GRENSWAARDEN

EENE INLEIDING TOT DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

DOOR

Dr. W. L. VAN DE VOOREN



Lemb. Keb. Ind.
Kon. Bat. Gen.
V-67

HOFF N.V. - GRONINGEN-BATAVIA

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH

NIEUWE SCHOOLALGEBRA, 1ste—6de drukken. Vier gebonden deelen. Prijs per deel . . . . . *f* 2.25
Antwoorden per deel. . . . . - 1.—
Grafiekenschrift . . . . . - 0.50

Op de eigen, frissche, oorspronkelijke manier geschreven, die alle boeken van Wijdenes kenmerkt. Bovendien waarborgt de naam van dr. H. J. E. Beth ons, dat de inhoud boven allen lof verheven is. Het vierde deel behandelt de eerste beginselen der differentiaal- en integraalrekening en de uitbreiding van het getalbegrip, uitgaande van het rationale gebied. De behandeling is schitterend.
A. H. *Correspondentieblad C. O*

P. WIJDENES

ALGEBRAISCHE VRAAGSTUKKEN. Twee gebonden deelen,
Prijs deel I, 7de druk . . . . . *f* 2.25
Prijs deel II, 6de druk. . . . . - 3.25
Antwoorden bij deel I . . . . . - 1.—
Antwoorden bij deel II . . . . . - 1.50
Volledige uitwerkingen der logarithmenvraagstukken gratis.

P. WIJDENES

TEEKENBLADEN VOOR GRAFISCHE VOORSTELLINGEN.
Verzameling van 30 kwarto-bladen, 2 mm-papier, in portefeuille . . . . . *f* 1.20
100 vel los *f* 2.90; 200 vel *f* 5.20; 300 vel. . . . . - 7.20

P. WIJDENES

FUNCTIES EN GRAFIEKEN en eenige theorie van de algebra . . . . . *f* 1.25

P. WIJDENES

LAGERE ALGEBRA, deel I, 3de druk, gebonden . . . . *f* 5.50
deel II, 2de druk, gebonden . . . . . - 8.50
Antwoorden per deel. . . . . - 2.—
Aanvulling op 2de druk antwoorden deel II . . . . . - 0.40

De stof is wetenschappelijk en toch zeer helder behandeld en daarom is deze uitgave voor de studie wiskunde l. o. een van de mooiste, die ik ken. Voor candidaten, die studeeren voor de akte wiskunde l. o. is dit het aangewezen boek. *Het kath. schoolblad N. O. I.*

Dit is het boek, dat tegenwoordig wel het meest gebruikt wordt bij de studie voor examen wiskunde l. o. Het bevat een uitmuntende verzameling vraagstukken. *De Nederlander.*

Dr. W. L. VAN DE VOOREN

GRENSWAARDEN. Een inleiding tot de differentiaal- en integraalrekening . . . . . *f* 2.30
gebonden. . . . . - 3.—
Antwoorden. . . . . - 0.50

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

96 hal Rp - 298920.-

Dr. B. P. HAALMEYER

LEERBOEK DER VLAKKE MEETKUNDE. Twee deelen, met vraagstukken, 2de druk, ingenaaid à *f* 2.10, geb... à *f* 2.50

Kenmerkend voor het leerboek — en dit is een van zijn groote verdiensten — is een nimmer aflatend streven naar een strengen opbouw en naar een exact woordgebruik. Maar we vinden — en dit is een stellig niet geringere verdienste — dit streven op verstandige wijze gematigd, omdat het boek voor eerstbeginnende jeugdige leerlingen bedoeld is. De vorm der bewijzen en der constructies is onberispelijk en echt wiskundig sober. Stijl en woordenkeus zijn natuurlijk en eenvoudig. De schrijver heeft de vakgenooten zeer aan zich verplicht.
Dr. H. J. E. Beth. *Weekblad gymn. en midd. onderwijs*

Met zeer veel genoegen kondig ik de verschijning van dit werk aan. Het vereenigt in zich tal van voortreffelijke eigenschappen en behoort stellig tot de beste meetkunde-boeken voor onze leerlingen. De schrijver is er m.i. goed in geslaagd, en dat is geen kleinigheid, om een werk te leveren, dat, streng van opzet, en nauwkeurig in de definities, toch voor onze jongens behoorlijk verteerbaar is.
De uitvoering is, vooral door de forschheid der figuren, zeer aantrekkelijk.
W. J. *St. Bonaventura.*

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE

VLAKKE MEETKUNDE. Twee gecartonneerde deelen. 9de en 8ste druk. Prijs per deel . . . . . *f* 2.25
met gratis gradenboog en formules.

De overgroote bijval van de schoolwerken van Wijdenes en De Lange zijn een meer dan sprekend bewijs, dat hun inhoud degelijk is. Deze meetkunde is denkelijk de meest verspreide in Nederland en ook de beste, die wij van onze noorderburen te lezen kregen.
Boekengids.

Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES

PLANIMETRIE voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs. Twee deelen, 2de druk, gecartonneerd. . . à *f* 1.90

Dit werk is geschoeid op de leest van de zoogenaamde nieuwere meetkunde. Positieve en negatieve toestand van lijnen, harmonische ligging van punten, de theorema's van Menelaüs en de Ceva, gelijk vormigheidspunten, de volledige vierzij, machtlijnen en poollijnen, etc., het wordt er allemaal in behandeld. Dat het oudere, voor een schoolboek onmisbare niet ontbreekt, spreekt vanzelf. Het geheel maakt een uitnemenden indruk.
R. v. W. *De school met den Bijbel.*

De onderwerpen zijn uitstekend behandeld, de figuren keurig verzorgd. Een groot aantal vraagstukken volgt op elk hoofdstuk.
R. K. studiebelangen.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES

VLAKKE DRIEHOEKSMETING voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs, 2de druk. Prijs, gecartonneerd met formuleblad. . . . . *f* 2.25
Antwoorden. . . . . - 0.60

J. VERSLUYS

VLAKKE DRIEHOEKSMETING met vraagstukken, herzien door Dr. O. Postma. 18de druk. Prijs, gecartonneerd . . . *f* 2.—
Antwoorden. . . . . - 0.50

J. VAN DE GRIEND Jr.

TRIGONOMETRISCHE VRAAGSTUKKEN, met beknopte theorie, 3de druk . . . . . *f* 1.90
Antwoorden.. . . . . - 0.75

P. WIJDENES

BEKNOPTE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE, 2de druk. Prijs, gecartonneerd . . . . . *f* 2.—

Bij de bewerking van de tweede druk zijn zulke ingrijpende veranderingen aangebracht, dat het werkje als het ware geheel nieuw is.

Bij onderzoek blijkt gemakkelijk, dat het beknopte leerboek van Wijdenes door de bondige, stelselmatige en nauwkeurige behandelingswijze, de duidelijke uiteenzetting en de overvloed van goed gekozen, keurig uitgewerkte voorbeelden en oefenstof voor de leerlingen, tot de beste van zijn soort behoort.
Dr. H. J. E. Beth. *Weekbl. gymn. en m. o.*

Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES

STEREOMETRIE voor middeblaar en voorbereidend hooger onderwijs. 3de druk. Prijs, gecartonneerd met overz. *f* 2.75
Antwoorden. . . . . - 0.50

J. VERSLUYS — J. H. SCHOGT

LEERBOEK DER STEREOMETRIE, 12de druk, gecart. *f* 2.90
Antwoorden, 2de druk. . . . . - 0.50

Dr. D. J. E. SCHRECK

BEGINSELEN DER ANALYTISCHE MEETKUNDE. Met gratis antwoorden. 3de druk. Prijs ingenaaid. . . . . *f* 2.75
gebonden. . . . . - 3.25

Dit is wel het beste boek dat bij het onderwijs op het gymnasium gebruikt kan worden. De heldere uiteenzetting, de duidelijke figuren en de prettige druk vormen hier een fraai geheel.
W. J. *S t . Bonaventura.*

Zij die als inleiding voor grootere werken de studie der analytische meetkunde beginnen, kunnen niet beter doen, dan eerst dit boek ter hand te nemen.
S. *De katholieke school.*

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

V - 67

GRENSWAARDEN

EENE INLEIDING TOT DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

DOOR

Dr. W. L. VAN DE VOOREN,

LEERAAR AAN EEN G. H. B. S. MET 5-J. C.
EN G. LYCEUM TE 's GRAVENHAGE.

TWEEDE DRUK



DEP. PENGADJARAN
BAGIAN
PERPOESTAKAAN
DJAKARTA

P. NOORDHOFF N.V. — 1934 — GRONINGEN-BATAVIA

KON. BAT. GENOOTSCHAP VAN K. EN W.

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

VOORBERICHT.

Reeds van vele zijden is gedurende de laatste jaren de wenschelijkheid betoogd de Differentiaal- en Integraalrekening als leervak op de H. B. S. in te voeren.

Behalve voor den toekomstigen wis- en natuurkundige, is het ook voor den staathuishoudkundige, bioloog, medicus en ingenieur van onschatbare waarde reeds vroeg het begrip „differentiaalquotient" en „integraal" tot zijn eigendom gemaakt te hebben.

In het eerste gedeelte van het voorliggend boekje heb ik getracht deze beide grondbegrippen, uitgaande van hetgeen in de lagere wiskunde behandeld is, onder het bereik van den leerling te brengen; in het tweede gedeelte heb ik de theorie toegepast op enkele onderwerpen, die meerendeels reeds in de wis- en natuurkunde en werktuigkunde behandeld worden, maar nu in hun onderlinge samenhang ter sprake gebracht worden.

Opdat de deskundige zich met een enkele blik op de hoogte kan stellen van de behandelde stof en de gevolgde methode, doe ik een kort overzicht voorafgaan, dat waarschijnlijk ook goede diensten kan bewijzen aan de leerlingen, die het werkje eenmaal doorgewerkt hebben.

Gaarne betuig ik hierbij mijn dank aan mijn collega's de heeren HARDENBERG, STOUTJESDIJK, DE VAN *en* VISSER *voor hun gewaardeerde opmerkingen bij het samenstellen van dit werkje.*

Den Haag, April 1919.

W. L. VAN DE VOOREN.

VOORBERICHT BIJ DE TWEEDE DRUK.

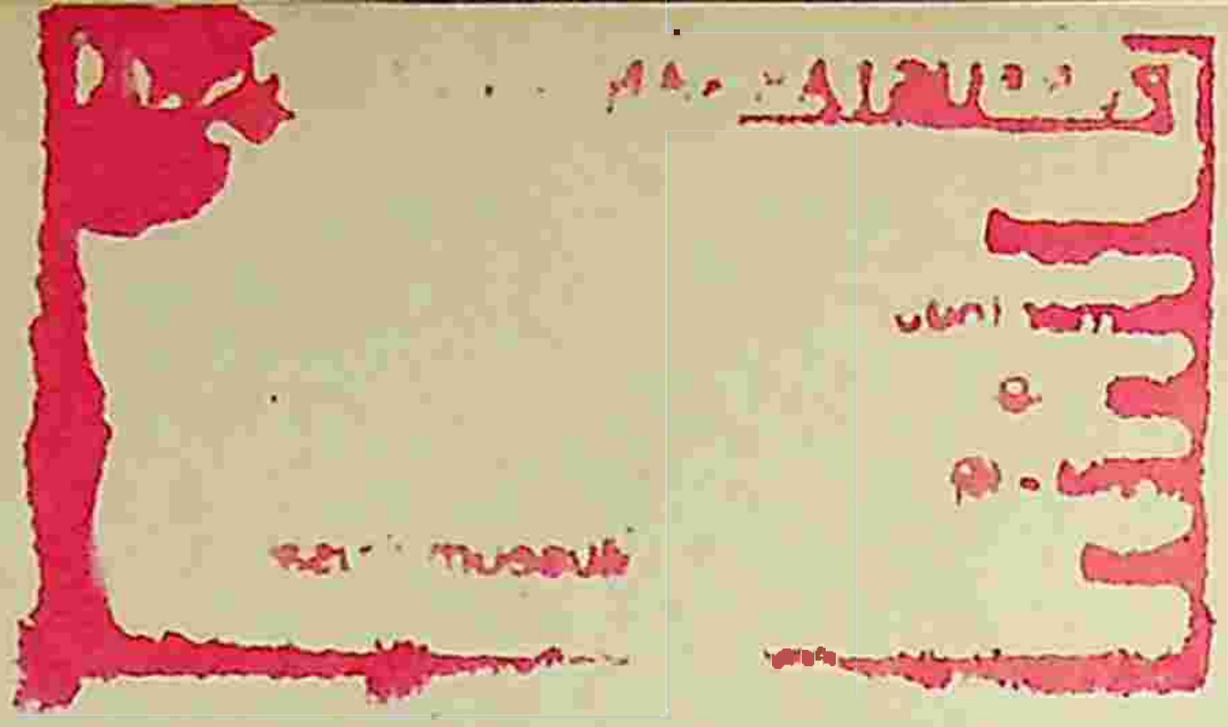
De belangrijkste verandering, in deze tweede druk aangebracht, is de invoering van een nieuwe paragraaf (§ 5), *waarin het limietbegrip uitvoerig wordt ontwikkeld en omlijnd.*

Voorts zijn tal van kleinere veranderingen aangebracht, bv. invoering van het begrip differentiaal op blz. 52 *en zijn eenige onduidelijkheden weggenomen.*

Den Haag, October 1933.

W. L. v. d. V.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
28-6-2010
mor Induk : 1681/Dw Museum/10
- 10 : 7205660
- 10 : 212104119
: Museum Pusat

OVERZICHT.

---

§ 1. Het verschil tusschen constante en veranderlijke grootheden wordt duidelijk gemaakt door twee proeven, ontleend aan de natuurkunde, nl. het experimenteele bewijs van de wet van Boyle, waarbij de temperatuur constant gehouden wordt, en het verwarmen van water, waarbij de temperatuur veranderlijk is. De wiskundige drukt het constant of veranderlijk zijn van een grootheid uit in de notatie.

§ 2. Het paarsgewijze bijeenbehooren van de waarden van twee veranderlijke grootheden als bv. gewicht en leeftijd, lengte eener staaf en temperatuur en omgekeerd temperatuur en kookhoogte, is de kern van het funktiebegrip. Grafische voorstelling.

