denkt man sich nämlich Π_1 in seine ursprüngliche, zu Π_2 senkrechte Lage zurückgedreht, so schneiden sich die durch g' und g'' senkrecht zu Π_1, bzw. Π_2 gelegten Ebenen in der Geraden g.

Steht dagegen eine der Geraden, z. B. g', auf der Achse senkrecht, so steht die durch sie gelegte projizierende Ebene auch auf Π_2 senkrecht und g'' muß

*) Aus Rücksicht auf den verfügbaren Raum sind diese Fälle nicht durch Figuren veranschaulicht. Der Leser kann sich dieselben leicht anfertigen.

also in derselben Senkrechten liegen wie g'. Im Falle, daß g'' sich auf einen Punkt G_2 dieser Senkrechten reduziert, ergibt sich g als die durch G_2 senkrecht zu Π_2 gezogene Gerade. Im anderen Falle aber ist die durch g' gelegte projizierende Ebene identisch mit der durch g'' gehenden, und folglich sind g' und g'' die Projektionen aller in dieser Ebene gelegenen Geraden.

Damit eine zu der Achse senkrechte Gerade nach der Projektionsmethode bestimmt ist, muß man entweder die Projektionen zweier ihrer Punkte oder (außer g', g'' noch) ihren Seitenriß g''' kennen.

53. Bezüglich des Seitenrisses g''' ist zu bemerken, daß die dritten Projektionen G_1''' und G_2''' der

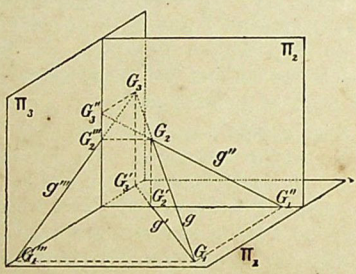

Fig. 38a.

Spurpunkte auf der y-, bzw. x-Achse liegen müssen (Fig. 38a) und ihre Verbindungslinie also g''' liefert.

Der Punkt G_3, in welchem g die Ebene Π_3 durchdringt, ist der dritte Spurpunkt von g. Seine erste und zweite Projektion liegen in den Schnittpunkten von g' mit der y-Achse und von g'' mit der x-Achse.

Um also G_3 nach Umlegung von Π_1 und Π_3 in Π_2 zu konstruieren, bestimmt man (Fig. 38b) diese Schnittpunkte G_3' und G_3'', und zwar den ersteren doppelt, da er

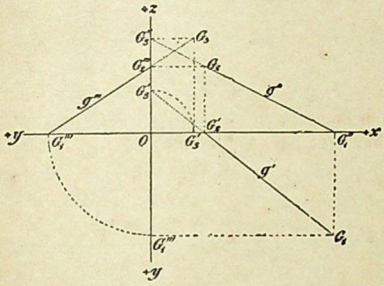

Fig. 38b.

auf der doppelt auftretenden y-Achse liegt. Die Vertikale durch G_3' schneidet die Horizontale durch G_3'' in G_3.

Aufgabe. Die zu x senkrechte Gerade g ist durch die Projektionen zweier ihrer Punkte P und Q gegeben; es sind ihr Seitenriß und ihre Spurpunkte zu konstruieren.

Nach § 47 konstruiert man von P, Q die dritten Projektionen P''', Q''' (Fig. 39); ihre Verbindungslinie ist g''' und die Punkte, in welchen diese die horizontale und vertikale Achse schneidet, sind G_1''', G_2'''. Aus diesen erhält man leicht G_1 und G_2.

54. Unter dem Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene versteht man bekanntlich den spitzen Winkel, welchen die Gerade mit ihrer senkrechten Projektion auf die Ebene einschließt; er ist,

wie in der Stereometrie gezeigt wird, der kleinste aller Winkel, welche die Gerade mit den durch ihren Spurpunkt gehenden Geraden der Ebene einschließt.

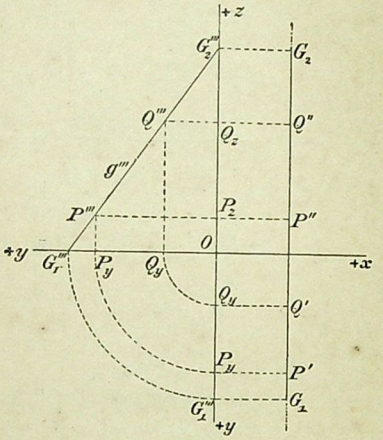

Fig. 39.

Bezeichnet man die Neigungswinkel von g gegen Π_1 und Π_2 mit γ_1, γ_2 (erste und zweite Tafelneigung von g), so ist (vgl. die Figur 36 auf S. 83)

$$\gamma_1 = \sphericalangle G_2 G_1 G_2', \quad \gamma_2 = \sphericalangle G_1 G_2 G_1''.$$

Nach dem vorstehend in Erinnerung gebrachten Satze ist sicher γ_1 kleiner, höchstens gleich $(\leqq) \sphericalangle G_2 G_1 G_1''$ und mithin, da $\sphericalangle G_2 G_1 G_1'' + \sphericalangle G_1 G_2 G_1'' = 90^0$ ist, folgt

$$\gamma_1 + \gamma_2 \leqq 90^0,$$

d. h. die Summe der beiden Tafelneigungen einer Geraden ist höchstens gleich einem Rechten.

Der Grenzfall $\gamma_1 + \gamma_2 = 90^0$ kann nur dann eintreten, wenn g in einer zur Achse senkrechten Ebene liegt (Fall III und IV in § 51).

Ist $g \parallel \Pi_1$, so ist $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \sphericalangle (g' \mid x)$, und ist $g \parallel \Pi_2$, so ist $\gamma_1 = \sphericalangle (g'' \mid x)$, $\gamma_2 = 0$.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken $G_1 G_2' G_2$ und $G_1 G_1'' G_2$ folgt ferner

$$G_1 G_2' = G_1 G_2 \cdot \cos \gamma_1, \quad G_1'' G_2 = G_1 G_2 \cdot \cos \gamma_2,$$

d. h. das Verhältnis der senkrechten Projektion einer Strecke zu der Strecke selbst ist gleich dem Kosinus des Neigungswinkels (vgl. § 9).

Aufgabe. Die Tafelneigungen γ_1, γ_2 und die wahre Länge der zwischen den beiden Spurpunkten gelegenen Strecke einer Geraden g (g', g'') zu konstruieren*).

Da die rechtwinkligen Dreiecke $G_1 G_2' G_2$ und $G_1 G_1'' G_2$ (vgl. Fig. 36) die gesuchten Stücke enthalten und die Katheten dieser Dreiecke sich leicht aus g', g'' bestimmen lassen, so erhält man die folgende Konstruktion. Nachdem man die Spurpunkte G_1 und G_2 bestimmt hat, macht man auf x die Strecke $G_1'' G_2^0 = G_1'' G_2$ und verbindet G_2^0 mit G_1. Das Dreieck $G_1 G_1'' G_2^0$ ist dann das um $G_1'' G_1$ in Π_1 umgelegte Dreieck $G_1 G_1'' G_2$ und folglich $\sphericalangle G_1 G_2^0 G_1'' = \gamma_2$, $G_1 G_2^0 = G_1 G_2$. — Legt man $\triangle G_1 G_2' G_2$ um $G_2' G_2$ in Π_2 um, so erhält man in gleicher Weise den Winkel γ_1 und $G_1^0 G_2 = G_1 G_2$ (Fig. 40 a).

Die Aufgabe läßt sich auch so lösen, daß man $\triangle G_1 G_1'' G_2$ um $G_1'' G_2$ in Π_2 und $\triangle G_1 G_2' G_2$ um $G_1 G_2'$ in Π_1 umlegt (Fig. 40 b).

Kontrolle: $G_1 G_2^0 = G_1^0 G_2$, bzw. $G_1 G_2^A = G_2 G_1^A$.

---

*) g (g', g'') bedeutet: Die Gerade g ist durch ihre Projektionen g', g'' gegeben. Analog P (P', P'') u. a.

Liegen die Spurpunkte der durch ihre Projektionen gegebenen Geraden außerhalb der Zeichenebene, so bestimmt man die Tafelneigungen für irgend eine der gegebenen parallele Gerade, deren Spurpunkte zugänglich sind; dabei hat man zu beachten, daß (nach § 10) die gleichnamigen Projektionen paralleler Geraden selbst parallel sind. Sind z. B. h', h'' in Figur 40 die

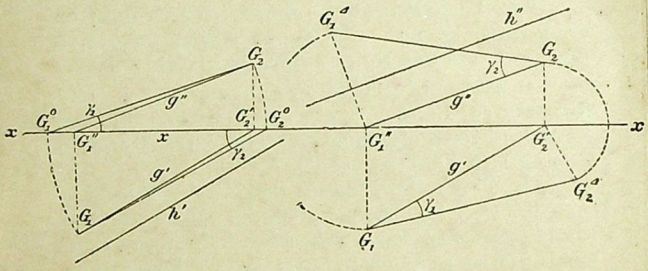

Fig. 40a und b.

ursprünglich gegebenen Projektionen, so zieht man $g' \parallel h'$, $g'' \parallel h''$; die beiden Parallelen können ganz willkürlich gezogen werden, nur müssen ihre Spurpunkte zugänglich sein.

In der gleichen Weise kann man sich helfen, wenn die Tafelneigungen einer die Achse schneidenden Geraden zu bestimmen sind.

55. *Aufgabe.* Die Tafelneigungen und die wahre Länge einer durch die Projektionen ihrer Endpunkte gegebenen Strecke AB zu bestimmen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Zieht man (Fig. 41[a]) in der ersten projizierenden Ebene durch den einen Endpunkt A die Gerade AC parallel zu Π_1, so fällt ihre erste Projektion mit der ersten Projektion $A'B'$ von AB zusammen, während ihre zweite Projektion $A''C''$ die Parallele zu x durch A'' ist. Das rechtwinklige Dreieck ACB, dessen Hypotenuse die Strecke AB und dessen Winkel BAC gleich der ersten Tafelneigung γ_1 der Strecke ist, hat die Katheten $AC = A'B'$, $BC = B''C''$. Zieht man in der zweiten projizierenden Ebene $AD \parallel \Pi_2$, so enthält das rechtwinklige Dreieck ADB, dessen Winkel BAD gleich

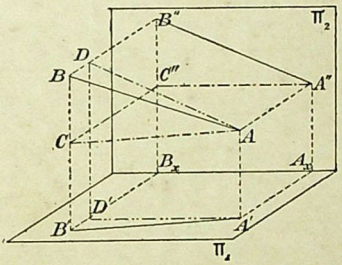

Fig. 41[a].

der zweiten Tafelneigung γ_2 ist, die Katheten $AD = A''B''$, $BD = B'D'$. Daraus folgt die Konstruktion:

Durch A' und A'' (Fig. 41[b]) zieht man Parallelen zur Achse, welche die Vertikale $B'B''$ in D' und C'' schneiden; dann zieht man $B'B_0' = C''B''$ und $\perp A'B'$, $B''B_1'' = D'B'$ und $\perp A''B''$. Zieht man noch die Hypotenusen $A'B_0'$, $A''B_1''$, so liefern sie die wahre Länge der Strecke AB (Kontrolle: $A'B_0' = A''B_1''$) und $\sphericalangle B_0'A'B' = \gamma_1$, $\sphericalangle B_1''A''B'' = \gamma_2$.

$A'B'B'_0$ kann als die horizontale Projektion des Dreiecks ACB, nachdem dieses um AC in die zu Π_1

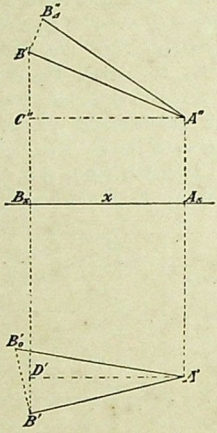

Fig. 41 b.

parallele Lage ACB_0 gedreht ist, betrachtet werden; $A''B''B''_1$ ist die vertikale Projektion des Dreiecks ADB, nachdem dieses um AD in die zu Π_2 parallele Lage ADB_1 gedreht ist.

Gegenseitige Lage zweier Geraden.

56. Zwei gerade Linien liegen entweder in einer Ebene oder nicht. Im ersten Falle können sie sich in einem Punkte schneiden oder einander parallel sein. Im zweiten Falle schneiden sich weder die Geraden

noch sind sie einander parallel; sie werden dann windschiefe oder sich kreuzende Geraden genannt.

Schneiden sich die beiden Geraden g und h, so müssen die Projektionen des Schnittpunktes P auf den gleichnamigen Projektionen der beiden Geraden liegen; es muß also P' der Schnittpunkt von g' und h', P'' derjenige von g'' und h'' sein. Als Projektionen eines Raumpunktes müssen aber P' und P'' in einer Senkrechten zur Achse liegen. Umgekehrt schneiden sich (im allgemeinen) die Geraden, wenn die Schnittpunkte ihrer gleichnamigen Projektionen ($g' \times h'$, $g'' \times h''$) in einer Senkrechten zu der Achse liegen.

Sind die beiden Geraden g und h parallel, so ist auch $g' \parallel h'$, $g'' \parallel h''$ (§ 10), und umgekehrt sind (im allgemeinen) die Geraden parallel, wenn es ihre gleichnamigen Projektionen sind. Daher:

Zwei Gerade liegen (im allgemeinen) in einer Ebene, wenn entweder die Schnittpunkte ihrer gleichnamigen Projektionen in einer Senkrechten zu der Achse liegen oder ihre gleichnamigen Projektionen einander parallel sind; anderenfalls sind die beiden Geraden windschief.

Dieser Satz gilt nicht unbedingt, wenn eine der beiden Geraden, z. B. $g \perp x$ ist, oder wenn g und $h \perp x$ sind. Im ersten Falle liegen die Schnittpunkte P', P'', in denen sich g' und h', bzw. g'' und h'' schneiden, zwar senkrecht übereinander, aber g und h brauchen sich deshalb nicht zu schneiden, also auch nicht in einer Ebene zu liegen. Um in diesem Falle die Entscheidung treffen zu können, ob g und h sich schneiden oder nicht, nimmt man ihre dritten Projektionen zu Hilfe. g''' kann als gegeben

angenommen werden, h''' konstruiert man mit Hilfe der dritten Projektionen H_1''', H_2''' der Spurpunkte von h. Fällt nun der Schnittpunkt von g''' und h''' mit der ebenfalls konstruierten dritten Projektion P''' von P zusammen, so schneiden sich die Geraden (vgl. Fig. 42[a]); anderenfalls sind sie windschief zueinander

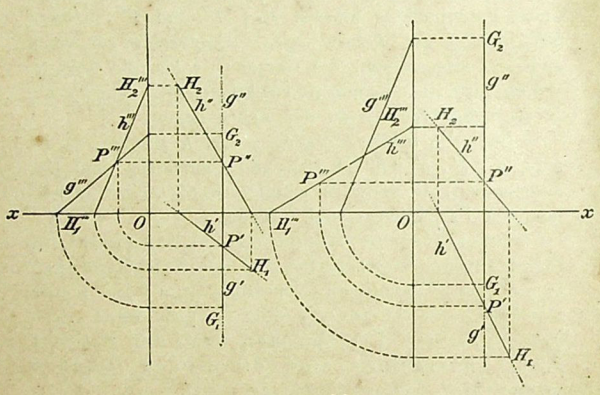

Fig. 42[a] und b.

(Fig. 42[b]). (Man bemerke, daß P''' stets auf h''' liegen muß; P', P'', P''' sind in jedem Falle die Projektionen des Punktes P, in welchem die Gerade h die durch g gehende und zu x senkrechte Ebene schneidet [vgl. § 58, I].)

Sind dagegen g und $h \perp x$, ohne aber in derselben zu x senkrechten Ebene zu liegen, so ist zwar $g' \parallel h'$, bzw. $g'' \parallel h''$, aber die Geraden sind nur dann einander parallel, wenn auch ihre dritten Projektionen

g''' und h''' parallel sind; anderenfalls sind g und h windschief.

Zwei gerade Linien g und h, welche in derselben zu x senkrechten Ebene liegen, schneiden sich oder sind parallel, je nachdem ihre dritten Projektionen g''' und h''' sich schneiden oder parallel sind.

Man zeichne sich für die beiden letzten Fälle die Figuren, indem man g und h durch die Projektionen je zweier Punkte A, B bzw. C, D als gegeben annimmt und die dritten Projektionen nach § 54 konstruiert.

Darstellung der Ebene.

57. Eine Ebene E ist bestimmt, wenn entweder drei in ihr gelegene Punkte oder zwei in ihr gelegene Geraden gegeben sind. In dem letzteren Falle kann man zu der Bestimmung einer Ebene E ihre beiden Schnittgeraden e_1, e_2 mit den Projektionsebenen Π_1, Π_2 benutzen; diese Geraden nennt man die erste (oder horizontale) und zweite (oder vertikale) Spurlinie oder Spur von E. Da sich im allgemeinen drei Ebenen in einem Punkte schneiden, so folgt, daß sich die Spurlinien einer Ebene in einem Punkte E_x der Achse x schneiden müssen. Umgekehrt können zwei in Π_1, bzw. Π_2 gelegene Gerade, welche sich in einem Punkte der Achse schneiden, stets als Spurlinien einer Ebene angesehen werden.

Nimmt man noch die Seitenrißebene Π_3 hinzu, so erhält man in der Schnittgeraden von E und Π_3 eine dritte (oder Seiten-) Spurlinie e_3 der Ebene E. Es müssen sich dann im allgemeinen e_1 und e_3 in einem Punkte E_y der y-Achse, e_2 und e_3 in einem Punkte E_z der z-Achse schneiden (Fig. 43[a]).

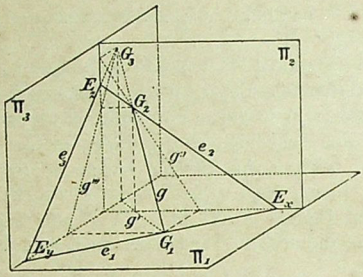

Fig. 43a.

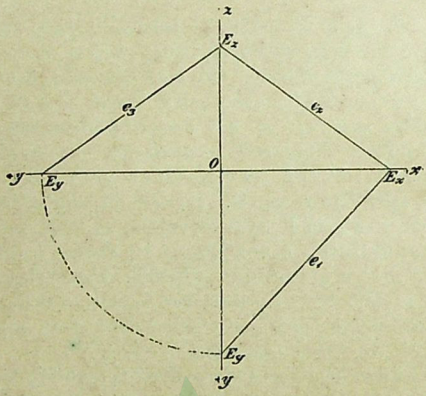

Fig. 43b.

Aus e_1 und e_2 erhält man demnach e_3, wenn man (Fig. 43b) ihre Schnittpunkte E_{1y}, E_z mit der vertikalen Achse bestimmt, OE_{1y} auf der horizontalen Achse

in richtigem Sinne von O aus abträgt und den so gefundenen Punkt mit E_z verbindet; diese letztere Gerade ist e_3.

58. Besondere Lagen der Ebene E gegen die Projektionsebenen.

I. Ist $\mathsf{E} \perp \Pi_1$, so ist $e_2 \perp x$. Die ersten Projektionen aller Gebilde in E liegen in e_1. e_3 ist $\| e_2$ (Fig. 44).

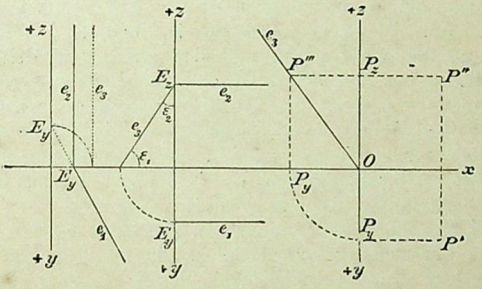

Fig. 44. Fig. 45. Fig. 46.

II. Ist $\mathsf{E} \| \Pi_1$, so ist $e_2 \| x$, während e_1 unendlich fern liegt.

Die zweiten Projektionen aller Gebilde in E liegen auf e_2; ihre ersten Projektionen sind den Gebilden kongruent.

Vertauscht man in beiden Sätzen die Indices 1 und 2 miteinander, so erhält man die analogen Sätze für Π_2.

III. Ist $\mathsf{E} \| x$, so ist $e_1 \| e_2 \| x$ (Fig. 45). Die Ebene E steht auf der Seitenrißebene senkrecht, und

die Seitenrisse aller Gebilde in E liegen auf e_3. Die Winkel, welche e_3 mit den Achsen einschließt, sind gleich den Neigungswinkeln ε_1, ε_2 der Ebene E gegen Π_1, Π_2 (s. § 66).

IV. Geht E durch x, so fallen e_1 und e_2 mit x zusammen.

Die Ebene ist dann bestimmt, wenn z. B. noch einer ihrer Punkte, P durch P', P'' gegeben ist. Da $E \perp \Pi_3$ ist, so fällt die dritte Projektion jedes ihrer Punkte auf e_3, und folglich ist $e_3 = OP'''$ (Fig. 46).

59. Die beiden Ebenen H_1 und H_2, welche durch die Achse gehen und den ersten und dritten, bzw. zweiten und vierten Quadranten halbieren, werden die erste und zweite Halbierungsebene genannt. Für jeden Punkt dieser beiden Ebenen sind die beiden Tafelabstände einander gleich. Folglich liegen nach erfolgter Umlegung von Π_1 in Π_2 die beiden Projektionen eines Punktes von H_1 symmetrisch zu x, während die beiden Projektionen eines Punktes von H_2 in einen Punkt zusammenfallen. In dem Punkte, in welchem sich die beiden Projektionen g' und g'' einer beliebigen Geraden schneiden, liegen daher die beiden Projektionen des Schnittpunktes von g mit H_2 vereinigt.

60. Da alle Punkte, welche die Ebene E mit Π_1, bzw. Π_2 gemeinsam hat, auf e_1, bzw. e_2 liegen, so folgt unmittelbar:

Die Spurpunkte aller Geraden einer Ebene sind auf den gleichnamigen Spuren derselben gelegen.

Dieser Satz gestattet sofort zu entscheiden, ob eine Gerade $g(g', g'')$ in einer Ebene $E(e_1, e_2)$ liegt.

Aufgabe I. Man soll die zweite Projektion g'' der in der Ebene $E(e_1, e_2)$ liegenden Geraden g,

von welcher die erste Projektion g' gegeben ist, konstruieren.

Man zieht durch die Punkte G_1 und G_2' (Fig. 47), in denen e_1 und x von g' geschnitten werden, Senkrechte zu x, welche die Punkte G_1'' auf x, bzw. G_2 auf e_2 bestimmen. $G_1'' G_2$ ist dann g''.

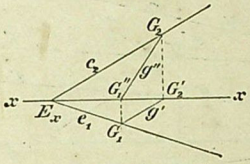

Fig. 47.

Die Figur löst auch die umgekehrte

Aufgabe II. Es ist die zweite Spur e_2 der Ebene, welche durch $g(g', g'')$ hindurchgeht und e_1 als erste Spur hat, zu bestimmen.

Aufgabe III. Zwei sich schneidende oder parallele Gerade $g(g', g'')$ und $h(h', h'')$ sind gegeben; man soll die Spuren e_1, e_2 ihrer Verbindungsebene konstruieren.

Die Verbindungslinie der gleichnamigen Spurpunkte $G_1 H_1$ und $G_2 H_2$ sind die gesuchten Spuren.

Liegen einige oder sämtliche Spurpunkte von g, h außerhalb der Zeichenebene, so nimmt man zwei Geraden (k, l) zu Hilfe, welche sowohl g als h schneiden und erreichbare Spurpunkte K_1, K_2, bzw. L_1, L_2 haben. Diese Hilfsgeraden liegen ebenfalls in der Verbindungsebene g und h, und ihre Spurpunkte liegen

daher auch auf e_1 und e_2 (Fig. 48). Man wählt k', l' willkürlich und bestimmt zu den Punkten

$$M' = k' \times g', \quad N' = l' \times g',$$
$$Q' = k' \times h', \quad R' = l' \times h'$$

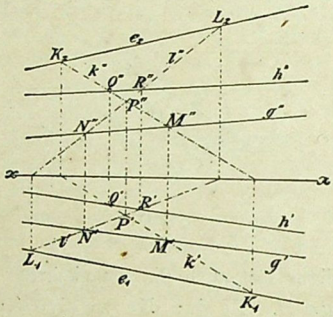

Fig. 48.

die zweiten Projektionen, so daß M und N auf g, Q und R auf h liegen (§ 48). Dann ist

$$k'' = M'' Q'', \quad l'' = N'' R''$$

und ferner

$$e_1 = K_1 L_1, \quad e_2 = K_2 L_2.$$

Kontrolle: e_1 und e_2 müssen sich auf der Achse x schneiden oder derselben parallel sein. —

Die vorstehende Konstruktion gibt aber auch ein Hilfsmittel, um zu entscheiden, ob durch zwei Gerade g und h eine Ebene gelegt werden kann, wenn die Punkte $g' \times h'$, $g'' \times h''$ nicht zugänglich sind und also das Kennzeichen des Satzes in § 56 versagt. Man be-

nutzt dann am bequemsten zur Entscheidung, daß $P' = k' \times l'$ und $P'' = k'' \times l''$ in derselben Senkrechten zu x liegen oder nicht, je nachdem g und h sich schneiden oder windschief sind. —

Wenn g und h durch denselben Punkt G der Achse x gehen (Fig. 49), so muß ihre Verbindungsebene

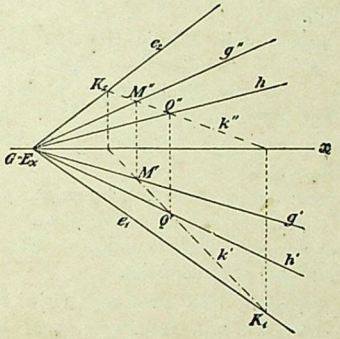

Fig. 49.

ebenfalls durch G gehen und es reicht die Benutzung einer Hilfslinie k, welche sowohl g als h schneidet, aus; diese Gerade k konstruiert man genau wie oben in Figur 48. Die Verbindungslinien ihrer Spurpunkte K_1, K_2 mit $G = E_x$ gibt die gesuchten Spuren e_1, e_2 der Verbindungsebene von g und h. —

Bemerkung. Soll die Ebene, welche durch eine Gerade g und einen nicht auf g gelegenen Punkt P geht, oder welche durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte A, B, C geht,

bestimmt werden, so führt man die Aufgabe auf die soeben gelöste zurück, indem man durch P eine Gerade, welche G schneidet, zieht, bzw. indem man zwei der drei Geraden AB, BC, CA zieht.

Aufgabe IV. Durch einen Punkt $P(P', P'')$ soll eine Ebene parallel zu den beiden nicht parallelen Geraden $g(g', g'')$ und $h(h', h'')$ gelegt werden.

Zieht man durch P' die Geraden $k' \parallel g'$, $l' \parallel h'$ und durch P'' die Geraden $k'' \parallel g''$, $l'' \parallel h''$, so sind k', k'' und l', l'' die Projektionen zweier durch P gezogenen Parallelen zu g und h. Ihre Verbindungsebene, welche man nach Aufgabe III bestimmt, ist die verlangte Ebene.

Zieht man durch einen beliebigen auf g gelegenen Punkt die Gerade $l \parallel h$, so erhält man in der Verbindungsebene von g und l diejenige Ebene, welche durch g geht und parallel h ist.

61. *Aufgabe.* Die zweite Projektion eines Dreiecks ABC zu konstruieren, welches durch seine erste Projektion $A'B'C'$ und die Spuren e_1, e_2 seiner Ebene E gegeben ist.

Durch wiederholte Anwendung der für die Aufgabe I des vorigen Paragraphen mitgeteilten Lösung erhält man leicht zu den gegebenen ersten Projektionen $a' = B'C'$, $b' = C'A'$, $c' = A'B'$ die zugehörigen zweiten Projektionen $a'' = B''C''$, $b'' = C''A''$, $c' = A''B''$ (Fig. 50).

Kontrolle: $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ müssen $\perp x$ sein.

Der Punkt A_e, in welchem sich a' und a'' schneiden, ist (§ 59) ein Punkt der zweiten Halbierungsebene und liegt folglich auf der Schnittgeraden e von E und H_2.

Dasselbe gilt für die beiden Projektionen jeder anderen Geraden der Ebene E; es liegen also die Punkte $B_e = b' \times b''$, $C_e = c' \times c''$ ebenfalls auf e. Auf der Geraden e muß auch E_x liegen, da H_2 durch x

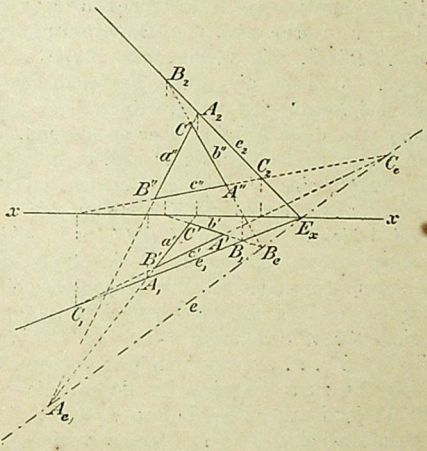

Fig. 50.

geht. Beachtet man noch, daß $A'A'' \parallel B'B'' \parallel C'C''$ ist, da sie sämtlich $\perp x$ sind, so erkennt man, daß $A'B'C'$ und $A''B''C''$ perspektiv-affine Figuren sind (§ 13) für e als Affinitätsachse; die Affinitätsstrahlen sind $\perp x$. Was hier speziell für die beiden Projektionen des Dreiecks ABC nachgewiesen ist, gilt für die Projektionen jeder Figur in E, da Grundriß und Aufriß jedes Punktes, bzw. jeder Geraden die Affinitäts-

bedingungen des § 13 erfüllen. Folglich gilt allgemein der Satz:

Nach Umlegung der ersten Projektionsebene in die zweite sind Grundriß und Aufriß jeder ebenen Figur perspektiv-affin; die Affinitätsachse ist die Schnittgerade der Ebene der Figur und der zweiten Halbierungsebene.

Ist $A''B''C''$, wie vorhin, aus $A'B'C'$, e_1, e_2 konstruiert, so bietet die affine Verwandtschaft von Grundriß und Aufriß eine weitere Kontrolle. Andererseits kann man diese Affinität aber auch benutzen, um den Aufriß erst zu konstruieren, nachdem man Grundriß und Aufriß einer beliebigen Geraden oder eines beliebigen Punktes der Ebene E bestimmt hat.

Zwei beliebige Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$, deren entsprechende Ecken in Senkrechten zu der x-Achse liegen, können stets als die Projektionen eines im Raume gelegenen Dreiecks ABC betrachtet werden. Dagegen sind für $n > 3$ zwei n-Ecke $A'B'C'D' \ldots$ und $A''B''C''D'' \ldots$, auch wenn ihre entsprechenden Ecken lotrecht zu x übereinander liegen, nicht mehr stets die Projektionen eines ebenen n-Ecks; vielmehr ist ein ebenes n-Eck $ABCD \ldots$ bereits bestimmt, wenn man seine erste Projektion $A'B'C'D' \ldots$ und die zweiten Projektionen dreier seiner Eckpunkte z. B. A'', B'', C'' kennt. Die zweiten Projektionen der anderen Eckpunkte sind dann durch die Forderung, daß das Polygon ein ebenes sein soll, bestimmt; zu ihrer Konstruktion verwendet man bequem die Affinität von Grundriß und Aufriß.

62. Von den in einer Ebene gelegenen Geraden sind zwei Arten von besonderer Wichtigkeit: die Haupt- und Falllinien einer Ebene.

Die zu der ersten oder zweiten Spur einer Ebene parallelen Geraden werden erste oder zweite Hauptlinien (auch Tafel- oder Streichlinien) derselben genannt.

Die ersten Hauptlinien einer Ebenen E sind demnach $\| \Pi_1$, die zweiten $\| \Pi_2$, und folglich ist für eine erste Hauptlinie u der Ebene E:

$$u' \| e_1, \quad u'' \| x;$$

für eine zweite Hauptlinie v der Ebene E:

$$v' \| x, \quad v'' \| e_2.$$

Aufgabe I. Die zweite Projektion P'' des in E (e_1, e_2) gelegenen Punktes P, dessen erste Projektion P' gegeben ist, zu bestimmen.

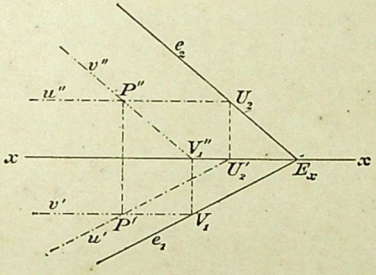

Fig. 51.

Man benutzt eine durch P gehende Gerade von E (Fig. 51), am einfachsten eine der beiden Hauptlinien. Entweder zieht man also $u' \| e_1$ durch P' und durch deren zweiten Spurpunkt U_2 die Parallele u'' zu x, oder $v' \| x$ durch P' und durch die zweite Projektion V_1'' ihres ersten Spurpunktes $v'' \| e_2$. Dann schneidet die

Vertikale durch P' sowohl u'' als v'' in der gesuchten zweiten Projektion P''.

Die Figur 51 gibt ohne weiteres auch die Lösung der umgekehrten

Aufgabe II. Die zweite Spur der durch den Punkt $P(P', P'')$ gehenden Ebene E, deren erste Spur e_1 gegeben ist, zu bestimmen.

63. Die in einer Ebene zu ihren ersten oder zweiten Hauptlinien senkrecht gezogenen Geraden heißen erste oder zweite Falllinien, weil sie von allen Geraden der Ebene die größte Neigung (oder den stärksten Fall) gegen die betreffende Projektionsebene haben.