§ 3 geeft eenige voorbeelden van grenswaarden, nl. 0,3, $1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ en $\sqrt{3}$ ontleend aan de lagere wiskunde. Vooral $\sqrt{3}$ is belangrijk, omdat dit nieuwe getal in de algebra op dezelfde wijze als grenswaarde is ingevoerd, als in § 15 de Neperiaansche lg. wordt ingevoerd.

In § 4 wordt een grenswaarde uit de meetkunde besproken, nl. een reeks koorden, die in hun „grensstand" een raaklijn definieeren. Dit meetkundige begrip van „grensstand" wordt nu verbonden met het algebraïsche begrip „grenswaarde" door aan elke koorde een getal toe te voegen, nl. tg α, waardoor een getallenreeks ontstaat, die tot grenswaarde heeft het differentiaalquotient, in het punt, waar de raaklijn de kromme raakt.

(Eenvoudigheidshalve is de getallenreeks van het meetkundige voorbeeld reeds in § 3 besproken).

§ 5. De definitie van grenswaarde of limiet.

§ 6. Bovenstaande beschouwingen worden toegepast op de funkties $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^n$ en in

§ 7 op de funkties $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^n}$ en in

§ 8 op de goniometrische funkties.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 9 geeft het differentiaalquotient van een som, product en quotient van twee funkties en

§ 10 het differentiaalquotient van samengestelde funkties.

§ 11. Een tweede voorbeeld van een grenswaarde, ontleend aan de meetkunde, is het oppervlak van de figuur, begrensd door de kromme $y = f(x)$, de X-as, de vaste ordinaat $x = a$ en de bewegelijke $x = x$.

Dit oppervlak is een funktie van x, $F(x)$ genoemd, die $f(x)$ tot afgeleide heeft: $F'(x) = f(x)$.

Met behulp van deze eigenschap worden in § 10 eenvoudige oppervlakken berekend, zonder nog gebruik te maken van het integraalteeken.

§ 12 leert $F(x)$ als een grenswaarde zien, ingesloten tusschen twee sommen s en S: $s < I < S$, waarna bewezen wordt $\lim s = \lim S$. (Vergelijk de definitie van $\sqrt{3}$).

Gebruik van 't integraalteeken.

§ 13. De voornaamste integralen.

§ 14. De integraal van de som van eenige funkties. Partieel integreeren. Bewijs door omkeering der formules van § 8.

§ 15. Het integreeren volgens de substitutiemethode. Deze methode wordt meetkundig toegelicht. Elk rechthoekje $f(x)\Delta x$ wordt omgezet in een rechthoekje $f\{\varphi(t)\}\Delta t$, als $x = \varphi(t)$ is, met dezelfde hoogte, maar met een andere basis. De vergrooting in

$$\text{oppervlak} = \text{vergrooting der basis} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \sim \frac{1}{\varphi'(t)}\ ^{1}).$$

Om hetzelfde oppervlak te verkrijgen, moeten we dus met een faktor $\varphi'(t)$ vermenigvuldigen.

§ 16. Voorgaande beschouwingen worden nu benut om te komen tot de logarithmische funktie. Uitgangspunt is de kromme $y = \frac{1}{x}$ (wet van Boyle). (De orthogonale hyperbool treedt in de plaats van den cirkel in de goniometrie).

De hoofdeigenschap $\int_a^b \frac{dx}{x} = \int_{ma}^{mb} \frac{dx}{x}$ wordt bewezen met behulp van de substitutiemethode en meetkundig met de elementaire rechthoekjes.

---

[1]) $\sim$ beteekent: bij benadering gelijk aan.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Hieruit volgt de hoofdeigenschap voor de funktie

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \text{ nl.}$$

$$F(a.\,b) = F(a) + F(b)$$

de kenmerkende eigenschap van de logarithmische funktie.

We noemen dan ook $F(x)$ de Neperiaansche logarithme

$$F(x) = \lg x.$$

Zij voldoet aan de rekenkundige definitie der algebra, zooals eenvoudig bewezen wordt.

$y = \lg x$ heeft volgens § 10 tot afgeleide $\frac{1}{x}$.

§ 17. Het grondtal e wordt nu berekend met behulp van de beteekenis van de integraal als grenswaarde. $\lg e = 1 = \int_1^e \frac{dx}{x}$.

Benaderen we de integraal door n *om*geschreven rechthoekjes dan volgt $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, bij $n+1$ *in*geschreven rechthoekjes volgt, dat $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, dus

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \text{ . volgens het binomium}$$

van Newton.

§ 18. Evenals in § 16 wordt aangetoond, dat

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \ldots$$

welke redeneering uitgebreid kan worden tot een willekeurige exponent van e : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Uit de verkregen reeks volgt, dat de afgeleide van e^x weer e^x is, een resultaat, dat ook verkregen wordt met behulp van de logarithmische funktie.

§ 19. Toepassingen.

Als eerste toepassing wordt de berekening van de logarithmentafel besproken, om daarna aan 4 zeer uiteenloopende voorbeelden

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

de groote beteekenis van het getal *e* uiteen te zetten. De gekozen voorbeelden zijn: een vraagstuk uit de samengestelde interestrekening, de barometerstand als funktie der hoogte, de afkoeling van een bol, de wrijving van een touw langs een cilinder.

Uit de nu volgende toepassingen blijkt, dat de integraal niet alleen ons in staat stelt oppervlakken te berekenen, maar ook inhouden en de ligging van zwaartepunten.

Na een korte aanwijzing van de beteekenis van het differentiaalquotient in de werktuigkunde bij de snelheid en versnelling (harmonische trilling) volgen eenige eenvoudige praktische maxima- en minima-vraagstukken.

Een laatste toepassing geeft nog de sinus- en cos.-reeksen, met een aanwijzing van de formules van Euler.

Ten slotte worden in de gemengde opgaven de differentiaalquotienten van hoogere orde ter sprake gebracht en de cyclometrische funkties ingevoerd als toepassing der integraalrekening.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 1. Constante en veranderlijke grootheden.

De analyse is die tak van de wiskunde, die zich uitsluitend bezig houdt met de eigenschappen van alle getallen, als daar zijn:

1°. reëele getallen, waartoe behooren de geheelen, breuken, meetbare en onmeetbare getallen, zoowel positief als negatief,

2°. imaginaire getallen, bv. $\sqrt{-1}$,

3°. gerichte getallen of vektoren, die bv. een snelheid of een kracht voorstellen, etc.

De analyse omvat dus rekenkunde, stelkunde, een deel der goniometrie, maar niet de planimetrie, stereometrie, beschrijvende meetkunde, want bij deze vakken moet men niet alleen eenig idee hebben van wat een getal is, maar ook dient men een voorstelling te hebben van een punt, een rechte lijn en een plat vlak.

In het volgende zullen we nu een nieuw gedeelte van de analyse behandelen, dus in hoofdzaak spreken over getallen. Nu herinneren we ons, dat getallen gebruikt worden om de grootte van een kapitaal, een inhoud, een temperatuur, een druk enz. aan te geven. Deze *grootheden* (d. z. dingen, die gemeten kunnen worden en dus eene *grootte* hebben) kunnen we verdeelen in twee groepen, nl. *de constante* en *de veranderlijke grootheden*.

Het onderscheid tusschen beide groepen kunnen we 't best leeren kennen uit een voorbeeld, dat we ontleenen aan de natuurkunde.

Denken we bv. eens aan de grootheid „temperatuur". — Bij de experimenteele afleiding van de wet van Boyle meet men het volume van een bepaalde gewichtshoeveelheid gas onder verschillende drukkingen. Het resultaat van die metingen is, dat het produkt van elk volume met de daarbij behoorende druk nagenoeg constant is. ($P.V = C^{te}$). Dit geldt echter alleen voor zoover de temperatuur gedurende de geheele proef dezelfde is gebleven. We zien, dat in dit geval de temperatuur een constante grootheid is.

Brengen we daarentegen een hoeveelheid water van kamertemperatuur aan 't koken, dan is de temperatuur van dit water

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

een veranderlijke grootheid; men denkt gedurende het verloop van de proef niet aan één enkele temperatuurwaarde, maar aan een geheele reeks waarden.

De geaardheid van 't vraagstuk brengt dus met zich mede, of we een bepaalde grootheid (in ons voorbeeld de temperatuur) als constant of als veranderlijk moeten beschouwen. Het is dan ook noodzakelijk, aan het begin van elk vraagstuk, zich er eerst nauwlettend rekenschap van te geven, welke grootheden constant, welke veranderlijk zijn.

In de wiskunde heeft men nu de gewoonte het resultaat van dit onderzoek onmiddellijk in de notatie voor elk dier grootheden uit te drukken; een veranderlijke grootheid wordt aangeduid door een letter uit 't laatste gedeelte van het alphabet, b.v. x, y, z, u, enz., een constante grootheid door een der overige letters, b.v. (constante), a, b, k, l, p, q enz. De keuze van de letter wijst zoodoende onmiddellijk aan tot welke groep de door haar voorgestelde grootheid behoort, wat een niet te onderschatten gemak voor het geheugen is.

Opmerking: Men lette op het verschil van de beteekenis van diezelfde letters in de algebra. Daar werden de beide soorten gebruikt om bekende en onbekende grootheden van elkaar te onderscheiden. Trouwens het verschil lijkt grooter dan het in werkelijkheid is; een bekende grootheid toch, wordt aan het begin van het vraagstuk gegeven en behoudt zijn waarde gedurende de geheele berekening, m. a. w. is een constante grootheid, voor een onbekende daarentegen zijn aan 't begin nog geheele reeksen waarden denkbaar, en eerst aan het eind heeft de onbekende een of meer bepaalde waarden verkregen.

Gedurende de bewerking zijn de onbekenden meer te vergelijken met veranderlijke grootheden. Vandaar dat de notatie a, b, c . . . tegenover x, y, z . . . zoowel ter onderscheiding van bekende en onbekende grootheden gebruikt kan worden, als van constante en veranderlijke grootheden.

§ 2. Het begrip „funktie".

In de nevenstaande tabel is het gewicht van een man op verschillende leeftijden opgegeven. We zien, hoe het gewicht in den beginne tot ongeveer aan het 21ste jaar toeneemt. De persoon wordt daarna nog wel zwaarder maar in lang zoo'n sterke mate

KON. BAT. GENOOTSCHAP VAN K. EN W.
PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

niet, als dit in zijn jeugd het geval was. Bij het bereiken van de vijftigjarige leeftijd blijkt het grootste gewicht bereikt te zijn, waarna het lichaamsgewicht weer geleidelijk afneemt.

Een en ander is echter veel duidelijker te zien uit een grafische voorstelling, zooals die in fig. 1 geteekend is.

Ouderdom in dagen, resp. jaren	Gewicht in kg.	Ouderdom in jaren.	Gewicht in kg.
0 d. = 0 j.	3,3	14	37
10	3,7	15	41
35	4,46	16	45
52	4,84	17	50
69	5,2	18	55
105	6,1	19	60
128	6,4	20	65
365 d. = 1 j.	9,5	30	75
2	11,0	40	80
3	12,5	50	85
4	15,0	60	80
5	16,0	70	75
6	18,0		
7	21		
8	23		
9	27		
10	30		
11	31		
12	32		
13	33		

Men verkrijgt deze als volgt:

In de tabel komen de getallen paarsgewijze voor, het eerste getal geeft de ouderdom aan, het tweede het daarbij behoorend gewicht, zoo hebben we 't getallenpaar 15 (jaar) ⊂ 41 (kg.).

Deze beide getallen kunnen we nu ook opvatten als de afstanden van een punt P tot twee onderling loodrechte lijnen, in de figuur ouderdoms-as en gewichts-as genoemd. Dit punt P

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

wordt door de volgende constructie gevonden. Van af het snijpunt O der beide assen zetten we langs de ouderdoms-as 15 lengte-eenheden uit, langs de gewichts-as 41 lengte-eenheden. Noemen we de eindpunten P′ en P″. Vervolgens richten we in deze punten P′ en P″ loodlijnen op de assen op. Het snijpunt van deze lijnen is het gezochte punt P.

N.B. In de teekening zijn de lengte-eenheden langs beide assen ongelijk genomen (1 jaar = $1\frac{1}{4}$mm, 1 kg = $\frac{1}{2}$ mm).

Zoo verkrijgen we dan een aantal punten, die door hun ligging 't gewicht van den man op verschillende leeftijden afbeelden.

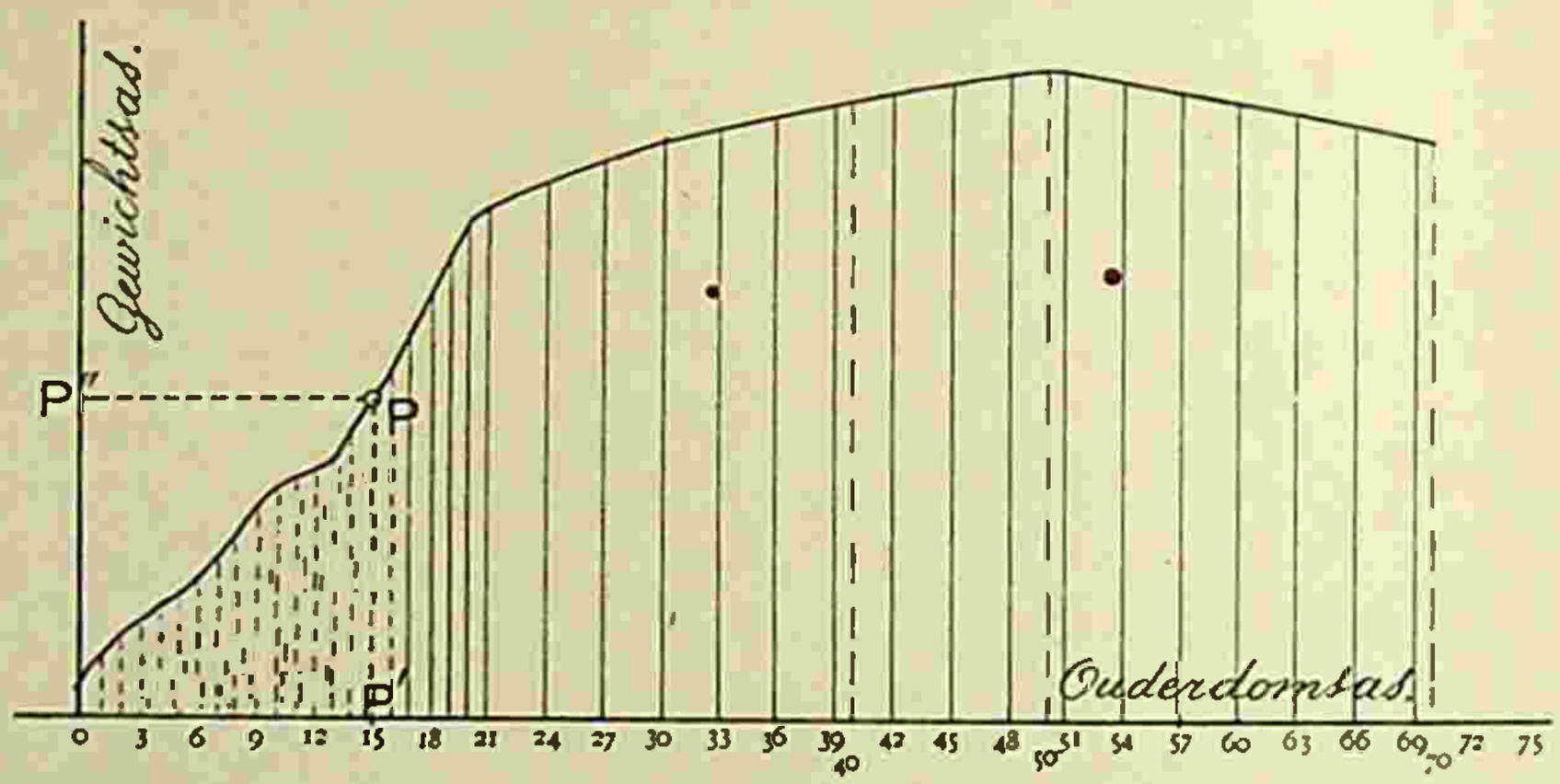


Fig. 1.

Hoe meer keeren nu de man gewogen is, des te rijker is de tabel aan getallenparen en de teekening aan punten, zooals P er één is. Het grooter worden van de tabel bemoeilijkt het overzicht daarvan hoe langer hoe meer, terwijl de teekening juist aan duidelijkheid wint. Men ziet toch, hoe alle punten P ten slotte een kromme lijn gaan vormen, die in haar vorm en ligging een zuiver en duidelijk beeld geeft van de geschiedenis van de zwaarte van den man.

Bezien we nu dit voorbeeld in het licht van het in § 1 behandelde.

We hebben te doen met twee grootheden, nl. de leeftijd en het gewicht van den man. Beide behooren tot de groep van de veranderlijke grootheden, want we denken niet aan één bepaalde leeftijd of één bepaald gewicht, maar aan een geheele reeks waarden.

Eén ding is echter nieuw en opmerkelijk, nl. dat de waarden van leeftijd en gewicht steeds *paarsgewijze* voorkomen, waarvan

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

we bij onze grafische voorstelling reeds in zoo ruime mate profiteerden.

Dit paarsgewijze voorkomen van twee getallen is nu voor het vervolg van het grootste belang. Vandaar dat we dit bijeen behooren van telkens twee getallen, die ieder voor zich een bepaalde grootheid meten, door een bepaalde uitdrukking weergeven. We zeggen „de eene grootheid is een *funktie* van de andere."

In ons voorbeeld is dus het gewicht een funktie van de leeftijd. Men mag echter evengoed zeggen, dat de leeftijd een funktie van het gewicht is, want beide spreekwijzen willen niet anders zeggen, dan dat bij de waarde van de eene grootheid een waarde van de andere behoort.

Zoo'n paarsgewijze optreden van de getallenwaarden van twee grootheden komt nu ontzaglijk vaak voor. Men heeft de voorbeelden maar voor het grijpen; de temperatuur en de lengte van een staaf (spoorstaaf, slinger etc.), de oppervlakte van een cirkel en zijn straal, de interest en de tijd, gedurende welke een kapitaal tegen een vast procent uitstaat, de hoogste temperatuur op een dag en de datum, de ingevoerde hoeveelheden graan in de opeenvolgende jaren, enz. enz.

In het eerste voorbeeld komen de beide grootheden temperatuur en lengte voor, en volgens onze nieuwe spreekwijze is de lengte een funktie van de temperatuur of de temperatuur is een funktie van de lengte. Welke van de twee uitdrukkingen men kiest, hangt van de omstandigheden af. Denkt men aan de uitzetting van een spoorstaaf, zoo ligt de eerste uitdrukking meer voor de hand; spreekt men daarentegen over de hoogte van de kwikkolom van een thermometer, dan zal men de tweede zegswijze verkiezen.

Opmerking: Het wiskundig afhankelijk zijn of het begrip „funktie" is niet hetzelfde als de natuurkundige samenhang, die wordt uitgedrukt in oorzaak en gevolg. In *beide* voorbeelden, van staaf en thermometer, is een temperatuursverandering de oorzaak, die een lengteverandering ten gevolge heeft.

We zullen voortaan de beide samenhangende grootheden door de letters x en y voorstellen.

Zoo moge in 't voorbeeld van de spoorstaaf x de temperatuur en y de staaflengte aanduiden, zoodat y (de lengte) een funktie is van x (de temperatuur) of verkort geschreven:

$$y = f(x).$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Ter onderscheiding van beide grootheden, noemt men x de *onafhankelijk veranderlijke* en y de *afhankelijk veranderlijke.*

Bij de thermometer zullen we de kwikhoogte als onafhankelijk veranderlijke beschouwen en weer door x voorstellen, de temperatuur afhankelijk veranderlijk noemen, en met y aangeven. Hier is dus

y (de temperatuur) een funktie van x (de kwikhoogte) of kortweg

$$y = F(x).$$

De notaties f of F zeggen ons dus, dat er een zekere afhankelijkheid, een zekere betrekking bestaat tusschen de beide grootheden x en y. Welke deze betrekking is, moet echter in elk geval afzonderlijk worden nagegaan.

In sommige gevallen is het mogelijk de betrekking tusschen de beide grootheden door een formule uit te drukken, zoo is bij de spoorstaaf de betrekking tusschen de lengte en de temperatuur:

$$l_t = l_0(1 + \lambda t)$$

waarin t de temperatuur aangeeft,

l_t de staaflengte bij $t°$,

l_0 „ „ „ 0°

en λ de lineaire uitzettingscoëfficient van staal.

In onze algemeene notatie wordt de staaflengte door y en de temperatuur door x aangegeven, dus wordt de formule

$$y = l_0(1 + \lambda x).$$

Deze formule geeft ons alle mogelijke inlichtingen over de betrekking tusschen x en y, wier bestaan we reeds hierboven aankondigden door de notatie

$$y = f(x).$$

In verreweg de meeste gevallen is het zeer moeilijk, zoo niet onmogelijk de afhankelijkheid van x en y in een formule weer te geven. Zoo is het niet gemakkelijk het gewicht van een man als funktie van zijn leeftijd in een formule uit te drukken, en zoo zijn er nog tal van andere gevallen te vinden.

In de volgende §§ zullen we ons alleen bezig houden met funkties, die bepaald zijn door een formule.

Eenige belangrijke voorbeelden hiervan zijn:

1°. de oppervlakte van den cirkel als een funktie van zijn straal
$O = \pi R^2$ of in de algemeene notatie $y = \pi x^2$.

2°. de funktie van de uitzetting van een staaf
$y = a + bx$. (Vergelijk blz. 14).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

3°. de funktie van de wet van Boyle $\left(P = \frac{C}{V} \right)$:

$$y = \frac{c}{x}.$$

4°. de exponentiecle funktie:

$$y = b^x.$$

5°. de logarithmische funktie:

$$y = \log x.$$

6°. de goniometrische funkties:

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x \quad \text{enz.}$$

7°. de cyclometrische funkties:

$$y = \text{bg}\sin x, \qquad y = \text{bg tg} x \quad \text{enz.}$$

Opgave: Teeken de grafische voorstellingen dezer funkties.

§ 3. Eenige voorbeelden van grenswaarden.

Eerste voorbeeld. Gaan we uit van de volgende meetkundige reeks

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots \text{enz.}$$

en noemen we de som van de eerste n termen S_n, dan is:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

enz.

Zoodoende verkrijgen we een onafzienbare rij getallen

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \text{enz.}$$

waarvan we er net zooveel kunnen berekenen, als we er geduld en tijd voor hebben. Toch zou ook de geduldigste cijferaar nooit klaar komen, want het aantal getallen is onbegrensd, zoodat de opgave om het laatste getal van de reeks te berekenen onmogelijk is. Toch wijst onze getallenreeks in een bepaalde richting, ja men is geneigd te zeggen, dat de opeenvolging van de getallen

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

naar een allerlaatste, een uiterste waarde wijst. Men ziet dit het duidelijkst, indien we de getallen als volgt schrijven:

$$1 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$\frac{3}{2} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$\frac{7}{4} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{15}{8} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\frac{31}{16} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

enz.

We zien, hoe de getallen hoe langer hoe meer naderen tot 2, ja men kan dit getal *zoo dicht men zelf wil* benaderen, want de tweede term $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ wordt al kleiner en kleiner, naarmate men verder in de reeks gaat.

De waarde 2 heeft dus een bijzondere beteekenis voor de getallenreeks; ze treedt als 't ware in de plaats van de ontbrekende laatste term. Men noemt deze waarde de *grenswaarde* of *limiet* van de getallenrij. Ze wordt de som van de oneindig voortloopende meetkundige reeks genoemd.

Tweede voorbeeld. Een andere getallenrij is b.v.:

0,3
0,33
0,333
0,3333

enz.

Ook deze getallenreeks wijst naar een bepaalde grenswaarde, die we gemakkelijk kunnen berekenen.

Voor de opeenvolgende getallen kunnen we schrijven:

$$0{,}3 = \frac{3}{10} = \frac{3}{9+1} = \frac{1}{3+\frac{1}{3}}$$

$$0{,}33 = \frac{33}{100} = \frac{33}{99+1} = \frac{1}{3+\frac{1}{3\,3}}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$0{,}3\,3\,3 = \frac{333}{1000} = \frac{333}{999+1} = \frac{1}{3+\frac{1}{333}}$$

$$0{,}3333 = \frac{3333}{10000} = \frac{3333}{9\,9\,9\,9\,1} = \frac{1}{3+\frac{1}{3333}}$$

enz.

De breuk in de noemer, nl. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{33}$, $\frac{1}{333}$, $\frac{1}{3333}$ enz. wordt steeds kleiner, zoodat de grenswaarde van onze getallenrij gelijk is aan $\frac{1}{3}$.

Deze grenswaarde kwam reeds ter sprake in de theorie der repeteerende breuken: $0{,}\dot{3} = \frac{1}{3}$.

Een derde voorbeeld is de getallenreeks:

1,7
1,73
1,732
1,732.0
1,732.05
1,732.050
1,732.050.8
1,732.050.80
1,732.050.807
1,732.050.807.5
1,732.050.807.56
1,732.050.807.568
1,732.050.807.568.8
1,732.050.807.568.87
1,732.050.807.568.877
1,732.050.807.568.877.3
enz.

Op het eerste gezicht is het niet duidelijk, hoe telkens het nieuwe decimaalcijfer bepaald is. Quadrateeren we echter 1,7, dan vinden we 2,89, terwijl $1{,}8^2 = 3{,}24$. Hieruit volgt, dat 1,7 het grootste getal met 1 decimaalcijfer is, wiens quadraat juist nog kleiner is dan 3.

Evenzoo is $1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3$, maar $1{,}74^2 = 3{,}0276 > 3$; het tweede getal van de reeks is het grootste getal in 2 decimalen, wiens quadraat juist nog kleiner dan 3 is, het derde getal is het grootste getal in 3 decimalen, wiens quadraat kleiner dan 3 is,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

enz. Ook deze getallenreeks wijst naar een bepaalde grenswaarde, die we reeds vroeger $\sqrt{3}$ genoemd hebben.

§ 4. Een voorbeeld van een grenswaarde in de meetkunde.

Reeds in § 2 (blz. 15) werd als voorbeeld van een funktie de samenhang van het oppervlak en den straal van een cirkel genoemd. Deze funktie wordt uitgedrukt door de formule

$$y = \pi x^2.$$

De invloed van de getalfaktor is gemakkelijk na te gaan, zoodat we ons eenvoudigheidshalve zullen bepalen tot de studie van de funktie

① $$y = x^2$$

Volgens deze vergelijking behoort bij elke x-waarde een waarde van y. Zoo is voor $x = 1$ $y = 1$, voor $x = 2$ $y = 4$ enz.

Vereenigen we eenige getallenparen in een tabel.

$y = x^2$.

x	y	x	y	x	y	x	y
0	0						
0,25	0,0625	—0,25	0,0625	2,50	6,25	—2,5	6,25
0,5	0,25	—0,5	0,25	2,75	7,5625	—2,75	7,5625
0,75	0,5625	—0,75	0,5625	3,	9,	—3,	9,
1,	1,	—1,	1,	3,25	10,5625	—3,25	10,5625
1,25	1,5625	—1,25	1,5625	3,50	12,25	—3,5	12,25
1,50	2,25	—1,5	2,25	3,75	14,0625	—3,75	14,0625
1,75	3,0625	—1,75	3,0625	4,	16,	—4,	16,
2,	4,	—2,	4,	5,	25,	—5,	25,
2,25	5,0625	—2,25	5,0625	6,	36,	—6,	36,

Een veel duidelijker overzicht verkrijgen we met een grafische voorstelling, zooals we die reeds gebruikten voor de afhankelijkheid van het gewicht van een man van zijn leeftijd (blz. 12). De verkregen lijn heet *parabool*. Zie fig. 2.

Letten we nu eens in 't bijzonder op het punt P, dat behoort bij het getallenpaar (1,1). Voor dit punt is zoowel de afstand

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

OP′, gemeten langs de x-as, als de afstand OP″, gemeten langs de y-as, gelijk aan 1.