Es werde eine erste Falllinie der Ebene E mit u, eine zweite Falllinie mit v und entsprechend ihre Spurpunkte mit $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, bzw. $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ bezeichnet.

Da u senkrecht zu den ersten Hauptlinien, also auch $\perp e_1$ ist, so folgt, daß die erste projizierende Ebene von u senkrecht auf e_1 steht. Es steht e_1 daher auf allen Geraden dieser Ebene, mithin auch auf u' senkrecht. Folglich ist, indem man für v analog schließt,

$$u \perp e_1, \quad u' \perp e_1; \quad v \perp e_2, \quad v'' \perp e_2.$$

Beachtet man, daß $u' \parallel e_1$ für eine erste Hauptlinie u war, so folgt, daß die von den ersten Hauptlinien mit den ersten Falllinien gebildeten rechten Winkel sich als rechte Winkel auf Π_1 projizieren. Legt man daher E um e_1 in Π_1 um, so decken sich die ersten Falllinien mit ihren ersten Projektionen. Das gleiche Verhalten zeigen die zweiten Falllinien in bezug auf Π_2.

64. Ist nun ein rechter Winkel gegeben, dessen einer Schenkel parallel einer Projektionsebene, z. B. $\parallel \Pi_1$ liegt, so ist dieser Schenkel eine erste Hauptlinie, der

andere Schenkel eine erste Falllinie der Ebene des rechten Winkels. Ist diese Ebene nicht senkrecht zu Π_1, so projiziert sich daher der rechte Winkel wieder als rechter Winkel. Da parallele Gerade parallele Projektionen haben (§. 10), so folgt weiter, daß auch die ersten Projektionen zweier windschiefen Geraden g und h, welche senkrecht zueinander gerichtet sind, einen rechten Winkel bilden, wenn die eine Gerade $\parallel \Pi_1$ ist. Demnach gilt der folgende, für spätere Anwendungen wichtige Satz:

Wenn von zwei senkrecht zueinander gerichteten (sich schneidenden oder windschiefen) Geraden die eine parallel einer Projektionsebene ist, schließen auch ihre senkrechten Projektionen auf dieselbe einen rechten Winkel ein. Umgekehrt: Schneiden sich die senkrechten Projektionen zweier Geraden auf eine Ebene rechtwinklig und ist eine der Geraden dieser Ebene parallel, so sind auch die Geraden senkrecht zueinander gerichtet.

65. Liegt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit einer Kathete einer Projektionsebene, z. B. Π_1 parallel (Fig. 52), so ist diese Kathete AC eine erste Hauptlinie und die andere CB eine erste Falllinie der Ebene des Dreiecks. Folglich ist nach dem vorigen Paragraphen die Projektion des Dreiecks, $A'C'B'$ wieder ein rechtwinkliges Dreieck, und es ist

$$AC = A'C', \quad BC > B'C'.$$

Hieraus folgt aber für die Winkel des Dreiecks und seiner Projektion

$$\alpha > \alpha' \text{ und } \beta < \beta',$$

und mithin.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Die senkrechte Projektion eines spitzen Winkels ist kleiner als derselbe, wenn einer seiner Schenkel eine Hauptlinie seiner Ebene, dagegen größer, wenn einer seiner Schenkel eine Falllinie seiner Ebene ist.

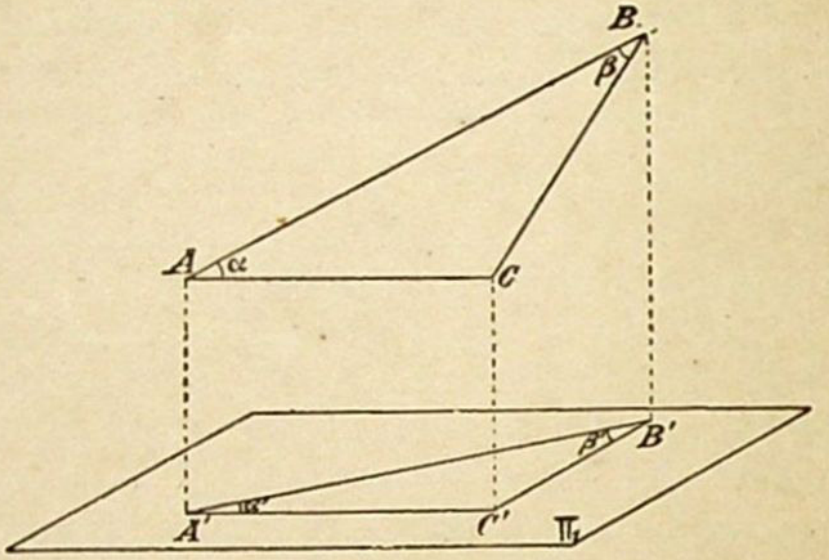

Fig. 52.

Ein beliebig gelegener spitzer Winkel wird demnach durch senkrechte Projektion verkleinert, wenn die durch seinen Scheitel gehende Hauptlinie ihn in zwei spitze Winkel zerlegt, dagegen vergrößert, wenn dies die durch seinen Scheitel gehende Falllinie tut. Findet aber weder der erste noch der zweite Fall statt, so läßt sich über die Größe des Winkels zu seiner Projektion allgemein nichts aussagen.

66. Unter dem Neigungswinkel zweier Ebenen versteht man den spitzen Winkel zwischen den Geraden, welche aus den beiden Ebenen durch eine dritte, zu ihrer Schnittlinie senkrechte Ebene ausgeschnitten werden.

Der Neigungswinkel einer Ebene E gegen eine der Projektionsebenen wird demnach gemessen durch den Neigungswinkel einer gleichnamigen Falllinie von E. Bezeichnet man die Neigungswinkel von E gegen Π_1, Π_2 mit ε_1, ε_2 (erste und zweite Tafelneigung von E), so ist

$$\varepsilon_1 = \sphericalangle(\mathfrak{u}', \mathfrak{u}), \quad \varepsilon_2 = \sphericalangle(\mathfrak{v}'', \mathfrak{v}).$$

Aufgabe. Man soll die beiden Tafelneigungen einer Ebene $E(e_1, e_2)$ konstruieren.

Die durch einen beliebigen Punkt A der Achse x (Fig. 53[a]) senkrecht zu e_1 gelegte Ebene schneidet E

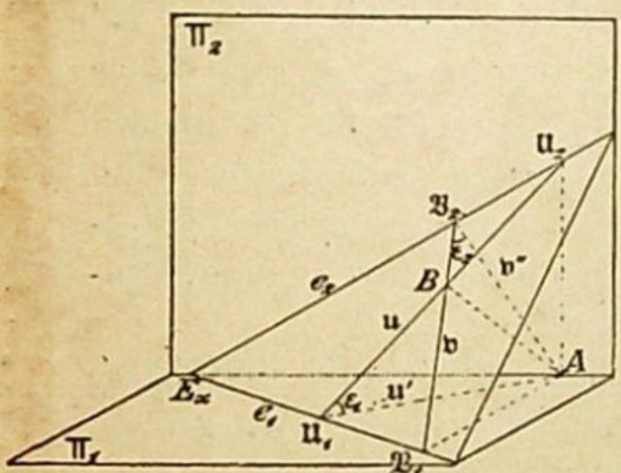

Fig. 53[a].

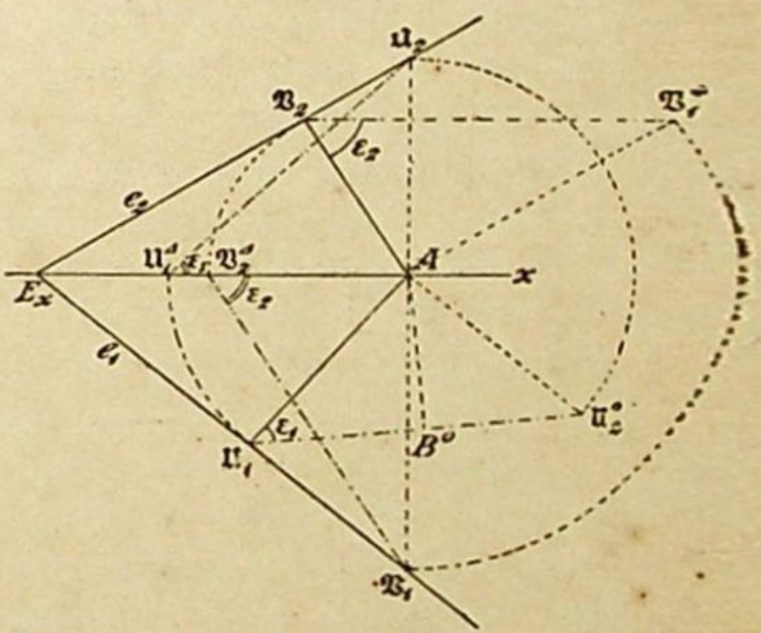

Fig. 53[b].

in einer ersten Falllinie $\mathfrak{u}$, Π_1 in deren erster Projektion $\mathfrak{u}'$, Π_2 in $A\mathfrak{U}_2 \perp x$, und es ist also

$$\sphericalangle A\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 = \varepsilon_1.$$

Man erhält mithin ε_1, wenn man (Fig. 53[b]) das rechtwinklige Dreieck $\mathfrak{U}_1 A \mathfrak{U}_2$ entweder um $\mathfrak{U}_1 A$ in Π_1

oder um $A\mathfrak{U}_2$ in Π_2 umlegt, wodurch das Dreieck in die Lage $\mathfrak{U}_1 A\mathfrak{U}_2^0$, bzw. $\mathfrak{U}_1^A A\mathfrak{U}_2$ kommt.

In gleicher Weise erhält man ε_2, wenn man durch A eine Ebene senkrecht zu e_2 legt; diese Ebene schneidet E in einer zweiten Falllinie $\mathfrak{v}$, Π_2 in $\mathfrak{v}''$, Π_1 in $A\mathfrak{V}_1 \perp x$, und es ist

$$\sphericalangle A\mathfrak{V}_2\mathfrak{V}_1 = \varepsilon_2 .$$

Da die Ebenen der beiden Dreiecke $A\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$ und $A\mathfrak{V}_1\mathfrak{V}_2$ senkrecht auf E stehen, so steht auch ihre Schnittgerade $AB \perp$ E; AB ist also in beiden Dreiecken die Höhe. Fällt man daher in den umgelegten Dreiecken $\mathfrak{U}_1 A\mathfrak{U}_2^0$, $\mathfrak{V}_1^0 A\mathfrak{V}_2$, bzw. $\mathfrak{U}_1^A A\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_1 A\mathfrak{V}_2^A$ von A die Höhen auf die Hypotenusen (in Fig. 53[b] ist nur die Höhe AB^0 in $\mathfrak{U}_1 A\mathfrak{U}_2^0$ gezeichnet), so müssen sie gleiche Länge haben. Diesen Umstand kann man benutzen, um die Spuren einer Ebene, deren Tafelneigungen gegeben sind und welche durch einen gegebenen Punkt geht, zu konstruieren.

Die erste Projektion von AB fällt in die Gerade $\mathfrak{u}'$, die zweite in $\mathfrak{v}''$; es ist also die erste, bzw. zweite Tafelneigung der Geraden AB:

$\gamma_1 = \sphericalangle BA\mathfrak{U}_1 = 90^0 - \varepsilon_1$, $\gamma_2 = \sphericalangle BA\mathfrak{V}_2 = 90^0 - \varepsilon_2$.

Da nun $\gamma_1 + \gamma_2 \leqq 90^0$ war (§ 54), so folgt $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geqq 90^0$, d. h. die Summe der Tafelneigungen einer Ebene ist *mindestens* gleich einem Rechten. Der Grenzfall $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 90^0$ tritt nur ein, wenn E einer Projektionsebene oder der Achse parallel ist.

Gegenseitige Lage zweier Ebenen.

67. Da zwei parallele Ebenen von jeder dritten Ebene in parallelen Geraden geschnitten werden, so folgt:

Parallele Ebenen haben in jeder Projektionsebene parallele Spuren. Umgekehrt sind zwei Ebenen parallel, wenn ihre gleichnamigen Spuren parallel sind. Für die Anwendung des umgekehrten Satzes reicht es aus, die ersten und zweiten Spuren zu betrachten, vorausgesetzt, daß sie nicht sämtlich $\| x$ sind; sind jedoch alle Spuren $\| x$, so geben erst die dritten Spuren die Entscheidung, ob die beiden Ebenen einander parallel sind oder nicht.

Aufgabe. Man soll die Spuren der Ebene bestimmen, welche durch den Punkt $P(P', P'')$ geht und der Ebene $\mathsf{E}(c_1 . c_2)$ parallel ist.

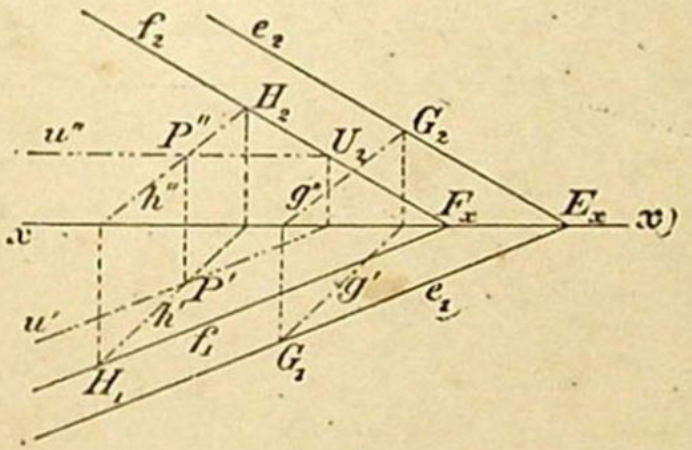

Fig. 54.

Zu einer beliebigen Geraden g in E (Fig. 54) zieht man die Parallele h durch $P(h' \| g', h'' \| g'')$ und bestimmt ihre Spurpunkte H_1, H_2. Die durch H_1, H_2 zu c_1 bzw. c_2 gezogenen Parallelen f_1, f_2 sind die Spuren der gesuchten Ebene Φ. f_1 und f_2 müssen sich auf x schneiden.

Die Konstruktion vereinfacht sich, wenn man als Gerade g eine der Spuren von E, z. B. c_1 wählt; dann ist die Parallele zu g durch P eine erste Hauptlinie u von Φ (also: $u' \| c_1$ durch P', $u'' \| x$ durch P'', $f_2 \| c_2$

durch U_2, $f_1 \| e_1$ durch $F_x = f_2 \times x$). Diese spezielle Wahl von g ist aber unbrauchbar, wenn $E \| x$ ist.

68. Zwei einander nicht parallele Ebenen schneiden sich immer in einer Geraden. Da dieselbe beiden Ebenen angehört, so müssen ihre Spurpunkte auf den gleichnamigen Spuren beider Ebenen, folglich in den Schnittpunkten dieser Spuren liegen.

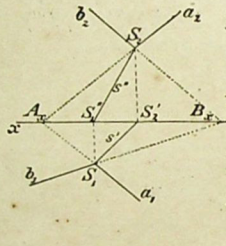

Fig. 55.

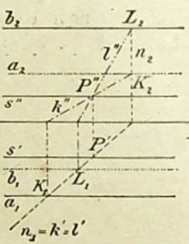

Fig. 56.

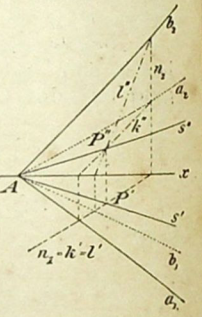

Fig. 57.

Aufgabe. Die Schnittgerade s der beiden Ebenen $A(a_1, a_2)$ und $B(b_1, b_2)$ zu konstruieren.

Von den Punkten $S_1 = (a_1 \times b_1)$, $S_2 = (a_2 \times b_2)$ fällt man die Lote $S_1 S_1''$, $S_2 S_2'$ auf die Achse; dann ist $s' = S_1 S_2'$, $s'' = S_1'' S_2$ (Fig. 55).

Ist speziell $a_1 \| b_1$, so ist auch $s' \| a_1 \| b_1$ und $s'' \| x$.

Diese Konstruktion versagt, 1) wenn beide Ebenen der Achse parallel sind, 2) beide Ebenen die Achse in demselben Punkte schneiden und 3) einer der beiden Spurpunkte S_1, S_2 oder beide außerhalb der Zeichenfläche liegen.

In den Fällen 1) und 2) benutzt man am einfachsten eine Hilfsebene N, welche auf einer Projektionsebene, z. B. auf Π_1 senkrecht steht, deren erste Spur n_1 beliebig gewählt werden kann und deren zweite Spur $n_2 \perp x$ durch $N_x = n_1 \times x$ geht. Die Projektionen der Geraden k, l, in denen N die Ebenen A und B schneidet, bestimmt man leicht nach der eben auseinandergesetzten Konstruktion der Schnittlinie zweier Ebenen A, N, bzw. B, N; die ersten Projektionen k', l' fallen mit n_1 zusammen (§ 58, I), da $N \perp \Pi_1$ ist. Der Punkt $P'' = k'' \times l''$ ist dann die zweite Projektion des den drei Ebenen A, B, N gemeinsamen Punktes P, durch den die gesuchte Schnittgerade s gehen muß. P' muß in dem Schnittpunkte des von P'' auf x gefällten Lotes mit n_1 liegen. In dem Falle 1) (Fig. 56) sind beide Ebenen zu x parallel, folglich sind auch s, s' (durch P'), s'' (durch P'') parallel x. In dem Falle 2) (Fig. 57) schneiden beide Ebenen die Achse in dem Punkte A, folglich muß ihre Schnittgerade s ebenfalls durch A gehen, daher ist $s' = P'A$, $s'' = P''A$.

In dem Falle 3) legt man durch einen beliebigen Punkt C_x der Achse eine Parallelebene Γ zu B ($c_1 \parallel b_1$, $c_2 \parallel b_2$), so daß die Schnittlinie t von A und Γ zugängliche Spurpunkte T_1, T_2 besitzt. Da parallele Ebenen von einer dritten Ebene in parallelen Geraden geschnitten werden, so ist $s \parallel t$. (Vgl. die in schiefer Parallelprojektion gegebene Skizze 58.)

Ist nun einer der Spurpunkte von s, z. B. S_2 innerhalb der Zeichenebene gelegen, so zieht man durch S_2 und S_2' die Geraden $s'' \parallel t''$ und $s' \parallel t'$. — Liegen aber beide Spurpunkte außerhalb der Zeichenebene, so

ziehe man in Π_1 (Fig. 58) eine beliebige Gerade durch A_x, welche $t' (= T_1 K)$ in K und s' in L schneidet, und verbinde K mit C_x, L mit B_x. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $A_x T_1 C_x$ und $A_x S_1 B_x$ einerseits, und $A_x T_1 K$ und $A_x S_1 L$ andererseits folgt

$$A_x K : A_x L = A_x C_x : A_x B_x ;$$

es ist also auch

$$\triangle A_x K C_x \sim \triangle A_x L B_x ,$$

folglich

$$K C_x \parallel L B_x .$$

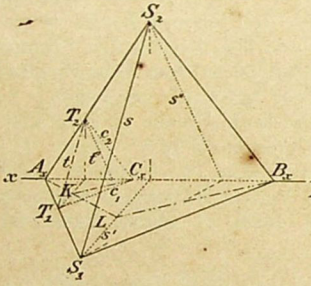

Fig 58.

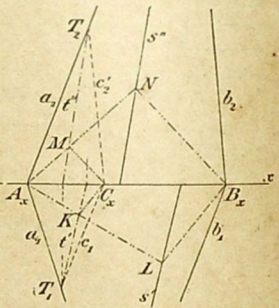

Fig. 59.

Daher findet man einen Punkt L von s', indem man (Fig. 59) einen beliebigen Punkt K auf t' mit A_x und C_x verbindet und die Verlängerung von $A_x K$ mit der durch B_x gehenden Parallelen zu $C_x K$ schneidet; die durch den Schnittpunkt L zu t' gezogene Parallele s' ist dann die erste Projektion von s. In gleicher Weise erhält man mit Benutzung eines beliebigen Punktes M auf t'' den Punkt N auf s''. — Diese Kon-

struktion ist selbst dann noch anwendbar, wenn von jedem Punkte der Geraden s nur die eine Projektion auf der Zeichenfläche liegt (wie es in Figur 59 z. B. der Fall ist. Vgl. auch § 83).

Den Schnittpunkt dreier Ebenen A, B, Γ erhält man als Schnittpunkt der beiden Schnittgeraden zweier Ebenenpaare z. B. A, B; A, Γ.

Gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene.

69. Eine Gerade g kann in einer Ebene E liegen, sie schneiden oder ihr parallel sein.

Der erste Fall ist durch den Satz des § 60 bereits erledigt. Hier bleibt vornehmlich der zweite Fall zu betrachten, welcher Veranlassung gibt zu der folgenden

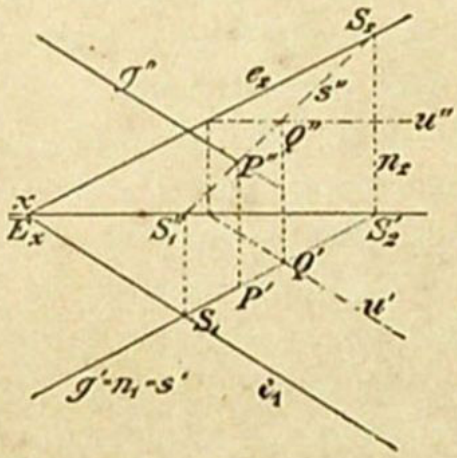

Fig. 60a.

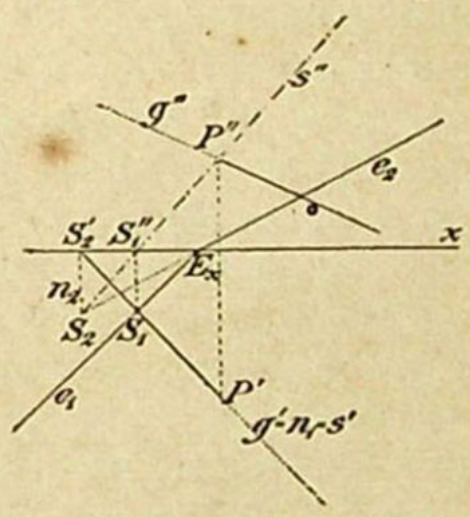

Fig. 60b.

Aufgabe. Es soll der Schnittpunkt P einer Ebene $E(e_1, e_2)$ und einer Geraden $g(g', g'')$ konstruiert werden.

Man benutzt eine der projizierenden Ebenen von g, z. B. die erste (N) als Hilfsebene (Fig. 60a, 60b). Die erste Spur n_1 derselben fällt mit g' zusammen, die zweite n_2 ist $\perp x$. Die Ebene N enthält die Geraden

g und $s = \mathsf{N} \times \mathsf{E}$, welche letztere nach § 68 zu konstruieren ist. Folglich ist $P'' = s'' \times g''$ die zweite Projektion des Schnittpunktes P von g und E, dessen erste Projektion auf g' senkrecht unter P'' liegt.

Ist der Punkt $S_2' = g' \times x$ und damit S_2 unerreichbar, so nimmt man eine beliebige Gerade von E, z. B. eine erste Hauptlinie $u (u' \parallel e_1,\ u'' \parallel x)$. Der Punkt $Q' = u' \times s'$ ist dann die erste Projektion des Schnittpunktes Q von s mit u, und es ist $s'' = S_1'' Q'$ (wo Q'' auf der Vertikalen durch Q und auf u'' liegt).

Um sich aus der Zeichnung leicht eine klare Vorstellung der räumlichen Verhältnisse bilden zu können, zieht man (nach § 32) diejenigen Linien, welche in der Sehrichtung durch Ebenen oder Flächen verdeckt werden, nicht aus, sondern punktiert sie nur. Da die Sehstrahlen mit den Projektionsstrahlen zusammenfallen, so ist ein Beschauer des Grundrisses in unendlicher Entfernung über Π_1 und ein Beschauer des Aufrisses in unendlicher Entfernung vor Π_2 befindlich zu denken. Für den ersteren Beschauer ist derjenige von zwei Punkten unsichtbar, welcher senkrecht unter dem anderen liegt, also derjenige, dessen zweite Projektion senkrecht unter der des andern liegt; für den zweiten Beschauer ist aus gleichem Grunde derjenige von zwei Punkten unsichtbar, welcher senkrecht zu Π_2 hinter dem anderen liegt, also derjenige, dessen erste Projektion (in der umgelegten Figur) senkrecht über der des anderen liegt.

In bezug auf eine Ebene E merke man sich die folgende Regel, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt*):

---

*) Am leichtesten indem man sich ein Modell aus Karton herstellt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

In jeder der beiden Sehrichtungen erblickt man dieselbe oder verschiedene Seiten von E, je nachdem die in $+\Pi_1$, bzw. $+\Pi_2$ gelegenen Teile von c_1 und c_2 spitze Winkel mit *derselben* Richtung oder mit *verschiedenen* Richtungen der x-Achse einschließen.

Figur 60[a] entspricht dem ersten und Figur 60[b] dem zweiten Falle.

Nach dem Obigen ist im Grundrisse der Teil von g sichtbar, dessen Aufriß über s'' gelegen ist; der entsprechende Teil von g' bis P' ist ausgezogen. Im Aufrisse ist augenscheinlich derselbe (Fig. 60[a]) oder der andere (Fig. 60[b]) Teil von g sichtbar; je nachdem man im Grundriß und Aufriß dieselbe Seite von E oder entgegengesetzte Seiten erblickt.

70. *Aufgabe I.* Es ist der Schnittpunkt P einer Ebene, welche durch die Projektionen dreier ihrer Punkte A, B, C gegeben ist, und einer Geraden $g(g', g'')$ zu konstruieren.

Das Verfahren bleibt dasselbe, ohne daß man jedoch erst die Spuren der Ebene ABC zu bestimmen braucht. Die erste projizierende Ebene von g schneidet die Ebene des Dreiecks ABC in einer Geraden s, deren erste Projektion s' mit g' zusammenfällt (Fig. 61). Die Punkte D', E', in welchen $s' = g'$ die Geraden $A'C'$, $B'C'$ schneidet, sind also die ersten Projektionen der Punkte D, E, in denen s die Geraden AC, BC trifft. Daher ist $s'' = D''E''$ und $P'' = s'' \times g''$; P' liegt lotrecht unter P'' auf g'.

Betreffs des Ausziehens ist das oben Gesagte zu beachten. Gewöhnlich nimmt man dabei nur die Fläche des Dreiecks ABC (nicht die ganze Ebene) als vor-

handen an. Die Regel, welche Seite der Dreieckfläche sichtbar ist, kann man so aussprechen:

In jeder der beiden Sehrichtungen erblickt man dieselbe oder verschiedene Seiten eines Dreiecks, je nachdem der durch die alphabetische Reihenfolge der Ecken bestimmte Umlaufssinn für beide Projektionen der gleiche oder entgegengesetzte ist.

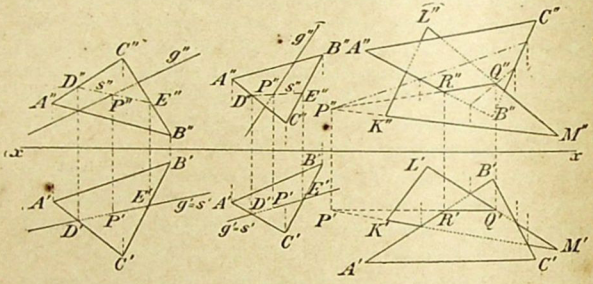

Fig. 61a und b.

Fig. 62.

In den Figuren 61 ist dieser Umlaufssinn für $A'B'C'$ mit dem des Uhrzeigers übereinstimmend angenommen und mit diesem stimmt in Figur 61b auch der Umlaufssinn von $A''B''C''$ überein, während derselbe in Figur 61a entgegengesetzt ist; in Figur 61a kehrt daher das Dreieck ABC einem Beschauer in den beiden Sehrichtungen verschiedene Seiten, in Figur 61b dagegen dieselbe Seite zu.

Aufgabe II. Die Schnittlinie zweier Dreiecke ABC und KLM zu konstruieren.

Die Lösung erhält man durch eine zweimalige Anwendung der unter I gegebenen Konstruktion, indem man (Fig. 62) die Schnittpunkte P, Q zweier Dreiecksseiten, z. B. KM, LM, mit der durch die drei Punkte A, B, C bestimmten Ebene ermittelt. Als Schnittlinie der beiden Dreiecke kommt dabei nur das innerhalb beider Dreiecke gelegene Stück der durch die Gerade PQ bestimmten Schnittgeraden der Dreiecksebenen in Betracht; in Figur 62 z. B. das Stück RQ.

71. Die für die Aufgaben I und II gegebenen Lösungen lassen zugleich erkennen, daß eine Gerade g der Ebene E parallel ist, wenn die Schnittgerade s der letzteren mit der ersten projizierenden Ebene von g parallel g, d. h. also, wenn $s'' \parallel g''$ ist.

Gerade Linien und Ebenen in rechtwinkliger Stellung.

72. Aus dem in § 64 aufgestellten Satze folgt sofort der für die folgenden Betrachtungen grundlegende Satz:

Damit eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, ist notwendig und hinreichend, daß die beiden Projektionen der Geraden auf den gleichnamigen Spuren der Ebene senkrecht stehen.

Ist nämlich $g \perp$ E, also $g \perp e_1$ und $\perp e_2$, so folgt aus dem Satze in § 64, daß auch $g' \perp e_1$, $g'' \perp e_2$ ist. Wenn aber umgekehrt $g' \perp e_1$, $g'' \perp e_2$ ist, so folgt aus der Umkehrung jenes Satzes, daß im allgemeinen auch $g \perp e_1$ und $\perp e_2$, also $\perp$ E ist. Nur wenn $e_1 \parallel e_2 \parallel x$ ist und g', g'' in derselben Senkrechten zu x liegen, ist das Kriterium nicht ausreichend, sondern es ist noch zu untersuchen, ob auch $g''' \perp e_3$ ist.

73. *Aufgabe I.* Es ist von dem Punkte $R(R', R'')$ das Lot l auf die Ebene $\mathsf{E}(e_1, e_2)$ zu fällen und seine wahre Länge zu bestimmen.

Die Lote l', l'' von R', R'' auf e_1, bzw. e_2 (Fig. 63) sind die Projektionen des gesuchten Lotes, dessen Schnittpunkt P mit E nach § 69 zu bestimmen ist (die Schnittgerade der ersten projizierenden Ebene von l mit E ist eine erste Falllinie). Dann hat man noch die wahre Länge von RP $(= R_0''P'')$ zu konstruieren (§ 55).

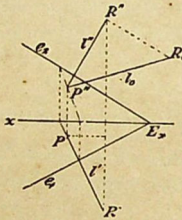

Fig. 63.

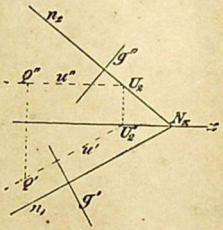

Fig. 64.

Aufgabe II. Durch den Punkt $Q(Q', Q'')$ soll die zu g senkrechte Ebene N (Normalebene zu g) konstruiert werden.

Da die Spuren n_1, n_2 (Fig. 64) der gesuchten Ebene auf g', bzw. g'' senkrecht stehen, so hat man nur nötig, einen Punkt von n_1 oder n_2 zu bestimmen, was z. B. mit Hilfe der durch Q gehenden ersten Hauptlinie u von N $(u' \perp g', u'' \parallel x)$ geschehen kann. Durch ihren zweiten Spurpunkt U_2 zieht man $n_2 \perp g''$ und dann durch $N_x = n_2 \times x$ noch $n_1 \perp g'$.

Aufgabe III. Der Abstand l eines Punktes $Q(Q', Q'')$ von der Geraden $g(g', g'')$ soll bestimmt werden.

Man legt durch Q eine Ebene $\mathsf{N} \perp g$ und bestimmt dann (nach § 69 oder 70, I) den Schnittpunkt $P = g \times \mathsf{N}$,

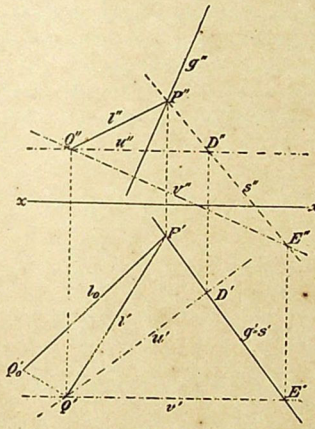

Fig. 65.

welcher der Fußpunkt des von Q auf g gefällten Lotes l ist. Zur Bestimmung der Ebene N braucht man aber nicht erst (nach Aufgabe II) ihre Spuren zu bestimmen, sondern es genügen ihre beiden durch Q gehenden Hauptlinien u und v (Fig. 65). Durch Q' zieht man also $u' \perp g'$, $v' \parallel x$ und durch Q'' $u'' \parallel x$, $v'' \perp g''$. Hierauf bestimmt man den Schnittpunkt P von g mit N (nach § 70, I: $D' = u' \times g'$, $E' = v' \times g'$; $s'' = D''E''$,

$P'' = g'' \times s''$) und erhält in $P'Q'$, $P''Q''$ die beiden Projektionen des gesuchten Abstandes l, dessen wahre Länge l_0 sich (nach § 55) leicht ergibt (vgl. § 85, vorletzter Absatz).

Aufgabe IV. Den Abstand zweier durch ihre Spuren gegebenen parallelen Ebenen zu bestimmen.

Man zieht durch einen beliebigen Punkt eine Senkrechte zu beiden Ebenen und bestimmt die wahre Länge des Abstandes ihrer Fußpunkte.