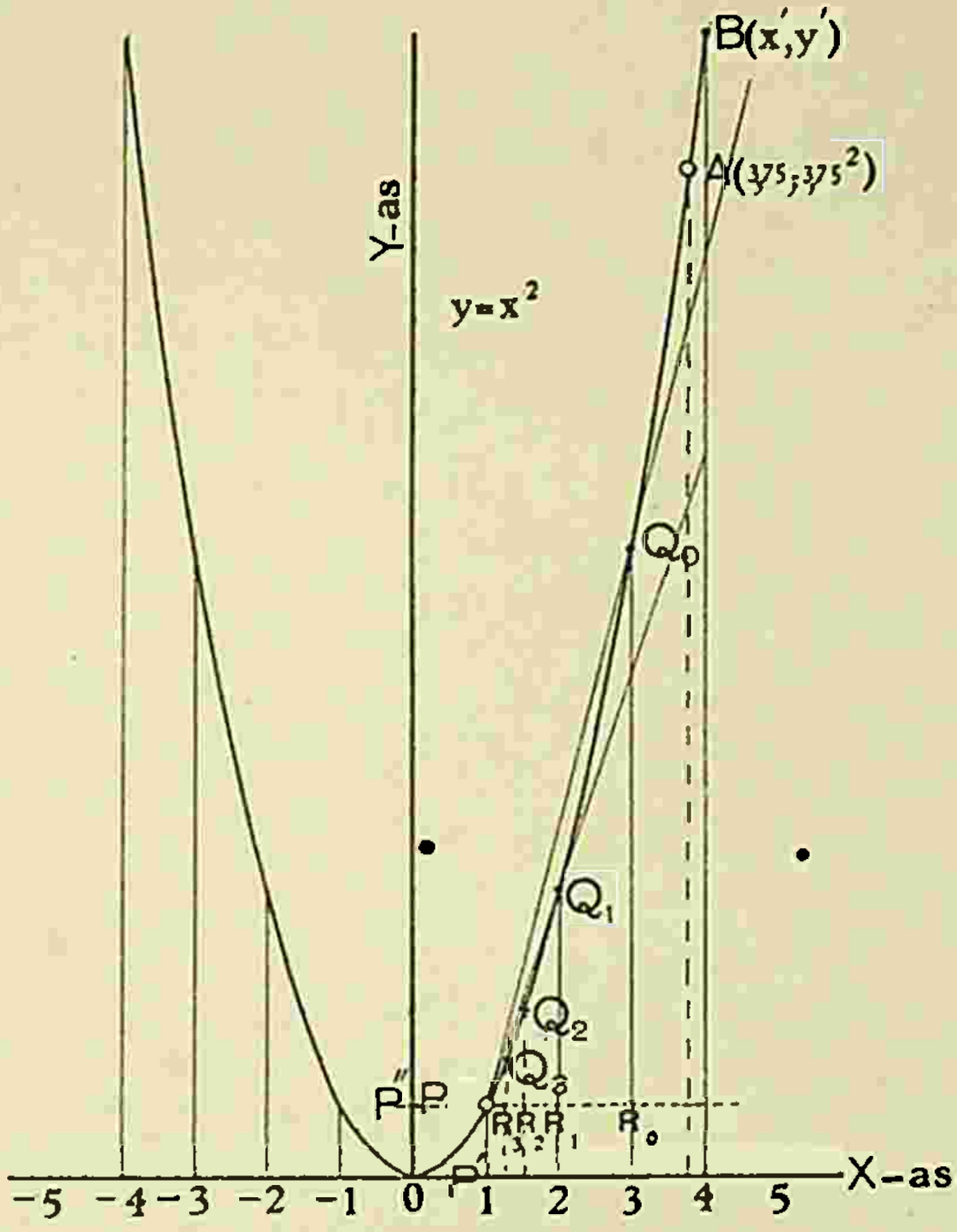


Fig. 2.

Men noemt deze beide afstanden de *coordinaten* van het punt P, en ter onderscheiding de x-coordinaat de *abscis*, en de y-coordinaat de *ordinaat*. Voor P is de abscis $x = 1$ en de ordinaat $y = 1$ of kortweg (1,1).

Opmerking: Het eerste getal tusschen de haakjes is steeds de abscis of x-afstand, het tweede de ordinaat of y-afstand. De notaties (2,1) en (1,2) wijzen dus twee *verschillende* punten aan.

Opgave: Teeken deze punten in een nieuwe figuur, ook de punten (—2,1), (2, —1), (—2, —2) enz.

Behalve dit punt P (1,1) letten we ook op de volgende reeks punten Q, wier abscissen opvolgend

② $$2\ ,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16} \ldots \text{enz.}$$

grooter zijn dan de abscis van P.

Zoo is de abscis van $Q_0\ x_0 = 1 + 2 = 3.$

„ „ „ $Q_1 : x_1 = 1 + 1 = 2.$

„ „ „ $Q_2 : x_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}.$

„ „ „ $Q_3 : x_3 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1\frac{1}{4}.$

„ „ „ $Q_4 : x_4 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1\frac{1}{8}.$

. . . . . .

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

de abscis van $Q_n : x_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

enz.

De bijbehoorende y's zijn gemakkelijk volgens de vergelijking $y = x^2$ te berekenen. We vinden

bij $Q_0 : y_0 = 3^2 = 9$.

$Q_1 : y_1 = 2^2 = 4$

$Q_2 : y_2 = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$.

$Q_3 : y_3 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1\frac{9}{16}$.

$Q_4 : y_4 = \left(1\frac{1}{8}\right)^2 = 1\frac{17}{64}$.

. . . . . .

bij $Q_n : y_n = \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{2n-2}}$.

enz.

Deze ordinaatwaarden zijn opvolgend:

③ $\quad 8, \frac{3}{1}, \frac{5}{4}, \frac{9}{16}, \frac{17}{64}, \frac{33}{256}, \ldots, \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{2n-2}}, \ldots$ enz.

grooter dan de ordinaat van P.

We verbinden nu P achtereenvolgens met de punten Q_0, Q_1, $Q_2, \ldots$ enz. en verkrijgen dan evenzoovele koorden: PQ_0, PQ_1, $PQ_2 \ldots$ enz.

Verder zien we onze eerste getallenreeks ②, nl. de abscisverschillen $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$ enz. afgebeeld in de lijnen PR_0, PR_1, $PR_2 \ldots$ enz., de tweede getallenreeks ③ de ordinaatverschillen $8, \frac{3}{1}, \frac{5}{4}, \frac{9}{16}, \ldots, \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{2n-2}}, \ldots$ enz. in de lijnen Q_0R_0, Q_1R_1, Q_2R_2, ... enz.

We zien in de figuur hoe de richting van de koorde PQ verandert, maar steeds hoe langer hoe minder naarmate het punt Q dichter bij P komt. Evenals in de voorbeelden van § 3 de getallen wijzen naar een bepaald grensgetal; zoo zien we hier, hoe de richtingen van de opeenvolgende koorden PQ_0, PQ_1, $PQ_2, \ldots$ enz. alle wijzen naar een bepaalde grensrichting. De koorde met haar verlengde bij Q, nadert tot een bepaalde grensstand. Deze

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

„allerlaatste of uiterste" koorde of juister deze grenskoorde noemt men de *raaklijn* in P.

Aan deze *koordenreeks* kunnen we nu als volgt een *getallenreeks* verbinden: De richting van de koorde PQ_0 kunnen we vastleggen in de grootte van de tangens van $\angle Q_0PR_0 = \text{tg } \alpha_0$, evenzoo de richting PQ_1 door tangens $\angle Q_1PR_1 = \text{t g } \alpha_1 \ldots$. en zoo vervolgens de richting van PQ_n door tg α_n, enz.

Als bijbehoorende getallenreeks nemen we nu de waarden der opeenvolgende tangenten:

$$\text{tg } \alpha_0 = \frac{Q_0R_0}{PR_0} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{Q_1R_1}{PR_1} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{Q_2R_2}{PR_2} = \frac{^5/_4}{^1/_2} = 2\,\tfrac{1}{2}.$$

$$\text{tg } \alpha_3 = \frac{Q_3R_3}{PR_3} = \frac{^9/_{16}}{^1/_4} = 2\tfrac{1}{4}.$$

$$\text{tg } \alpha_4 = \frac{Q_4R_4}{PR_4} = \frac{^{17}/_{64}}{^1/_8} = 2\,\tfrac{1}{8}.$$

. . . . . .

$$\text{tg } \alpha_n = \frac{Q_nR_n}{PR_n} = \frac{\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = 2 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

enz.

De grenswaarde van deze tangentenreeks is, zooals onmiddellijk duidelijk is, *2*.

Evenals nu de koorde PQ_0 bepaald is door de $\text{t g } \alpha_0 = 4$, de koorde PQ_1 door de $\text{tg } \alpha_1 = 3$, koorde PQ_2 door $\text{tg } \alpha_2 = 2\,\frac{1}{2}$ enz., zoo zullen we de raaklijn bepalen door een $\text{tg } \alpha = 2$, waarin α de hoek voorstelt tusschen raaklijn en x-as.

We verkregen 't getal 2 als grenswaarde van de opeenvolgende quotienten van de ordinaat- en abscisverschillen. Vandaar dat men de grenswaarde 2 het verschil-quotient van P noemt of met een meer gebruikelijk woord het *differentiaalquotient*, wat precies hetzelfde beteekent.

Opmerking: Hoewel de naam differentiaalquotient herinnert aan de afleiding van het getal 2, komt de hoofdgedachte nl. het begrip *grenswaarde* in die naam helaas niet tot uiting. Dit leidt soms

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

tot de onjuiste opvatting, dat het differentiaalquotient een quotient zou zijn. Het is daarentegen de *grenswaarde* van een reeks opeenvolgende quotienten.

Uit het bovenstaande verkrijgen we de volgende regel om het differentiaalquotient in een punt P van een kromme te berekenen:

Het differentiaalquotient of de tangens van den hoek tusschen de raaklijn in een punt P aan een kromme en de x-as is de grenswaarde van de quotienten van eenige ordinaatverschillen en de daarbij behoorende steeds kleiner te nemen abscisverschillen, van telkens twee punten P en Q; het punt P is het gegeven *vaste* punt, het punt Q is een veranderlijk punt der kromme, dat hoe langer hoe meer naar 't punt P beweegt, en dit punt ten slotte willekeurig dicht nadert.

Deze rekenregel zullen we nu in de volgende §§ in tal van gevallen leeren toepassen.

§ 5. De definitie van grenswaarde of limiet.

In de beide voorgaande paragrafen hebben we kennis gemaakt met eenige getallenrijen, die naar een bepaald getal wijzen:

①	$S_1=1$	$S_2=\frac{3}{2}$	$S_3=\frac{7}{4}$	$S_4=\frac{15}{8}$	enz. $\rightarrow 2$ (blz.15)
②	$u_1=0{,}3$	$u_2=0{,}33$	$u_3=0{,}333$	$u_4=0{,}3333$	,, $\rightarrow \frac{1}{3}$ (blz.16)
③	$u_1=1{,}7$	$u_2=1{,}73$	$u_3=1{,}732$	$u_4=1{,}7320$	,, $\rightarrow \sqrt{3}$ (blz.17)
④	$u_1=4$	$u_2=3$	$u_3=2\frac{1}{2}$	$u_4=2\frac{1}{4}$	,, $\rightarrow 2$ (blz.21)

Nu is de uitdrukking „getallenrij, die naar een bepaald getal wijst" vaag, hoewel ieder de bedoeling ervan in bovenstaande voorbeelden zal aanvoelen. In 't volgende zullen we deze vage uitdrukkingswijze vervangen door een definitie van het begrip grenswaarde.

Een willekeurige getallenrij stellen we voor door de notatie:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5 \ldots \text{enz.}$$

een onbegrensde rij getallen, die alle op een of andere manier gegeven worden gedacht.

We stellen ons nu de volgende vraag: Is het mogelijk een getal L te vinden zoodanig, dat de verschillen tusschen L en de opvolgende getallen van de rij „op den duur" absoluut genomen kleiner zijn dan 1. De uitdrukking „op den duur" wil zeggen, dat er nog wel verschillen grooter dan 1 mogen voorkomen, maar uitsluitend zoo, dat men een eindig rangnummer kan aanwijzen, waarna dit in het geheel niet meer voorkomt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

In wiskundig schrift luidt deze voorwaarde:

(A) $$|u_n - L| < 1 \quad \text{mits} \quad n > n_1$$

Passen we deze voorwaarde toe op de bovenstaande getallenrijen, dan zien we, dat voor rij ① L gekozen kan worden uit de getallen, die grooter zijn dan 1, maar kleiner dan 3, bv.

$$L = 2\tfrac{1}{2} \text{ met } n_1 = 2$$
$$L = 1\tfrac{1}{2} \text{ met } n_1 = 0$$

Evenzoo hebben we bv.

voor rij ②: $-\frac{2}{3} < L < 1{,}333$ met $n_1 = 2$
voor rij ④ $1\frac{1}{2} < L < 3$ met $n_1 = 2$.

Voor de getallenrij

⑤ $u_1 = 5 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = -5 \quad u_4 = 0 \quad u_5 = +5 \ldots$ enz.

is het blijkbaar niet mogelijk een getal L te bepalen, dat aan de voorwaarde (A) voldoet. Er zijn dus getallenrijen, die geen limiet bezitten.

Indien het wel mogelijk is aan de gestelde voorwaarde (A) te voldoen, dan zijn we nog niet zeker of die getallenrij een limiet bezit, d.w.z. een *bepaald* getal L aanwijst. Zoo voldoet de getallenrij

⑥ $u_1 = \frac{1}{5} \quad u_2 = 0 \quad u_3 = -\frac{1}{5} \quad u_4 = 0 \quad u_5 = \frac{1}{5} \ldots$ enz.

wel aan de gestelde voorwaarde (A), maar toch kunnen we in dit geval geen getal noemen, dat door deze getallenrij éénduidig wordt aangewezen. De gestelde voorwaarde (A) is blijkbaar te ruim, want ook in die gevallen, waarin de getallenrij wèl een bepaald getal aanwijst, krijgen we nog oneindig vele antwoorden voor L.

Vandaar, dat we onze voorwaarde gaan verscherpen, bv. tot

(B) $$|u_n - L| < 0{,}1 \quad \text{mits} \quad n > n_1.$$

Voor rij ① is: $1{,}9 < L < 2$ met $n_1 = 4$.
„ „ ② „ $\frac{7}{30} < L \leqq \frac{1}{3}$ „ $n_1 = 0$.
„ „ ③ „ $\sqrt{3} - 0{,}1 < L \leqq \sqrt{3}$ „ $n_1 = 0$.
„ „ ④ „ $2 \leqq L \leqq 2{,}1$ „ $n_1 = 5$.

Voor rij ⑥ daarentegen is er geen enkele L meer te vinden, die aan (B) voldoet, hoe groot we n_1 ook zouden willen nemen. De getallenrij ⑥ bezit geen limiet.

Het ligt nu voor de hand, dat we de onbepaaldheid van L bij de eerste vier rijen volgens de voorwaarde (B) kunnen verminderen door de voorwaarde nogmaals te verscherpen, b.v.

(C) $$|u_n - L| < 0{,}01 \quad \text{mits} \quad n > n_1.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Voor rij ① is: $1{,}99 < L \leqq 2$ met $n_1 = 7$.
„ „ ② „ $\frac{1}{3} - 0{,}01 < L \leqq \frac{1}{3}$ „ $n_1 = 1$.
„ „ ③ „ $\sqrt{3} - 0{,}01 < L \leqq \sqrt{3}$ „ $n_1 = 1$.
„ „ ④ „ $2 \leqq L \leqq 2{,}01$ „ $n_1 = 8$.

We zien, dat het beschikbaar gebied voor L verkleind is.

Opmerking 1. De grootte van n_1, mits eindig, is van geen belang.

Opmerking 2. Bovenstaande gebieden voor L zijn slechts voorbeelden. Men kan bv. voor rij ① ook nemen $L = 2\frac{1}{2}\frac{1}{0}\frac{1}{0}$ met $n_1 = 8$. De keuze voor L wordt echter steeds meer beperkt.

Nogmaals verscherpen we de voorwaarde bv. tot

(D) $$|u_n - L| < 0{,}001 \quad \text{mits } n > n_1$$

en weer zien we waarden voor L, die zoo even bij voorwaarde (C) nog mogelijk waren, vervallen, bv. $L = 2\frac{1}{2}\frac{1}{0}\frac{1}{0}$ bij rij ①.

Zoodoende komt men tot de volgende definitie van limiet:

De getallenrij u_n bezit een limiet L, als L voldoet aan de ongelijkheden

$$|u_{n+1} - L| < \varepsilon$$

van af een rangnummer $n > n_1$, wat de waarde van het positieve getal ε, (niet 0), ook is (b.v. $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ enz.).

Opgave: Bewijs nu, dat de getallenrijen ①, ②, ③ en ④ een limiet hebben.

§ 6. De funkties $y = x^2$, $y = x^3$ en $y = x^n$.

In deze § willen we het differentiaalquotient in een willekeurig punt van de parabool $y = x^2$ berekenen, b.v. in 't punt $A(a, a^2)$, een punt met de coordinaten $x = a$ en $y = a^2$, in overeenstemming met de vergelijking $y = x^2$. In de fig. 2 is A geteekend voor de waarde $a = 3{,}75$.

Volgens het voorschrift van de regel van § 4 nemen we als bewegend punt het punt $B(x', y')$. Het differentiaalquotient is dan de grenswaarde van het quotient $\frac{y' - a^2}{x' - a}$, waarbij het verschil $x' - a$ hoe langer hoe kleiner te nemen is, zoodat ten slotte $x' = a$ wordt.

Nu geldt ook voor de coördinaten van elk punt B $y' = x'^2$, zoodat we voor elk quotient mogen schrijven:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\frac{y' - a^2}{x' - a} = \frac{x'^2 - a^2}{x' - a} = x' + a.$$

We verkrijgen nu een getallenreeks door in $x' + a$ aan x' waarden toe te kennen, die hoe langer hoe minder van a verschillen, bv.:

$$\frac{2}{1}a+a, \quad \frac{3}{2}a+a, \quad \frac{4}{3}a+a, \quad \frac{5}{4}a+a, \quad \frac{6}{5}a+a, \quad \ldots.$$

De grenswaarde van deze, en elke andere denkbare reeks, waarbij x' nadert tot a, is $2a$.

Het differentiaalquotient in $A(a, a^2)$ is dus $2a$.

De berekening blijft geheel dezelfde, wanneer we in den beginne aan een andere waarde als 3,75 voor a gedacht hadden. Welke waarde a ook heeft, steeds is het differentiaalquotient gelijk aan $2a$. In overeenstemming met § 1 kunnen we dan deze veranderlijke grootheid a beter voorstellen door x.

Ons resultaat luidt nu:

Het differentiaalquotient in een punt $A(x, x^2)$ is gelijk aan $2x$.

Opgave: Construeer met behulp van deze uitkomst de raaklijn in 't punt $A(x, y)$ of (x, x^2).

Opmerking: Uit voorgaande berekening blijkt ten duidelijkste, dat het berekenen van het differentiaalquotient of 't *differentieeren* van een funktie bestaat uit twee bewerkingen, nl. een deeling en de bepaling van een grenswaarde. Hierbij moet men wel in 't oog houden, dat men eerst de deeling moet uitvoeren, om vervolgens de grenswaarde van de uitkomst dier deeling te berekenen. Bij omkeering der volgorde, zou men, door eerst de grenswaarden van deeltal en deeler te bepalen, tot een quotient $\frac{0}{0}$ komen, dat zinloos is.

Brengen we nu eens in teekening een krommey $= x^3$, *de kubische parabool* genaamd (zie fig. 3).

Berekenen we het differentiaalquotient in het punt $P(x, y)$ of (x, x^3).

We hebben tg α = de grenswaarde van $\frac{\text{het ordinaatverschil}}{\text{het abscisverschil}}$, waarbij het abscisverschil hoe langer hoe kleiner genomen moet worden, of

tg α = de grenswaarde van $\frac{y' - y}{x' - x}$, als x' hoe langer hoe minder van x gaat verschillen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Zoo'n verschil als $y' - y$ geeft men gewoonlijk aan door Δy (lees: delta y; Δ is de hoofdletter D uit het Grieksche alphabet), een notatie die te vergelijken is met log x, sin x, enz.

N.B. De Δ is *niet* een faktor, zooals de 5 bij $5y$, of de a bij ay. Evenzoo schrijft men voor het veranderlijke verschil $x' - x$ of een kleine aangroeiing van x: Δx.

We mogen dus nu schrijven:

tg α = de grenswaarde van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

voor $\Delta x = 0$

of tg $\alpha = \underset{\text{voor } \Delta x = 0}{\text{lim.}}$ van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

lim. is een afkorting van limiet, wat grenswaarde beteekent.

Opmerking: De notatie lim. is internationaal, zooals zoovele wiskundige afkortingen.

Gaan we nu over tot de berekening:

1°. de deeling:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{x'^3 - x^3}{x' - x} =$$

$$= x'^2 + x'x + x^2.$$

2°. de berekening der grenswaarde:

$$\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\text{voor } x' = x}{\text{lim.}} x'^2 + x'x + x^2 = 3x^2.$$

Men heeft voor de lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de zeer doorzichtige notatie $\frac{dy}{dx}$ (lees: d, y, d, x) ingevoerd, dus

$$\frac{dy}{dx} = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2.$$

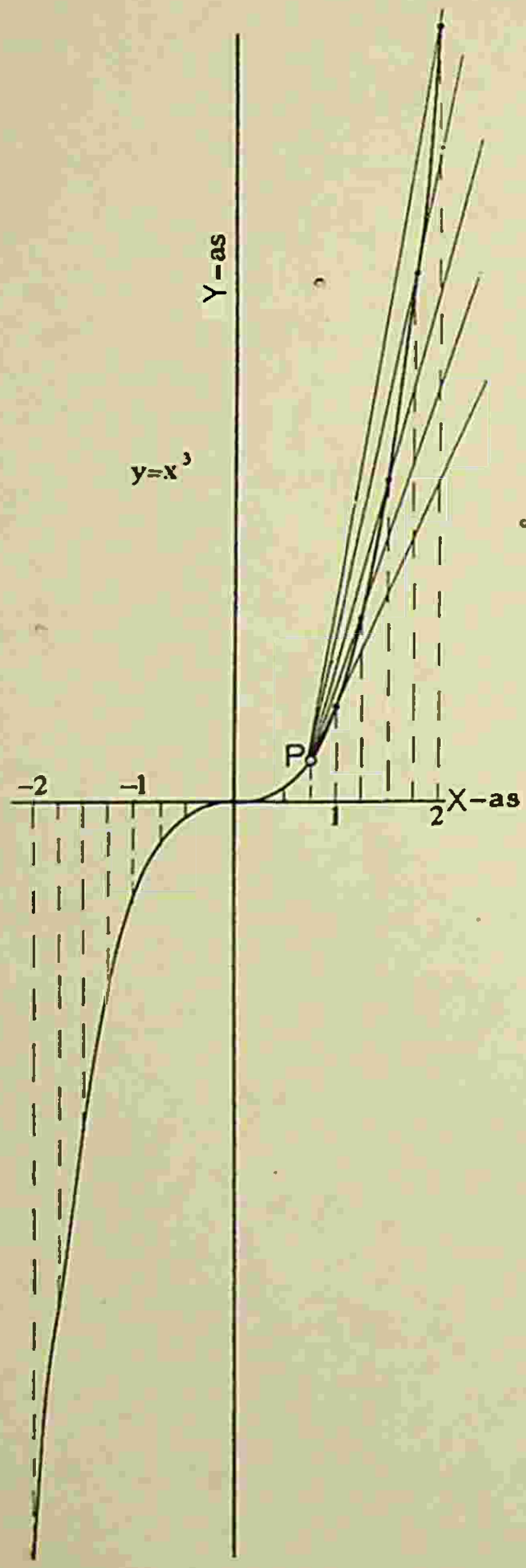


Fig. 3.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opgave: Construeer de raaklijn in eenige punten (x, y).

Behandelen we ten slotte de funktie $y = x^n$, waarin n een positief geheel getal voorstelt.

Nu is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{x'^n - x^n}{x' - x} = x'^{n-1} + x'^{n-2}x + x'^{n-3}x^2 + \ldots + x'x^{n-2} + x^{n-1}.$$

Zooals uit de exponenten van x blijkt is 't aantal termen n (de eerste term zonder x meetellen!)

Laten we nu x' gelijk aan x worden, dan vinden we

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

De waarde van nx^{n-1} is een nieuwe funktie van x, die men de *afgeleide funktie* van x^n noemt.

Regel: Men verkrijgt de afgeleide funktie van een macht van $x(x^n)$ door de machtsexponent (n) met 1 te verminderen en deze nieuwe macht (x^{n-1}) met de oorspronkelijke machtsexponent (n) te vermenigvuldigen (nx^{n-1}).

§ 7. De funkties $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ en $y = \frac{1}{x^n}$.

Beginnen we de funktie $y = \frac{1}{x}$ te differentieeren

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{\frac{1}{x'} - \frac{1}{x}}{x' - x} = \frac{\frac{x - x'}{xx'}}{x' - x} = -\frac{1}{xx'}$$

dus

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x'=x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Differentieeren we nu $y = \frac{1}{x^2}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{\frac{1}{x'^2} - \frac{1}{x^2}}{x' - x} = \frac{\frac{x^2 - x'^2}{x^2 x'^2}}{x' - x} =$$

$$= -\frac{1}{x^2 x'^2} \frac{x'^2 - x^2}{x' - x} = -\frac{1}{x^2 x'^2}(x' + x).$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dus

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x'=x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{x^3}.$$

Bepalen we nog ten slotte het differentiaalquotient van de funktie $y = \frac{1}{x^n}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{\frac{1}{x'^n} - \frac{1}{x^n}}{x' - x} = -\frac{1}{x^n x'^n} \frac{x'^n - x^n}{x' - x} =$$

$$-\frac{1}{x'^n x^n}\{x'^{n-1} + x'^{n-2}x + \ldots + x'x^{n-2} + x^{n-1}\}$$

dus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Deze uitkomst bevat de beide voorgaande gevallen, nl. voor $n = 1$ en voor $n = 2$.

Volgens de algebra mogen we voor de funktie en haar afgeleide ook schrijven $y = x^{-n}$ en $\frac{dy}{dx} = -nx^{-n-1}$.

Hieruit blijkt, dat de afgeleide verkregen wordt volgens dezelfde regel als in § 6 bij een positieve geheele exponent.

We kunnen als volgt bewijzen, dat deze regel ook geldt voor gebroken waarden van n, bv. als $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$ dan is $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$.

Bewijs: $y = \sqrt[q]{x^p}$ beteekent $y^q = x^p$. Noemen we deze gelijke waarden z: dus $z = y^q$ en $z = x^p$.

Uit 't voorgaande volgt dan dat $\frac{dz}{dy} = qy^{q-1}$ en $\frac{dz}{dx} = px^{p-1}$.

Nu is

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{z\Delta}{\Delta x} \times \frac{\Delta y}{\Delta z} = \lim \frac{\frac{\Delta z}{\Delta x}}{\frac{\Delta z}{\Delta y}} = \frac{\lim \frac{\Delta z}{\Delta x}}{\lim \frac{\Delta z}{\Delta y}} =$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

N.B. Een belangrijk geval is ook $n = 0$, dus $y = x^0 = 1$. Nu is $\frac{dy}{dx} = 0$.

Opgave: Men bewijze ook dit geval rechtstreeks (teekening).
Ook bewijze men de meer algemeene
Stelling: Het differentiaalquotient van een constante is *nul*

of in teekens: Is $y = c$(constante), dan is $\frac{dy}{dx} = 0$.

§ 8. De goniometrische funkties.

Bij het differentieeren van goniometrische funkties zullen we gebruik maken van de volgende

Hulpstelling: Indien de hoek α, *gemeten in radialen*, nadert tot 0, dan bestaan de volgende limieten.

1^0. $\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

2^0. $\lim \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1$.