74. Der kürzeste Abstand zweier windschiefen Geraden ist diejenige zwischen ihnen ge-

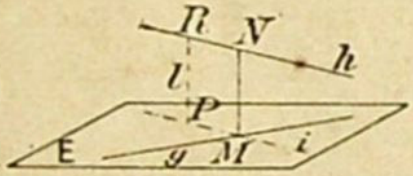

Fig. 66.

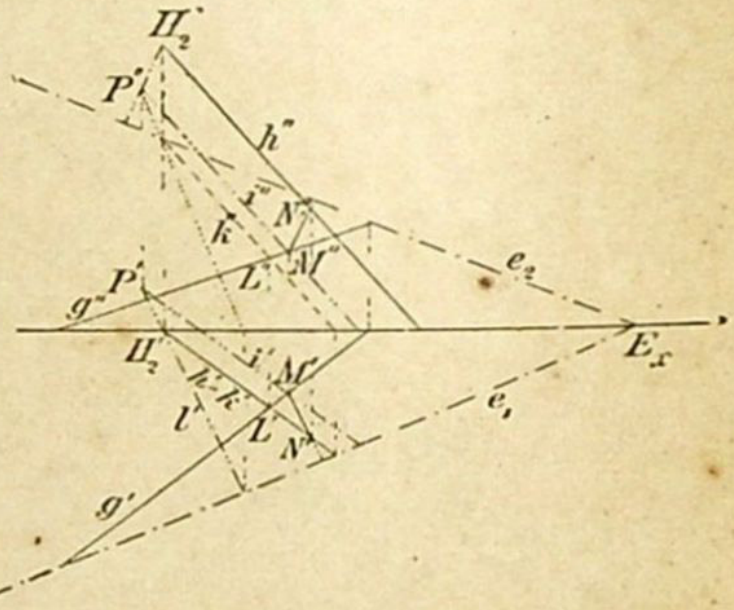

Fig. 67.

legene Strecke, welche auf beiden zugleich senkrecht steht.

Projiziert man (Fig. 66) die eine Gerade h senkrecht auf eine zu ihr parallele, durch die andere Gerade g gelegte Ebene E, so erhält man in E die Gerade i parallel h, und das in dem Schnittpunkte M von g und i errichtete Lot MN ist der gesuchte kürzeste Abstand.

Hiernach gestaltet sich die Konstruktion des kürzesten Abstandes zweier windschiefen Geraden g und h folgendermaßen. Man legt (Fig. 67) durch g die Ebene E parallel h (§ 60, IV: Durch einen beliebigen Punkt L von g zieht man $k \parallel h$, wobei in der Figur $k' = h'$ gewählt ist, und bestimmt die Spuren e_1, e_2 der durch g und k gehenden Ebene E als die Verbindungslinien der gleichnamigen Spurpunkte dieser Geraden). Darauf fällt man von einem beliebigen Punkte der Geraden h, als welcher in der Figur der Einfachheit wegen der Spurpunkt H_2 genommen ist, das Lot l auf E ($l' \perp e_1$, $l'' \perp e_2$) und bestimmt seinen Fußpunkt P in E (§ 73, I). Durch P zieht man parallel zu h die Gerade i, welche die senkrechte Projektion von h auf E vorstellt, und errichtet in $M = g \times i$ ein Lot auf E ($M'N' \perp e_1$, $M''N'' \perp e_2$), welches h in N schneidet und dessen wahre Länge nach § 55 ermittelt werden kann (2. Lösung in § 85).

Umlegung ebener Gebilde in eine Tafel.

75. Eine ebene Figur erscheint bei dem Verfahren der senkrechten Projektion nur dann in ihrer wahren Gestalt, wenn die Ebene der Figur entweder mit einer Projektionsebene zusammenfällt oder zu ihr parallel ist, wie aus den Betrachtungen am Ende des § 11 folgt. Liegt die Ebene E der Figur aber beliebig gegen beide Projektionsebenen, so muß man E entweder um eine Spur in die gleichnamige Projektionsebene umlegen oder um eine Hauptlinie zu der gleichnamigen Projektionsebene parallel drehen. Beide Verfahren sind bereits bei einfachen Aufgaben verwendet, das erste in den

§§ 54 und 66 und das zweite in § 54*). Jetzt sollen mit Hilfe des Umlegungsverfahrens einige kompliziertere wichtige Aufgaben gelöst werden.

76. *Aufgabe.* Man soll den von zwei Geraden $g(g', g'')$ und $h(h', h'')$ gebildeten Winkel φ bestimmen.

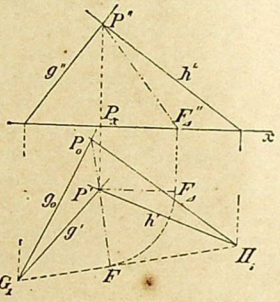

Fig. 68.

Jede zu h parallele Gerade schließt mit g den gleichen Winkel ein wie h selbst; folglich ist es keine Beschränkung, wenn man voraussetzt, daß sich g und h in einem Punkte P schneiden. Das von dem Punkte P und den ersten Spurpunkten G_1, H_1 gebildete Dreieck (Fig. 68) enthält bei P den gesuchten Winkel, welchen man daher durch Umlegen dieses Dreiecks um G_1H_1

*) Das Beispiel ist insofern speziell, als die umzulegende Figur senkrecht auf der einen Projektionstafel steht; in § 80 wird deshalb noch ein Beispiel für den allgemeineren Fall gegeben.

in Π_1 findet. Bei diesem Umlegen beschreibt P einen Kreisbogen, dessen Ebene auf $G_1 H_1$ senkrecht steht und dessen Mittelpunkt der Fußpunkt F des von P auf diese Gerade gefällten Lotes ist. Die erste Projektion dieses Lotes fällt in das von P' auf $G_1 H_1$ gefällte Lot (§ 72), auf welchem auch der umgelegte Punkt P_0 liegen muß, da sich die ganze Kreisebene in dasselbe projiziert. Um noch die Länge $P_0 F$ zu erhalten, beachte man, daß $P_0 F$ Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $FP'P$ mit den Katheten FP' und $P'P = P_x P''$ ist. Daher trägt man FP' von P_x bis F''_1 auf x ab*) und macht schließlich $FP_0 = F''_1 P''$. Die von P_0 nach G_1 und H_1 gezogenen Geraden schließen den gesuchten Winkel φ ein. — Liegt P zu weit entfernt von einer Projektionsebene, so benutzt man zwei geeignete Parallelen zu g und h.

Soll durch P eine Gerade gezogen werden, welche den von den Geraden g und h gebildeten Winkel in einem bestimmten Verhältnisse teilt, so muß man zuerst den umgelegten Winkel $G_1 P_0 H_1$ in diesem Verhältnisse teilen; verbindet man den Punkt, in welchem diese Teilgerade $G_1 H_1$ schneidet, mit P', so erhält man die erste Projektion der gesuchten Geraden, deren zweite Projektion man dann in gewohnter Weise ermittelt.

77. *Aufgabe.* Es ist der Neigungswinkel ψ der beiden Ebenen $\mathsf{A}(a_1, a_2)$ und $\mathsf{B}(b_1, b_2)$ zu konstruieren.

Jede Ebene N, welche auf der Schnittgeraden s

*) $F''_1 P_x P''$ kann als zweite Projektion des Dreiecks $FP'P$, nachdem es um $P'P$ in die zu Π_2 parallele Lage $F_1 P'P$ gedreht ist, betrachtet werden; in der Figur ist dies angedeutet.

der Ebenen A und B senkrecht steht, schneidet dieselben in Geraden, welche den gesuchten Neigungswinkel ψ einschließen. Statt aber N durch einen beliebigen Punkt von s zu legen, kann man ihre erste Spurlinie n_1, welche $\perp s'$ ist (§ 72) durch einen beliebigen Punkt C von s' ziehen (Fig. 69); n_1 schneide dann a_1 und b_1 in den Punkten D und E. Bezeichnet

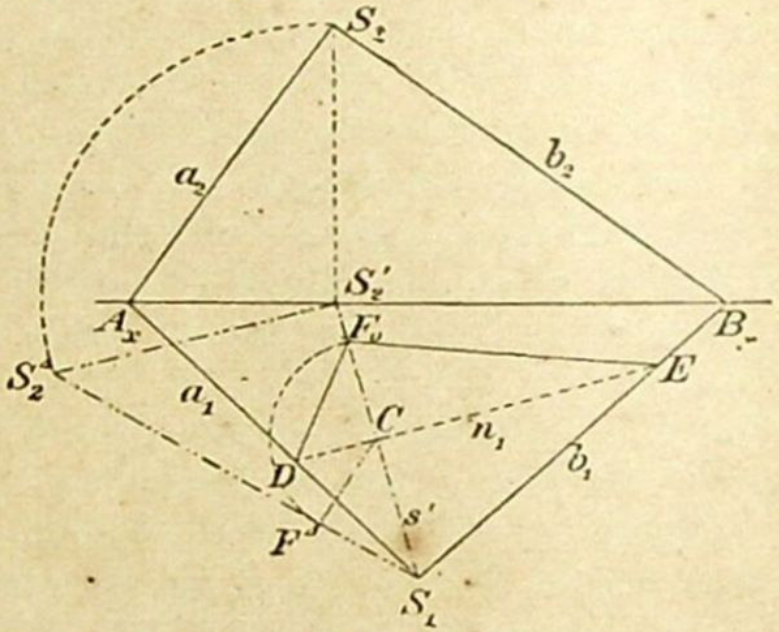

Fig. 69.

man mit F den noch zu bestimmenden Schnittpunkt von N und s, so enthält $\triangle DFE$ bei F den Winkel ψ oder das Supplement desselben. CF steht senkrecht einerseits auf n_1, da n_1 auf der ersten projizierenden Ebene von s senkrecht steht, und andererseits auf s, da CF in N liegt. Legt man also das Dreieck DFE um DE in Π_1 um, so bleibt der Punkt F bei dieser Bewegung stets in der ersten projizierenden Ebene von s und fällt schließlich in einen Punkt F_0 von s'. Da $CF_0 = CF$ ist, so hat man nur noch die Höhe des

Dreiecks DEF zu konstruieren. CF gehört aber auch dem rechtwinkligen Dreiecke $S_1 S_2' S_2$ an und ist das von dem Punkte C der Kathete $S_1 S_2'$ auf die Hypotenuse $S_1 S_2$ gefällte Lot. Um seine wahre Länge zu erhalten, legt man $\triangle S_1 S_2' S_2$ um $S_1 S_2'$ in Π_1 um ($S_2' S_2^{\downarrow} = S_2' S_2$ und $\perp S_1 S_2'$) und fällt von C das Lot $CF^{\downarrow}$ auf $S_1 S_2^{\downarrow}$. Dann macht man $CF_0 = CF^{\downarrow}$ und verbindet F_0 mit D und E. Je nachdem der Winkel DF_0E ein spitzer oder stumpfer Winkel ist, gibt er selbst oder sein Supplement den gesuchten Neigungswinkel ψ beider Ebenen.

Statt der gegebenen Ebenen benutzt man Parallelebenen, wenn die Spurpunkte der Schnittlinie beider Ebenen zu weit entfernt liegen.

78. *Aufgabe.* Es ist der Neigungswinkel χ einer Geraden $g(g', g'')$ gegen eine Ebene $\mathsf{E}(e_1, e_2)$ zu bestimmen.

Von einem beliebigen Punkte P der Geraden g fällt man das Lot l auf die Ebene E. Der Winkel φ, welchen g und l einschließen, ist das Komplement des gesuchten Neigungswinkels χ; man konstruiert daher zunächst φ (§ 76) und erhält dann χ durch die Beziehung: $\chi = 90^0 - \varphi$.

Auch die Aufgabe des § 77 läßt sich auf § 76 zurückführen, wenn man von einem beliebigen Punkte Lote auf die beiden gegebenen Ebenen fällt und beachtet, daß der von ihnen gebildete spitze Winkel gleich dem Neigungswinkel der beiden Ebenen ist.

(Man zeichne sich für beide Fälle die zugehörigen Figuren!)

Sollen die Spuren derjenigen Ebene, welche durch s geht und den Neigungswinkel in einem bestimmten

Verhältnisse teilt, gefunden werden, so hat man $\sphericalangle DF_0E$ zu teilen und den Punkt, in welchem die teilende Gerade DE schneidet, mit S_1 zu verbinden; diese Verbindungslinie ist die erste Spur der gesuchten Ebene.

79. *Aufgabe.* Die wahre Gestalt eines Dreiecks $ABC(A'B'C',\ A''B''C'')$ zu bestimmen.

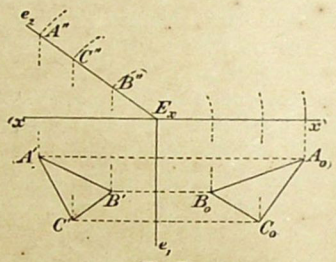

Fig. 70.

Zunächst bestimmt man die Spuren e_1, e_2 der Ebene E des Dreiecks (§ 60, III).

I. Die Dreiecksebene E steht senkrecht auf einer Projektionsebene, z. B. $\perp \Pi_2$, also $e_1 \perp x$ (Fig. 70). Dann ist die zweite Projektion des Dreiecks eine in e_2 liegende Strecke. Um die wahre Gestalt des Dreiecks zu erhalten, legt man E um e_1 in Π_1 um. Hierbei beschreiben die Eckpunkte des Dreiecks Kreisbogen, deren auf e_1 senkrecht stehende Ebenen sich in die von A', B', C' auf e_1 gefällten Lote projizieren und deren Mittelpunkte in den Fußpunkten dieser Lote liegen. Die Radien dieser Kreisbogen sind in der zweiten Projektion durch die Ab-

stände der Punkte A'', B'', C'' von E_x direkt gegeben. Die weitere Ausführung der Konstruktion zeigt die Figur, wo $A_0 B_0 C_0$ die wahre Gestalt des Dreiecks gibt.

II. Die Ebene E des Dreiecks liegt beliebig gegen beide Projektionsebenen (Fig. 71). Man legt E entweder um e_1 in Π_1 oder um e_2 in Π_2 um. Wählt man die erstere Umlegung, so empfiehlt es sich zu-

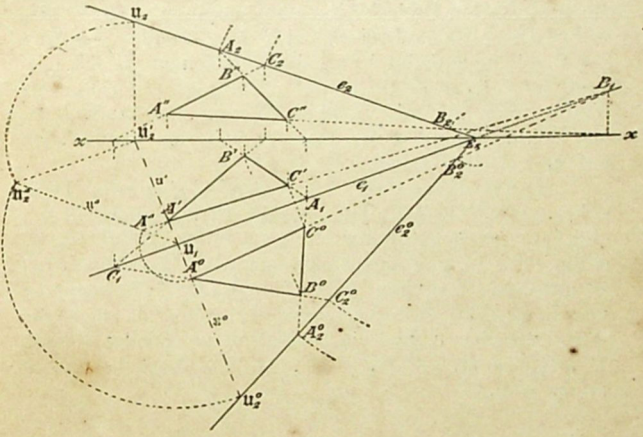

Fig. 71.

nächst e_2 umzulegen. Zu dem Zwecke benutzt man eine erste Falllinie u, z. B. die durch die Ecke A gehende ($u' \perp e_1$ durch A') und legt deren zweiten Spurpunkt U_2 um. Die Länge dieser ersten Falllinie zwischen diesen beiden Spurpunkten erhält man als Hypotenuse $U_1 U_2^d$ des um $U_1 U_2'$ in Π_1 umgelegten rechtwinkligen Dreiecks $U_1 U_2'' U_2$. Dann trägt man

$\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2^A$ auf $\mathfrak{U}_2'\mathfrak{U}_1$ oder ihrer Verlängerung von $\mathfrak{U}_1$ aus ab bis $\mathfrak{U}_2^0$ und erhält in $E_x\mathfrak{U}_2^0$ die um e_1 umgelegte zweite Spur e_2^0. Auf e_2^0 hat man nur die Abstände der zweiten Spurpunkte der Dreieckseiten von E_x abzutragen, also z. B. $E_xC_2 = E_xC_2^0$, und die so umgelegten zweiten Spuren mit den ersten Spurpunkten der Dreieckseiten zu verbinden, z. B. C_2^0 mit C_1, um die umgelegten Dreieckseiten und damit in $A^0B^0C^0$ die wahre Gestalt des Dreiecks ABC zu erhalten. — Man kann A^0 auch dadurch erhalten, daß man $A'A^A \perp u'$ zieht und $\mathfrak{U}_1A^0 = \mathfrak{U}_1A^A$ auf $\mathfrak{u}^0$ abträgt. Darauf verbindet man A^0 mit B_1 und C_1 und bestimmt B_0C_0 als Schnittpunkte dieser Geraden mit den von B', C' auf e_1 gefällten Loten.

Kontrolle: $A^0B^0C^0$ und $A'B'C'$ sind affine Dreiecke und e_1 die Affinitätsachse (§ 12); folglich müssen sich entsprechende Seiten z. B. $A'B'$ und A^0B^0 auf e_1 schneiden. Umgekehrt kann man auch die affine Verwandtschaft zwischen $A'B'C'$ und $A^0B^0C^0$ benutzen zur Konstruktion des letzteren Dreiecks, da man die Affinitätsachse e_1 und die beiden entsprechenden Punkte $\mathfrak{U}_2'$, $\mathfrak{U}_2^0$ kennt. $A'A^0$, $B'B^0$, $C'C^0$ müssen senkrecht zu e_1 sein.

Drehung ebener Gebilde um eine Hauptlinie.

80. Um für das in § 75 erwähnte zweite Verfahren noch ein Beispiel zu geben, soll die Aufgabe des vorigen Paragraphen nochmals gelöst werden, indem das Dreieck ABC um die durch den Eckpunkt A gehende erste Hauptlinie u parallel zu Π_1 gedreht wird; u ist die Schnittgerade der Dreiecksebene mit der durch A gelegten horizontalen Ebene E.

Die Ecke C beschreibt hierbei einen Kreisbogen (Fig. 72), dessen Ebene $\perp u$ und dessen Grundriß daher das von C' auf u' gefällte Lot ist (§ 64). Fällt man von C das Lot CE auf E, so fällt E' mit C' zusammen und $C''E''$ ($\perp u''$) gibt seine wahre Länge; fällt man ferner von E das Lot auf u, welches u in F

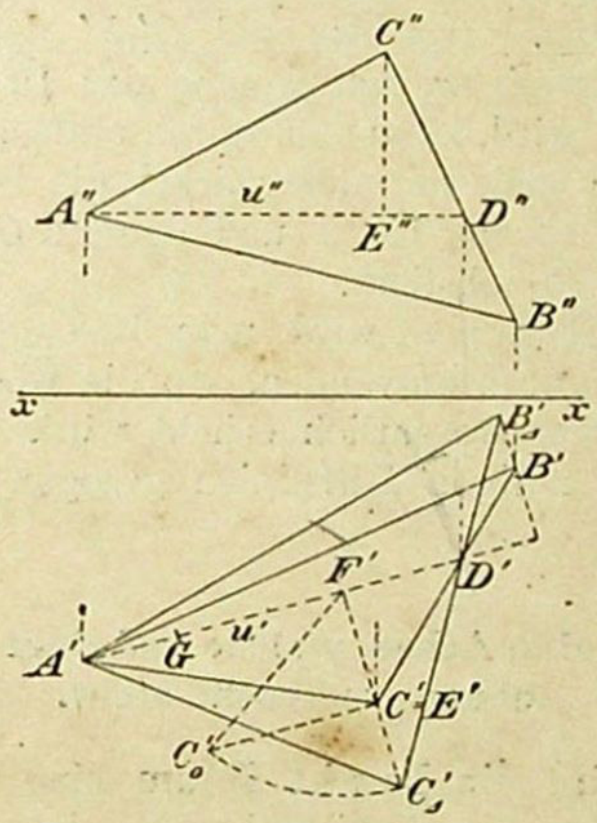

Fig. 72.

trifft ($C'F' \perp u'$) und dessen wahre Länge $C'F'$ ist, so erhält man den Radius des von C beschriebenen Kreisbogens als Hypotenuse $C_0'F'$ des rechtwinkligen Dreiecks $CEF = C_0'C'F'$, dessen Katheten

$$CE = C''E'' = C'C_0', \quad FE = F'C'$$

bekannt sind. Nachdem man auf diese Weise C_1' gefunden hat, erhält man B_1' als Schnittpunkt des

von B' auf u' gefällten Lotes mit der Geraden $C'_A D' (D' = C'B' \times u')$. $A'B'C'$ und $A'B'_A C'_A$ sind nämlich affin mit u' als Affinitätsachse (§ 12), und folglich müssen sich $B'C'$ und $B'_A C'_A$ auf u' schneiden.

Diese Konstruktion beansprucht weniger Raum als die vorhergehende und erfordert nicht die Bestimmung der Spuren der Dreiecksebene.

Anmerkung. Den Abstand $C'_A F'$ des Punktes C von der Hauptlinie u, um welche das Dreieck parallel zu Π_1 gedreht wird, kann man durch einfaches Abstechen finden, indem man mit dem Zirkel die Strecke $C''E''$ auf $F'A'$ von F' aus bis G und dann GC' von F' aus auf $F'C'$ bis C'_A absticht.

Dieses Abstechen wird man besonders bei komplizierteren Figuren anwenden, wo die Übersichtlichkeit der Konstruktion wesentlich erhöht wird, wenn nur die unumgänglich nötigen Hilfslinien gezogen werden.

Drehung um eine Achse, welche auf einer Projektionsebene senkrecht steht.

81. Wird ein Punkt P um eine Gerade a als Achse gedreht, so beschreibt P einen Kreisbogen, dessen Radius das von P auf a gefällte Lot und dessen Mittelpunkt der Fußpunkt desselben ist; die Ebene des Kreises steht senkrecht auf a. Da hier vorausgesetzt werden soll, daß die Achse a senkrecht zu einer Tafel, z. B. $\perp \Pi_1$ ist, so ist der Kreis dieser Tafel parallel, projiziert sich also auf Π_1 als Kreis und auf Π_2 als Parallele zu x.

Sind a', a'' die Projektionen der Drehungsachse und soll P um den Winkel α gedreht werden, so

dreht man (Fig. 73) zunächst $a'P'$ um α in die neue Lage $a'P'_0$; P''_0 liegt dann in dem Schnittpunkte der Vertikalen durch P'_0 mit der Horizontalen durch P''. Soll die Strecke PQ um die gleiche Achse und den gleichen Winkel gedreht werden, so dreht man den anderen Endpunkt Q ebenfalls um den Winkel α und erhält in $P'_0Q'_0$, P''_0Q'' die Projektionen der gedrehten Strecke.

Man kann dieses Verfahren benutzen, um die wahre Länge einer Strecke $PR(P'R' \quad P''R'')$ zu

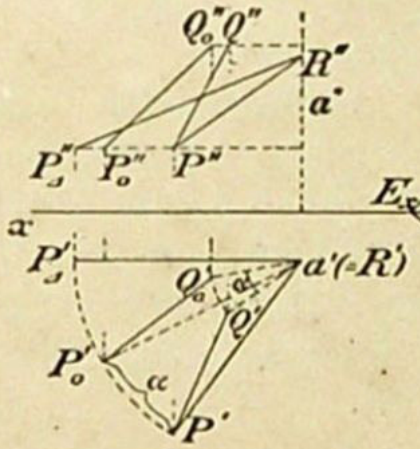

Fig. 73.

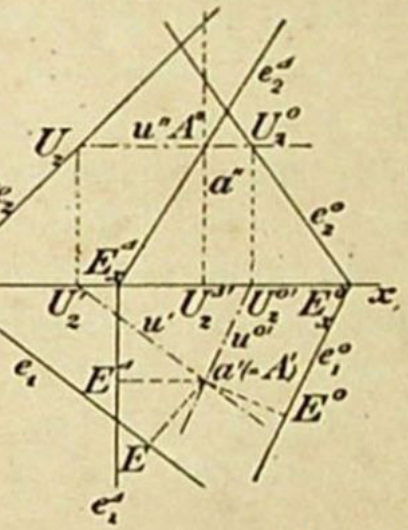

Fig. 74.

konstruieren, indem man PR parallel Π_2 dreht. Zu dem Zwecke wählt man als Drehungsachse am besten die Vertikale durch einen ihrer Endpunkte (Fig. 73), z. B. durch R, welcher dann bei der Drehung unverändert seine Lage beibehält. Die Lage des Punktes P nach ausgeführter Drehung erhält man, indem man $a'P' \parallel x$ dreht nach $a'P'_1$ und dann wie oben P''_1 bestimmt. P''_1R'' ist dann die zweite Projektion der Π_2 parallel gedrehten Strecke und gibt mithin die wahre Länge von PR an.

82. Wenn eine Ebene $\mathsf{E}(e_1, e_2)$ um die Achse a gedreht wird, bleibt ihr Schnittpunkt A unverändert

(Fig. 74); die durch a gehende erste Hauptlinie u dreht sich in einer zu Π_1 parallelen Ebene um A, u' dreht sich um A', u'' bleibt unverändert. Die erste Spurlinie e_1 dreht sich stets $\| u$ mit, bleibt aber erste Spur und behält denselben senkrechten Abstand Ea' von a'. Daher erhält man e_1^0, indem man

$$\sphericalangle Ea'E^0 = \alpha\,, \quad a'E^0 = a'E$$

macht und durch E^0 die Senkrechte zu $a'E^0$ zieht. Den zweiten Spurpunkt U_2^0 der gedrehten Hauptlinie u^0 verbindet man mit E_x^0, um e_2^0 zu erhalten. — In der Figur 74 sind noch die Spuren e_1^Δ, e_2^Δ der zu Π_2 senkrecht gedrehten Ebene angegeben.

Dreht man die Gebilde nacheinander um verschiedene zu den Tafeln senkrechte Achsen, so kann man sie in jede beliebige räumliche Lage überführen und daher dieses Verfahren benutzen, um ein Gebilde in eine günstige Lage zu den Tafeln oder umgekehrt aus einer besonderen Lage in eine beliebige allgemeine Lage überzuführen (vgl. § 102).

Einführung neuer Projektionsebenen.

83. Die neue Projektionsebene Π_3 ist einer der alten Projektionsebenen, z. B. Π_1 parallel.

Die neue Projektionsachse $x_2 = \Pi_2 \times \Pi_3$ ist dann der alten Achse $x_1 = \Pi_1 \times \Pi_2$ parallel und die zweite Projektion eines Punktes bleibt unverändert, während der erste Tafelabstand sich ändert; derselbe verkürzt oder verlängert sich, je nachdem Π_3 und x_2 über oder unter Π_1 und x_1 liegen. Die neue Projektion (auf Π_3) eines Punktes hat von x_2 denselben Abstand wie seine erste Projektion von Π_1. Die ganze erste Projektion eines Gebildes erfährt daher in der Zeichen-

ebene eine Parallelverschiebung, bei welcher sich jeder Punkt in einer Senkrechten zu x_1 bewegt.

Um diese unbequeme Verschiebung nicht ausführen zu müssen, behält man für die neue Projektion die alte Achse x_1 bei und ordnet jedem ihrer Punkte den senkrecht über (oder unter) ihm liegenden Punkt der neuen Achse x_2 und umgekehrt zu, wie dies das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. Der Schnittpunkt der ersten Spuren der Ebenen $\mathsf{A}(a_1, a_2)$ und $\mathsf{B}(b_1, b_2)$ ist

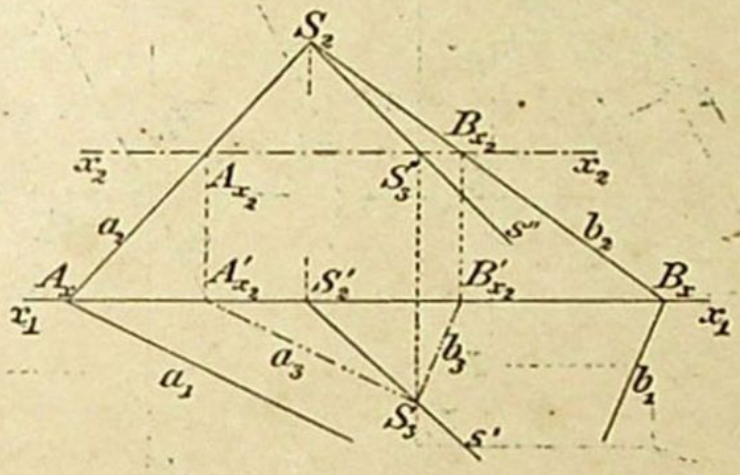

Fig. 75.

unzugänglich; man soll ihre Schnittlinie s bestimmen (vgl. § 68, (3)). Die Ebenen A und B (Fig. 75) schneiden die neue Achse x_2 in den Punkten $A_{x_2} = a_2 \times x_2$, $B_{x_2} = b_2 \times x_2$; durch die senkrecht unter ihnen liegenden Punkte der alten Achse zieht man $a_3 \parallel a_1$ und $b_3 \parallel b_1$ als neue erste Spuren.

$S_3 = a_3 \times b_3$ ist dann der Spurpunkt der Schnittgeraden s in Π_3; seine senkrechte Projektion auf Π_1 fällt in der Zeichnung mit S_3 zusammen; seine zweite Projektion S_3'' liegt auf x_2. Folglich sind $S_2' S_3$ und $S_2 S_3''$ die beiden Projektionen s', s'' von s.

84. Die neue Projektionsebene Π_3 steht auf einer der alten Projektionsebenen, z. B. auf Π_2 senkrecht, während sie gegen die andere, Π_1 beliebig geneigt ist.

Als spezieller Fall hiervon kann die Einführung einer Seitenrißebene $\perp \Pi_1$ und Π_2 in §§ 45—47 angesehen werden.

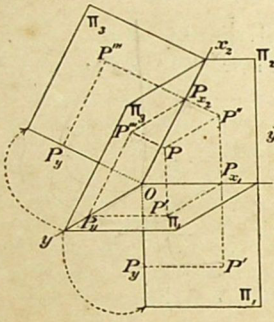

Fig. 76.

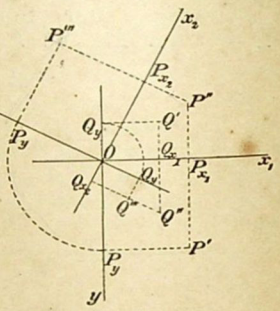

Fig. 77.

Von den Schnittgeraden der drei Ebenen

$$x_1 = \Pi_1 \times \Pi_2, \quad x_2 = \Pi_2 \times \Pi_3, \quad y = \Pi_1 \times \Pi_3,$$

steht die letztere auf den beiden ersteren senkrecht, während $\sphericalangle(x_1, x_2)$ gleich dem Neigungswinkel von Π_3 gegen Π_1 ist. Projiziert man (Fig. 76) einen Punkt P senkrecht auf die drei Tafeln und seine Projektionen auf die drei Achsen, so ist

$$P''P = P_{x_1}P' = P_{x_2}P''' = OP_y.$$

Legt man wieder die Tafel Π_1 um die Achse x_1, wie in § 44, und die Tafel Π_3 um die Achse x_2 in

die mit der Zeichenebene zusammenfallende Tafel Π_2 um, wie die Pfeile in Figur 76 andeuten, so kommt die y-Achse wieder doppelt vor und die Punkte P', P''' liegen nach erfolgter Umlegung mit P'' in den zu den Achsen x_1, x_2 Senkrechten $P''P_{x_1}$ und $P''P_{x_2}$ (Fig. 77)*). Man findet mithin P''' aus P', P'' in ganz gleicher Weise wie in § 47. Figur 77 läßt die Konstruktion klar erkennen. P ist ein Punkt mit positivem, Q ein solcher mit negativem zweiten Tafelabstande; infolge dessen liegen P'', P''' auf verschiedenen Seiten von x_2, aber Q', Q''' auf derselben Seite von x_2. Bezeichnet man Π_1 als die wegfallende Ebene, so kann man sagen: Der Abstand der neuen Projektion eines Punktes von der neuen Achse ist gleich dem Abstande seiner wegfallenden Projektion von der alten Achse:

$$P'''P_{x_2} = P'P_{x_1}\,; \quad Q'''Q_{x_2} = Q'Q_{x_1}\,.$$

Bei Benutzung dieser Regel ist das Zeichnen der y-Achse meistens unnötig und deshalb bei dem folgenden Beispiele unterlassen.

Soll die neue Projektion einer Geraden gefunden werden, so bestimmt man die dritten Projektionen zweier Punkte der Geraden; die dritte Spur einer Ebene ist die Verbindung der Schnittpunkte von e_1 mit y und e_2 mit x_2 (§ 57).

---

*) In den Figuren 76 und 77 sind im Interesse der Deutlichkeit nur die positiven (im Sinne des § 47) Teile der drei Achsen und die von ihnen begrenzten Felder der Projektionsebenen gezeichnet. — Die früher mit x, z bezeichneten Achsen sind hier mit x_1, x_2 bezeichnet, um besonders bei Einführung weiterer Projektionsebenen leicht erkennen zu lassen, zu welchen beiden Ebenen jede Achse gehört: $x_1 = \Pi_1 \times \Pi_2$, $x_2 = \Pi_2 \times \Pi_3$, $x_3 = \Pi_3 \times \Pi_4$.

Oft ist die Einführung einer vierten Projektionsebene, welche auf Π_3 senkrecht steht und gegen Π_2 beliebig geneigt ist, vorteilhaft. Dann hat man nur für Π_2, Π_3, Π_4 und x_2, $x_3 = \Pi_3 \times \Pi_4$ dieselben Betrachtungen wie oben für Π_1, Π_2, Π_3 und x_1, x_2 durchzuführen. Man erhält P^{IV}, indem man von P''' ein Lot $(P''' P_{x_3})$ auf x_3 fällt und auf demselben von P_{x_3} in richtigem Sinne $P'' P_{x_2}$ $(= P^{IV} P_{x_3})$ abträgt.

Der gleiche Erfolg wie durch die aufeinander folgende Einführung zweier neuer Projektionsebenen hätte auch durch eine Einführung einer einzigen, aber beliebig gegen Π_1 und Π_2 gelegenen Projektionsebene erzielt werden können, doch würden die Konstruktionen sich weit mühsamer gestalten. Der obige Weg gestattet, in bequemer Weise zu beliebigen neuen Tafeln überzugehen.

85. Zweite Bestimmung des kürzesten Abstandes MN der windschiefen Geraden $g(g', g'')$ und $h(h', h'')$. (Erste Konstruktion in § 74.)

Man führt zunächst eine dritte Projektionsebene $\Pi_3 \perp \Pi_2$ und $\| g$ ein; man wählt also (Fig. 78) eine beliebige Parallele zu g'' als Achse $x_2 = \Pi_2 \times \Pi_3$ und bestimmt g''', h''', indem man die dritten Projektionen je zweier Punkte der beiden Geraden (nach § 84) bestimmt. Da $g \| \Pi_3$ und der kürzeste Abstand $MN \perp g$ ist, so muß $M''' N''' \perp g'''$ sein (§ 64). Hierauf führt man noch eine vierte Projektionsebene $\Pi_4 \perp \Pi_3$ und $\perp g$ ein, d. h. man wählt eine beliebige Senkrechte zu g''' als Achse $x_3 = \Pi_3 \times \Pi_4$ und bestimmt g^{IV}, h^{IV}. Die vierten Projektionen aller Punkte von g fallen in den Punkt A^{IV} zusammen, in welchem daher auch M^{IV} liegt. Da $\Pi_4 \perp g$, also parallel dem kürzesten Abstande MN, und MN auch $\perp h$ ist, so muß $M^{IV} N^{IV} \perp h^{IV}$ sein

(§ 64). Es ist daher $M^{IV}N^{IV}$ das von $A^{IV} = M^{IV}$ auf h^{IV} gefällte Lot, welches zugleich die wahre Länge des gesuchten kürzesten Abstandes angibt. Hierauf projiziert man den Punkt N^{IV} rückwärts nach N'''

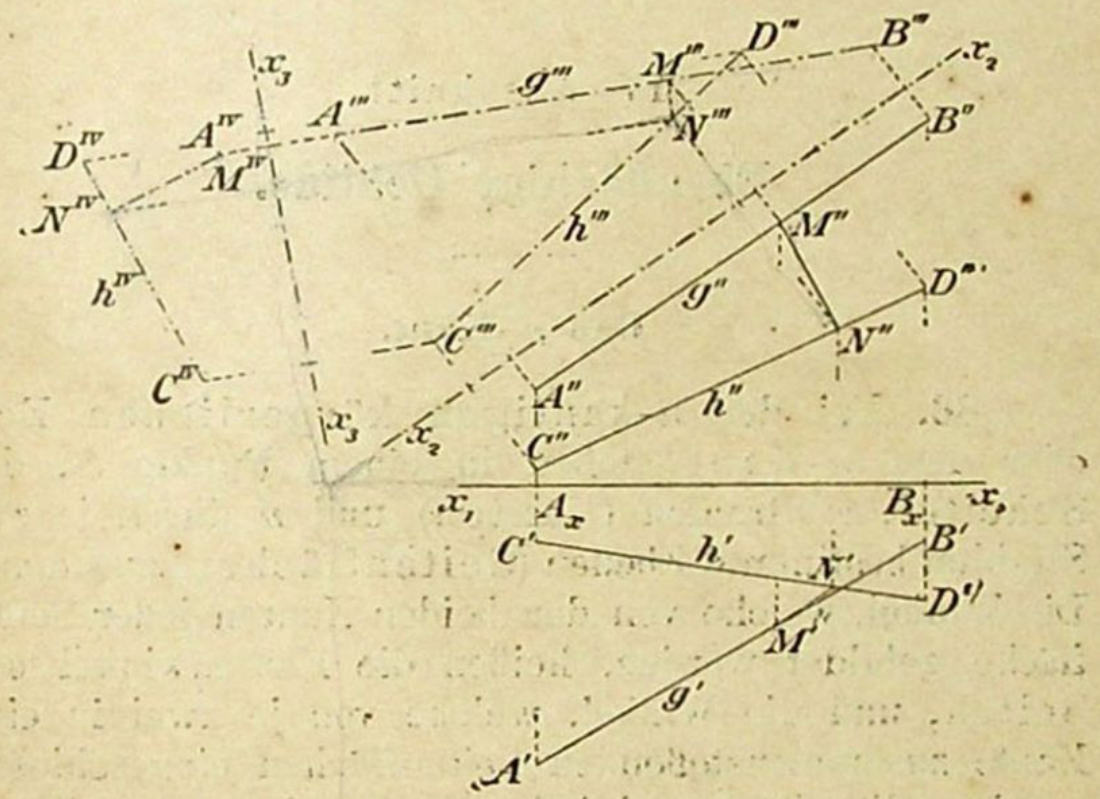

Fig. 78.

auf h''' und erhält in dem von N''' auf g''' gefällten Lote die dritte Projektion von MN. Durch weiteres Rückwärtsprojizieren von $M'''N'''$ findet man schließlich $M''N''$ und $M'N'$.

In ganz gleicher Weise kann man die Aufgabe lösen, von einem Punkte ein Lot auf eine Gerade zu fällen (Erste Lösung der Aufgabe in § 73, III).

Ein weiteres Beispiel für die Einführung neuer Projektionsebenen bietet § 103.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

IV. Abschnitt.

Ebenflächige Gebilde.

Das n-Kant.

86. Bei der n-kantigen körperlichen Ecke oder dem n-Kant stoßen in einem Punkte S, dem Scheitel, n Strahlen (Kanten) und n durch je zwei Strahlen bestimmte Ebenen (Seitenflächen) zusammen. Die Winkel, welche von den beiden Kanten jeder Seitenfläche gebildet werden, heißen die Kantenwinkel oder Seiten, und die Winkel, welche von je zwei in einer Kante zusammenstoßenden Seitenflächen eingeschlossen werden, die Flächenwinkel oder Winkel des n-Kants.

Die Flächenwinkel müssen so gemessen werden, daß je zwei benachbarte auf derselben Seite der gemeinsamen Seitenfläche liegen. Hat man also einen Flächenwinkel willkürlich unter den beiden Winkeln, welche die zugehörigen Seitenflächen bilden und welche sich zu 360^0 ergänzen, ausgewählt, so sind die übrigen eindeutig bestimmt. Sind alle Flächenwinkel eines n-Kants kleiner als 180^0, so heißt dasselbe ein konkaves n-Kant. Wenn sich die Seitenflächen eines solchen nicht durchkreuzen, so ist die Summe seiner Seiten stets kleiner als 360^0; denn denkt man sich alle Seitenflächen des konkaven n-Kants in eine Ebene

ausgebreitet, so muß der an dem Scheitel S entstehende Winkel kleiner als 360^0 sein.

87. Errichtet man im Scheitel S des n-Kants Lote auf seinen Seitenflächen und legt durch sie Ebenen hindurch, so erhält man ein neues konkaves n-Kant, welches als das Polar-n-Kant des ursprünglichen bezeichnet wird. Da aber auch die Kanten des ursprünglichen n-Kants auf den Seitenflächen des Polar-n-Kants senkrecht stehen, so kann auch das erstere n-Kant als Polar-n-Kant des letzteren angesehen werden. Die Beziehungen zwischen den beiden n-Kanten sind also völlig gegenseitige. Ordnet man jeder Kante des einen n-Kants die auf ihr senkrechte Seitenfläche des anderen zu, so sind dadurch auch die Kanten- und Flächenwinkel der beiden n-Kante einander eindeutig zugeordnet. Aus dem Obigen erkennt man aber sofort, daß jede Seite eines der beiden n-Kante den entsprechenden Winkel des anderen zu 180^0 ergänzt.

Hieraus folgt in Verbindung mit dem obigen Satze über die Summe der Seiten eines n-Kants, daß die Summe seiner Flächenwinkel größer als $(n-2) \cdot 180^0$ ist.

Das Dreikant.

88. Die einfachste körperliche Ecke, welche überhaupt möglich ist, erhält man für $n = 3$ in dem Dreikante. Es hat für die Konstruktion der körperlichen Ecken von höherer Kantenzahl die gleiche fundamentale Bedeutung wie das Dreieck für die Konstruktion der Vielecke. Die sämtlichen Seiten und Winkel eines Dreikants setzt man stets kleiner als 180^0 voraus, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, da man

Dreikante, für welche diese Voraussetzung nicht zutrifft, in einfacher Weise leicht in mehrere der vorgedachten Art zerlegen kann.

Der Scheitel des Dreikants werde wieder mit S bezeichnet, die Kanten mit a, b, c, die ihnen anliegenden Winkel (Flächenwinkel) bzw. mit α, β, γ und die ihnen gegenüber liegenden Seiten (Kantenwinkel) mit A, B, Γ (also $\mathsf{A} = \sphericalangle(b, c)$ usw.). Nach den obigen Sätzen über die Summe der Seiten und Winkel eines n-Kants gelten für das Dreikant die Ungleichungen

(1) $$0 < \mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma < 360^0$$

(2) $$180^0 < \alpha + \beta + \gamma < 540^0 (= 3 \cdot 180^0).$$

Nimmt man noch ein sogenanntes Nebendreikant zu Hilfe, z. B. dasjenige, welches die Verlängerung der Kante a über S hinaus mit den Kanten b und c bildet und welches also die Seiten A, $180^0 - \mathsf{B}$, $180^0 - \Gamma$ (und die Winkel α, $180^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$) besitzt, so ist nach der Ungleichung (1) auch

$$\mathsf{A} + 180^0 - \mathsf{B} + 180^0 - \Gamma < 360^0.$$

d. h.

(3) $$\mathsf{B} + \Gamma > \mathsf{A},$$

und analog findet man

(3) $$\Gamma + \mathsf{A} > \mathsf{B}, \quad \mathsf{A} + \mathsf{B} > \Gamma.$$

Stellt man diese Ungleichungen auch für das Polardreikant ($\hat{\mathsf{A}}$, $\hat{\mathsf{B}}$, $\hat{\Gamma}$; $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$) auf, so folgt aus $\hat{\mathsf{B}} + \hat{\Gamma} > \hat{\mathsf{A}}$ sofort

$$180^0 - \beta + 180^0 - \gamma > 180^0 - \alpha$$

oder

(4) $$\beta + \gamma < 180^0 + \alpha$$

und analog

(4) $$\gamma + \alpha < 180^0 + \beta, \quad \alpha + \beta < 180^0 + \gamma.$$

Aus drei gegebenen der sechs Bestimmungsstücke (A, B, Γ; α, β, γ) eines Dreikants können die übrigen drei bestimmt werden. Es ergeben sich also sechs fundamentale Aufgaben, je nachdem folgende Stücke gegeben sind:

(I) A, B, Γ; (II) A, B, γ; (III) A, B, β;
(IV) A, β, γ; (V) α, β, A; (VI) α, β, γ.

Hierbei müssen die gegebenen Stücke den Ungleichungen (1) bis (4) entsprechend gewählt sein, damit die Aufgaben lösbar sind.

Die drei letzten Aufgaben können unter Benutzung des Polardreikants auf die ersten drei zurückgeführt werden. Im folgenden sind aber alle sechs Aufgaben direkt gelöst.

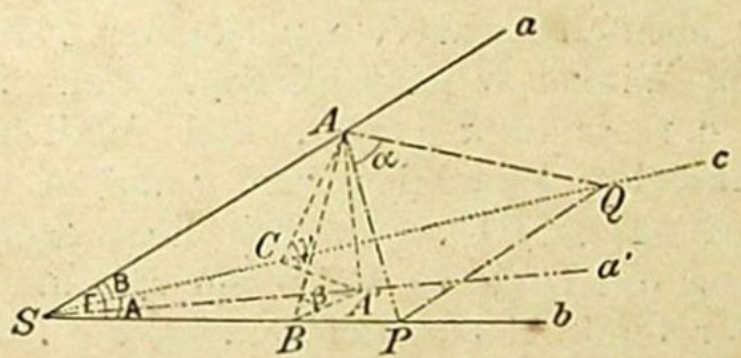

Fig. 79.

89. Zur Lösung der beiden ersten Aufgaben beachte man folgendes. Fällt man (Fig. 79) von einem beliebigen Punkte A der Kante a die Lote AB, AC, AA' auf die beiden anderen Kanten und auf die gegenüber liegende Seite A und verbindet die Punkte B und C mit A', so ist auch $A'B \perp b$, $A'C \perp c$, da b und c bzw. senkrecht auf den Ebenen ABA' und ACA' stehen. Dann ist $\sphericalangle ABA' = \beta$, $\sphericalangle ACA' = \gamma$ und

SA' die senkrechte Projektion a' von a auf die Ebene der Seite A. Wenn man nun die Seite Γ um die Kante b in die Ebene der Seite A umlegt, so beschreibt der Punkt A bei dieser Umlegung einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf b steht und dessen Radius BA ist, und kommt also schließlich in die Verlängerung von $A'B$ zu liegen. Legt man darauf noch die Ebene des rechtwinkligen Dreiecks $AA'B$ um $A'B$ in die Seite A um, so erscheint der Kreisbogen, welchen der Punkt A bei der früheren Umlegung um b beschrieb, in seiner wahren Gestalt als Kreis mit dem Mittelpunkte B und dem Radius BA. Das Analoge gilt für die Umlegung der Seite B um c und der Ebene des Dreiecks $AA'C$ um $A'C$ in die Seite A.

Legt man durch den Punkt A noch eine Ebene $\perp a$, so schneidet sie die anliegenden Seiten B und Γ in den auf a ebenfalls senkrechten Geraden AP und AQ, welche den Winkel α einschließen. Nun ist augenscheinlich die Kante $a \perp PQ$, und folglich ist auch a' als senkrechte Projektion von a auf A (nach dem Satze des § 64) $\perp PQ$. Folglich liegt nach erfolgter Niederlegung des Dreiecks PAQ um PQ in die Seitenfläche A der Punkt A auf der Geraden SA'. Auf Grund dieser Überlegungen sind die folgenden konstruktiven Lösungen der beiden ersten Aufgaben ohne weiteres verständlich.

90. *Aufgabe I.* Ein Dreikant aus seinen drei Seiten A, B, Γ zu konstruieren.

Das Dreikant liege hier und bei den übrigen Aufgaben mit seiner Seite A in der ersten Projektionsebene Π_1. Dann trägt man (Fig. 80) in Π_1 an b den Winkel $(b \mid a_\Delta) = \Gamma$ und an c den Winkel $(c \mid a_0) = B$ an. Auf den Kanten a_Δ, a_0 wählt man in willkür-

lichem Abstande von S die Punkte A_Δ, A_0 so, daß $SA_\Delta = SA_0$ ist, und fällt von ihnen auf die Kanten b und c die Lote $A_\Delta B$ und $A_0 C$, welche sich in dem Punkte A' schneiden. $SA' = a'$ ist dann die erste Projektion der Kante a. Hierauf errichtet man in A' ein Lot auf $A_\Delta A'$ und beschreibt um B mit dem Radius BA_Δ einen Kreisbogen, dessen Schnittpunkt A^Δ

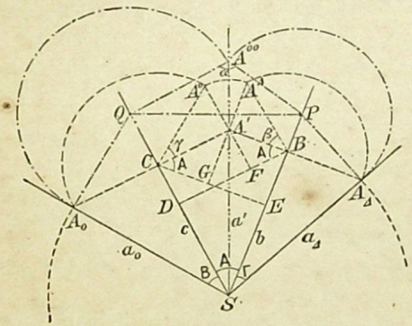

Fig. 80.

mit dem in A' errichteten Lote man mit B verbindet; dann ist $\sphericalangle A'BA^\Delta$ der gesuchte Winkel β. In gleicher Weise findet man den Winkel $\gamma = \sphericalangle A'CA^0$, indem man um C mit CA_0 einen Kreis konstruiert und seinen Schnittpunkt A^0 mit dem Lote, welches in A' auf A_0A' errichtet ist, mit C verbindet. Kontrolle: $A'A^\Delta = A'A^0$; diese Länge gibt den Abstand des Punktes A von Π_1.

Um noch α zu erhalten, errichtet man in A_Δ ein Lot auf a_Δ, welches die Kante b in P schneidet, und in A_0 ein Lot auf a_0, welches c in Q schneidet. Die

um P mit PA_Δ und um Q mit QA_0 beschriebenen Kreise schneiden sich in A^{00}, und es ist $\sphericalangle PA^{00}Q = \alpha$. Kontrolle: $PQ \perp a'$, A^{00} muß auf a' liegen.

Das Dreikant selbst erhält man, wenn man die Seiten B und Γ um c und b zurückdreht, bis die Kanten a_0 und a_Δ zusammenfallend die Kante a bilden. Da dieses Zurückdrehen in zweifacher Weise geschehen kann, wodurch die Kante a entweder oberhalb oder unterhalb Π_1 zu liegen kommt, so erhält man zwei symmetrische Dreikante, welche dieselben Seiten und Winkel besitzen. Da die beiden Dreikante aber nicht wesentlich voneinander verschieden sind, so faßt man sie nur als eine Lösung der Aufgabe auf.

Auch aus der vorstehenden Konstruktion erkennt man, daß dieselbe nur möglich ist, wenn $\mathsf{B} + \Gamma > \mathsf{A}, \ldots$ ist (§ 88, (3)). Sind diese Ungleichungen erfüllt, so gibt es stets eine Lösung. — Ferner folgt aus der obigen Konstruktion leicht der Satz, daß in einem Dreikante der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt und umgekehrt.

91. *Aufgabe II.* Ein Dreikant aus zwei Seiten A, B und dem eingeschlossenen Winkel γ zu konstruieren.

Man legt (Fig. 81) A und B nebeneinander in Π_1, fällt von dem willkürlich auf a_0 gewählten Punkte A_0 das Lot A_0C auf die Kante c und trägt an seine Verlängerung in C den Winkel γ an, dessen anderem Schenkel man die Länge $CA^0 = CA_0$ zuerteilt. Der Fußpunkt A' des von A^0 auf A_0C gefällten Lotes bestimmt wieder a'. Von A' zieht man hierauf die Gerade $A'B$ senkrecht zu b, errichtet auf letzterer in A' das Lot $A'A^\Delta = A'A^0$ und beschreibt mit BA^Δ um B einen Kreis, welcher die Gerade $A'B$ in A_Δ schneidet. Dann

ist $A'BA^{\Delta}$ der gesuchte Winkel β und $\sphericalangle BSA_{\Delta}$ die gesuchte Seite Γ. Kontrolle: $SA_{\Delta} = SA_0$.

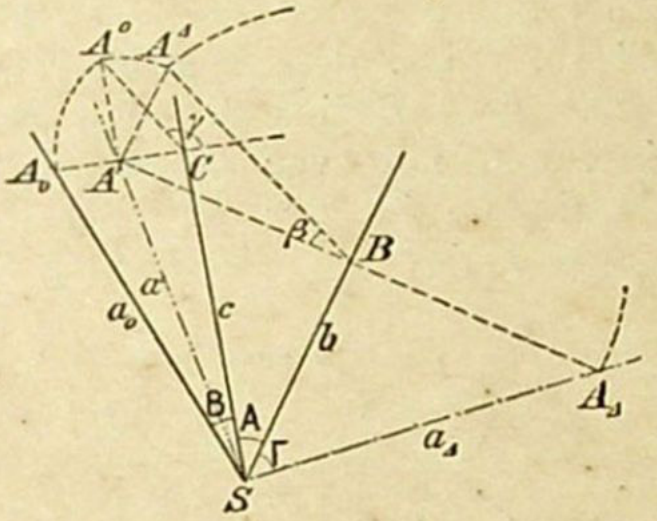

Fig. 81.

Den Winkel α erhält man jetzt in genau derselben Weise wie bei der Aufgabe *I*.

Die Aufgabe besitzt stets eine Lösung.

92. *Aufgabe III.* Ein Dreikant aus zwei Seiten A, B und dem der letzteren gegenüber liegenden Winkel β zu konstruieren.

Man läßt bei dieser Aufgabe stets diejenige Seite, welcher der gegebene Winkel anliegt, also hier wieder A, mit Π_1 zusammenfallen. Denkt man sich jetzt von einem beliebigen Punkte C der Kante c die Lote CA, CB, CF auf die Kanten a, b und die Seite Γ gefällt (vgl. Fig. 84 auf Seite 151), so ist $\sphericalangle CAF = \alpha$ und $\sphericalangle CBF = \beta$. Ein in der Ebene der Seite Γ um F mit dem Radius FA beschriebener Kreis berührt die Kante a in dem Punkte A. Hieraus resultiert die folgende Konstruktion.

die erste Projektion der Kante a. Den Winkel γ schließlich findet man wie in § 90.

Da in dem in Figur 82 dargestellten Falle der Kreis um F_Δ die Kante b nicht schneidet, so liefert die zweite von S aus an ihn gezogene Tangente a'_Δ eine weitere Lösung; die gesuchte dritte Seite ist dann $\Gamma' = \sphericalangle(a'_\Delta \,|\, b)$ und der an der Kante a liegende Winkel gleich dem Supplement des zur ersten Lösung gehörigen α. Der Kreis schneidet hier b nicht, weil $\mathsf{A} > \mathsf{B}$ angenommen, infolgedessen $A^\Delta F_\Delta < BF_\Delta$, und $\beta < 90^0$ ist.

Untersucht man die verschiedenen möglichen Fälle*), so findet man: Die vorliegende Aufgabe besitzt

zwei Lösungen, wenn $C_\Delta F^\Delta < CA_0 < CB$ und gleichzeitig

entweder B und $\beta < 90^0$

oder B und $\beta > 90^0$ sind;

eine Lösung, wenn entweder $C_\Delta F^\Delta < CA_0$ und $CA_0 > CB$

oder $C_\Delta F^\Delta = CA_0$ ist**).

In allen anderen Fällen läßt sich kein Dreikant, welches die gegebenen Bestimmungsstücke enthält, konstruieren.

93. *Aufgabe IV.* Ein Dreikant aus einer Seite A und den beiden anliegenden Winkeln β, γ zu konstruieren.

(Fig. 83.) Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt A der Kante a eine Ebene $\| \mathsf{A}$ gelegt, so schneidet sie die Seite Γ in der durch A gehenden

*) Hierbei sind die durch die Ungleichungen (1) bis (4) in § 88 ausgesprochenen Sätze, sowie der Satz am Ende von § 90 zu Hilfe zu nehmen.

**) In diesem letzten Falle ergibt sich $\alpha = 90^0$; das Dreikant ist also ein rechtwinkliges.

(Fig. 82.) Man legt B um c in Π_1 um $(\sphericalangle(a_0 \mid c) = B)$ und fällt von dem willkürlich auf c gewählten Punkte C die Lote CA_0, CB auf die Kanten a_0, b. An die Verlängerung des letzteren Lotes trägt man den gegebenen Winkel β an, dessen anderer Schenkel von dem Kreise mit dem Radius BC um B in C^Δ geschnitten wird, und fällt von C^Δ das Lot $C^\Delta F_\Delta$ auf CB. Der Punkt F_Δ ist der mit der Seite Γ umgelegte Fußpunkt F des von C auf sie gefällten Lotes.

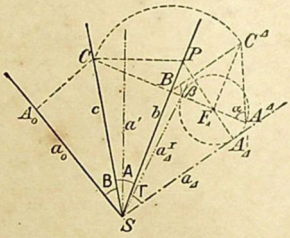

Fig. 82.

Konstruiert man nun das rechtwinklige Dreieck $C^\Delta F_\Delta A^\Delta$, dessen Hypotenuse $= CA_0$ ist, so ist dasselbe dem Dreieck CFA kongruent, und seine Kathete $F_\Delta A^\Delta$ bestimmt den senkrechten Abstand FA des Punktes F von der Kante a. Man beschreibt also um F_Δ mit $F_\Delta A^\Delta$ einen Kreis; dann muß a_Δ, d. i. die mit Γ umgelegte Kante a, diesen Kreis berühren. Folglich ist $\sphericalangle(a_\Delta \mid b) = \Gamma$ und $\sphericalangle C^\Delta A^\Delta F_\Delta = \alpha$. Kontrolle: $SA_\Delta = SA_0$.

Verlängert man $A_\Delta F_\Delta$ bis zum Schnitt P mit b, so erhält man in der zu CP senkrechten Geraden a'

Hauptlinie $u \parallel b$ und die Seite B in der Hauptlinie $v \parallel c$. Fällt man von den beliebigen Punkten H und K dieser Hauptlinien Lote auf A, welche diese Seite in den Punkten H' und K' treffen, so ist $HH' = KK'$. Legt man ferner noch durch HH' und KK' Ebenen, welche bzw. $\perp b$, c sind und diese Kanten in den Punkten G, J schneiden, so ist $\sphericalangle HGH' = \beta$ und $\sphericalangle KJK' = \gamma$, wenn β und $\gamma < 90^0$ gegeben sind; anderenfalls ist $\sphericalangle HGH' = 180^0 - \beta$, bzw. $\sphericalangle KJK' = 180^0 - \gamma$. Mithin gestaltet sich die Konstruktion folgendermaßen.

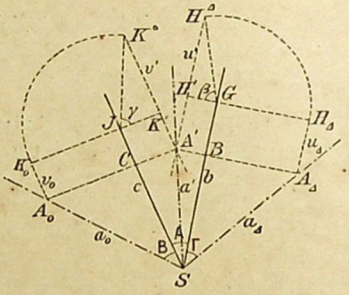

Fig. 83.

Durch den beliebigen Punkt G von b zieht man eine Senkrechte zu b, trägt in G den Winkel β (bzw. $180^0 - \beta$) an den in das Innere von A gehenden Teil dieser Senkrechten an und zieht durch den auf seinen anderen Schenkel willkürlich angenommenen Punkt H^Δ eine Parallele zu b. $H^\Delta H'G$ ist das Dreieck $HH'G$ nach erfolgter Niederlegung in Π_1. Die Gerade $H^\Delta H'$ ist die erste Projektion u' der in Γ gelegenen Haupt-

linie u. In gleicher Weise erhält man die erste Projektion v' der Hauptlinie v von B, wobei nur zu beachten ist, daß $K^{\Delta} K' = H^{\Delta} H'$ sein muß. $A' = u' \times v'$ ist dann die erste Projektion des auf a liegenden Punktes A. Die durch H_{Δ} ($GH_{\Delta} \perp b$ und $= GH^{\Delta}$) gezogene Parallele u^{Δ} zu b stellt die mit Γ niedergelegte Hauptlinie u dar; ihr Schnittpunkt A_{Δ} mit dem von A' auf die Kante b gefällten Lote bestimmt a_{Δ} und damit $\Gamma = \sphericalangle (a_{\Delta} | b)$. In gleicher Weise erhält man B.

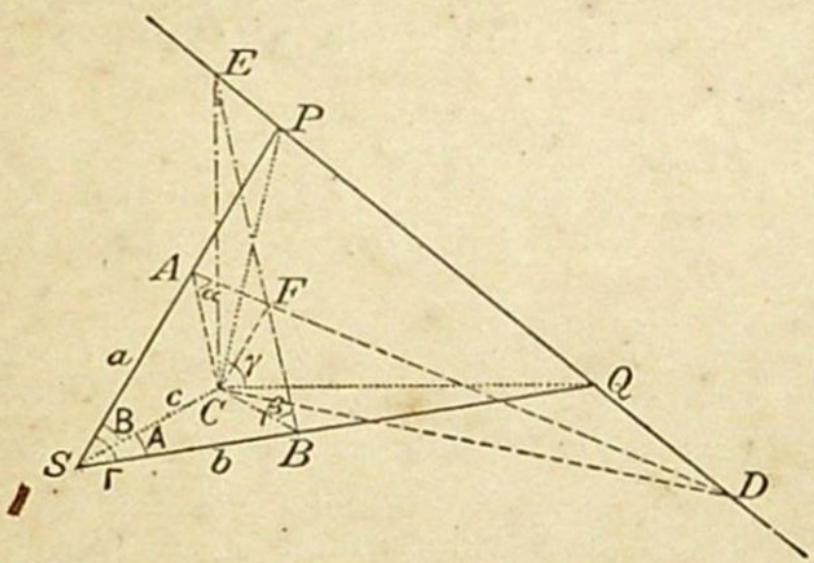

Fig. 84.

Kontrolle: $SA_0 = SA_{\Delta}$. Die Aufgabe hat stets eine Lösung.

94. Zur Lösung der beiden letzten Aufgaben fälle man (Fig. 84) von einem beliebigen Punkte C der Kante c die Lote CA, CB, CF auf a, b, Γ und lege durch C die zu c senkrechte Ebene, welche von a und b in den Punkten P und Q geschnitten wird. Verbindet man noch die Schnittpunkte $D = PQ \times AF$ und $E = PQ \times BF$ mit C, so haben die beiden Dreiecke ACD und BCE die Höhe CF gemeinsam und besitzen bei C

rechte Winkel; denn die Ebene SCP steht senkrecht sowohl auf der Ebene ACD als auch auf der Ebene PCD, folglich ist die Schnittgerade CD beider Ebenen $\perp SCP$ und also $CD \perp$ auf CA, CP, CS. In gleicher Weise findet man, daß $CE \perp$ auf CB, CQ, CS ist. Legt man also $\triangle ACD$ um CD in die Ebene PCQ um, so fällt AC in die Gerade PC, und legt man $\triangle SCP$ um CP in dieselbe Ebene um, so fällt SC in die Gerade CD. Bei dem Umlegen von $\triangle BCE$ um CE und $\triangle SCQ$ um CQ in die Ebene PCQ fällt BC in die Gerade CQ und SC in die Gerade CE.

95. *Aufgabe V.* Ein Dreikant aus einer Seite A, dem ihr gegenüber liegenden Winkel α und dem ihr anliegenden Winkel β zu konstruieren.

Man läßt Π_1 mit der Seite A und Π_2, welche bei den beiden letzten Aufgaben mitbenutzt werden soll, mit der Ebene PCQ zusammenfallen; man sieht also eine beliebige Senkrechte CQ zu c als die Achse x an (Fig. 85). Dann konstruiert man $\triangle CBE^0 (CB \perp b,$ $CE^0 \parallel b, \sphericalangle CBE^0 = \beta)$, trägt auf der zu x senkrechten Geraden die Strecke CE^0 von C bis E nach oben ab und zieht EQ, welche Gerade die zweite Spur der Seite Γ darstellt. Über der Höhe CF^0 des Dreiecks BCE^0 (welche gleich dem senkrechten Abstande der Seite Γ von C ist) als Kathete konstruiert man das rechtwinklige Dreieck CF^0A^0 mit dem Winkel $CA^0F^0 = \alpha$ und zieht von S aus an den um C mit dem Radius CA^0 beschriebenen Kreis die Tangente $a_0 (CA_0 \perp a_0)$; dann ist $\sphericalangle (a_0 | c) =$ B. Dreht man nun die Seite B zurück, so beschreibt der Punkt $P_0 = a_0 \times x$ einen Kreis um C, dessen Schnittpunkt

mit EQ den zweiten Spurpunkt P der Kante a liefert. Die Verbindungslinie von P mit C ist die zweite Projektion a'' dieser Kante und $SP'(PP' \perp x)$ ihre erste Projektion a'; ferner ist $\sphericalangle PCQ = \gamma$. — Um schließlich noch die Seite Γ zu erhalten, legt man die Kante a um b in Π_2 um, indem man den Punkt P umlegt

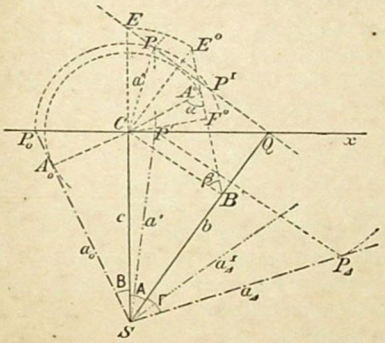

Fig. 85.

($P'P_1 \perp b$, $QP_1 = QP$); dann ist $\sphericalangle(a_1 \mid b) = \Gamma$. Kontrolle: $SP_1 = SP_0$.

In dem in der Figur 85 dargestellten Falle schneidet der mit dem Radius CP_0 um C beschriebene Kreis die Gerade EQ noch in einem zweiten Punkte P^I; verfährt man für diesen Punkt in gleicher Weise wie oben für P, so erhält man als zugehörige dritte Seite $\sphericalangle(a_1^I \mid b) = \Gamma^I$. Liegt P^I über der x-Achse, so ergeben aber die drei Seiten A, B, Γ^I, wie man leicht erkennt,

ein Dreikant mit den Winkeln $180^0 - \alpha$, β; dasselbe ist daher keine Lösung der vorliegenden Aufgabe.

Liegt der Punkt P^I unter der x-Achse, so bestimmen die drei zugehörigen Seiten A, B, Γ^I ein Dreikant mit den Winkeln α, $180^0 - \beta$; verlängert man hier jedoch die A gegenüber liegende Kante a^I über den Scheitel hinaus, so bestimmt diese mit b und c ein Dreikant mit den gegebenen Stücken A, α, β.