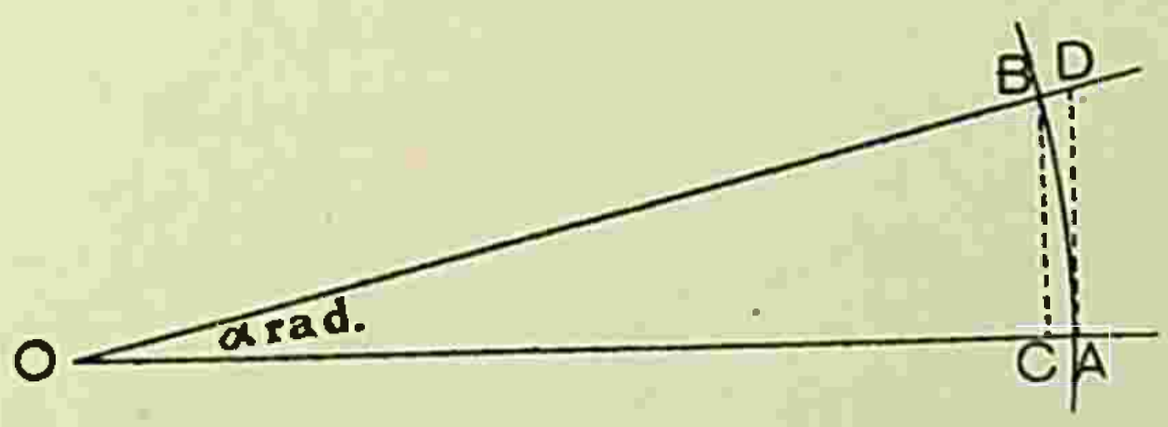


Fig. 4.

Bewijs: Uit de fig. 4 blijkt:

opp. $\triangle$ OAB $<$ opp. sector OAB $<$ opp. $\triangle$ OAD.

$\frac{1}{2}$OA $\times$ BC $<$ $\frac{1}{2}$OA $\times$ bg AB $<$ $\frac{1}{2}$OA $\times$ AD.

Deelen we deze ongelijkheden door 't positieve getal $\frac{1}{2}$OA^2, dan volgt:

$$\frac{BC}{OA} < \frac{\text{bg } AB}{OA} < \frac{AD}{OA}$$

of

$$\sin \alpha < \alpha^{rad} < \operatorname{tg} \alpha$$

en

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Laten we nu α steeds kleiner worden, dan komt er

$$1 \leqq \lim \frac{\alpha}{\sin \alpha} \leqq 1$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

m.a.w. $\lim \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$ en ook $\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

$$\lim \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = \lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} \times \lim \frac{1}{\cos \alpha} = 1.$$

Berekenen we nu het differentiaalquotient van de funktie

$$y = \sin x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{y' - y}{x' - x} = \lim \frac{\sin x' - \sin x}{x' - x} =$$

$$= \lim \frac{2\cos \frac{x' + x}{2} \sin \frac{x' - x}{2}}{x' - x} = \lim \cos \frac{x' + x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x' - x}{2}}{\frac{x' - x}{2}} =$$

$$= \lim \cos \frac{x' + x}{2} \times \lim \frac{\sin \frac{x' - x}{2}}{\frac{x' - x}{2}} = \cos x.$$

Opgave: Differentieer: $y = \cos x$. Antw.: $\frac{dy}{dx} = -\sin x$.

De afgeleide van de funktie $y = \operatorname{tg} x$ is $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Bewijs: $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{y' - y}{x' - x} = \lim \frac{\operatorname{tg} x' - \operatorname{tg} x}{x' - x}$.

Nu is $$\operatorname{tg}(x' - x) = \frac{\operatorname{tg} x' - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} x},$$

dus

$$\operatorname{tg} x' - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x' - x) . \{1 + \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} x\}.$$

Substitueerende, wordt

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\operatorname{tg}(x' - x)\{1 + \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} x\}}{x' - x} =$$

$$= \lim \frac{\operatorname{tg}(x' - x)}{x' - x} \cdot \lim\{1 + \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} x\} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Opgave: Differentieer $y = \operatorname{ctg} x$. Antw.: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

N.B. $\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} a}{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b + 1}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De afgeleide van de funktie $y = \sec x$, is $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Bewijs:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{y' - y}{x' - x} = \lim \frac{\sec x' - \sec x}{x' - x} =$$

$$= \lim \frac{\cos x - \cos x'}{x' - x} \cdot \frac{1}{\cos x \cos x'} =$$

$$= \lim - \frac{\cos x' - \cos x}{x' - x} \cdot \frac{1}{\cos x \cos x'} =$$

$$\lim + \frac{2 \sin \frac{x' + x}{2} \sin \frac{x' - x}{2}}{x' - x} \cdot \frac{1}{\cos x \cos x'} = \lim \frac{\sin \frac{x' + x}{2}}{\cos x \cos x'} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Opgave: Differentieer $y = \operatorname{cosec} x$. Antwoord: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

Opmerking: Bij de afleiding van de differentiaalquotienten van deze goniometrische funkties is steeds ondersteld, dat de hoek x in radialen is uitgedrukt; alleen in dat geval is de hulpstelling toepasselijk.

§ 9. Het differentiaalquotient van een som, produkt en quotient van twee funkties.

In de voorgaande §§ hebben we de differentiaalquotienten van eenige belangrijke funkties berek end. We zullen nu tal van meer samengestelde funkties kunnen differentieeren, indien we eerst eenige algemeene rekenregels bewijzen.

Beschouwen we twee funkties $u(x)$ en $v(x)$, of nog korter u en v, want we weten nu wel, dat we steeds funkties van de veranderlijke x beschouwen. De letters u en v worden, evenals f en F (blz. 14), veelal gebruikt om een willekeurige funktie aan te wijzen.

We hebben nu de volgende

Stelling I. Het differentiaalquotient van de som van twee funkties is gelijk aan de som van de differentiaalquotienten van die funkties, of in teekens:

Is $y = u + v$, dan is $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bewijs:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y' - y}{x' - x} = \lim \frac{u(x') + v(x') - u(x) - v(x)}{x' - x} =$$

$$\lim \left\{ u \frac{(x') - u(x)}{x' - x} + v \frac{(x') - v(x)}{x' - x} \right\} =$$

$$\lim \frac{u(x') - u(x)}{x' - x} + \lim \frac{v(x') - v(x)}{x' - x} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Opgave: Differentieer: 1) $y = x^4 + x^9$.
2) $y = x^p + x^q$.

Op dezelfde wijze kan men aantoonen, dat voor

$$y = u + v + w + \ldots \qquad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots$$

Opgave: Differentieer: 3) $y = x^p + x^q + x^r + c$.

Stelling II. Is $y = u \,.\, v$, dan is $\dfrac{dy}{dx} = u \dfrac{dv}{dx} + v \dfrac{du}{dx}$.

Bewijs:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y' - y}{x' - x} = \lim \frac{u(x')v(x') - u(x)v(x)}{x' - x}.$$

Om nu te komen tot 't differentiaalquotient van v, zullen we met de eerste term $u(x')v(x')$ een term $u(x')v(x)$ moeten verbinden.

We schrijven dus:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{u(x')v(x') - u(x')v(x) + u(x')v(x) - u(x)v(x)}{x' - x} =$$

$$\lim \left\{ u(x') \frac{v(x') - v(x)}{x' - x} + v(x) \frac{u(x') - u(x)}{x' - x} \right\} =$$

$$u(x) \lim_{x'=x} \frac{v(x') - v(x)}{x' - x} + v(x) \lim_{x'=x} \frac{u(x') - u(x)}{x' - x} =$$

$$= u(x) \frac{dv(x)}{dx} + v(x) \frac{du(x)}{dx}$$

of

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Deelen we de beide leden dezer vergelijking door $y = uv$, dan verkrijgen we de symmetrische formule:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}.$$

Bv. 1^0. $y = x^3 \sin x$.

In dit geval is $u(x) = x^3$, dus $\frac{du}{dx} = 3x^2$

$v(x) = \sin x$, dus $\frac{dv}{dx} = \cos x$.

Hieruit volgt: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$.

2^0. $y = au(x)$, waar a een constante grootheid voorstelt.

In dit geval is $v(x) = a = ax^0$. Zooals uit de schrijfwijze ax^0 blijkt, kunnen we een constante als een funktie van x beschouwen, geheel in overeenstemming met de definitie eener funktie (blz. 13). De waarden van v en x komen paarsgewijze voor, maar in dit bijzondere geval is de waarde van v steeds dezelfde, nl. gelijk aan a, wat x ook zij.

Nu is $\frac{dv}{dx} = \frac{da}{dx} = 0$ (vergelijk § 7, blz. 29), dus $\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx}$.

Regel: Het differentiaalquotient van 't produkt van een constante en een willekeurige funktie is gelijk aan het produkt van de constante en het differentiaalquotient van de funktie.

Opgaven: Differentieer [4]) $y = 7x^3$.

[5]) $y = a \cdot \cos x$.

[6]) $y = x^{p+q} = x^p x^q$.

[7]) $y = (a + bx)^3$. (Ontwikkel de 3e macht).

[8]) $y = \sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$.

[9]) $y = \cos x \sec x$.

[10]) $y = x^5 \operatorname{ctg} x$.

[11]) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x^5}$.

[12]) $y = 7x^3 \operatorname{cosec} x$.

[13]) $y = \frac{x^n}{\cos x}$.

[14]) $y = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

[15]) Men bewijze de bovenstaande regel rechtstreeks.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

16) $y = \sin(x \pm a)$.
17) $y = \cos(x \pm a)$.
18) $y = 5x^4 - 7x^3 - 10x^2 + x + 4$.
19) $y = (2x^3 - 1)(5x^2 + 6x + 7)$.

Stelling III. Is $y = \frac{u}{v}$, dan is $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$.

Bewijs:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y' - y}{x' - x} = \lim \frac{\frac{u(x')}{v(x')} - \frac{u(x)}{v(x)}}{x' - x} = \lim \frac{u(x')v(x) - u(x)v(x')}{(x' - x)v(x')v(x)}$$

$$= \lim \frac{u(x')v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x')}{(x' - x)v(x')v(x)} \text{ (verg. blz. 32)}$$

$$= \lim \frac{v(x)\frac{u(x') - u(x)}{x' - x} - u(x)\frac{v(x') - v(x)}{x' - x}}{v(x')v(x)} =$$

$$\frac{1}{v^2}\left\{ v \lim \frac{u(x') - u(x)}{x' - x} - u \lim \frac{v(x') - v(x)}{x' - x} \right\} = \frac{1}{v^2}\left\{ v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} \right\}.$$

1ste voorbeeld: $y = \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \,.\, \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2e voorbeeld: $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \,.\, 0 - 1\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Opgaven: Differentieer: 20) $y = \text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

21) $y = \text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$.

22) $y = \frac{\text{ctg } x}{x^5}$. (vergelijk opgave 11).

23) $y = \frac{x^p}{x^q}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

24) $y = \dfrac{x^n}{\cos x}$.

25) $y = \text{t g } (x \pm a)$.

26) $y = \dfrac{x^p \cos x}{ax + b}$.

27) $y = \dfrac{1 + 3x - 3x^2}{3\,(x - 1)^3}$.

28) $y = \dfrac{\sin (x - a)}{\sin (x + a)}$. (Vergelijk opg. 16 en 17).

29) $y = \dfrac{a - b \sin x}{a + b \sin x}$.

§ 10. Het differentiaalquotient van samengestelde funkties.

In de notatie $y = f(x)$ beteekent y een veranderlijke grootheid, terwijl de letter f een funktie van x voorstelt. Ondanks dit verschil in beteekenis van de letters y en f, bestaat er groote overeenkomst, nl. de waarde van de veranderlijke grootheid y en de waarde van de funktie f zijn steeds gelijk.

Vandaar dat men veelal beide door dezelfde letter voorstelt, bv.

$$u = u(x) \qquad \text{(vergelijk § 9)}.$$

De veranderlijke grootheid u is de funktie u van x.

We verkrijgen een samengestelde funktie, indien we een funktie van de veranderlijke u beschouwen, bv.

$$y = f(u).$$

Nu is u zelve een funktie van x, dus eigenlijk is

$$y = f\{u(x)\}$$

een funktie van x, en kunnen we vragen naar $\dfrac{dy}{dx}$.

Opmerking: Men lette er op, hoe bij een x-waarde een u-waarde behoort. Aan deze u-waarde is echter, dank zij de funktie $y = f(u)$, ook een y-waarde toegevoegd, zoodat de x- en y-waarden *paarsgewijze* optreden, d.w.z. y is een funktie van x.

Voorbeeld: $u(x) = x^2$, terwijl $y = \sin u$,
de samengestelde funktie is $y = \sin x^2$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opgave: Geef nog eenige voorbeelden van samengestelde funkties.

Berekenen we nu het differentiaalquotient van de samengestelde funktie $y = f\{u(x)\}$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y' - y}{x' - x} = \lim \frac{f\{u(x')\} - f\{u(x)\}}{x' - x}.$$

Schrijven we nu voor de waarde van de veranderlijke grootheid u, die gelijk is aan de waarde van de funktie $u(x')$ voor $x = x'$, u', dus $u' = u(x')$ evenals $u = u(x)$, dan is

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{f(u') - f(u)}{x' - x} = \lim \frac{f(u') - f(u)}{u' - u} \times \frac{u' - u}{x' - x} =$$

$$= \lim \frac{f(u') - f(u)}{u' - u} \times \lim \frac{u(x') - u(x)}{x' - x} =$$

$$= \lim \frac{y' - y}{u' - u} \cdot \lim \frac{u' - u}{x' - x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

zoodat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

N.B. Bovenstaande formule is niet vanzelfsprekend, want de differentiaalquotienten $\frac{dy}{du}$ en $\frac{du}{dx}$ zijn geen quotienten, maar grenswaarden van reeksen quotienten. Vergelijk de Opm. van blz. 21.

1e voorbeeld: $y = \sin x^2$.

In dit geval is $u(x) = x^2$, dus $y = \sin u$, zoodat $\frac{du}{dx} = 2x$ en $\frac{dy}{du} = \cos u$.

Volgens de algemeene formule is dan:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos u = 2x \cos x^2.$$

2e voorbeeld: $y = (a + bx)^3$.

$u = a + bx$, $y = u^3$, dus $\frac{dy}{dx} = b \cdot 3u^2 = 3b(a + bx)^2$.

(Vergelijk opg. 7, blz. 33).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opgaven: Differentieer:[1]) $y=\sin(x+a)$. (Verg. opg. 16, blz. 34).

[2]) $y=\sqrt{ax+b}$. [3]) $y=(a+bx^n)^p$.