Schneidet der um C mit CP_0 beschriebene Kreis die Gerade EQ nicht, so besitzt die Aufgabe keine Lösung. Der Grenzfall, daß der Kreis die Gerade EQ nur berührt, tritt für $\alpha = 90^0$ ein und liefert nur eine Lösung.

Die vorstehende Konstruktion ist brauchbar, gleichgültig ob $A >$ oder $< 90^0$ ist; sie versagt aber, wenn α oder $\beta > 90^0$ sind. Dann führt man die Konstruktion für die Winkel $180^0 - \alpha$, bzw. $180^0 - \beta$ durch und hat nur die eben gemachten Bemerkungen über die Natur der zweiten Lösungen zu beachten, um das gesuchte Dreikant zu erhalten.

Die Aufgabe hat

zwei Lösungen, wenn $CS > CA^0 > CB$ und gleichzeitig
entweder α und $A < 90^0$
oder α und $A > 90^0$ sind;

eine Lösung, wenn entweder $CS > CA^0$ und $CA^0 < CB$
oder $CS = CA^0$ ist*).

In allen anderen Fällen kann kein Dreikant konstruiert werden, welches die gegebenen Bestimmungsstücke enthält.

---

*) In diesem letzten Falle ergibt sich $B = 90^0$; das Dreikant ist also ein rechtseitiges.

96. *Aufgabe VI.* Ein Dreikant aus seinen drei Winkeln α, β, γ zu konstruieren.

Denkt man sich das Dreikant wieder in derselben Lage zu den beiden Projektionsebenen wie bei der vorigen Aufgabe, so gestaltet sich die Konstruktion folgendermaßen. In einem beliebigen Punkte C der Achse x trägt man den Winkel γ ($= \sphericalangle PCQ$) an und

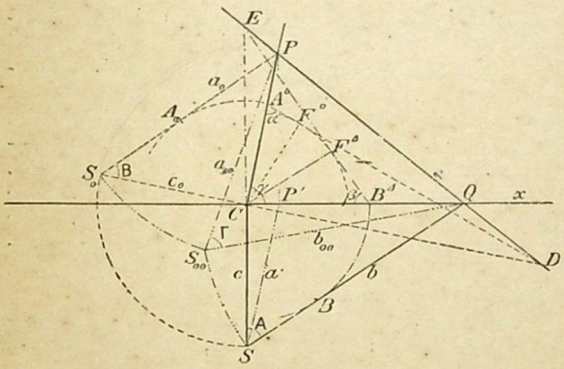

Fig. 86.

zieht durch C eine Senkrechte zu x, welche die Kante c vorstellt und auf welcher der Scheitel S liegen muß. Statt aber (Fig. 86) einen beliebigen Punkt auf c als Scheitel S zu wählen, nimmt man einfacher auf der Verlängerung von c über C hinaus den Punkt E willkürlich an, woraus sich dann die zugehörige Lage von S ergibt. Über CE konstruiert man das rechtwinklige Dreieck ECB^4 ($\sphericalangle EB^4C = \beta$), welches dann das

um CE in Π_2 umgelegte Dreieck ECB ist. Die Höhe CF^A dieses Dreiecks gibt also den senkrechten Abstand des Punktes C von der Seite Γ und zugleich die Höhe des Dreiecks ACD. Letzteres, um CD in Π_2 umgelegt, erhält man, indem man α an CP so anträgt, daß der freie Schenkel von α den mit CF^A um C beschriebenen Kreis berührt und $CD \perp CP$ (vgl. § 94) zieht. Durch die beiden Punkte D und E ist jetzt die Gerade bestimmt, in welcher Π_2 von der Seite Γ geschnitten wird; die Punkte P, Q, in denen die Schenkel von γ diese Gerade schneiden, sind die zweiten Spurpunkte der Kanten a, b. Um nun S und A zu finden, hat man nur über CQ als Kathete das rechtwinklige Dreieck SCQ, dessen Höhe $CB = CB^A$ ist, zu konstruieren. Projiziert man noch P auf x, so ist $P'S = a'$. In gleicher Weise liefert $\triangle S_0 CP$ ($\sphericalangle C = 90^0$, Höhe $CA_0 = CA^0$) die in Π_2 umgelegte Seite B. Die Hypotenuse des letztgenannten Dreiecks bestimmt zugleich die Länge der Kante a zwischen den beiden Projektionsebenen. Kontrolle: $CS = CS_0$.

Die Seite Γ erhält man durch Umlegen des Dreiecks PSQ in Π_2: $PS_{00} = PS_0$, $QS_{00} = QS$ und folglich $\sphericalangle PS_{00}Q = \Gamma$.

Für die Konstruktion ist es gleichgültig, ob $\gamma <$ oder $> 90^0$ ist; wenn also nur einer der drei Winkel stumpf ist, so empfiehlt es sich, diesen als $\sphericalangle \gamma$ zu nehmen. Sind zwei Winkel stumpf, so ist es am einfachsten, den spitzen Winkel als $\sphericalangle \gamma$ zu nehmen und das durch Verlängerung der Kante c des gesuchten entstehende Nebendreikant mit den Winkeln γ, $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$ zu konstruieren, dessen γ gegenüber liegende Seite gleich dem gesuchten Γ, dessen andere Seiten gleich $180^0 - A$, $180^0 - B$ sind. Sind alle drei

Winkel stumpf, so kann man einen beliebigen als γ wählen und konstruiert dann ebenfalls das Nebendreikant.

Die soeben gegebene Konstruktion löst zugleich die Aufgabe: Es soll die Ebene bestimmt werden, welche mit zwei ihrer Lage nach gegebenen Ebenen A und B die Winkel α und β einschließt. Durch die Methoden der §§ 83 und 84 kann man es stets erreichen, daß eine dieser Ebenen, z. B. A, Projektionsebene wird.

97. Die in den vorstehenden Paragraphen konstruktiv gelösten Aufgaben lehrt die sphärische Trigonometrie auf dem Wege der Rechnung zu lösen.

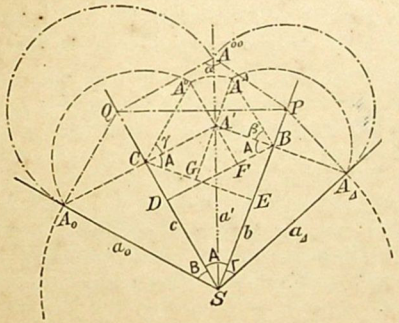

Fig. 87.

Schneidet man nämlich ein Dreikant durch eine um seinen Scheitel beschriebene Kugel, so entsteht auf ihrer Oberfläche ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten und Winkel durch diejenigen des Dreikants gemessen werden. In der Tat lassen sich aus der Figur 87 die

Grundformeln der sphärischen Trigonometrie leicht ablesen, wenn man noch in derselben die Linien $BD \perp c$, $CE \perp b$ und A^0A', A^4A' bis zu ihren Schnittpunkten F, G mit BD, CE verlängert. Dann ist $\sphericalangle A'BF = \sphericalangle A'CG = \mathsf{A}$. Die Kugel besitze den Radius $SA^0 = SA_4$, welcher der Einfachheit halber als Längeneinheit gewählt werde. Aus den Relationen $A'A^0 = A'A^4$, $SB = SE + GA'$, $BD = BF + A'C$, $CE = CG + A'B$ ergeben sich, wenn man die einzelnen Strecken durch sin und cos von A, B, Γ, β, γ ausdrückt, die Grundformeln:

(1) $\sin \mathsf{B} : \sin \Gamma = \sin \beta : \sin \gamma$,

(2) $\cos \Gamma = \cos \mathsf{A} \cos \mathsf{B} + \sin \mathsf{A} \sin \mathsf{B} \cos \gamma$,

(3) $\cos \Gamma \sin \mathsf{A} = \sin \mathsf{B} \cos \gamma + \cos \mathsf{A} \sin \Gamma \cos \beta$,

(4) $\cos \mathsf{B} \sin \mathsf{A} = \sin \Gamma \cos \beta + \cos \mathsf{A} \sin \mathsf{B} \cos \gamma$.

Diese Andeutungen mögen hier genügen, da dieser Weg noch in den meisten Lehrbüchern der sphärischen Trigonometrie eingeschlagen ist, trotzdem er nicht der beste ist. Denn da für die Konstruktionen des Dreikants alle Seiten und Winkel $< 180^0$ vorausgesetzt waren, so ergibt sich auf diesem Wege die Gültigkeit der Formeln nur für sphärische Dreiecke, deren Seiten und Winkel ebenfalls $< 180^0$ sind, während sie auch für Dreiecke, welche diese Bedingung nicht erfüllen, gültig sind.

Darstellung von Vielflachen.

98. Unter einem Vielflach oder Polyeder versteht man bekanntlich einen Körper, dessen Oberfläche von lauter ebenen Vielecken, den Seitenflächen, gebildet wird. Je zwei dieser Vielecke stoßen mit zwei Seiten in einer Kante zusammen,

von denen wieder drei oder mehr (und also ebensoviele Seitenflächen) in einer Ecke zusammenstoßen. Die Darstellung eines Vielflachs kommt also auf die Darstellung der Ecken und Seitenflächen und also in letzter Linie wieder auf die Konstruktion von Dreikanten und Dreiecken hinaus.

Projiziert man ein Vielflach auf eine Ebene, so liegen auf jedem projizierenden Strahle, welcher das Vielflach durchschneidet, ein sichtbarer und ein (oder mehrere, falls das Vielflach nicht nur konkave Ecken besitzt) unsichtbare Punkte seiner Oberfläche. Von allen diesen Punkten besitzt der sichtbare Schnittpunkt den größten Abstand von der Projektionsebene. Derjenige auf dem Vielflache gelegene Linienzug, längs dessen die projizierenden Strahlen dasselbe nur streifen, nicht auch in das Innere eindringen*), heißt der wahre Umriß und seine Projektion der scheinbare Umriß des Vielflachs. (Vgl. § 37.) Dieser von Kanten des Vielflachs gebildete Linienzug kann aus einem oder mehreren**) Teilen bestehen. Für einen in der Richtung der Projektionsstrahlen blickenden Beschauer bildet der wahre Umriß zugleich die Grenze des sichtbaren Teiles der Oberfläche des Vielflachs.

Sind mehrere Projektionsebenen, Π_1, Π_2, ... vorhanden, so spricht man von einem ersten, zweiten, ... wahren bzw. scheinbaren Umrisse. Die im Grundrisse bzw. Aufrisse nicht sichtbaren Kanten sind in den folgenden Figuren punktiert (entsprechend den Festsetzungen in § 32).

---

*) Die Projektionsstrahlen streifen also auch das Vielflach, wenn Seitenflächen desselben ihnen parallel sind.

**) Z. B. bei einem vierseitigen Prisma, aus welchem ein dreiseitiger prismatischer Kern herausgeschnitten ist.

99. *Aufgabe.* Ein senkrechtes dreiseitiges Prisma ist nach folgenden Angaben zu zeichnen: Das Prisma ruht mit einer Ecke auf Π_1; von seiner oberen Endfläche ist der Eckpunkt $A(A', A'')$ und die erste Projektion A', B', C' gegeben, während ihre zweite Projektion einem gegebenen Dreiecke $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ ähnlich sein soll.

Um zunächst $A''B''C''$ zu konstruieren, ziehe man die Linie $A'A''$, welche die Seite $B'C'$ in M' und die entsprechende Seite $B''C''$ in M'' schneidet, und beachte, daß $B'M' : M'C' = B''M'' : M''C''$ sein muß. Da nun $\triangle A''B''C'' \sim \triangle \hat{A}\hat{B}\hat{C}$ sein soll, so muß dem Punkte M'' ein Punkt $\hat{M}$ auf $\hat{B}\hat{C}$ entsprechen, für welchen sich verhält: $\hat{B}\hat{M} : \hat{M}\hat{C} = B''M'' : M''C''$ und folglich auch $\hat{B}\hat{M} : \hat{M}\hat{C} = B'M' : M'C'$. — Man teilt also (Fig. 88) die Seite $\hat{B}\hat{C}$ durch den Punkt $\hat{M}$ in dem angegebenen Verhältnisse und zeichnet dann $\triangle A''\overline{B}\overline{C} \cong \triangle \hat{A}\hat{B}\hat{C}$, so daß $A''\overline{M} (= \hat{A}\hat{M})$ auf die Linie $A'A''$ fällt und $B', \overline{B}$ auf der gleichen Seite von $A'A''$ liegen. B'', C'' sind dann die Schnittpunkte der Vertikalen durch B', C' mit $A''\overline{B}$, bzw. $A''\overline{C}$. — Eine zweite (in der Figur nicht gezeichnete) Lösung würde man erhalten, wenn man das zu $\triangle A''\overline{B}\overline{C}$ in bezug auf eine Horizontale durch A'' symmetrische Dreieck zeichnet und dann wie vorhin die Punkte B'', C'' bestimmt.

Da die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht stehen sollen, so müssen ihre Projektionen auf den gleichnamigen Spuren der Ebene ABC (§ 72) senkrecht stehen. Statt der Spuren benutzt man bequemer eine erste und eine zweite Hauptlinie u, v ($u'' \parallel x$,

$v' \| x$) und zieht dann durch A', B', C' Senkrechte zu u', durch A'', B'', C'' Senkrechte zu v''. Von den drei Eckpunkten der oberen Endfläche liegt B der Tafel Π_1

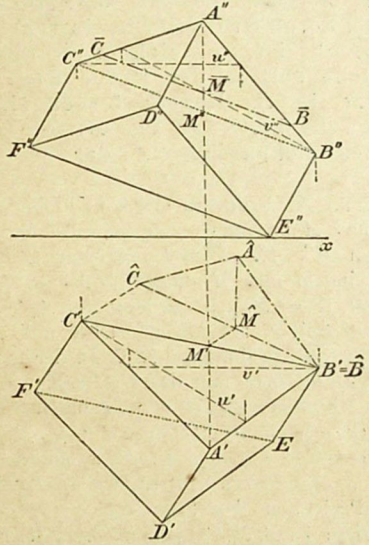

Fig. 88.

am nächsten, da B'' der Achse näher liegt als A'' und C''; folglich ist der Punkt E, in welchem die durch B gehende Kante Π_1 schneidet, der in Π_1 liegende Eckpunkt der unteren Grundfläche. E'' ist also der Schnittpunkt von x mit der durch B'' gezogenen Senkrechten zu v''. Da die untere Grundfläche DEF der oberen kon-

gruent ist, so kann man jetzt die Projektionen von DEF ohne weiteres zeichnen. $B'C'F'D'E$ ist der erste und $A''B''E''F''C''$ der zweite scheinbare Umriß.

100. *Aufgabe.* Es soll eine regelmäßige Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sternfünfeck ist, gezeichnet werden. Die Grundfläche soll in der Ebene $\mathsf{E}(e_1, e_2)$ und die Spitze in Π_2 liegen; ferner sind noch die ersten Projektionen des Mittelpunktes M und eines Eckpunktes A der Grundfläche gegeben.

(Fig. 89.) Mit Hilfe von ersten Falllinien $\mathfrak{u}\,(\mathfrak{u}' \perp e_1)$ durch M und A bestimmt man zunächst ihre zweiten Projektionen M'', A''. Darauf legt man E in Π_1 um (§ 79, II), indem man M umlegt ($M'M_\Delta = M_x M''$ und $\perp M'\mathfrak{U}_1$, $M_\Delta \mathfrak{U}_1 = M_0\mathfrak{U}_1$) und bestimmt A_0 als affinen Punkt zu A' (mit e_1 als Affinitätsachse und senkrecht zu e_1 gerichteten Affinitätsstrahlen). In der umgelegten Ebene konstruiert man nun das regelmäßige Sternfünfeck, dessen Mittelpunkt M_0 ist und dessen einer Eckpunkt in A_0 liegt (k = Kreis um M_0 durch A_0; A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 sind die Ecken des dem Kreise k einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks). Hierauf konstruiert man die erste Projektion des Sternfünfecks, $A'B'C'D'E'$, als affine Figur zu $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$ (z. B. $E_0 M_0$ und $E'M'$ schneiden sich auf e_1, $E_0 E' \perp e_1$) und bestimmt dann, wie oben, B'', C'', D'', E''. Die Höhe h der Pyramide steht in M auf E senkrecht, folglich ist $h' \perp e_1$, $h'' \perp e_2$; da die Spitze S in Π_2 liegen soll, so ist $S' = h' \times x$.

In der Figur sind der größeren Übersichtlichkeit wegen die Kanten nur so weit gezeichnet, als sie sichtbar sind. Hier liegt der Fall vor, daß nur ein Stück einer Kante dem wahren Umrisse angehört, indem das

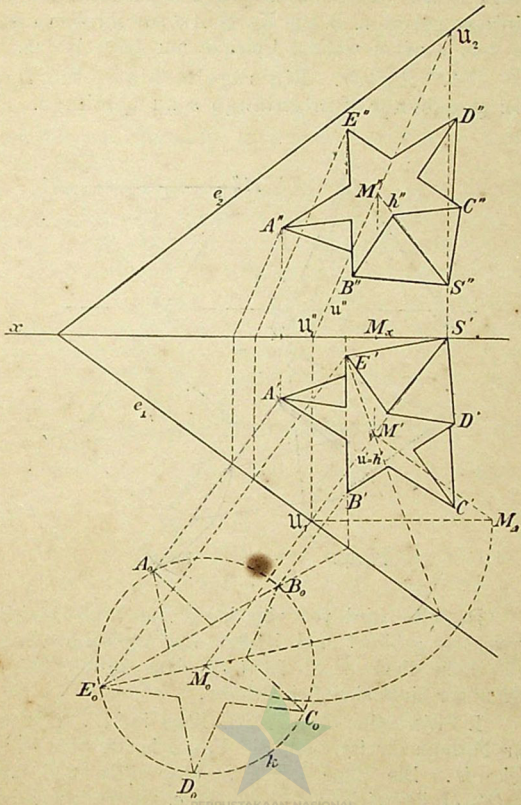
$\mathfrak{U}_2$
E''
D''
c_2
M''
K''
C''
A''
B''
S''
u''
x
$\mathfrak{U}''$
M_x
S'
E'
A'
c_1
D'
M'
u'
K_1
B'
C'
$\mathfrak{U}_1$
M_1
A_0
B_0
E_0
M_0
C_0
K_0
D_0

Fig. 89.

übrige Stück durch davor liegende Flächen verdeckt wird; so gehört z. B. die Kante AS sowohl dem ersten als dem zweiten wahren Umrisse nur teilweise an.

101. *Aufgabe.* Ein regelmäßiges Vierflach von gegebener Kantenlänge s zu zeichnen.

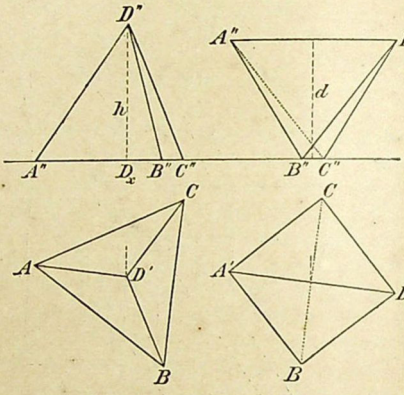

Fig. 90. Fig. 91.

Dasselbe wird von vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken gebildet und besitzt vier dreiseitige Ecken. Jede Ecke liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der gegenüber liegenden Seitenfläche.

I. Die Seitenfläche ABC liege in Π_1. (Fig. 90.) Ihr Mittelpunkt ist dann die Projektion D' der vierten Ecke D. Die Höhe h von D über ABC und damit D_xD'' ergibt sich als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich s und dessen andere

Kathete gleich $AD' = \frac{2}{3}$ der Höhe einer Seitenfläche, also gleich $\frac{s}{3}\sqrt{3}$ ist. Da $AD' \perp BC$ ist, so folgt, daß auch $AD \perp BC$ ist; zwei gegenüber liegende Kanten des regelmäßigen Vierflachs sind mithin senkrecht zueinander gerichtet.

II. Das Vierflach der Figur 90 sei um die Kante BC gedreht, bis die Kante $AD \parallel \Pi_1$ ist. Dann ist, da $AD \perp BC$ ist, auch $A'D' \perp BC$ (Fig. 91); ferner halbieren sich BC und $A'D'$ gegenseitig. Hierdurch ist der Grundriß bestimmt. $A''D''$ ist $\parallel x$, und man kann leicht den Aufriß zeichnen, wenn man noch den senkrechten Abstand d der Kanten AD und BC voneinander kennt. Da die Mittelpunkte beider Kanten senkrecht übereinander liegen, so ist ihr Abstand d gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich der Höhe $\frac{s}{2}\sqrt{3}$ einer Seitenfläche und dessen andere Kathete gleich $\frac{s}{2}$ ist.

102. *Aufgabe.* Ein regelmäßiges Achtflach von gegebener Kantenlänge s zu zeichnen.

Dasselbe wird von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken gebildet, von welchen je vier in einer Ecke zusammenstoßen; es hat also sechs Ecken und zwölf Kanten. Die Endpunkte der von einer Ecke ausgehenden Kanten bilden, da sie gleich weit von der Ecke entfernt liegen und gleiche Winkel miteinander einschließen, die Ecken eines Quadrates, dessen Seiten wieder vier Kanten des Achtflachs sind. Folglich liegen je vier der sechs Ecken des Achtflachs in den Eckpunkten dreier Quadrate, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen.

Sind zwei dieser Ebenen parallel zu Π_1 und Π_2, so erhält man als Projektionen des Achtflachs zwei Quadrate mit der Seite s, deren Diagonalen $\perp$ bzw. $\| x$ sind; die Eckpunkte derselben sind die Projektionen von vier Ecken des Achtflachs, während die beiden übrigen Ecken sich in die Mittelpunkte der Quadrate projizieren (Fig. 92a). Dreht man nun das Achtflach um die zu Π_2 senkrechte Diagonale DF um den

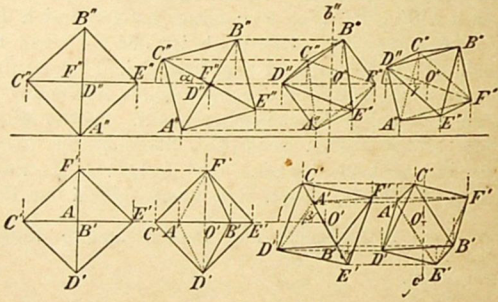

Fig. 92a, b, c und d.

Winkel α, so erscheint $C''E''$ (Fig. 92b) um den Winkel α gegen seine frühere horizontale Lage geneigt; nach § 81 kann man dann leicht die neue Lage des Achtflachs erhalten, wie sie Figur 92b zeigt. Dreht man dann nochmals das Achtflach um eine durch seinen Mittelpunkt O und $\perp \Pi_1$ gelegte Achse $b(b'' \perp x)$ um den Winkel β, so erhält man das Achtflach in beliebiger Lage zu Π_2, während es zu Π_1 noch die spezielle Lage hat, daß seine Diagonalebene $ACBE \perp \Pi_1$ ist (Fig. 92c). Deshalb nimmt man noch eine Drehung

um eine durch O gehende und zu Π_2 senkrechte Achse $c\,(c' \perp x)$ um den Winkel γ vor und erhält dann das Achtflach in allgemeiner Lage zu beiden Projektionsebenen (Fig. 92[d]).

Wählt man α und β so, daß $\operatorname{tang}\alpha = 1$, $\operatorname{tang}\beta = \sqrt{2}$ ist, so bilden in der Figur 92[c] die zweiten Projektionen der Kanten ein regelmäßiges Sechseck und die beiden ihm einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke.

103. *Aufgabe.* Es ist ein Würfel von gegebener Kantenlänge s zu zeichnen.

Die sechs kongruenten Quadrate, welche die Oberfläche des Würfels bilden, stoßen zu je dreien in den acht Ecken desselben zusammen; die sämtlichen Flächenwinkel des Würfels sind also gleich 90^0.

Ist der Würfel mit zwei seiner Flächen parallel zu Π_1 und Π_2 gestellt, so sind seine beiden Projektionen Quadrate mit der Seite s. In der Figur 93 ist außerdem noch angenommen, daß die Würfelfläche $ABCD$ in Π_1 liegt; jede Seite dieses Quadrates ist die Projektion einer Seitenfläche (z. B. AB die Projektion von $ABFE$) und das ganze Quadrat zugleich die Projektion der oberen Endfläche $EFGH$. Das Analoge gilt für die zweite Projektion.

Um die Projektionen des Würfels in allgemeiner Lage zu erhalten, werde hier das Verfahren der Einführung neuer Projektionsebenen angewendet. Zuerst werde eine unter dem Winkel α gegen Π_2 geneigte und auf Π_1 senkrecht stehende dritte Projektionsebene ($x_1 = \Pi_1 \times \Pi_3$, $\sphericalangle (x|x_1) = \alpha$) eingeführt und nach § 84 die dritte Projektion des Würfels konstruiert. Eine vierte Projektionsebene sei unter dem Winkel β gegen

Π_1 geneigt und $\perp \Pi_3$ $(x_2 = \Pi_4 \times \Pi_3$, $\sphericalangle (x_1 \mid x_2) = \beta)$; eine fünfte Projektionsebene sei unter dem Winkel γ gegen Π_3 geneigt und $\perp \Pi_4$ $(x_3 = \Pi_5 \times \Pi_4$, $\sphericalangle (x_2 \mid x_3) = \gamma)$. Während der Würfel gegen Π_3 noch in der besonderen Lage sich befindet, daß zwei seiner Flächen

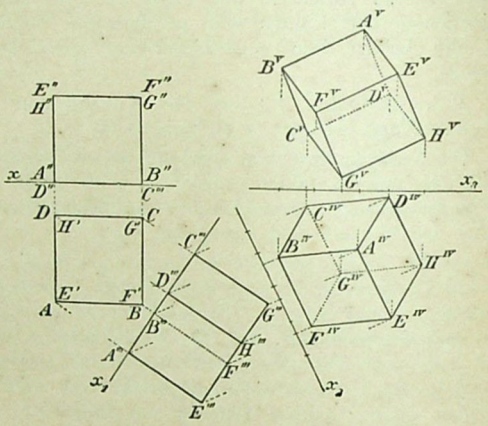

Fig. 93.

$\perp \Pi_3$ sind, liegt er zu Π_4 bereits in allgemeiner Lage und ebenso zu Π_5.

Durch passende Wahl der Winkel α, β, γ kann man jede beliebige Stellung des Würfels zu Π_4 und Π_5 erzielen. Wählt man z. B. $\Pi_3 \parallel ACGE$, $\Pi_4 \perp A'''G'''$, also $x_1 \parallel AC$, $x_2 \perp A'''G'''$, was $\operatorname{tang} \alpha = 1$, $\operatorname{tang} \beta = \sqrt{2}$ entspricht, so bilden die vierten Projektionen der Würfelkanten die Seiten und die Radien eines regelmäßigen

Sechsecks, in dessen Mittelpunkt die vierten Projektionen von A und G zusammenfallen (s. die erste Projektion des Würfels in Fig. 99 auf S. 183).

Bei dem Achtflach und dem Würfel würde es keine Schwierigkeiten geboten haben, ihre Projektionen sofort für eine beliebige Stellung der Körper zu den Projektionsebenen zu entwerfen. Bei komplizierter gebauten Körpern dagegen empfiehlt es sich, dieselben zunächst in die möglich günstigste Lage zu den beiden Projektionsebenen zu bringen und dann eines der beiden vorstehend benutzten Verfahren anzuwenden, um ihre Projektionen in allgemeiner Lage zu erhalten. Beide Verfahren sind, wie die vorstehenden Beispiele zeigen, einander gleichwertig; welchem man im gegebenen Falle den Vorzug gibt, hängt von dem darzustellenden Körper ab.

104. *Aufgabe.* Es ist das regelmäßige Zwanzigflach von gegebener Kantenlänge s zu zeichnen.

Von den zwanzig kongruenten gleichseitigen Dreiecken, welche das Zwanzigflach bilden, stoßen je fünf in einer der zwölf Ecken desselben zusammen. Die Endpunkte der von einer Ecke ausgehenden Kanten liegen augenscheinlich in den Eckpunkten eines regelmäßigen Fünfecks, dessen Seiten wieder Kanten des Zwanzigflachs sind, und zwar gehören je zwei verschiedenen Seitenflächen an. Dieses Fünfeck werde kurz das zu der Ecke gehörige Fünfeck genannt. Die zwölf Ecken des Zwanzigflachs liegen, wie in der Stereometrie gezeigt wird, zu je zweien auf sechs Achsen, welche sich im Mittelpunkte M des Körpers gegenseitig halbieren; die Kanten, welche von den beiden auf einer Achse gelegenen Ecken ausgehen, sind paarweise einander parallel, und die von ihren anderen Eckpunkten ge-

bildeten Fünfecke liegen in parallelen Ebenen, sind aber um 180° gegeneinander gedreht.

Das Zwanzigflach (Fig. 94) stehe mit der Achse AD

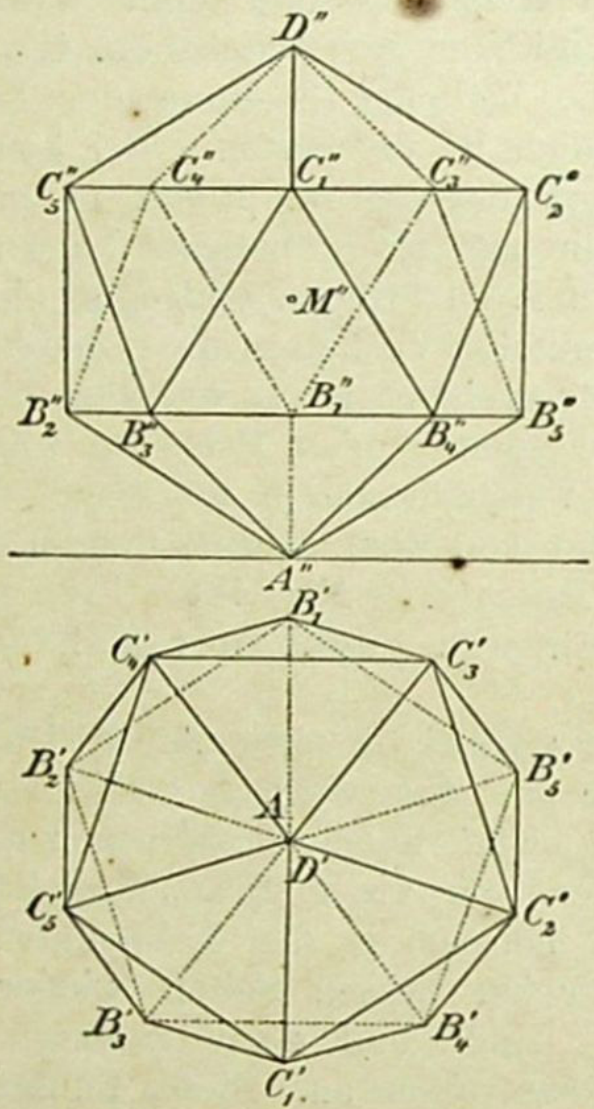

Fig. 94.

senkrecht auf Π_1. Die Endpunkte der von A, bzw. L ausgehenden Kanten seien mit $B_1, \ldots, B_5$, bzw. $C_1, \ldots, C_5$ in der Weise bezeichnet, daß zwei Punkte mit gleichem Index auf derselben Achse liegen. Nach dem Obigen sind dann die Ebenen der beiden zu A und D

gehörigen Fünfecke $B_1, \ldots, B_5$ und $C_1, \ldots, C_5 \parallel \Pi_1$; ihre ersten Projektionen sind daher regelmäßige Fünfecke mit der Seitenlänge s, deren Eckpunkte sich diametral gegenüber liegen. Der Mittelpunkt des Fünfecks liegt in dem Punkte A, in welchen sich auch D projiziert. Die Seiten des von den Ecken beider Fünfecke gebildeten regelmäßigen Zehnecks sind ebenfalls die Projektionen von Kanten des Zwanzigflachs. $B_1' C_1'$ ist $\perp x$ gezeichnet; d. h. die beiden Achsen AD und $B_1 C_1$ liegen in einer Ebene $\perp x$. Durch diese Annahme gestaltet sich die Konstruktion am einfachsten.

Um nun den Aufriß zeichnen zu können, ist es nur nötig, die Lage eines Punktes B'' und eines Punktes C'' zu bestimmen. Nun ist $AB_1' \perp B_3' B_4'$ und $B_3 B_4 \parallel \Pi_1$, folglich ist auch $AB_1 \perp B_3 B_4$, d. h. jede von einer beliebigen Ecke ausgehende Kante steht senkrecht auf der gegenüber liegenden Seite des zu der Ecke gehörigen Fünfecks. Zu der Ecke B_2 gehört nun das Fünfeck $B_1 C_4 C_5 B_3 A$; mithin ist auch $B_2 C_5 \perp B_1 A$. Ferner liegen beide Kanten in zu x senkrechten Ebenen, und folglich ist $B_1 A$ unter demselben Winkel gegen Π_1 geneigt, wie die zu ihr senkrechte Kante $B_2 C_5$ gegen die zu Π_1 senkrechte Ebene Π_2. Hieraus folgt aber, da beide Linien gleiche Länge haben, daß $B_2'' C_5'' = B_1' A$ und $B_1'' A'' = B_2' C_5'$ ist.

Auf der Vertikalen durch B_1' trägt man also von ihrem Schnittpunkte A'' mit x aus die Länge $B_2' C_5'$ ab und erhält so den Punkt B_1''. Auf der Horizontalen durch B_1'' liegen die Punkte $B_2'', \ldots, B_5''$. Senkrecht über B_1'' im Abstande $B_1' A$ liegt der Punkt C_1'' und auf der durch ihn gehenden Horizontalen liegen $C_2'', \ldots, C_5''$. D'' liegt ebenso hoch über der C''-Horizontalen als A unter der B''-Horizontalen, da alle Ecken gleich weit von

den Ebenen der zu ihnen gehörigen Fünfecke entfernt liegen.

Kontrolle: M'' halbiert die Projektionen der sechs Achsen $A''D''$, $B_1''C_1''$, ..., $B_5''C_5''$. Diametral gegenüber liegende Kanten müssen einander parallel sein.

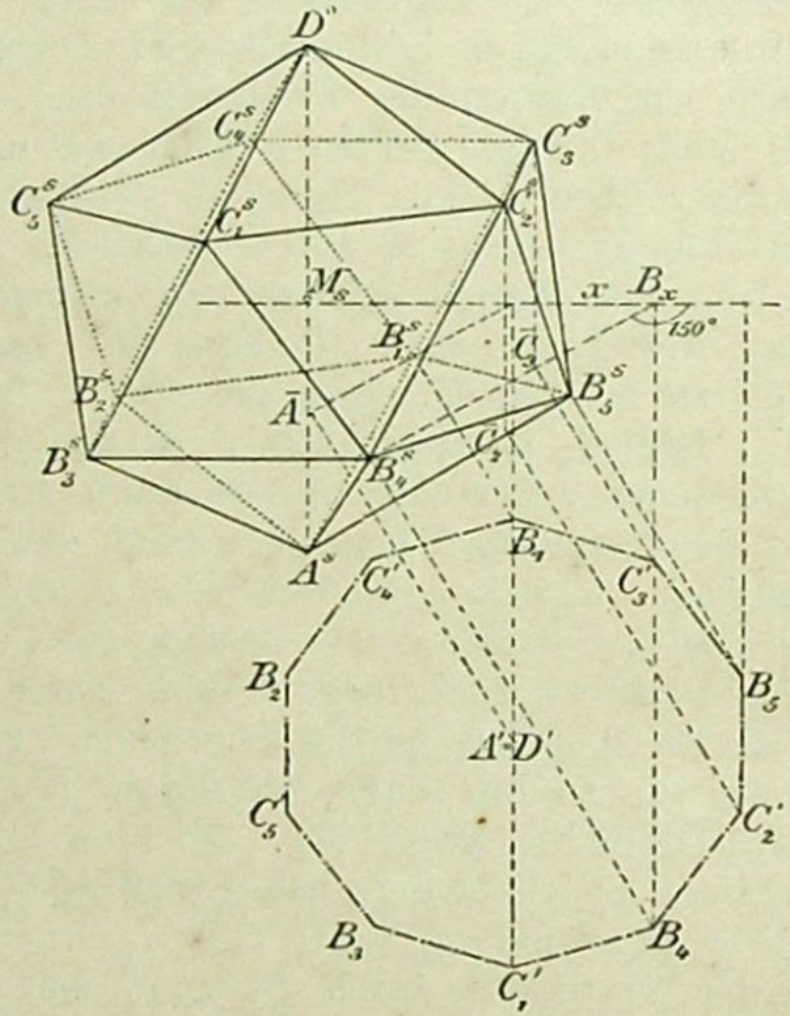

Fig. 95.

105. Um komplizierter gebaute Körper in schiefer Parallelprojektion darzustellen, benutzt man mit Vorteil ihren Grundriß und Aufriß.

Figur 95 zeigt das Zwanzigflach in schiefer Parallelprojektion. Damit die Konstruktion möglichst einfach

wird, sind beide Projektionsebenen parallel zu sich verschoben gedacht, so daß Grundriß und Aufriß in genau derselben Lage wie in Figur 94 zueinander bleiben, die Projektionsachse jetzt aber mit $B_2'' B_5''$ zusammenfällt.

In Figur 95 sind die ersten Projektionen der zwölf Ecken des Zwanzigflachs in ihrer Lage zu der neuen x-Achse gezeichnet; bei den B fehlt der obere Akzent, da das B-Fünfeck jetzt in Π_1 liegt, A hat ihn dagegen bekommen, da die zugehörige Ecke jetzt unterhalb Π_1 liegt. Hierauf sind dann die schiefen Projektionen $B_1^s, \ldots, B_5^s$, $\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_5$; $\overline{A} = \overline{D}$ dieser Punkte konstruiert (§ 35; z. B. $B_4 B_x \perp x$, $\sphericalangle (B_4^s B_x | x) = 150^0$, $\sphericalangle B_4 B_4^s B_x = 90^0$). Die Punkte $B_1^s, \ldots, B_5^s$ geben bereits die schiefe Projektion des B-Fünfecks; diejenige des C-Fünfecks erhält man, wenn man auf den Vertikalen durch $\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_5$ den Abstand der Ebenen beider Fünfecke, welchen man aus dem Aufrisse $= B_2'' C_5''$ entnimmt, abträgt. Die Eckpunkte A^s und D^s müssen auf der durch $\overline{A}$ gehenden Vertikalen liegen, und zwar ist $\overline{A} A^s = B_1'' A''$ und $\overline{A} D^s = B_1'' D''$.

Kontrollen: Die Mittelpunkte der Fünfecke $B_1^s, \ldots, B_5^s$, $C_1^s, \ldots, C_5^s$ und der Mittelpunkt M_s des Zwanzigflachs müssen auf $A^s D^s$ liegen; M_s muß jede der sechs Achsen halbieren; diametrale Gegenkanten sind parallel.

106. *Aufgabe.* Es ist das regelmäßige Zwölfflach von gegebener Kantenlänge s zu zeichnen.

Das Zwölfflach wird von zwölf kongruenten regelmäßigen Fünfecken gebildet, welche zu je dreien in zwanzig Ecken zusammenstoßen.

Das Zwölfflach stehe mit der Seitenfläche $A_1 \ldots A_5$

auf Π_1. Die Endpunkte $B_1, \ldots, B_5$ der von den Punkten A ausgehenden Kanten liegen ebenfalls in den Eckpunkten eines regelmäßigen Fünfecks, dessen Ebene $\| \Pi_1$ ist, da die Kanten $A_1B_1, \ldots, A_5B_5$ gegen das Fünfeck $A_1 \ldots A_5$ gleich geneigt sind. Die zu $A_1 \ldots A_5$ parallele Seitenfläche $D_1 \ldots D_5$ ist um 180^0 gegen $A_1 \ldots A_5$ gedreht, und die Endpunkte $C_1, \ldots, C_5$ der von den Punkten D ausgehenden Kanten bilden ein dem B-Fünfeck kongruentes regelmäßiges Fünfeck, welches auch $\| \Pi_1$ liegt. Die Mittelpunkte dieser vier Fünfecke liegen in derselben Vertikalen zu Π_1. Die zwanzig Ecken des Zwölfflachs sind also in Π_1 und drei parallelen Ebenen gelegen. Die mit gleichem Index versehenen Ecken A und D einerseits und B und C andererseits liegen auf den zehn Achsen des Zwölfflachs, welche sich in seinem Mittelpunkte M halbieren.

Die eine Seite des A-Fünfecks sei noch $\| x$. (Fig. 96.) Man zeichnet dann zunächst das A-Fünfeck mit der Seite s, so daß z. B. $A_3A_4 \| x$ ist. Der Mittelpunkt M' desselben ist zugleich die erste Projektion des Körpermittelpunktes M. Das D-Fünfeck besitzt dann denselben Mittelpunkt M', ist aber um 180^0 gedreht gegen das A-Fünfeck, also $A_1D_1' \perp A_3A_4$ usw. Die zehn Ecken A, D bilden mithin die Ecken eines regelmäßigen Zehnecks. Da die Kante A_1B_1 mit den beiden anstoßenden Seiten A_1A_2 und A_1A_5 gleiche Winkel bildet, so muß es auch ihre Projektion tun. A_1B_1' fällt also mit der Halbierungslinie des überstumpfen Winkels $A_2A_1A_5$ zusammen und geht folglich in ihrer Verlängerung durch den Mittelpunkt M' hindurch. Das gleiche gilt für die Projektionen der übrigen Kanten AB, sowie der Kanten DC. Da nun die Punkte C in der gleichen Weise zu der oberen Seitenfläche $D_1 \ldots D_5$ liegen, wie die

Punkte B zu der unteren $A_1 \ldots A_5$, so haben die ersten Projektionen aller Kanten AB und DC gleiche Länge. Wird das Fünfeck $D_3 D_4 C_4 B_1 C_3$ um $D_3 D_4$ gedreht, bis es mit $D_3 D_4 D_5 D_1 D_2$ zusammenfällt, so

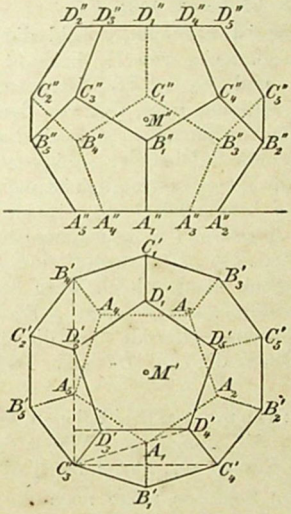

Fig. 96.

beschreibt C_3 einen Kreis, dessen Ebene senkrecht auf $D_3 D_4$ steht. Da $D_3 D_4 \parallel \Pi_1$ ist, so projiziert sich dieser Kreis in eine zu $D_3' D_4'$ senkrechte Gerade; diese muß auch durch D_2' gehen und fällt folglich mit $D_2' A_5$ zusammen. Folglich ist C_3' der Schnittpunkt von $D_2' A_5$

mit $M'D_3'$. Hiermit sind auch für die übrigen C- und D-Ecken die ersten Projektionen bestimmt; sie bilden die Ecken eines zweiten Zehnecks, dessen Seiten zugleich Projektionen von Kanten des Zwölfflachs sind. Zur Kontrolle dient hier, daß $D_4'A_1 \perp D_2'D_3'$ sein und ebenfalls durch C_3' gehen muß.

Der Aufriß ist bestimmt, sobald die Abstände des B-, C- und D-Fünfecks von Π_1 bekannt sind. — Da $A_5C_3' \perp C_3'C_4'$ und $C_3C_4 \parallel \Pi_1$ ist, so steht auch $A_5C_3 \perp C_3C_4$. Hieraus folgt, daß von den sechs von C_3 ausgehenden Flächendiagonalen je zwei, durch eine dritte Diagonale getrennte aufeinander senkrecht stehen. Das gleiche gilt für alle Ecken, und folglich ist auch $C_3A_5 \perp A_5B_4$. Da ferner diese beiden Diagonalen in einer zu x senkrechten Ebene liegen und gleiche Länge haben, so folgt (genau wie auf S. 171) $A_5''C_3'' = A_5B_4'$ und $A_5''B_4'' = A_5C_3'$. Da das D-Fünfeck ebenso hoch über dem C-Fünfeck liegt als das B-Fünfeck über dem A-Fünfeck, so muß $C_3''D_2'' = A_5''B_4''$ sein. Hiermit sind die drei Parallelen zu x, in welchen die B-, C- und D-Ecken liegen, bestimmt.

Kontrolle: Die zweiten Projektionen der zehn Achsen müssen sich in M'' schneiden. Von zwei Gegenecken gehen parallele Kanten aus, also z. B. $A_2''B_2'' \parallel D_2''C_2''$ usw.

107. Zum Schlusse möge noch die Lösung einer komplizierteren Aufgabe folgen.

Aufgabe. Es ist ein regelmäßiges Vierflach zu zeichnen, von welchem die erste Projektion $A'B'C'$ einer Seitenfläche und eine Ecke $C(C', C'')$ gegeben sind.

Es handelt sich hierbei zunächst darum, die zweite Projektion eines gleichseitigen Dreiecks zu bestimmen,

dessen erste Projektion gegeben ist. Diese Aufgabe ist aber nur ein spezieller Fall der folgenden

Aufgabe. Die zweite Projektion eines Dreiecks ABC, dessen erste Projektion $A'B'C'$ und dessen Ecke $C\,(C', C'')$ gegeben sind, soll so bestimmt werden, daß das Dreieck ABC einem gegebenen Dreiecke $A_1B_1C_1$ ähnlich ist.

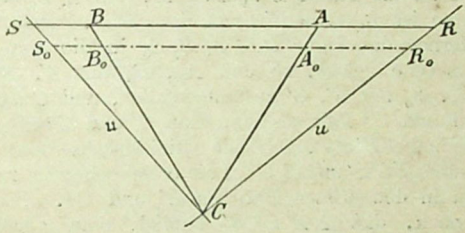

Fig. 97.

Diese Aufgabe, welche zunächst gelöst werden soll, kann auch so gefaßt werden: Ein gerades dreiseitiges Prisma soll durch eine Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt einer Seitenkante hindurchgeht, so geschnitten werden, daß die Schnittfigur einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

108. Man denke sich in der Ebene des Dreiecks ABC (Fig. 97) durch seine Ecke C die erste Hauptlinie u und erste Falllinie u gezogen, welche AB in den Punkten R und S schneiden mögen; der von u und u gebildete rechte Winkel projiziert sich auf Π_1 wieder als rechter Winkel und die ersten Projektionen R', S' der Punkte R, S teilen $A'B'$ in demselben Verhältnisse

wie R, S die Seite AB selbst: $R'A' : A'B' : B'S' = RA : AB : BS$. Eine in der Dreiecksebene gezogene Parallele zu AB möge von den Seiten CA, CB und den Schenkeln CR, CS des rechten Winkels in den vier Punkten A_0, B_0, R_0, S_0 getroffen werden; dann verhält sich $R_0A_0 : A_0B_0 : B_0S_0 = RA : AB : BS$ und folglich auch $R_0A_0 : A_0B_0 : B_0S_0 = R'A' : A'B' : B'S'$. Zieht man die Parallele speziell so, daß $A_0B_0 = A'B'$ wird, so ist $R_0A_0 = R'A'$, $B_0S_0 = B'S'$. Denkt man sich ferner die Figur $CR_0A_0B_0S_0$ in die erste Projektionsebene gelegt, so daß A_0, B_0 mit A', B' und also R_0, S_0 mit R', S' zusammenfallen, und C dabei in einen Punkt C^0 fällt, so kann man C' und C^0 als affine Punkte und $A'B'$ als zugehörige Affinitätsachse betrachten. Dann sind $R'C'S'$ und $R'C^0S'$ die entsprechenden rechten Winkel in den affinen Punkten C' und C^0. Beachtet man noch, daß $\triangle A'C^0B'$ ähnlich dem gegebenen Dreiecke $A_1B_1C_1$ sein muß, so ergibt sich aus den vorstehenden Betrachtungen die folgende Konstruktion der Punkte R' und S'.

Man zeichnet (Fig. 98) das dem gegebenen Dreiecke $A_1'B_1C_1$ ähnliche Dreieck $A'B'C^0$, welches mit $A'B'C'$ die Seite $A'B'$ gemeinsam hat, und konstruiert darauf (nach § 14) die entsprechenden rechten Winkel in den affinen Punkten C' und C^0, wodurch man die gesuchten Punkte R', S' erhält.

Es ist nun noch zu entscheiden, welcher von den Schenkeln des rechten Winkels in C' die Projektion der durch C gehenden ersten Hauptlinie u ist. Nach § 65 muß sich der von einer Hauptlinie u mit AB gebildete spitze Winkel in einen kleineren Winkel auf Π_1 projizieren. Da nun $\triangle R'C^0S' \sim \triangle RCS$ ist und in unserer Figur $\sphericalangle C^0R'S' > \sphericalangle C'R'S'$ ist, so

folgt also, daß $C'R'$ die Projektion u' der ersten Hauptlinie und $C''R'' \parallel x$ ihre zweite Projektion u'' ist.

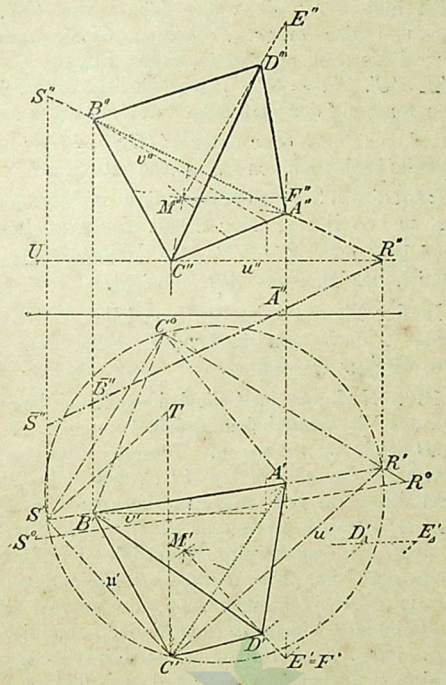

Fig. 98.

$C'S'$ ist dann die Projektion der ersten Falllinie u durch C. Da noch $C'R' \parallel CR$ und also gleich der wahren Länge

von CR ist, so wird $\triangle R^0 C^0 S^0 \cong \triangle RCS$, wenn man $C^0R^0 = C'R'$ macht und $R^0S^0 \parallel R'S'$ zieht; folglich gibt C^0S^0 die wahre Länge von CS. Aus dieser und der ersten Projektion $C'S'$ ergibt sich der vertikale Höhenunterschied der Punkte C und S ($S'T \perp S'C'$, $C'T = C^0S^0$); folglich liegt die zweite Projektion von S auf der Vertikalen durch S' in dem Abstande $C'T$ senkrecht über oder unter u'' ($US'' = \overline{US''} = S'T$). Die zweite Projektion von RS ist also entweder $R''S''$ oder $R''\overline{S''}$; auf diesen Geraden müssen die zweiten Projektionen von A und B liegen. Man erhält also zwei Lösungen, je nachdem man $A''B''C''$ oder $\overline{A''}\,\overline{B''}\,C''$ als zweite Projektion des Dreiecks ABC ansieht.

In der Figur 98 ist dem speziellen Falle der vorliegenden Aufgabe entsprechend $\triangle A'B'C^0$ als gleichseitiges Dreieck gezeichnet.

109. Nachdem jetzt die beiden Projektionen einer Fläche des Vierflachs bekannt sind, kann man die vierte Ecke D leicht konstruieren. Dieselbe liegt senkrecht über dem Mittelpunkte M von ABC, dessen Projektionen die Schnittpunkte der Mittelltransversalen von $A'B'C'$ und $A''B''C''$ sind. Dann ist $M'D' \perp u'$, $M''D' \perp v''$, wenn $v'(v' \parallel x)$ eine zweite Hauptlinie der Ebene des Dreiecks ABC ist. Aus den beiden Projektionen einer Seite von ABC bestimmt man die wahre Länge s einer Kante des Vierflachs und findet dann die wahre Länge h von MD als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse s und dessen andere Kathete gleich $\frac{2}{3}$ der Höhe einer Seitenfläche, also gleich $\frac{s}{3}\sqrt{3}$ ist.

Um schließlich noch die Punkte D', D'' zu bestimmen, wählt man einen beliebigen Punkt E auf der $\perp ABC$ durch M gezogenen Geraden und bestimmt die wahre Länge von ME, welche gleich $M'E'_1$ ist ($M''F'' \parallel x$, $E'E'_1 = E''F''$ und $\perp M'E'$). Trägt man nun die Höhe des Tetraeders auf $M'E'_1$ bis D'_1 ab ($M'D'_1 = h$) und fällt von D'_1 ein Lot auf $M'E'$, so ist sein Fußpunkt der Punkt D'; D'' liegt vertikal über D' auf $M''E''$.

Da der Punkt D auch auf der anderen Seite von ABC liegen kann, so erhält man zwei regelmäßige Vierflache mit der Seitenfläche ($A'B'C'$, $A''B''C''$) und weitere zwei mit der Seitenfläche ($A'B'C'$, $A''\overline{B''}\,\overline{C''}$); die Aufgabe besitzt also im allgemeinen vier Lösungen.

Ebener Schnitt eines Vielflachs und Netz desselben.

110. Um die Schnittfigur eines Vielflachs mit einer Ebene E zu konstruieren, kann man entweder die Eckpunkte der Schnittfigur als Durchschnittspunkte der Kanten des Vielflachs mit E oder die Seiten der Schnittfigur als Schnittgerade der Seitenflächen des Vielflachs mit E bestimmen; das erstere heißt das Kantenverfahren, das letztere das Flächenverfahren. Bei dem Kantenverfahren kommen nur die innerhalb der begrenzten Kanten gelegenen Schnittpunkte und bei dem Flächenverfahren nur die innerhalb der begrenzten Seitenflächen gelegenen Teile der Schnittlinien in Betracht. Die Anwendung des Flächenverfahrens empfiehlt sich nur bei gewissen Klassen von Vielflachen, vornehmlich bei Prismen und Pyramiden. Bei dem Kantenverfahren nimmt man entweder eine dritte Projektionsebene Π_3, welche auf Π_1

(oder Π_2) und E senkrecht steht, zu Hilfe oder benutzt die projizierenden Ebenen der Kanten (§ 69). Bei Benutzung einer Π_3 fällt die dritte Projektion der Schnittfigur mit der dritten Spur von E zusammen; man sieht folglich unmittelbar, welche Kanten E treffen. Besonders bei komplizierten Vielflachen wendet man am vorteilhaftesten dieses Verfahren an.

111. *Aufgabe.* Ein mit einer Achse senkrecht auf Π_1 stehender Würfel wird von einer Ebene E (e_1, e_2) geschnitten; es soll die Schnittfigur und das Netz des Würfels konstruiert werden.

(Erste Art des Kantenverfahrens.) (Fig. 99.) Es empfiehlt sich, hier eine dritte Projektionsebene $\Pi_3 \perp \Pi_1$ und $\perp$ E zu benutzen ($y = \Pi_1 \times \Pi_3$, $y \perp e_1$) und (nach § 84) die dritte Projektion des Würfels, event. nur so weit als nötig, zu zeichnen. Die dritte Spur e_3 von E erhält man leicht mit Hilfe einer ersten Hauptlinie u, z. B. derjenigen, deren erste Projektion u' durch G' geht; dann ist $U_3 U_3 = G'' U_2$ und e_3 die Verbindungslinie von U_3 mit $E_y = e_1 \times y$. Die Schnittpunkte von e_3 mit den dritten Projektionen der Würfelkanten geben sofort die dritten Projektionen L''', ..., O'' der Ecken der gesuchten Schnittfigur. Diese hat man nur noch rückwärts in die anderen Projektionen ($L'''L' \perp y$, $L'L'' \perp x$) zu übertragen. Hierbei ist zu beachten, daß zwei benachbarte Ecken der Schnittfigur auf zwei derselben Seitenfläche angehörenden Kanten liegen müssen. In der Figur sind auch die sonst sichtbaren Kanten so weit punktiert, als sie durch E verdeckt werden.

Für das Ausziehen der Linien der Schnittfigur ist zu beachten, daß nur diejenigen Linien sichtbar sind, welche auf sichtbaren Flächen liegen, und daß

von einer auf dem wahren Umrisse gelegenen Ecke der Schnittfigur stets eine sichtbare und eine unsichtbare Seite derselben ausgehen.

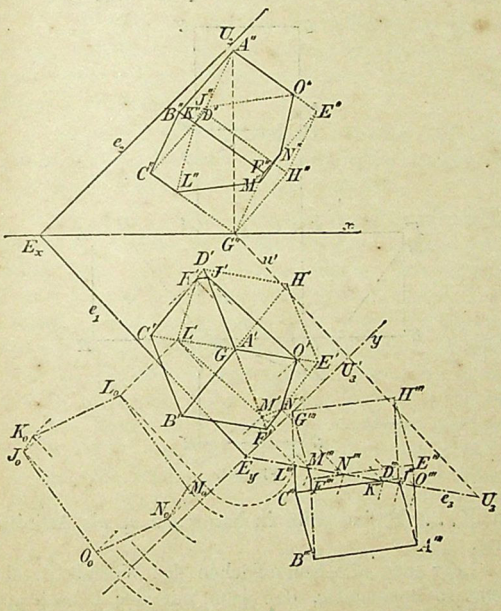

Fig. 99.

Kontrolle: Man konstruiert den Aufriß besonders, indem man das Verfahren unter Benutzung einer zu Π_2 und E senkrechten neuen Projektionsebene wiederholt;

die entsprechenden Punkte von Grundriß und Aufriß müssen dann vertikal übereinander liegen.

Die wahre Gestalt $J_0 \ldots O_0$ der Schnittfigur erhält man durch Umlegen von E in Π_1 (§ 79, I). $J_0 \ldots O_0$

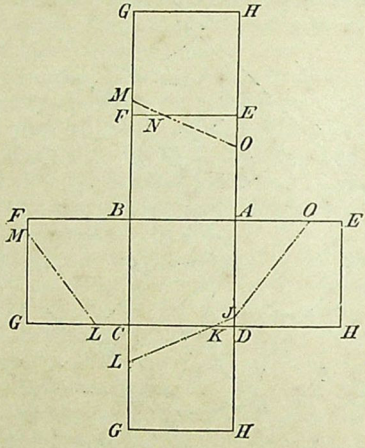

Fig. 100.

und $J' \ldots O'$ sind affin in bezug auf e_1 als Affinitätsachse.

Legt man alle Seitenflächen des Würfels in einer Ebene so aneinander, daß jede mit der benachbarten längs einer Kante zusammenhängt, so erhält man das Netz des Würfels (Fig. 100). Die Kantenlänge s desselben erhält man aus der Diagonale einer Seitenfläche; da $BD \parallel \Pi_1$, so ist $BD = B'D' = s\sqrt{2}$, also $s = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot B'D'$.

Um die Seiten der Schnittfigur einzutragen, trägt man ihre Eckpunkte ein; z. B. findet man J auf AD leicht aus $AD : AJ = A'D' : A'J'$ usw. Kontrolle: $JK = J_0 K_0$ usw.

112. Man benutzt oft die Schnittfigur eines Vielflachs mit einer passend gewählten Ebene, um sein Netz leichter konstruieren zu können, wie das folgende Beispiel lehren mag.

Aufgabe. Ein schiefes Prisma $ABCD$ ist durch seine beiden Projektionen gegeben; es soll sein Netz entwickelt werden.

(Fig. 101). Man schneidet das Prisma durch eine Ebene E, welche senkrecht zu den Kanten AB desselben ist; man zieht also durch einen beliebigen Punkt E_x von x die Spuren $e_1 \perp A'B'$ und $e_2 \perp A''B''$. Darauf konstruiert man nach dem Verfahren des vorigen Paragraphen die Schnittfigur $C_1 C_2 C_3 C_4$ mit Hilfe einer zu Π_1 und E senkrechten Ebene Π_3, d. h. also $y = \Pi_1 \times \Pi_3$ ist $\perp e_1$. Da die Hilfsebene E sowohl auf den Kanten AB als auf Π_3 senkrecht steht, so ist $e_3 \perp A'''B'''$ Aus der dritten Projektion erhält man zugleich die wahren Längen der Kanten zwischen den beiden Endflächen des Prisma, sowie ihrer Teile zwischen jeder Endfläche und E. Ferner konstruiert man die wahre Gestalt der Schnittfigur durch Umlegen von E in Π_1; die Kreise, welche die Punkte C beschreiben, projizieren sich auf Π_1 in die Kanten AB'. Zur Kontrolle dient, daß e_1 Affinitätsachse für $A_1 A_2 A_3 A_4$, $C_1' C_2' C_3' C_4'$ und $C_1^0 C_2^0 C_3^0 C_4^0$ ist, also entsprechende Seiten der drei Figuren sich auf e_1 schneiden.

Breitet man nun die prismatische Fläche, welche längs der Kante $A_3 B_3$ aufgetrennt sei, in eine Ebene aus,

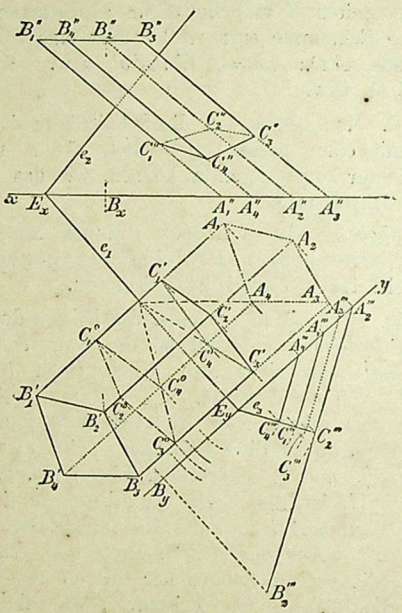

Fig. 101.

so fallen (Fig. 102) die Seiten des Normalschnittes $C_1 C_2 C_3 C_4$ in eine Gerade, auf welcher die Kanten senkrecht stehen. Aus der wahren Gestalt der Schnittfigur entnimmt man die Längen $C_1 C_2 = C_1^0 C_2^0, \ldots$ und aus der dritten Projektion die Längen $A_1 C_1 = A_1''' C_1''', \ldots, A_4 C_4 = A_4''' C_4'''$, $A_1 B_1 = \ldots = A_4 B_4 = A_2'' B_2''$. Hierdurch ist das Netz der Seitenflächen bestimmt, an welche man noch die beiden Endflächen, die aus dem Grundrisse unmittelbar

zu entnehmen sind, in passender Weise anfügt. Faltet man die Netzfigur wieder zur Prismenfläche zusammen, so erhält man entweder das Prisma AB oder das ihm in bezug auf Π_1 symmetrische, je nachdem die eine oder

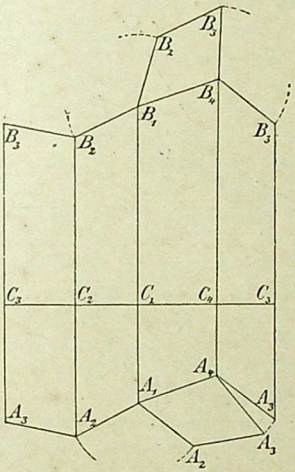

Fig. 102.

die andere Seite der Netzebene nach außen zu liegen kommt.

113. *Aufgabe.* Es ist der Schnitt eines schiefen Prisma AB (AB', $A''B''$) mit der Ebene $\mathsf{E}(e_1, e_2)$ zu konstruieren (Fig. 103).

(Zweite Art des Kantenverfahrens.) Man bestimmt für jede Seitenkante des Prisma die Schnittlinie s ihrer ersten projizierenden Ebene N mit E und dann den Schnitt-

punkt C von s mit der betreffenden Kante (§ 69), wie dies in der Figur 103 für die Kante A_1B_1 ($n_1 = s' = A_1'B_1'$, $s'' = S_1''S_2$, $C_1'' = s'' \times A_1''B_1''$) durchgeführt ist. Auf diese Weise erhält man den Aufriß der Schnittfigur,

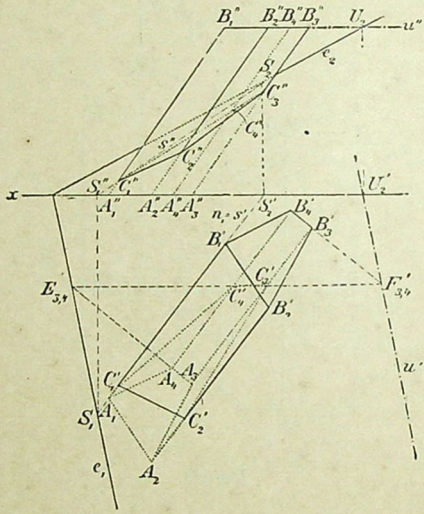

Fig. 103.

aus welchem man rückwärts die erste Projektion erhält. Ist C_1' gefunden, so kann man die übrigen Punkte auch auf Grund der affinen Beziehung von $A_1A_2A_3A_4$ und $C_1'C_2'C_3'C_4'$ (Affinitätsachse e_1) finden. Zur Kontrolle dient im ersteren Falle, daß entsprechende Seiten der Grundfläche und der ersten Projektion der Schnittfigur,

z. B. A_3A_4 und $C_3'C_4'$ sich auf e_1 schneiden müssen, und im letzteren Falle, daß $C_1'C_1''$, $C_2'C_2''$, ... $\perp x$ sein müssen.

114. (Flächenverfahren.) Man bringt jede Seitenfläche des Prisma zum Schnitt mit E, wozu man eine Hilfsebene $\Phi \| \Pi_1$ benutzt. Die Spur von E in dieser Hilfsebene ist eine erste Hauptlinie u von E und also e_1 parallel. Das Prisma wird von Π_1 und Φ in zwei kongruenten Vielecken $A_1A_2 \ldots$ und $B_1B_2 \ldots$ geschnitten. Verbindet man die Schnittpunkte $E_{1,2} = e_1 \times A_1A_2$ und $F_{1,2} = u \times B_1B_2$ miteinander, so ist diese Gerade der Schnitt der Ebene E und der Seitenfläche $A_1A_2B_2B_1$ und das innerhalb dieser Seitenfläche gelegene Stück C_1C_2 zugleich eine Seite der Schnittfigur. In dem vorliegenden Falle legt man Φ durch die obere Endfläche des Prisma ($u'' = B_1''B_3''$, $U_2 = e_2 \times u''$, $U_2U_2 \perp x$, $u' \| e_1$ durch U_2'). In der Figur ist die Konstruktion nur für die Seitenfläche $A_3A_4B_4B_3$ durchgeführt ($E_{3,4} = A_3A_4 \times e_1$, $F_{3,4} = B_3'B_4' \times u'$, $E_{3,4}F_{3,4}$ ist die Projektion des Schnittes, welche A_3B_3' in C_3', A_4B_4' in C_4' schneidet), und C_3C_4 ist ihre Schnittgerade mit E. Auch hier läßt sich die affine Verwandtschaft von $C_1'C_2'C_3'C_4'$ mit $A_1A_2A_3A_4$ (Achse e_1) und mit $B_1'B_2'B_3'B_4'$ (Achse u') für die weitere Konstruktion verwerten, nachdem $C_3'C_4'$ bestimmt ist. Kontrolle: Je zwei benachbarte Seiten der Schnittfigur müssen sich auf der dazwischen liegenden Kante schneiden.