[4]) $y=\text{tg}\,(x\pm a)$. (Vergelijk opg. 25, blz. 35).

[5]) $y=\text{tg}\,(\sin x)$.

[6]) $y=\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}$. $\left(\text{Stel } u=\dfrac{x+a}{x-a}\right)$.

[7]) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. [8]) $y=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\{a\cos^2 x+b\sin^2 x\}}}$.

[9]) $y=\sqrt{x}.\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$. [10]) $y=(a+bx+cx^2)^3$.

[11]) $y=(a^2-x^2)^5$. [12]) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a+bx}}$.

[13]) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a+bx^2}}$. [14]) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a+bx^2}}$.

[15]) $y=(1-x)(2-x)^2$. [16]) $y=(1-x)(2-x^2)$.

[17]) $y=(1-x)(2-x^2)^2$. [18]) $y=\dfrac{a+2bx^2}{(a+bx^2)^2}$.

[19]) $y=x-\sin x\cos x$. [20]) $y=\cos(ax+b)$.

[21]) $y=\cos\sqrt{ax+b}$. [22]) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$.

[23]) $y=\dfrac{a-b\sin x^2}{a+b\sin x^2}$. [24]) $y=\dfrac{a-b\sin\sqrt{x}}{a+b\sin\sqrt{x}}$.

§ 11. Het oppervlak van een figuur.

Beschouwen we nog eens de parabool $y=x^2$. Zie fig. 5.

We willen nu het oppervlak van de figuur ABB′ berekenen, die begrensd wordt door de parabool, de X-as en de ordinaat van het bewegelijke punt B(x, x^2). De grootte van dit oppervlak is afhankelijk van de plaats van 't punt B, dus van zijn abscis x. Vandaar, dat we kunnen zeggen, dat het oppervlak ABB′ een funktie is van x, dus

$$O=F(x).$$

We willen nu allereerst de afgeleide van deze funktie $F(x)$ bepalen. De letter O, die de grootte van 't oppervlak voorstelt, treedt in de plaats van de letter y, die we vroeger steeds gebruikten om de afhankelijk veranderlijke voor te stellen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Het differentiaalquotient is dus nu:

$$\frac{dO}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta O}{\Delta x}.$$

In de fig. 5 is Δx de aangroeiing of differentiaal van x, voorgesteld door de kleine afstand B'C', zoodat de *bijbehoorende* differentiaal (≡aangroeiing) van het oppervlak ΔO gelijk is aan BCC'B'. Deze differentiaal ΔO is nagenoeg gelijk aan het rechthoekje BDC'B', zoodat we hebben:

$$BB' \times \Delta x < \Delta O < (BB' + CD) \times \Delta x$$

$$BB' < \frac{\Delta O}{\Delta x} < BB' + CD,$$

zoodat

$$\frac{dO}{dx} = 1 \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta O}{\Delta x} = BB' = x^2.$$

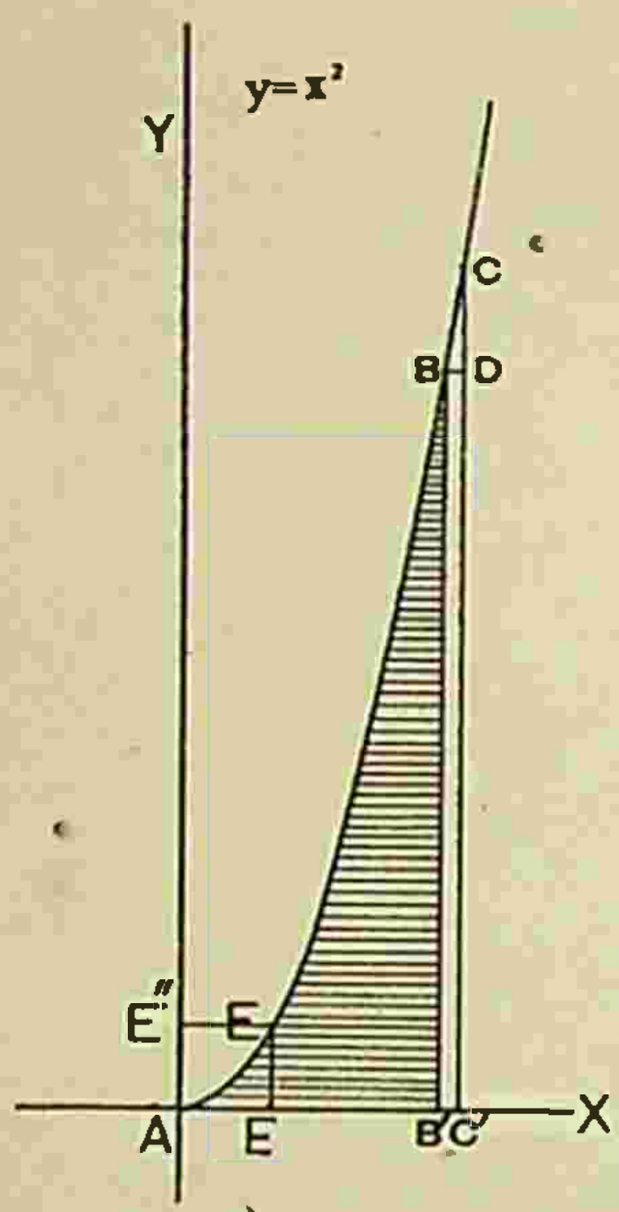


Fig. 5.

We hebben nu gevonden, dat de afgeleide van de oppervlakte funktie $O = F(x)$ gelijk is aan x^2, dus juist gelijk is aan de waarde van de funktie $y = x^2$ voor die waarde van x, die de plaats van het punt B bepaalt. We zullen dus de grootte van het oppervlak O kennen, zoodra we weten welke funktie x^2 tot differentiaalquotient heeft.

In de voorgaande §§ hebben we tal van funkties gedifferentieerd en het is slechts een kwestie van geheugen of we ons kunnen herinneren welke funktie x^2 tot afgeleide heeft. Uit de §§ 6 en 7 blijkt, dat de gezochte funktie is:

$$O = F(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

als C een willekeurige constante is.

Het antwoord is nog onbepaald, zoolang we C niet kennen.

Deze constante vinden we door de opmerking, dat het oppervlak ABB' nul wordt, indien we B laten naderen tot A, de top van de parabool. De funktie $F(x)$ is dus voor $x = 0$ zelve ook nul, dus

$$F(0) = 0 = C.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

In dit geval is de constante C gelijk nul, en het oppervlak ABB′ is:

$$O = \frac{x^3}{3}.$$

Zoo is het oppervlak AEE′, begrensd door de ordinaat $x = 1$ gelijk aan $\frac{1}{3}$, d.w.z. het is $\frac{1}{3}$-deel van het vierkant OE′EE″.

Voorgaande beschouwing kunnen we nu uitbreiden tot al die funkties, die grafisch door een lijn kunnen worden voorgesteld.

Zij bv. $y = f(x)$ zoo'n funktie, die door fig. 6 in teekening is gebracht. Beschouwen we nu het oppervlak A′ABB′ begrensd door de kromme $y = f(x)$, de x-as en de ordinaten $x_0 = a$ (in ons eerste voorbeeld is $a = 0$) en de ordinaat $x = x$. De linker-ordinaat a heeft een vaste plaats, de rechterordinaat is veranderlijk met de waarde van x. Ook hier is het gearceerde oppervlak O een funktie van x, of

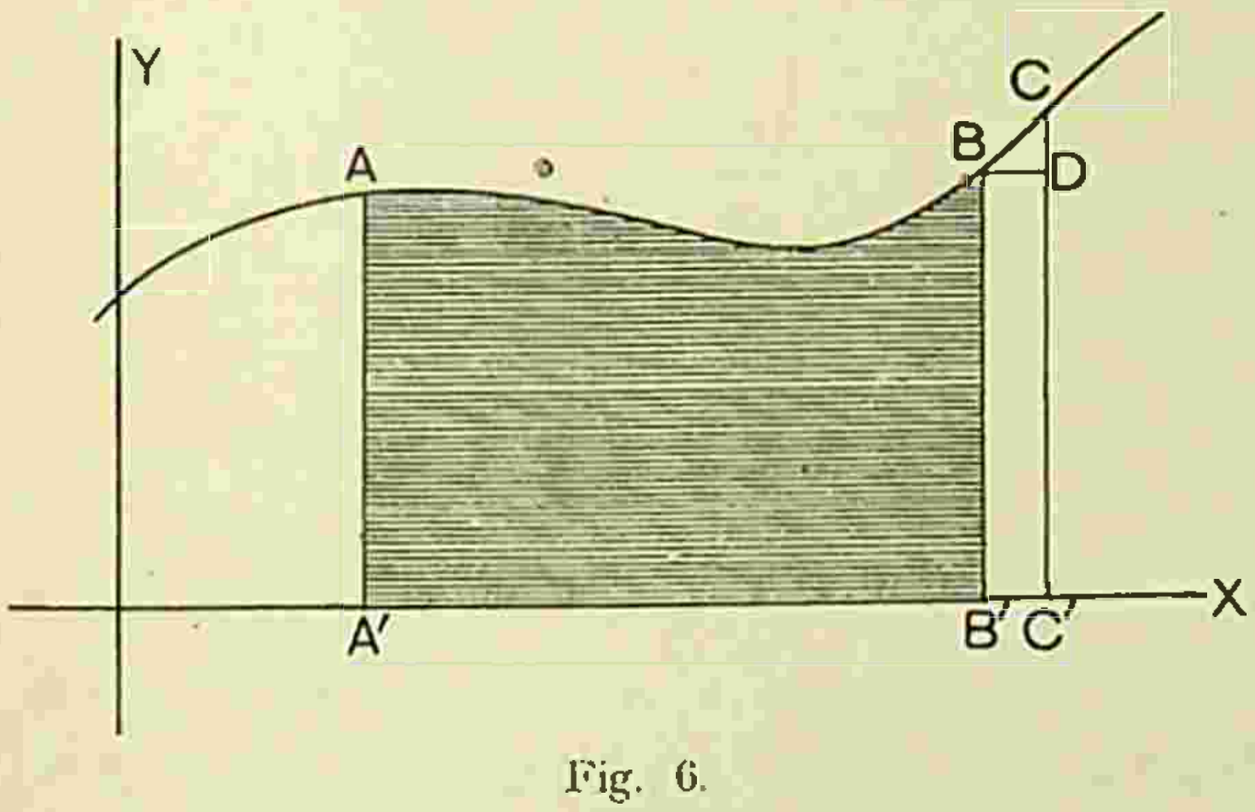


Fig. 6.

$$O = F(x).$$

Evenals in 't eerste voorbeeld, blijkt onmiddellijk uit de figuur

$$\frac{dO}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta O}{\Delta x} = B\,B' = f(x).$$

De oppervlakte funktie $F(x)$ is die funktie, wier afgeleide de gegeven funktie $y = f(x)$ is.

In tal van gevallen kunnen we $F(x)$ vinden, bv.

$$\text{voor } f(x) = \cos x, \text{ is } F(x) = \sin x + C,$$

want de afgeleide van $\sin x + C$ is $\cos x$.

De constante C berekenen we weer door de opmerking, dat, wanneer de rechter ordinaat BB′ nadert tot de linker ordinaat AA′, het tusschenliggend oppervlak nul wordt, d.w.z. voor $x = a$ is O gelijk nul, of

$$F(a) = \sin a + C = 0, \text{ dus } C = -\sin a$$

en

$$O = \sin x - \sin a.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opgaven: Bereken het oppervlak begrensd door de x-as, de ordinaten $x_0 = \frac{\pi}{4}$ en $x_1 = \frac{\pi}{2}$ en de kromme

1) $y = \sin x$.

2) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$.

3) $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

Eveneens het oppervlak, begrensd door de x-as, de ordinaten $x_0 = 1$ en $x_1 = 2$ en de kromme:

4) $y = 3x^2 - x + 1$.

5) $y = x + \sin \frac{\pi x}{2}$.

6) $y = \sqrt{x}$.

7) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

§ 12. Het oppervlak als grenswaarde.

In de voorgaande § hebben we gezien, dat de berekening van tal van oppervlakken mogelijk wordt, indien we een funktie $F(x)$ kunnen vinden, die een gegeven funktie $f(x)$ tot afgeleide heeft.

Het spreekt vanzelf, dat we slechts in de eenvoudigste gevallen op deze wijze tot een resultaat kunnen geraken.

Vandaar dat we in deze § het oppervlak als een grenswaarde zullen leeren opvatten, waardoor we dan in staat zijn, om, ook als we de gezochte funktie $F(x)$ niet reeds van vroeger kennen, althans eenige eigenschappen van die funktie te leeren kennen. (Vergel. § 15).

Beschouwen we daartoe het oppervlak $A'ABB'$, begrensd door de kromme $y = f(x)$, de X-as en de ordinaten $x = a$ en $x = b$.

In fig. 7 is $f(x) = x^2$ en $a = 1$, $b = 4$.

Verdeelen we nu de afstand $A'B'$ in eenige gelijke deelen, $A'P_1'$, $P_1'P_2'$, $P_2'P_3'$ enz., dan behooren bij de deelpunten P_1', P_2', P_3' enz. op de kromme de punten P_1 P_2 P_3 enz.

Het oppervlak $A'ABB'$ wordt nu door de ordinaten P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3' enz. verdeeld in een aantal kleine deelen $A'AP_1P_1'$, $P_1'P_1P_2P_2'$, $P_2'P_2P_3P_3'$ enz.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Eenvoudigheidshalve willen we nu onderstellen, dat de functie $y = f(x)$ steeds positief en toenemende is in het interval van $x = a$ tot $x = b$, zooals bv. in de fig. 7. We gaan nu elk oppervlakte-deeltje op twee manieren benaderen.