115. *Aufgabe.* Es ist die Schnittfigur einer Pyramide mit einer Ebene E (e_1, e_2) und das Netz der Pyramide zu konstruieren.

Wenn die Pyramide mit ihrer Grundfläche nicht auf Π_1 oder Π_2 aufsteht und auch ihre Schnittfiguren mit denselben außerhalb der Zeichenfläche liegen, so

wendet man das Kantenverfahren an; anderenfalls ist aber das Flächenverfahren vorteilhafter.

In Figur 104 steht die Pyramide mit ihrer Grundfläche auf Π_1 auf. Man legt dann durch ihre Spitze S

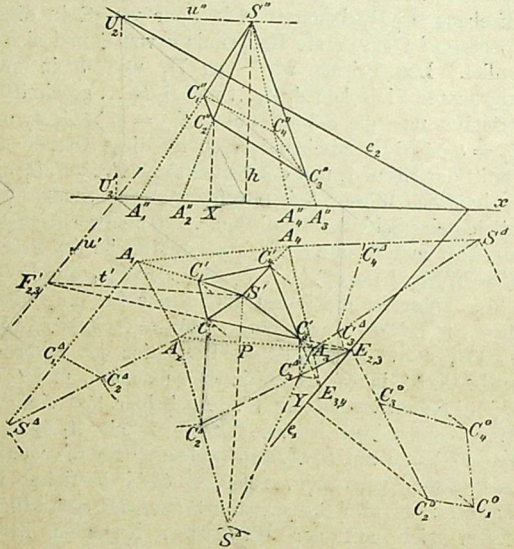

Fig. 104.

eine Hilfsebene $\Phi \parallel \Pi_1$, welche E in der ersten Hauptlinie u (u'' durch S'' und $\parallel x$), die Seitenfläche SA_2A_3 in der durch S gehenden Geraden t schneidet, welche $\parallel A_2A_3$ ($t' \parallel A_2A_3$) ist. Die Punkte $E_{2,3} = A_2A_3 \times c_1$ und $F'_{2,3} = t' \times u'$ bestimmen dann die erste Projektion

der gesuchten Schnittgeraden, deren innerhalb $S' A_2 A_3$ gelegener Teil $C_2' C_3'$ die erste Projektion einer Seite der gesuchten Schnittfigur ist.

Nun gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken der Grundfläche und der Schnittfigur (als Kanten der Pyramide) durch einen Punkt, S, und schneiden sich entsprechende Seiten auf einer Geraden, nämlich der Schnittlinie e_1 der Ebenen beider Figuren. Man nennt solche Figuren perspektiv-kollineare, S ihr Kollineationszentrum, e ihre Kollineationsachse und die Verbindungslinien entsprechender Punkte Kollineationsstrahlen. Diese geometrische Verwandtschaft, von welcher später noch ausführlicher die Rede sein wird, umschließt die perspektive Affinität als speziellen Fall; rückt S in das Unendliche, so werden die Kollineationsstrahlen einander parallel, und die Figuren sind dann zueinander perspektiv-affin.

Dieselbe Verwandtschaft besteht augenscheinlich auch noch zwischen der Grundfläche und der ersten Projektion der Schnittfigur; e_1 ist die Kollineationsachse und S' das Kollineationszentrum. Nachdem also C_3' bestimmt ist, verbindet man $E_{3,4} = A_3 A_4 \times e_1$ mit C_3'; diese Gerade schneidet $A_4 S'$ in C_4', und mithin ist $C_3' C_4'$ die erste Projektion der Schnittlinie von $S A_3 A_4$ mit E. In dieser Weise fortfahrend, erhält man die übrigen Punkte C'. Als Kontrolle dient, daß die so entstehende Figur sich schließen muß.

Um die wahre Gestalt $C_1^0 C_2^0 C_3^0 C_4^0$ der Schnittfigur zu erhalten, legt man die Ebene E in Π_2 um (§ 79, II: $C_2^0 C_2' \perp e_1$, $\overline{C_2^0 Y}^2 = \overline{C_2' Y}^2 + \overline{C_2'' X}^2$; Affinität zwischen $C_1' \ldots C_4'$ und $C_1^0 \ldots C_4^0$ mit e_1 als Affinitätsachse).

Das Netz der Pyramide entsteht durch Umlegen

ihrer Seitenflächen in Π_1. Hat man die Seitenfläche SA_2A_3 um A_2A_3 in Π_1 umgelegt (§ 76: $S'S^A \perp A_2A_3$, $\overline{S^AP}^2 = \overline{S'P}^2 + h^2$, wo h die Höhe der Pyramide bezeichnet), so ist C_2^A der Schnittpunkt von A_2S^A mit dem von C_2' auf A_2A_3 gefällten Lote. In gleicher Weise findet man C_3^A.

Kontrolle: $C_2^AC_3^A = C_2^0C_3^0$ und $C_2^AC_3^A$ muß $C_2'C_3'$ und A_2A_3 auf e_1 schneiden, also ebenfalls durch den Punkt $E_{2,3}$ gehen. Die Umlegung von SA_3A_4 findet man jetzt einfach in der Weise, daß man das von S' auf A_3A_4 gefällte Lot mit dem Kreise, dessen Radius gleich A_3S^A und dessen Mittelpunkt A_3 ist, schneidet.

Durchdringung zweier Vielflache.

116. Die Konstruktion der Schnittfigur zweier Vielflache kommt im allgemeinen auf eine wiederholte Anwendung der Verfahren hinaus, welche in den §§ 110 bis 115 für die Bestimmung der ebenen Schnitte von Vielflachen gegeben sind. Dementsprechend unterscheidet man auch hier Kanten- und Flächenverfahren.

Bei dem Kantenverfahren hat man den Schnittpunkt jeder Kante des einen Vielflachs mit jeder Fläche des anderen zu konstruieren und erhält dadurch die Ecken der Schnittfigur. Hierbei kommen nur solche Schnittpunkte in Betracht, welche innerhalb der begrenzten Kante und der begrenzten Fläche liegen. Es sind dann je zwei Eckpunkte, welche auf beiden Vielflachen ein und derselben Seitenfläche angehören, miteinander zu verbinden.

Bei dem Flächenverfahren bestimmt man die Seiten der Schnittfigur als Schnittlinien der Flächen

des einen mit den Flächen des anderen Vielflachs. Nur so weit, als jede solche Schnittlinie innerhalb beider begrenzten Seitenflächen liegt, ist sie Seite der Schnittfigur, deren Ecken auf den Kanten der Vielflache liegen müssen.

Die Durchschnittsfigur besteht aus einem oder mehreren geschlossenen Vielecken. In dem ersteren Falle dringt das eine Vielflach entweder in das andere ein oder schneidet ein Stück aus ihm aus; in dem letzteren Falle durchdringt das eine Vielflach das andere. Jedes Vieleck der Schnittfigur ist eben oder windschief, je nachdem es auf einer einzigen Fläche eines der beiden Vielflache liegt oder nicht. Ob eine Seite der Schnittfigur sichtbar ist oder nicht, hängt davon ab, ob von beiden Vielflachen die Flächen, dessen Schnittlinie sie ist, sichtbar sind oder nicht. In den folgenden Figuren sind bei jedem Vielflach die Teile der Kanten, welche innerhalb des anderen liegen, gar nicht gezeichnet.

117. *Aufgabe.* Die Durchdringung einer dreiseitigen Pyramide und eines regelmäßigen Achtflachs zu konstruieren.

(Kantenverfahren.) Die beiden Vielflache seien durch ihre beiden Projektionen gegeben; eine Achse DJ des Achtflachs sei $\perp \Pi_1$. Man benutzt, um die Ecken der Schnittfigur zu konstruieren, erste projizierende Ebenen durch die Kanten der Vielflache (§ 70). Bei der besonderen Lage des Achtflachs zu Π_1 gewährt diese Wahl der Hilfsebenen den Vorteil, daß die Kanten der beiden Quadrate $DFJH$ und $DEJG$ die gleichen projizierenden Ebenen besitzen (Fig. 105). Um auch für die Kanten des Quadrates $EFGH$ den gleichen Vorteil zu haben, verwendet man für dieselben zweite projizierende Ebenen.

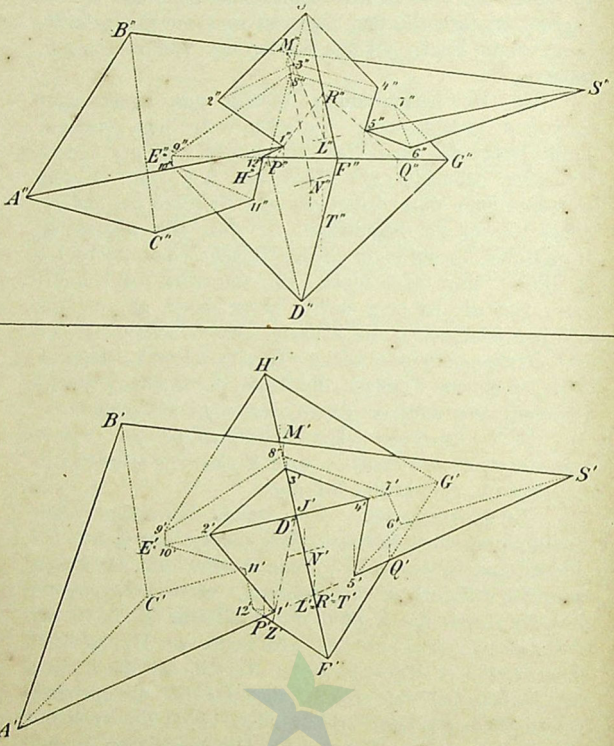
B''
M''
3''
8''
2''
R''
4''
1''
S''
5''
E''
9''
L''
6''
G''
A''
H''
P''
F''
Q''
V''
11''
T''
C''
D''
H'
B'
M'
8'
3'
7'
G'
S'
J'
4'
9'
2'
D'
6'
E'
10'
H'
V'
Q'
C''
5'
12'
L'
R'
T'
P'
Z
F''
A'

Fig. 106.

Die Konstruktion gestaltet sich für die Kanten des Quadrates $DFJH$ folgendermaßen. $F'H'$ schneidet $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ in L', M', N'. Die zweiten Projektionen L'', M'', N'' bestimmen die zweiten Projektionen der Geraden, in welchen die erste projizierende Ebene des Quadrates $DFJH$ die Seitenflächen der Pyramide schneidet. Die Schnittpunkte von $L''M''$, $M''N''$, $N''L''$ mit $D''F''$, $F''J''$, $J''H''$, $H''D''$ sind die zweiten Projektionen von Eckpunkten der Schnittfigur. Da nach dem Obigen nur Schnittpunkte zu nehmen sind, welche innerhalb der begrenzten Kanten und Flächen liegen, so sieht man aus der zweiten Projektion, daß keine der obigen vier Kanten des Achtflachs die Seitenfläche SAC der Pyramide schneidet, da $L''N''$ keine Seite des Quadrates $D''F''J''H''$ trifft und daß die beiden anderen Seitenflächen der Pyramide nur von der Kante JH in den Punkten 3, 8 getroffen werden, da allein $J''H''$ die Linien $L''M''$ und $M''N''$ in den Punkten $3''$, $8''$ schneidet. — Analog gestaltet sich die Aufsuchung der Schnittpunkte einer Pyramidenkante mit den Flächen des Achtflachs: $P' = S'A' \times E'F'$ $Q' = S'A' \times F'G'$, $R' = S'A' \times F'J'$, $T' = S'A' \times F'D'$; $1'' = S''A'' \times P''R''$, $5'' = S''A'' \times Q''R''$; von $P''T''$ und $T''Q''$ wird $S''A''$ nicht getroffen. Die Kante SA schneidet also nur die Flächen EFJ und FGJ des Achtflachs in 1 und 5.

118. Hat man in dieser Weise alle Schnittpunkte der Kanten und Flächen der beiden Vielflache konstruiert, so sind dieselben in richtiger Weise zu verbinden. In den meisten Fällen wird man — um Irrtümer zu vermeiden — guttun, sich bei der Konstruktion eine Tafel anzulegen, welche neben jedem Schnittpunkte die Flächen beider Vielflache, in denen er

liegt, angibt. Aus dieser Tafel erkennt man dann, welche zwei Punkte denselben Flächen auf beiden Vielflachen angehören und also zu verbinden sind. In unserem Falle gestaltet sich die Tafel folgendermaßen:

Flächen des Achtflachs	Pyramidenflächen	Eckpunkte
EFJ, *FGJ*	*SAB*, *SAC*	1, 5
FGJ, *DEF*	*SCA*, *SCB*	6, 11
HJE, *HJG*	*SAB*	3
	SBC	8
DEF, *DEH*	*SBC*	10
EJF, *EJH*	*SAB*	2
JGF, *JGH*	*SAB*	4
	SBC	7
EFD, *EFJ*	*SAC*	12
EHD, *EHJ*	*SBC*	9

Die Verbindungslinie je zweier durch aufeinander folgende Zahlen bezeichneter Eckpunkte ist eine Seite der Schnittfigur; da z. B. 1 und 2 den Flächen *EFJ* und *SAB* angehören. Der Linienzug 1 2 3 4 5 gehört *SAB* und den vier um *J* gelegenen Flächen des Achtflachs an. Blickt man in der Richtung $\perp \Pi_1$, so ist *SAB* im Grundriß sichtbar, und das gleiche gilt für die vier Flächen des Achtflachs; daher ist der Linienzug $1'2'3'4'5'$ auszuziehen. Eine Ecke der Schnittfigur, in welcher eine sichtbare und eine unsichtbare Seite derselben zusammenstoßen, liegt stets auf dem

sichtbaren Teile des wahren Umrisses des einen Vielflachs.

119. Das Verfahren ist für ganz beliebige Vielflache anwendbar; es erfordert aber unter Umständen erfolglose Versuche, wenn nicht aus der bloßen Anschauung zu erkennen ist, daß eine Kante des einen Vielflachs das andere überhaupt nicht schneidet; die Kante SB z. B. erforderte einen derartigen erfolglosen Versuch. Besonders bei der Aufsuchung des ersten Eckpunktes der Schnittfigur (oder jedes Teiles derselben, wenn dieselbe aus mehreren getrennten Teilen besteht) sind oft solche erfolglose Versuche nicht zu vermeiden.

Ist aber z. B. $1 = EFJ \times SA$ gefunden, so können die von 1 ausgehenden Seiten der Schnittfigur nur den Flächen SAB und SAC angehören. Auf der Schnittgeraden von EFJ und SAB z. B. muß also ein weiterer Eckpunkt der Schnittfigur liegen. Man bringt also noch eine beliebige Kante der einen Fläche mit der anderen Fläche (z. B. SB mit EFJ) zum Schnitte und erhält dadurch die Richtung der Schnittlinie s beider Flächen bestimmt. Soweit diese Schnittlinie s innerhalb beider Flächen liegt, ist sie Seite der Schnittfigur und bestimmt in dem Punkte, in welchem sie die Begrenzung der einen Fläche überschreitet, einen weiteren Eckpunkt ($s \times EJ = 2$). Von diesem geht man dann in gleicher Weise weiter. Auf diese Art lassen sich, wenn ein Eckpunkt eines Schnittpolygons gefunden ist, erfolglose Versuche vermeiden.

Kontrolle: Nachdem der letzte Eckpunkt der Schnittfigur gefunden ist, bestimme man die letzte Seite noch als Schnittlinie der betreffenden Seitenflächen, welche dann durch den letzten und ersten Eckpunkt gehen muß.

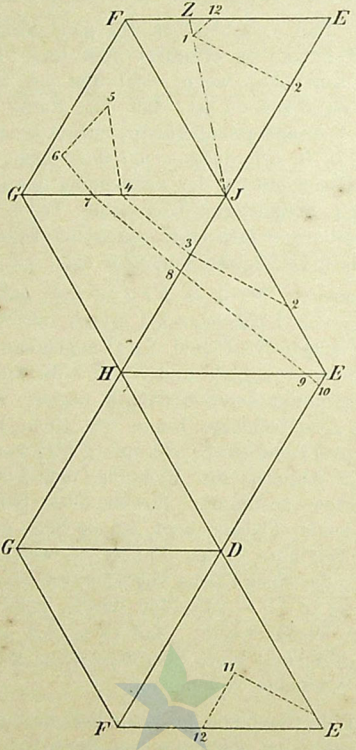

Fig. 106.

120. Die nebenstehende Figur 106 gibt das Netz des Achtflachs mit eingezeichneter Schnittfigur. Die Kantenlänge s des Achtflachs ist gleich $E'F'$. Die Lage des auf der Kante EF gelegenen Punktes 12 kann man direkt dem Grundriß entnehmen, da $EF \parallel \Pi_1$ ist; die Lage des auf EJ gelegenen Punktes 2 findet man aus der Proportion: $EJ : E2 = E'J' : E'2'$. Um einen nicht auf einer Kante liegenden Punkt, z. B. 1 in der Abwicklung zu bestimmen, kann man die Gerade $J'1'$, welche $E'F'$ in Z' schneidet, ziehen und erhält dann in der Abwicklung Z auf EF und 1 auf JZ aus den Beziehungen $EZ = E'Z'$, $J1 : JZ = J'1' : J'Z'$.

121. *Aufgabe.* Es ist die Durchdringung eines geraden und auf Π_2 senkrecht stehenden Prisma mit einem beliebigen anderen Prisma, dessen Kanten Π_1 parallel sind, zu konstruieren.

Das Kantenverfahren vereinfacht sich in diesem besonderem Falle bedeutend. In der zweiten Projektion (Fig. 107) liefern die Punkte B_1'', B_2'', B_3'' und die Schnittpunkte der Kanten $A''C''$ mit den Seiten des Dreiecks $B_1''B_2''B_3''$ unmittelbar die zweiten Projektionen der Eckpunkte der Schnittfigur. Die ersten Projektionen der Punkte 2, 5; 7, 9 erhält man durch Loten aus 2″, 5″; 7″ 9″. Um ferner z. B. die auf B_2D_2 gelegenen Eckpunkte zu bestimmen, zieht man durch B_2'' eine Parallele zu $A''C'' \parallel x$, welche $A_2''A_3''$, $A_3''A_4''$ in den Punkten K'', H'' schneidet. Die durch K', H' gezogenen Parallelen zu $A_3'C_3'$ schneiden $B_2'D_2'$ in den gesuchten Punkten 1′ und 6′.

Während in der Figur 105 jedes Vielflach aus dem anderen ein Stück ausschnitt, findet hier der Fall der Durchdringung statt: Das Prisma BD durchdringt das Prisma AC.

Man konstruiere die Netze beider Prismen mit den Seiten der Durchdringungsfigur.

122. *Aufgabe.* Die Durchdringung zweier Pyramiden, deren Grundflächen in verschiedenen Ebenen liegen, zu konstruieren.

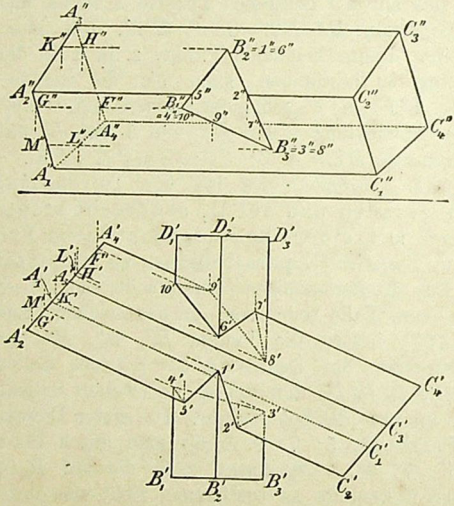

Fig. 107.

Auch bei dieser Aufgabe benutzt man das Kantenverfahren, aber in abgeänderter Weise. Statt der projizierenden Ebenen verwendet man Hilfsebenen, welche durch die Verbindungsgerade g der beiden Pyramidenspitzen S und T gehen. Vorausgesetzt, daß eine solche Ebene beide Pyramiden trifft, schneidet sie ihre Mäntel

in Geraden, welche durch die Pyramidenspitzen gehen. Legt man insbesondere eine solche Ebene durch eine Kante der einen Pyramide, so sind die Punkte, in welchen diese Kante die von der Ebene auf dem Mantel der anderen Pyramide ausgeschnittenen Geraden trifft, Ecken der Schnittfigur beider Pyramiden.

Die Ebenen der Pyramidengrundflächen $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ seien bzw. mit A, B bezeichnet. Die Gerade $g = ST$ treffe die Ebene A in dem Punkte A, die Ebene B in dem Punkte B. Jede durch g gelegte Ebene schneidet A und B in durch A und B gehenden Geraden a, b, welche sich ihrerseits auf der Schnittgeraden s der Ebenen A und B schneiden müssen. Verbindet man andererseits A z. B. mit dem Punkte A_1 und den Schnittpunkt $N = AA_1 \times s$ mit B, so bestimmen die Geraden NA, NB eine durch die Pyramidenkante SA und die beiden Pyramidenspitzen gehende Ebene.

(Fig. 108.) Zunächst bestimmt man A und B nach § 70, I ($C' = A_1' A_2' \times g'$, $D' = A_2' A_3' \times g'$, $A'' = C'' D'' \times g''$; $E' = B_1' B_3' \times g'$, $F' = B_2' B_3' \times g'$, $B'' = E'' F'' \times g''$). Hierauf sind die Projektionen von $s = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ zu ermitteln, was am besten dadurch geschieht, daß man die Durchschnittspunkte von Geraden der einen Ebene mit der anderen Ebene aufsucht. In der Figur ist dies in der Weise ausgeführt, daß (§ 70, I) die Schnittpunkte J von BB_1 mit A und M von AA_3 mit B konstruiert sind ($G' = A_1' A_2' \times B' B_1'$, $H' = A_2' A_3' \times B' B_1'$, $J'' = G'' H'' \times B'' B_1''$; $L' = B_2' B_3' \times A' A_3'$, $K' = B_3' B_1' \times A' A_3'$, $M'' = L'' K'' \times A'' A_3''$; $s' = J' M'$, $s'' = J'' M''$). Um nun die Schnittpunkte der Kante SA_1 mit der anderen Pyramide zu finden, zieht man die Gerade $A' A_1'$, welche s' in N' schneidet; $N' B'$ schneidet die Grundfläche

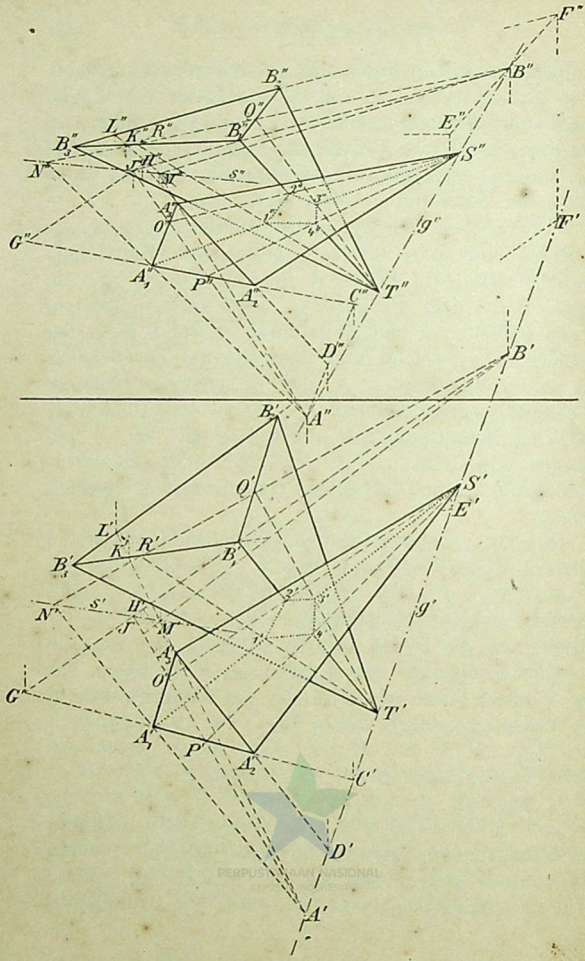
F''
B''
B''
Q''
L''
K''
R''
B''
B''
E''
S''
N''
H''
M''
s''
G''
O''
g''
F'
A''
P''
A''
C''
T''
D'
B'
B'
A''
Q'
S'
E'
L'
K'
R'
B'
B'
N''
s'
H''
M'
g'
G'
O''
T'
A''
P''
A''
C'
D'
A'

Fig. 108.

der anderen Pyramide in R', Q', folglich sind $Q'T'$, $R'T'$ die ersten Projektionen der Mantellinien, in denen die Ebene A_1ST die Pyramide $TB_1B_2B_3$ schneidet. Die Punkte $1' = S'A_1' \times R'T'$, $3' = S'A_1' \times Q'T'$ sind mithin Eckpunkte des Grundrisses der Schnittfigur. Die durch g und A_2, bzw. A_3 gelegten Ebenen schneiden die andere Pyramide überhaupt nicht, da bereits $M'B'(M' = A'A_3' \times s')$ das Dreieck $B_1'B_2'B_3'$ gar nicht trifft. In gleicher Weise verfährt man für die Kanten der Pyramide $TB_1B_2B_3$ (in der Figur für die Kante B_1T durchgeführt; die anderen Kanten liefern keine Schnittpunkte).

Bestimmt man auch die zweiten Projektionen der Eckpunkte in dieser Weise (und nicht durch bloßes Loten aus den ersten Projektionen), so hat man die Kontrolle: $1'1''$, $2'2''$, $\ldots \perp x$.

123. Das Verfahren bleibt auch dann noch anwendbar, wenn die Durchdringung von Pyramide und Prisma oder von zwei Prismen zu konstruieren ist. Da man ein Prisma als Pyramide, deren Spitze im Unendlichen liegt, ansehen kann, so benutzt man im ersteren Falle als Gerade g die durch die Spitze der Pyramide zu den Prismenkanten gezogene Parallele. Die von den Ebenen durch g auf dem Prisma ausgeschnittenen Mantellinien sind den Kanten desselben parallel.

Handelt es sich um die Durchdringung zweier Prismen, so nimmt man Ebenen zu Hilfe, welche durch die Kanten des einen Prismas parallel zu denen des anderen gelegt sind. Alle diese Hilfsebenen sind einander parallel, schneiden also die Ebenen A und B der Prismengrundflächen in parallelen Geraden a, b, von denen sich je zwei zusammengehörige auf $s = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ schneiden. Als Beispiel für diesen Fall diene die

folgende Aufgabe, in welcher noch die Prismengrundfläche A mit Π_1 zusammenfällt.

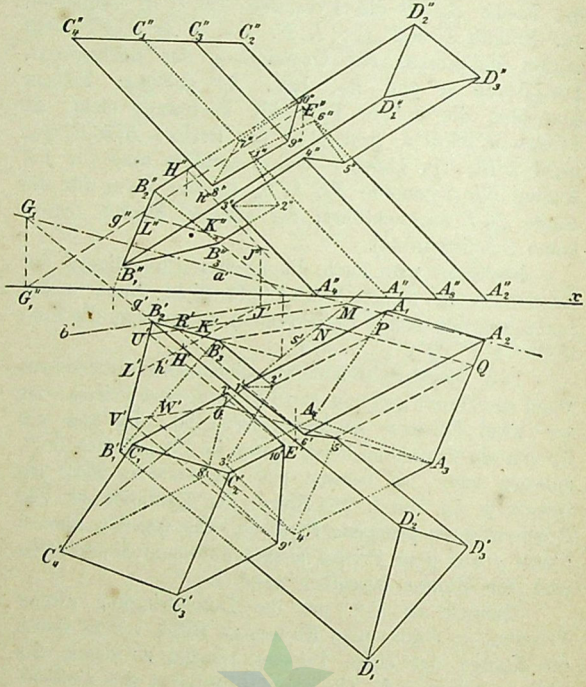

Fig. 109.

124. *Aufgabe.* Es soll die Durchdringung eines auf Π_1 stehenden Prisma mit einem be-

liebig gelegenen anderen Prisma konstruiert werden.

Zunächst bestimmt man die Schnittgerade s der Grundflächen, welche hier mit der ersten Spur der Ebene B identisch ist; s' ist als die Verbindungslinie der ersten Spurpunkte der Seiten $B_1 B_2$, $B_2 B_3$ konstruiert, $s'' = x$. Hierauf ermittelt man die Richtungen von a und b. In der Figur 109 ist a konstruiert als Schnittgerade einer durch $A_2 C_2$ parallel zu den Kanten BD gelegten Ebene (nach § 60, IV: $g' = B_2' D_2'$, $E' = B_2' D_2' \times A_2 C_2'$, $g'' \parallel B_2'' D_2''$ durch E''; $a' = G_1 A_2$) und b als Schnittgerade einer durch $B_2 D_2$ parallel zu den Kanten AC gelegten Ebene (Parallele h zu AC durch den beliebigen Punkt H der Kante $B_2 D_2$, $J = h \times$ B, $b' = B_2' J'$). Hierauf verfährt man weiter wie in § 122 (z. B. $B_3' N \parallel b'$, $NQ \parallel a'$; die Parallelen zu $A_1 C_1'$ durch P und Q liefern auf $B_3' D_3'$ die Eckpunkte 2′, 5′ der Durchdringungsfigur).

125. *Aufgabe.* Es soll die Durchdringung einer Pyramide und eines Prisma, welche beide auf Π_1 stehen, konstruiert werden.

(Flächenverfahren.) Hier verwendet man vorteilhaft das Flächenverfahren, indem man die zu Π_1 parallele Ebene E $(e_2 \parallel x)$ durch die Spitze S der Pyramide zu Hilfe nimmt. E schneidet das Prisma in einer der Grundfläche kongruenten Figur $D_1 D_2 D_3$ (Fig. 110); die Schnittgeraden der Pyramidenflächen mit E gehen durch S und sind den Kanten der Pyramidengrundfläche parallel. Die Schnittlinie der Flächen $A_1 A_2 C_2 C_1$ und $SB_2 B_3$ z. B. erhält man dann als Verbindungslinie von $E = A_1 A_2 \times B_2 B_3$ und $F = D_1 D_2 \times SF$, wo $SF \parallel B_2 B_3$ ($F' = D_1' D_2' \times S' F'$) ist. Da EF die Kanten SB_2, SB_3 der Pyramide innerhalb der

Prismenfläche $A_1 A_2 C_2 C_1$ schneidet, so sind $3 = SB_2 \times EF$ und $4 = SB_3 \times EF$ Ecken und 3 4 ist eine

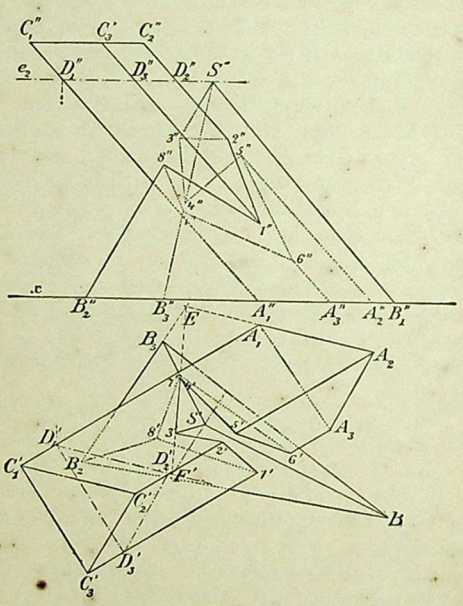

Fig. 110.

Seite der Durchdringungsfigur. In 3 und 4 beginnen die Seiten der Durchdringungsfigur, welche den Schnittlinien derselben Prismenfläche $A_1 A_2 C_2 C_1$ mit den beiden anderen Pyramidenflächen angehören; diese beiden Seiten enden auf der Kante $A_2 C_2$. Fährt man in gleicher Weise

fort, so erhält man den Grundriß der ganzen Durchdringungsfigur.

Kontrolle: Die Durchdringungsfigur muß eine (aus einem oder mehreren Teilen bestehende) geschlossene Figur sein.

Das Flächenverfahren eignet sich auch für die Durchdringung von zwei Prismen oder zwei Pyramiden, wie man sofort erkennt. Es wird aber bei allgemeiner Lage der Vielflache nur dann vorteilhaft angewendet, wenn die Schnitte der Seitenkanten beider Vielflache mit zwei passend gewählten, entweder zu Π_1 oder zu Π_2 parallelen Ebenen zugänglich sind. Zwei Prismen werden von solchen Parallelebenen in kongruenten, zwei Pyramiden in ähnlichen Vielecken geschnitten.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

In unserem Verlage erscheint:

Sammlung Schubert

Sammlung mathematischer Lehrbücher

die erstens auf wissenschaftlicher Grundlage beruhen,
zweitens den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen und
drittens durch eine leichtfaßliche Darstellung des Stoffes auch für den Nichtfachmann verständlich sind.

Wenngleich für jedes der einzelnen Gebiete der Mathematik Lehrbücher genug vorhanden sind, so fehlte es doch bisher an einem auf dem heutigen Standpunkt der Wissenschaft und der Lehrmethoden stehenden Lehrgange der gesamten Mathematik, welcher, **einheitlich angelegt, in systematisch sich entwickelnden Einzel-Darstellungen** alle Gebiete der Mathematik umfaßte. Dieser Umstand bewog uns, die „Sammlung Schubert" ins Leben zu rufen. Dieses Unternehmen soll sich in doppelter Weise brauchbar und nützlich erweisen: einerseits für den Mathematiker, der in Fächern, die nicht zu seiner Spezialität gehören, sich unterrichten oder auch nur nachschlagen will, anderseits für den Techniker und Naturwissenschaftler, dem in leichtfaßlicher Sprache alles geboten wird, was er von der Mathematik für seine besonderen Zwecke wissen muß. Die Form der Darstellung ist so gewählt, daß die einzelnen Bände in gleicher Weise für den Unterricht, wie für den Selbstunterricht oder zur Repetition geeignet sind.

Ausführliche Verzeichnisse unberechnet und postfrei.

Sammlung Göschen In elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Verzeichnis der erschienenen Bände.

	Seite
Astronomie	12
Bau- u. Ingenieurwissenschaften	14
Bibliothekswesen	22
Botanik	10
Chemie	13
Chemische Technologie	13
Elektrotechnik	15
Forstwirtschaft	20
Geologie	10
Geographie	6
Geschichte	4
Gewerbewesen	17
Handelswissenschaft	20
Hygiene	22
Ingenieurwissenschaften	14
Jurisprudenz	16
Kaufmännische Wissenschaften	20
Kristallographie	11
Kunst	19
Landwirtschaft	20
Literaturdenkmäler	3
Literaturgeschichte	3
Mathematik	8
Mechanik	12
Mechanische Technologie	14
Meteorologie	12
Militärwissenschaft	21
Mineralogie	10
Musikwissenschaft	19
Naturwissenschaft	9
Nautik	16
Pädagogik	19
Pharmazie	22
Philosophie	2
Photographie	22
Physik	12
Rechtswissenschaft	16
Religionswissenschaft	18
Soziale Wissenschaften	18
Sprachwissenschaft	2
Staatswissenschaft	16
Stenographie	22
Technologie, chemische	13
Technologie, mechanische	14
Theologie	18
Volkswirtschaft	17
Zeichenkunde	15 u. 19
Zeitungswesen	22
Zoologie	9

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Bibliothek zur Philosophie.

Einführung in die Philosophie von Dr. Max Wentscher, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 281.

Geschichte der Philosophie IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. Bruno Bauch, Privatdoz. an der Univers. Halle a. S. Nr. 394.

Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Professor Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Grundriß der Psychophysik von Professor Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Figuren. Nr. 98.

Ethik von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Allgemeine Ästhetik von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer an der Kgl. Akademie der bildenden Künste in Stuttgart. Nr. 300.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Sprachwissenschaft.

Indogermanische Sprachwissenschaft von Dr. R. Meringer, Professor an der Universität Graz. Mit 1 Tafel. Nr. 59.

Germanische Sprachwissenschaft von Dr. Rich. Loewe in Berlin. Nr. 238.

Romanische Sprachwissenschaft von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Universität Wien. 2 Bände. Nr. 128, 250.

Semitische Sprachwissenschaft von Dr. C. Brockelmann, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 291.

Deutsche Grammatik und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

Deutsche Poetik von Dr. K. Borinski, Professor an der Universität München. Nr. 40.

Deutsche Redelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Nr. 61.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung v. Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

Deutsches Wörterbuch von Dr. Ferd. Detter, Prof. an der Universität Prag. Nr. 64.

Das Fremdwort im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Deutsches Fremdwörterbuch von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 278.

Die deutschen Personennamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.

Englisch-deutsches Gesprächsbuch von Professor Dr. E. Hausknecht in Lausanne. Nr. 424.

Grundriß der lateinischen Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Votsch i. Magdeburg. Nr. 82.

Russische Grammatik von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Universit. Prag. Nr. 66.

Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 68.

Russisches Lesebuch mit Glossar v. Dr. Erich Berneker, Prof. a. d. Univ. Prag. Nr. 67.

Russische Literatur v. Dr. Erich Boehme, Lektor an d. Handelshochschule Berlin.
I. Teil: Auswahl moderner Prosa und Poesie mit ausführlichen Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 403.
— — II. Teil: Всеволодъ Гаршинъ, Разсказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 404.
Geschichte der klassischen Philologie von Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. an der Universität Münster. Nr. 367.

Siehe auch „Handelswissenschaftliche Bibliothek".

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Literaturgeschichtliche Bibliothek.

Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.
Deutsche Literaturgeschichte der Klassikerzeit von Prof. Carl Weitbrecht. Nr. 161.
Deutsche Literaturgeschichte des 19. Jahrhunderts von Carl Weitbrecht. Durchgesehen und ergänzt von Dr. Richard Weitbrecht in Wimpfen. 2 Teile. Nr. 134, 135.
Geschichte des deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.
Gotische Sprachdenkmäler mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.
Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.
Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilh. Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.
Das Walthari-Lied. Ein Heldenfang aus dem 10. Jahrhundert im Versmaße der Urschrift übersetzt u. erläutert v. Prof. Dr. H. Althof in Weimar. Nr. 46.
Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitungen und Wörterbuch herausgegeben von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.
Der Nibelunge Nôt in Auswahl und **mittelhochdeutsche Grammatik** mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. an der Universität Rostock. Nr. 1.
Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Universität Münster. Nr. 10.
Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. a. Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.
Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus **Minnesang und Spruchdichtung.** Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von O. Güntter, Prof. an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.
Die Epigonen des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.
Literaturdenkmäler des 14. und 15. Jahrhunderts, ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. I: **Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

— II: **Hans Sachs.** Ausgewählt u. erläutert v. Professor Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

— III: **Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos und Fabel.** Ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

Deutsche Literaturdenkmäler des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. Paul Legband in Berlin. 1. Teil. Nr. 364.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel von Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeben von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.

Das deutsche Volkslied. Ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Julius Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132.

Englische Literaturgeschichte von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.

Italienische Literaturgeschichte von Dr. Karl Vossler, Prof. an der Universität Heidelberg. Nr. 125.

Spanische Literaturgeschichte von Dr. Rudolf Beer in Wien. 2 Bde. Nr. 167, 168.

Portugiesische Literaturgeschichte von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Prof. an der Königl. Technischen Hochschule München. Nr. 213.

Russische Literaturgeschichte von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

Slavische Literaturgeschichte von Dr. Josef Karásek in Wien. I: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— II: Das 19. Jahrhundert. Nr. 278.

Nordische Literaturgeschichte. I: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 254.

Die Hauptliteraturen des Orients von Dr. Mich. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. I: Die Literaturen Ostasiens und Indiens. Nr. 162.

— II: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken. Nr. 163.

Griechische Literaturgeschichte mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 70.

Römische Literaturgeschichte von Dr. Herm. Joachim in Hamburg. Nr. 52.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Geschichtliche Bibliothek.

Einleitung in die Geschichtswissenschaft von Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Universität Greifswald. Nr. 270.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Universität in Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.

Geschichte des alten Morgenlandes von Dr. Fr. Hommel, o. ö. Prof. der semitischen Sprachen an der Universität in München. Mit 9 Voll- und Textbildern und 1 Karte des Morgenlandes. Nr. 43.

Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Neutestamentliche Zeitgeschichte I: Der historische und kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität Jena. Mit 3 Karten. Nr. 325.

Neutestamentliche Zeitgeschichte II: Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit einer Planskizze. Nr. 326.

Griechische Geschichte von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der Deutschen Univ. Prag. Nr. 49.

Griechische Altertumskunde von Prof. Dr. Rich. Maisch, neubearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

Römische Geschichte von Realgymnasialdirektor Dr. Julius Koch in Grunewald. Nr. 19.

Römische Altertumskunde von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollbild. Nr. 45.

Geschichte des Byzantinischen Reiches von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

Deutsche Geschichte I: Mittelalter (bis 1519) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 33.

— **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1500—1648) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 34.

— **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648 bis 1806) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 35.

Deutsche Stammeskunde von Dr. Rudolf Much, Prof. an der Universität in Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.

Die deutschen Altertümer von Dr. Franz Fuhse, Direktor des Städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abbildungen. Nr. 124.

Abriß der Burgenkunde von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.

Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- und Kunstepen und zum Minnesang. I: Öffentliches Leben. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel u. Abbildungen. Nr. 93.

— II: Privatleben. Mit Abbildungen. Nr. 328.

Quellenkunde zur Deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Universität in Tübingen. 1. Band. Nr. 279.

Österreichische Geschichte. I: Von der Urzeit bis zum Tode König Albrechts II. (1439) von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 11 Stammtafeln. Nr. 104.

— **II:** Vom Tode König Albrechts II. bis zum Westfälischen Frieden (1440 bis 1648) von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Universität Graz. Mit 2 Stammtafeln. Nr. 105.

Englische Geschichte von Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.

Französische Geschichte von Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Univ. Berlin. Nr. 85.

Russische Geschichte von Dr. Wilhelm Reeb, Oberlehrer am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

Polnische Geschichte von Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.

Spanische Geschichte von Dr. Gust. Diercks. Nr. 266.

Schweizerische Geschichte v. Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.

Geschichte der christlichen Balkanstaaten (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

Bayerische Geschichte von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

Geschichte Frankens von Dr. Christian Meyer, Kgl. preuß. Staatsarchivar a. D. in München. Nr. 434.

Sächsische Geschichte von Prof. Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.

Thüringische Geschichte von Dr. Ernst Devrient in Jena. Nr. 352.

Badische Geschichte von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

Geschichte Lothringens von Geh. Reg.-R. Dr. Herm. Derichsweiler in Straßburg. Nr. 6.

Die Kultur der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.

Geschichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Universität Bonn. 1. Bändchen: 1800—1852. Nr. 216.

— 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Prof. der Geschichte an der Univ. Berlin. Nr. 156.

Die Seemacht in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Geographische Bibliothek.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Klimakunde. I: **Allgemeine Klimalehre** von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln u. 2 Figuren. Nr. 114.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Professor a. d. Universität in Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.

Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abb. im Text u. 8 Tafeln. Nr. 112.

Paläogeographie. Geologische Geschichte der Meere u. Festländer v. Dr. Franz Kossmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.

Das Eiszeitalter von Dr. Emil Werth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.

Die Alpen von Dr. Rob. Sieger, Prof. an der Universität Graz. Mit 19 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 129.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univers. Berlin. Nr. 389.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen u. Profil. Nr. 63.

Landeskunde und Wirtschaftsgeographie des Festlandes Australien von Dr. Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 8 Abbildungen, 6 graphischen Tabellen und 1 Karte. Nr. 319.

— **von Baden** von Professor Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der Königl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 176.

— **der Republik Brasilien** von Rodolpho von Ihering. Mit 12 Abbildungen und einer Karte. Nr. 373.

— **von Britisch-Nordamerika** von Professor Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 284.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 215.

— **des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck** von Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

— **der Iberischen Halbinsel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte im Farbendruck. Nr. 235.

— **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Professor an der Universität Berlin. Mit 10 Textillustrationen und 1 Karte. Nr. 244.

— **der Rheinprovinz** von Dr. B. Steinecke, Direktor des Realgymnasiums in Essen. Mit 9 Abb., 3 Kärtchen und 1 Karte. Nr. 308.

— **des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Dr. Alfred Philippson, ord. Prof. der Geographie an der Universität Halle a. S. Mit 9 Abbildungen, 7 Textkarten und einer lithographischen Karte. Nr. 359.

— **des Königreichs Sachsen** von Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnasium in Plauen. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 258.

— **der Schweiz** von Professor Dr. H. Walser in Bern. Mit 16 Abbildungen und einer Karte. Nr. 398.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Heinrich Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 202.

— **der Vereinigten Staaten von Nordamerika** von Prof. Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädtischen Realgymnasium in Berlin. Mit Karten, Figuren im Text und Tafeln. 2 Bändchen. Nr. 381, 382.

— **des Königreichs Württemberg** von Dr. Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.

Landes- und Volkskunde Palästinas von Privatdozent Dr. G. Hölscher in Halle a. S. Mit 8 Vollbildern und einer Karte. Nr. 345.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 56 Abbildungen. Nr. 73.

Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo, F. Sauter, Professor am Realgymnasium in Ulm und Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin, neu bearbeitet von Dr. M. Groll, Kartograph in Berlin. Mit 71 Abbildungen. Nr. 30.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Mathematische Bibliothek.

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Algebraische Kurven von Eugen Beutel, Oberrealleherer in Vaihingen-Enz. I: Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.

Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Ebene Geometrie mit 110 zweifarb. Figuren von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 41.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Dr. Rob. Haußner, Prof. an der Universität Jena. Nr. 142.

— — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Fig. von Dr. Gerhard Hessenberg, Professor an der Landwirtschaftl. Akademie Bonn-Poppelsdorf. Nr. 99.

Stereometrie mit 44 Figuren von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Nr. 97.

Niedere Analysis mit 6 Fig. von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Nr. 53.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Professor Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Fig. von O. Th. Bürklen, Professor am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Fig. von O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Nr. 309.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 87.

— **II: Integralrechnung** mit 89 Figuren von Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 88.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung mit 46 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung mit 52 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 147.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Dr. K. Doehlemann, Prof. an der Universität München. Nr. 72.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Universität Freiburg i. Br. Nr. 180.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit 15 Fig. und 2 Tafeln von Wilh. Weitbrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Nr. 302.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Nr. 92.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbildungen. Nr. 91.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearb. von Dr. W. F. Wislicenus, Prof. an der Univ. Straßburg. Mit 36 Abbildungen und 1 Sternkarte. Nr. 11.

Geodäsie mit 66 Abbildungen von Dr. C. Reinhertz, Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. Nr. 102.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde mit 56 Abbildungen von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Nr. 84.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der Kgl. Baugewerkschule zu Münster i. W. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung. Gleichzeitig macht die Verlagshandlung auf die „Sammlung Schubert", eine Sammlung mathematischer Lehrbücher, aufmerksam. Ein vollständiges Verzeichnis dieser Sammlung, sowie ein ausführlicher mathematischer Katalog der G. J. Göschen'schen Verlagshandlung können kostenfrei durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Naturwissenschaftliche Bibliothek.

Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Universität Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos der ethnogr. Sammlung des naturhistor. Hofmuseums u. Privatdozent an der Universität Wien. Mit 51 Abbildungen. Nr. 73.

Tierkunde von Dr. Franz v. Wagner, Prof. an der Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Abriß der Biologie der Tiere von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Nr. 131.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Das Tierreich. I: Säugetiere, von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.

Das Tierreich. III: Reptilien und Amphibien. Von Dr. Franz Werner, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 48 Abbildungen. Nr. 383.

— **IV: Fische,** von Dr. Max Rauther, Privatdozent der Zoologie an der Universität Gießen. Mit 37 Abbildungen. Nr. 356.

— **VI: Die wirbellosen Tiere** von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. der Zoologie an der Universität Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Figuren. Nr. 439.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johs. Meisenheimer, Professor der Zoologie an der Universität Marburg. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— **II:** Organbildung. Mit 46 Figuren. Nr. 379.

Schmarotzer und Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde von Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Graz. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.

Geschichte der Zoologie von Dr. Rud. Burckhardt, weil. Direktor der Zoologischen Station des Berliner Aquariums in Rovigno (Istrien). Nr. 357.

Die Pflanze, ihr Bau und ihr Leben von Professor Dr. E. Dennert in Godesberg. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Das Pflanzenreich. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Fig. Nr. 122.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 127.

Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univers. Berlin. Nr. 389.

Morphologie, Anatomie und Physiologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.

Die Pflanzenwelt der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit 100 Abbildungen. Nr. 268, 269.

Die Nadelhölzer von Prof. Dr. F. W. Neger in Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. der Großh. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Das System der Blütenpflanzen mit Ausschluß der Gymnospermen von Dr. R. Pilger, Assistent am Kgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 31 Figuren. Nr. 393.

Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedrich Bruck in Gießen. Mit 1 farb. Tafel und 45 Abbildungen. Nr. 310.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Professor an d. Universität Bonn. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.

Geologie in kurzem Auszug für Schulen und zur Selbstbelehrung zusammengestellt von Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbildungen und 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.

Paläontologie von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

Petrographie von Dr. W. Bruhns, Professor an der Universität Straßburg i. E. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.

Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 190 Abbildungen. Nr. 210.

Geschichte der Physik von A. Kistner, Prof. an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Figuren. Nr. 293.

— II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Nr. 294.

Theoretische Physik. I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 19 Abb. Nr. 76.

— II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— IV. Teil: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.

Radioaktivität von Wilh. Frommel. Mit 18 Figuren. Nr. 317.

Physikalische Messungsmethoden von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

Geschichte der Chemie von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

Anorganische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

Metalloide (Anorganische Chemie I. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Metalle (Anorganische Chemie II. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Organische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.

— III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

Analytische Chemie von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Professor an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Allgemeine und physikalische Chemie von Dr. Max Rudolphi, Professor an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

Elektrochemie von Dr. Heinrich Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Figuren. Nr. 252.

— II: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Figuren. Nr. 253.

Agrikulturchemie. I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Prof. an der Universität Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.

Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbildungen und 3 Tafeln. Nr. 175.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. W. F. Wislicenus, Prof. an der Univ. Straßburg. Mit 36 Abbildungen und 1 Sternkarte. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Univers. Straßburg. Mit 11 Abbildungen. Nr. 91.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Fig. Nr. 114.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Physik.

Geschichte der Physik von A. Kistner, Professor an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

— II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 13 Figuren. Nr. 294.

Theoretische Physik von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule Wien. I: Mechanik und Akustik. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

— II: Licht und Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— III: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

— IV: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Figuren. Nr. 374.

Radioaktivität von Wilh. Frommel. Mit 18 Figuren. Nr. 317.

Physikalische Meßungsmethoden von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Chemie.

Geschichte der Chemie von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.
— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.
Anorganische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.
Metalloide (Anorganische Chemie I) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.
Metalle (Anorganische Chemie II) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.
Organische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.
Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I, II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.
— III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.
— IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.
Analytische Chemie von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.
— II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.
Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.
Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.
Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Professor an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.
Allgemeine und physikalische Chemie von Dr. Max Rudolphi, Professor an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Fig. Nr. 71.
Elektrochemie von Dr. Heinrich Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie u. ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Fig. Nr. 252.
— II: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Figuren. Nr. 253.
Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.
Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.
Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
— II: Dissimilation. Mit 1 Tafel. Nr. 241.

☞ Siehe auch „Technologie". Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Technologie.

Chemische Technologie.

Allgemeine chemische Technologie v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.
Die Fette und Öle sowie die **Seifen- und Kerzenfabrikation** und die **Harze, Lacke, Firnisse** mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun. I: Einführung in die Chemie, Besprechung einiger Salze und die Fette und Öle. Nr. 335.
— II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbildungen. Nr. 336.
— III: Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

Die Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Neubabelsberg. Mit 16 Abbildungen. Nr. 333.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor der Brauer- und Mälzerschule in Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.

Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe von Dipl.-Ing. Dr. Ernst Leher. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.

Anorganische chemische Industrie von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.

— II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Taf. Nr. 206.

— III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

Metallurgie von Dr. Aug. Geitz. 2 Bde. Mit 21 Fig. Nr. 313, 314.

Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gustav Rauter. I: Glas- und keramische Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.

— II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Taf. Nr. 234.

Die Teerfarbstoffe mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Mechanische Technologie.

Mechanische Technologie von Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke in Braunschweig. Nr. 340, 341.

Textil-Industrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Fig. Nr. 184.

— II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

— III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textil-Industrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zu den Bau- u. Ingenieurwissenschaften

Das Rechnen in der Technik u. seine Hilfsmittel (Rechenschieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ingenieur Joh. Eugen Mayer in Karlsruhe i. B. Mit 30 Abb. Nr. 405.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik der Materialprüfung von K. Memmler, Diplom-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am Kgl. Materialprüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.

— II: Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Figuren. Nr. 312.

Metallographie. Kurze, gemeinfaßliche Darstellung der Lehre von den Metallen und ihren Legierungen, unter besonderer Berücksichtigung der Metallmikroskopie von Prof. E. Heyn und Prof. O. Bauer am Kgl. Materialprüfungsamt (Groß-Lichterfelde) der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. I: Allgemeiner Teil. Mit 45 Abbildungen im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.

— II: Spezieller Teil. Mit 49 Abbildungen im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.

Statik. I: Die Grundlehren der Statik starrer Körper von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 82 Figuren. Nr. 178.

— II: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Festigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 56 Figuren. Nr. 288.

Hydraulik v. W. Hauber, Diplom-Ingenieur in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 397.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neubearbeitet von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Schattenkonstruktionen von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Fig. Nr. 236.

Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.

Zentral-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der Kgl. Baugewerkschule in Münster i. W. Mit 132 Figuren. Nr. 57.

Technisches Wörterbuch, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin.
I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.

— II. Teil: Englisch-Deutsch. Nr. 396.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor an der Königlich Technischen Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 42 Fig. u. 10 Taf. Nr. 196.

— II: Die Gleichstromtechnik. Mit 103 Figuren und 16 Tafeln. Nr. 197.

— III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.

Die Gleichstrommaschine von C. Kinzbrunner, Ingenieur u. Dozent für Elektrotechnik a. d. Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Fig. Nr. 257.

Das Fernsprechwesen von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.

Die elektrische Telegraphie von Dr. Ludwig Rellstab. Mit 19 Figuren. Nr. 172.

Maurer- u. Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.

Eisenkonstruktionen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch mit Beispielen von Ingenieur Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.

Der Eisenbetonbau von Reg.-Baumeister Karl Rößle in Berlin-Steglitz. Mit 77 Abbildungen. Nr. 349.

Heizung und Lüftung von Ingenieur Johannes Körting, Direktor der Akt.-Ges. Gebrüder Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.

— II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Fig. Nr. 343.

Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen von Professor Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.

Das Veranschlagen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen des Kostenanschlages von Emil Beutinger, Architekt B. D. A., Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Figuren. Nr. 385.

Bauführung. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen der Bauführung von Architekt Emil Beutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 25 Figuren und 11 Tabellen. Nr. 399.

Öffentliche Bade- und Schwimmanstalten von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

Die Maschinenelemente. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Figuren. Nr. 3.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, diplomierter Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Figuren und 4 Tafeln. Nr. 152.

— II: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Technische Wärmelehre (Thermodynamik) von K. Walther und M. Röttinger, Diplom-Ingenieuren. Mit 54 Figuren. Nr. 242.

Die Dampfmaschine. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Figuren. Nr. 8.

Die Dampfkessel. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Figuren. Nr. 9.

Die Gaskraftmaschinen. Kurzgefaßte Darstellung der wichtigsten Gasmaschinen-Bauarten v. Ingenieur Alfred Kirschke in Halle a. S. Mit 55 Figuren. Nr. 316.

Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda, Professor am staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abbildungen. Nr. 274.

Die zweckmäßigste Betriebskraft von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. I: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 14 Abbildungen. Nr. 224.

— II: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbildungen. Nr. 225.

Die Hebezeuge, ihre Konstruktion und Berechnung von Ingenieur Hermann Wilda, Prof. am staatl. Technikum in Bremen. Mit 399 Abbildungen. Nr. 414.

Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit 59 Abbildungen. Nr. 290.

Die landwirtschaftlichen Maschinen von Karl Walther, Diplom-Ingenieur in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 407—409.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zu den Rechts- u. Staatswissenschaften.

Allgemeine Rechtslehre von Dr. Th. Sternberg, Privatdozent an der Univers. Lausanne. I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 324.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Professor an der Univ. Göttingen. Nr. 305.

Deutsches Zivilprozeßrecht von Professor Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. Nr. 428—430. 3 Bände.

Das deutsche Seerecht von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. 2 Bände. Nr. 386, 387.

Postrecht von Dr. Alfred Wolcke, Postinspektor in Bonn. Nr. 425.

Allgemeine Staatslehre von Dr. Hermann Rehm, Prof an der Universität Straßburg i. E. Nr. 358.

Allgemeines Staatsrecht von Dr. Julius Hatschek, Prof. der Rechte an der Kgl. Akademie in Posen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.

Preußisches Staatsrecht von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univers. Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.

Kirchenrecht von Dr. Emil Sehling, ord. Prof. der Rechte in Erlangen. Nr. 377.

Das deutsche Urheberrecht an literarischen, künstlerischen und gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Der internationale gewerbliche Rechtsschutz von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Das Urheberrecht an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken der bildenden Künste und der Photographie von Staatsanwalt Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

Das Warenzeichenrecht. Nach dem Gesetz zum Schutz der Warenbezeichnungen vom 12. Mai 1894 von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamtes zu Berlin. Nr. 360.

Der unlautere Wettbewerb von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. Nr. 339.

Deutsches Kolonialrecht von Dr. H. Edler v. Hoffmann, Professor an der Kgl. Akademie Posen. Nr. 318.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Deutsche Wehrverfassung von Kriegsgerichtsrat Carl Endres i. Würzburg. Nr. 401.

Forensische Psychiatrie von Prof. Dr. W. Weygandt, Direktor der Irrenanstalt Friedrichsberg in Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Volkswirtschaftliche Bibliothek.

Volkswirtschaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Tübingen. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 177.

Gewerbewesen von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. 2 Bände. Nr. 203, 204.

Das Genossenschaftswesen in Deutschland. Von Dr. Otto Lindecke, Sekretär des Hauptverbandes deutscher gewerblicher Genossenschaften. Nr. 384.

Das Handelswesen von Dr. Wilh. Lexis, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

Das Handelswesen von Dr. Wilh. Lexis, Professor an der Universität Göttingen. II. Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Auswärtige Handelspolitik von Dr. Heinrich Sieveking, Professor an der Universität Zürich. Nr. 245.

Das Versicherungswesen von Dr. jur. Paul Moldenhauer, Dozent der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.

Die gewerbliche Arbeiterfrage von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Die Arbeiterversicherung von Professor Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Finanzwissenschaft von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. I. Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— II. Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

Die Steuersysteme des Auslandes von Geh. Oberfinanzrat O. Schwarz in Berlin. Nr. 426.

Die Entwicklung der Reichsfinanzen von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 427.

Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Die Entwicklung der sozialen Frage von Prof. Dr. Ferd. Tönnies in Eutin. Nr. 353.

Armenwesen und Armenfürsorge. Einführung in die soziale Hilfsarbeit von Dr. Adolf Weber, Professor an der Handelshochschule Köln. Nr. 346.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Theologische und religionswissenschaftliche Bibliothek.

Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität Jena. Nr. 272.

Alttestamentliche Religionsgeschichte von D. Dr. Max Löhr, Professor an der Universität Breslau. Nr. 292.

Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Landes- u. Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 345.

Die Entstehung d. Neuen Testaments v. Prf. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

Die Entwicklung der christlichen Religion innerhalb des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 388.

Neutestamentliche Zeitgeschichte von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität Jena. I: Der historische u. kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums. Nr. 325.

— II: Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Nr. 326.

Abriß der vergleichenden Religionswissenschaft von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Indische Religionsgeschichte von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Griechische und römische Mythologie von Dr. Hermann Steuding, Rektor des Gymnasiums in Schneeberg. Nr. 27.

Germanische Mythologie von Dr. E. Mogk, Prof. an der Univ. Leipzig. Nr. 15.

Die deutsche Heldensage von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 32.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Pädagogische Bibliothek.

Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität in Jena. Nr. 12.

Geschichte der Pädagogik von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.

Das öffentliche Unterrichtswesen Deutschlands in der Gegenwart von Dr. Paul Stößner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.

Geschichte des deutschen Unterrichtswesens von Professor Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Königlichen Gymnasiums zu Luckau. I: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— II: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Das deutsche Fortbildungsschulwesen nach seiner geschichtlichen Entwicklung und in seiner gegenwärtigen Gestalt von H. Sierck, Direktor der städt. Fortbildungsschulen in Heide i. Holstein. Nr. 392.

Die deutsche Schule im Auslande von Hans Amrhein, Direktor der deutschen Schule in Lüttich. Nr. 259.

Zeichenschule von Professor K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- u. Golddruck u. 200 Voll- u. Textbildern. Nr. 39.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbildungen. Nr. 96.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Kunst.

Geschichte der Malerei I. II. III. IV. V. von Dr. Rich. Muther, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 107—111.

Stilkunde von Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbildern und 195 Textillustrationen. Nr. 80.

Die Baukunst des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbildungen. Nr. 74.

Die Plastik des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Direktor des Bayr. Nationalmuseums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

Die Plastik seit Beginn des 19. Jahrhunderts von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern auf amerikanischem Kunstdruckpapier. Nr. 321.

Die graphischen Künste v. Carl Kampmann, k. k. Lehrer an der k. k. Graphischen Lehr- u. Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbild. u. Beilagen. Nr. 75.

Die Photographie von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbildungen. Nr. 94.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Musik.

Allgemeine Musiklehre von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Musikalische Akustik von Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbildungen. Nr. 21.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre) von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149, 150.

Kontrapunkt. Die Lehre von der selbständigen Stimmführung von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 390.

Fuge. Erläuterung und Anleitung zur Komposition derselben von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.

Instrumentenlehre von Musikdirektor Franz Mayerhoff in Chemnitz. I: Text. II: Notenbeispiele. Nr. 437, 438.

Musikästhetik von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Geschichte der alten und mittelalterlichen Musik von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbildungen und Musikbeilagen. I. II. Nr. 121, 347.

Musikgeschichte des 17. u. 18. Jahrhunderts v. Dr. K. Grunsky i. Stuttgart. Nr. 239.

— **seit Beginn des 19. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Land- und Forstwirtschaft.

Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Berlin und Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.

Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.

Allgemeine und spezielle Tierzuchtlehre von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.

Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Graner. Nr. 329.

Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Fischerei und Fischzucht von Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Forstwissenschaft von Dr. Ad. Schwappach, Prof. an der Forstakadem. Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation d. forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Handelswissenschaftliche Bibliothek.

Buchführung in einfachen und doppelten Posten von Prof. Robert Stern, Oberlehrer der Öffentlichen Handelslehranstalt und Dozent der Handelshochschule zu Leipzig. Mit Formularen. Nr. 115.

Deutsche Handelskorrespondenz von Prof. Th. de Beaux, Offizier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 182.

Französische Handelskorrespondenz von Professor Th. de Beaux, Offizier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 183.

Englische Handelskorrespondenz von E. E. Whitfield, M.-A., Oberlehrer am King Edward VII Grammar School in Kings Lynn. Nr. 237.

Italienische Handelskorrespondenz von Professor Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königlichen Institut SS. Annunziata zu Florenz. Nr. 219.

Spanische Handelskorrespondenz v. Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.

Russische Handelskorrespondenz von Dr. Th. v. Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.

Kaufmännisches Rechnen von Prof. Richard Just, Oberlehrer an d. Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. 3 Bde. Nr. 139, 140, 187.

Warenkunde von Dr. Karl Hassack, Professor an der Wiener Handelsakademie.
I: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.
— II: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.

Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Das Wechselwesen von Rechtsanwalt Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung. Siehe auch „Volkswirtschaftliche Bibliothek". Ein ausführliches Verzeichnis der außerdem im Verlage der G. J. Göschen'schen Verlagshandlung erschienenen handelswissenschaftlichen Werke kann durch jede Buchhandlung kostenfrei bezogen werden.

Militärwissenschaftliche Bibliothek.

Das moderne Feldgeschütz. I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850—1890. v. Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 1 Abbild. Nr. 306.
— II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 11 Abbildungen. Nr. 307.

Die modernen Geschütze der Fußartillerie. I: Vom Auftreten der gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890 von Mummenhoff, Major beim Stabe des Fußartillerie-Regiments, Generalfeldzeugmeister (Brandenburgisches Nr. 3). Mit 50 Textbildern. Nr. 334.
— II: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.

Die Entwicklung der Handfeuerwaffen seit der Mitte des 19. Jahrhunderts und ihr heutiger Stand von G. Wrzodek, Oberleutnant im Inf.-Regt. Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posensches) Nr. 59 und Assistent der Königl. Gewehrprüfungskommission. Mit 21 Abbildungen. Nr. 366.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Kriegsgerichtsrat bei dem Generalkommando des Kgl. bayr. II. Armeekorps in Würzburg. Nr. 401.

Die Seemacht in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

Verschiedenes.

Bibliotheks- und Zeitungswesen.

Volksbibliotheken (Bücher- und Lesehallen), ihre Einrichtung und Verwaltung von Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

Das deutsche Zeitungswesen v. Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 400.

Das moderne Zeitungswesen (System der Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

Allgemeine Geschichte des Zeitungswesens von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Hygiene und Pharmazie.

Die Infektionskrankheiten und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fiebertafel. Nr. 327.

Tropenhygiene von Med.-Rat Prof. Dr. Nocht, Direktor des Institutes für Schiffs- u. Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Die Hygiene des Städtebaus von H. Chr. Nußbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 30 Abbildungen. Nr. 348.

Die Hygiene des Wohnungswesens von H. Chr. Nußbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 20 Abbildungen. Nr. 363.

Gewerbehygiene von Geh. Medizinalrat Dr. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig u. Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Photographie.

Die Photographie. Von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Taf. und 52 Abbild. Nr. 94.

Stenographie.

Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.

Die Redeschrift des Gabelsbergerschen Systems von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.

Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken und einem Anhang von Dr. Amsel, Studienrat des Kadettenkorps in Bensberg. Nr. 86.

☞ Weitere Bände dieser einzelnen Abteilungen sind in Vorbereitung.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig

Soeben erschien:

DIE ZEICHENKUNST

METHODISCHE DARSTELLUNG DES GESAMTEN ZEICHENWESENS

UNTER MITWIRKUNG HERVORRAGENDER FACHMÄNNER

HERAUSGEGEBEN VON

KARL KIMMICH

ZWEITE VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE

MIT 1157 ABBILDUNGEN IM TEXT UND 60 TAFELN IN FARBEN- UND LICHTDRUCK

23 LIEFERUNGEN à M. 1.— UND 2 EINBANDDECKEN à M. 1.— ODER KOMPLETT IN 2 ORIGINAL-LEINENBÄNDEN M. 25.—, PROBEHEFT MIT 48 SEITEN TEXT UND 4 TAFELN 20 PF.