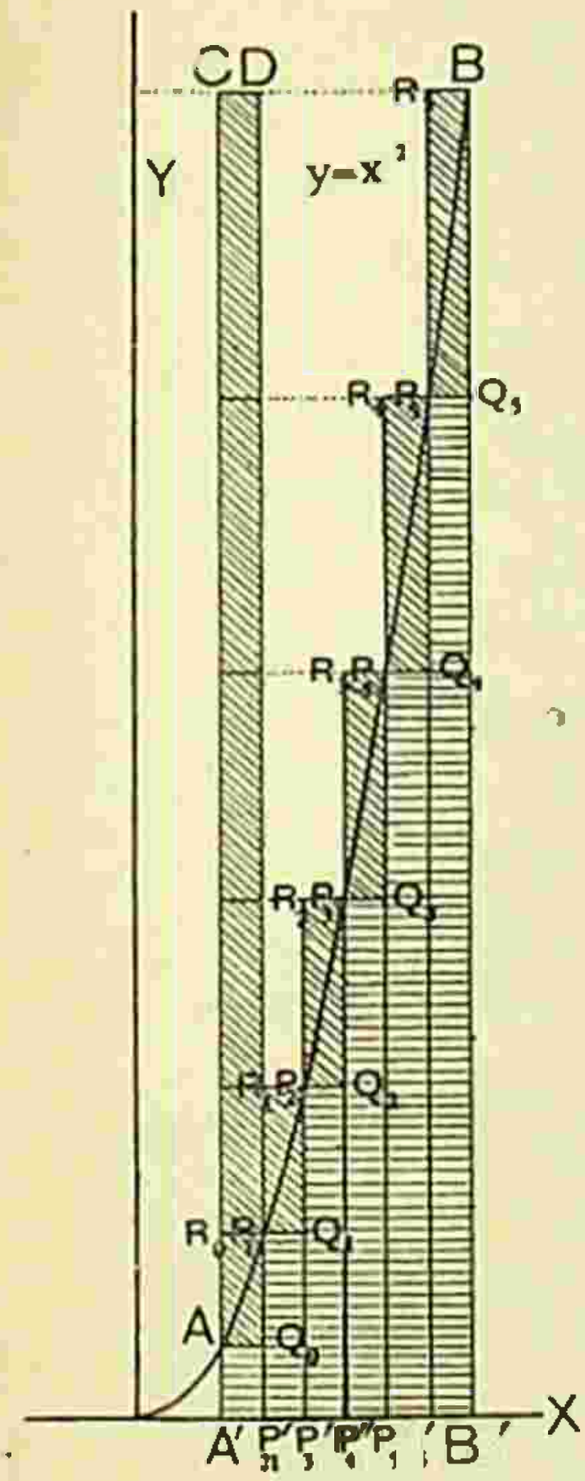


Fig. 7.

Zoo is het eerste deeltje van onze figuur $A'AP_1P_1'$ nagenoeg gelijk aan het ingeschreven rechthoekje $A'AQ_0P_1'$ en aan het omgeschreven rechthoekje $A'R_0P_1P_1'$; het ingeschreven rechthoekje $A'AQ_0P_1'$ is iets kleiner, het omgeschreven rechthoekje $A'R_0P_1P_1'$ iets grooter dan het deeltje $A'AP_1P_1'$ zelve.

Zoo hebben we voor de opvolgende deeltjes onzer figuur $A'ABB'$:

$$\begin{array}{lll} A'AQ_1P_1' & < A'AP_1P_1' & < A'R_0P_1P_1' \\ P_1'P_1Q_1P_2' & < P_1'P_1P_2P_2' & < P_1'R_1P_2P_2' \\ P_2'P_2Q_2P_3' & < P_2'P_2P_3P_3' & < P_2'R_2P_3P_3' \\ P_3'P_3Q_3P_4' & < P_3'P_3P_4P_4' & < P_3'R_3P_4P_4' \\ \text{enz.} & \text{enz.} & \text{enz.} \end{array}$$

Tellen we deze ongelijkheden bij elkaar op, zoo vinden we:

De som van alle ingeschreven rechthoekjes is kleiner dan de fig. $A'ABB'$, die op haar beurt weer kleiner is dan de som van de omgeschreven rechthoekjes. Noemen we de som der ingeschreven rechthoekjes s, die der omgeschreven rechthoekjes S, zoo is:

$$s < \text{fig. } A'ABB' < S.$$

Uit de figuur blijkt duidelijk, dat als we het aantal rechthoekjes vermeerderen tusschen *dezelfde* grenzen AA' en BB', door bv. elke basis nog eens te halveeren, beide sommen s en S hoe langer hoe meer naderen tot het oppervlak $A'ABB'$.

We kunnen dit als volgt nog nader aantoonen.

Berekenen we het verschil tusschen beide benaderingen s en S, dan vinden we:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$V = S - s = (A'R_0P_1P_1' - A'AQ_0P_1') + (P_1'R_1P_2P_2' - P_1'P_1Q_1P_2') +$
$(P_2'R_2P_3P_3' - P_2'P_2Q_2P_3') +$ enz.
$= AR_0P_1Q_0 + P_1R_1P_2Q_1 + P_2R_2P_3Q_2 +$ enz.
$=$ opp. $ACDQ_0$, als we alle verkregen deeltjes boven elkaar schuiven tot een enkele kolom.

Nu is $CA' = BB' = f(b)$
en $AA' = f(a)$
dus $V =$ opp. $ACDQ_0 = \{f(b) - f(a)\} A'P_1' = \{f(b) - f(a)\} \Delta x$
als we de gemeenschappelijke lengte van de deeltjes $A'P_1'$, $P_1'P_2'$, $P_2'P_3'$ enz. weer Δx noemen.

Vermeerderen we nu 't aantal dier deeltjes onbegrensd, bij constante lengte van $A'B'$, dan wordt Δx hoe langer hoe kleiner, en het verschil $V = \{f(b) - f(a)\}\Delta x$ nadert tot nul, zoolang $f(b)$ en $f(a)$ beide eindige waarden zijn.

Hieruit volgt, dat het oppervlak $A'ABB'$ hoe langer hoe nauwer door de beide begrenzende waarden s en S wordt ingesloten, zoodat als Δx nadert tot nul, het oppervlak $A'ABB'$ gelijk wordt aan de gemeenschappelijke grenswaarde van s en S, dus

$$\lim_{\Delta x=0} s = \text{opp. } A'ABB' = \lim_{\Delta x=0} S.$$

We kunnen nu deze grenswaarde door de volgende notatie weergeven

$$\lim_{\Delta x=0} s = \lim_{\Delta x=0} \sum_{x=b}^{x=a} \text{rechthoekjes gelegen tusschen de ordinaten } x = a \text{ en } x = b$$

$$= \lim_{\Delta x=0} \sum_{x=0} \text{rechthoekjes}^{1})$$

Nu is de hoogte van elk rechthoekje ter plaatse van de ordinaat $x = x$, ergens tusschen A' en B', gelijk aan $f(x)$, de waarde der funktie, die grafisch is voorgesteld, terwijl de basis van zoo'n rechthoekje Δx is, dus

$$\text{opp. rechthoekje} = f(x)\Delta x, \text{ zoodat}$$

$$\text{opp. } A'ABB' = \lim_{\Delta x=0} s = \lim_{\Delta x=0} \sum_{x=a}^{x=b} \text{rechthoekjes} =$$

$$= \lim_{\Delta x=0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x)\Delta x = \lim_{\Delta x=0} \sum_{a}^{b} f(x)\Delta x.$$

---

[1]) Het teeken Σ (sigma) is de hoofdletter S uit het Grieksche alphabet en beteekent „som".

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Deze notatie vervangt men nu door de veel kortere:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

De teekens lim $\sum$ zijn dus vervangen door een enkel teeken $\int$, dat een *grensvorm* van een S is, en het *integraalteeken* ($\equiv$ somteeken) heet.

Bovendien wordt de grensovergang nog uitgedrukt door de verandering van Δx in dx.

$$\left(\text{Vergelijk: } \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

Voortaan schrijven we dus

$$\text{Opp. } A'ABB' = \int_a^b f(x)dx$$

en spreken van de bepaalde integraal der funktie $f(x)$ tusschen de grenzen a en b.

a heet de onderste grens, b de bovenste grens.

Laten we nu de bovenste grens b bewegen, zoodat b een *veranderlijk* getal wordt, dat we dan ook zullen voorstellen door de letter x, dan is het opp. A'ABB' niet meer *bepaald*, maar is een funktie van x, die we $F_1(x)$ zullen noemen, dus

$$\int_a^x f(x)dx = F_1(x)$$

een *onbepaalde integraal.*

Volgens § 11 is $F_1(x)$ één der funkties, wier afgeleide gelijk is aan $f(x)$. Al die funkties verschillen slechts in een constante, zoodat $F_1(x)$ gelijk is aan één hunner, bv.

$$F_1(x) = F(x) + C.$$

We hebben dan

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) + C.$$

De constante C kunnen we op dezelfde manier als in § 11 bepalen.

Laten we x tot a naderen, dan wordt het tusschenliggend

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

oppervlak gelijk aan nul, dus ook het tweede lid moet voor $x = a$ nul worden, dus

$$F(a) + C = 0 \text{ of } C = -F(a),$$

zoodat

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Gaan we weer terug tot de bepaalde integraal tusschen de grenzen a en b, dan wordt $x = b$, dus

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Voor het oplossen van een bepaalde integraal verkrijgen we dus de volgende regel:

1°: Bepaal een funktie $F(x)$, wier afgeleide gelijk is aan $f(x)$.

2°: De bepaalde integraal is dan gelijk aan het verschil der waarden van $F(x)$, voor $x=a$ en $x=b$, dus $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Het vinden van de onbepaalde integraal $F(x)$ is natuurlijk het moeilijkst. In de volgende §§ zullen we dan ook enkele rekenregels afleiden om het opsporen der onbepaalde integraal te vergemakkelijken.

§ 13. De onbepaalde integraal.

In § 12 vonden we voor de onbepaalde integraal

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) + C.$$

Gewoonlijk laat men beide grenzen a en x weg, omdat het meestal geen zin heeft, een grens op te geven, als men de ander toch niet kent: van een bepaald oppervlak kan er dan toch geen sprake zijn. Men schrijft dus

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

In tal van gevallen kunnen we nu bij gegeven $f(x)$, onmiddellijk $F(x)$ opschrijven. Hieronder volgen de belangrijkste onbepaalde integralen:

$$\int n x^{n-1} dx = x^n + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{t\,g}\, x + C.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cosec} x + C.$$

Nu we eenige onbepaalde integralen kennen, kunnen we ook tal van bepaalde integralen berekenen.

Als voorbeeld kiezen we de sinusoïde met de vergelijking $y = \sin x$, fig. 8.

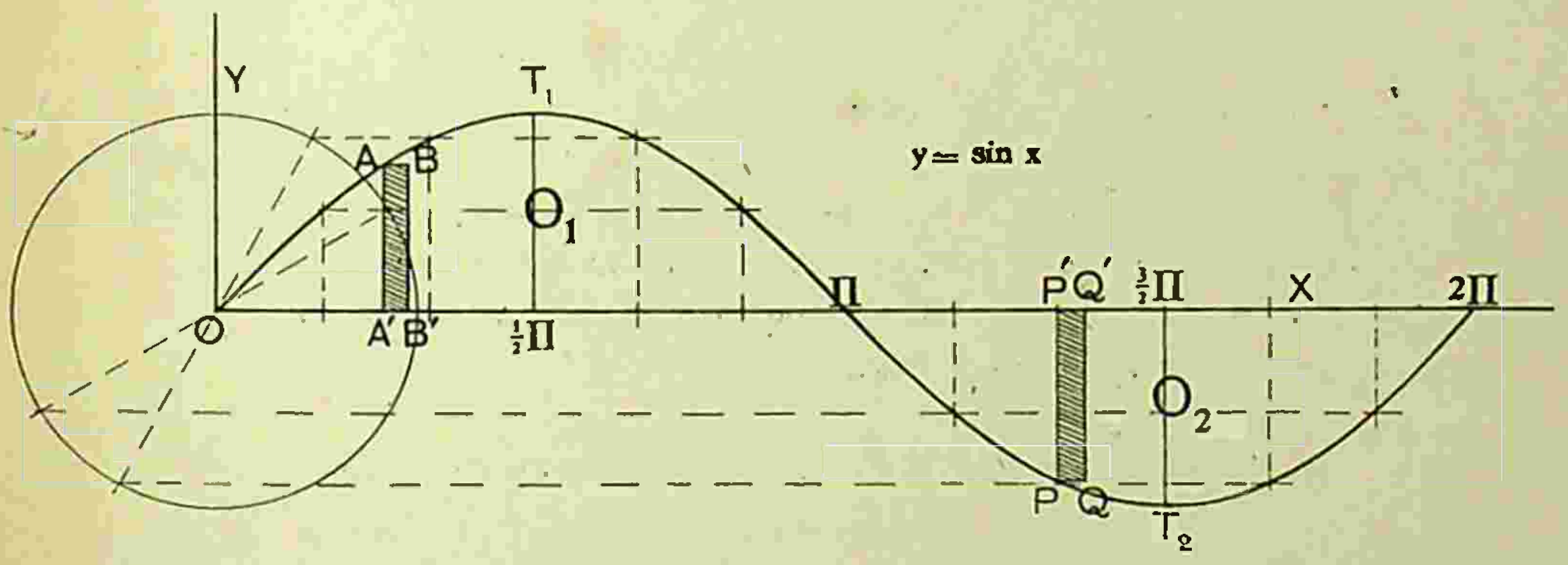


Fig. 8.

We willen het oppervlak, begrensd door de eerste berg der golflijn en de x-as van het punt $x = 0$ tot 't punt $x = \pi$ berekenen.

$$\text{Dit oppervlak } O_1 = \lim_{\text{voor } \Delta x = 0} \sum_{x=0}^{\pi} \text{rechthoekjes } A'ABB' =$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \sum_{x=0}^{\pi} y \,.\, \Delta x = \int_0^{\pi} \sin x\, dx.$$

Nu was $\int \sin x\, dx = -\cos x$, dus

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \{-\cos x\}_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

dus $O_1 = 2$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Berekenen we ook het oppervlak O_2 van het volgende deel der golflijn, dat gelegen is tusschen $x = \pi$ en $x = 2\pi$, dan vinden we

$$O_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x . dx = (-\cos x)_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos \pi) = -2.$$

Het negatieve teeken wijst er op, dat het oppervlak O_2 onder de x-as ligt, want letten we op het rechthoekje P'PQQ', dan is de hoogte PP_1 negatief. Elke ordinaat tusschen $x = \pi$ en 2π stelt een sinus voor van een hoek, gelegen in het derde en vierde quadrant, waar de sinus steeds negatief is. Dit negatieve teeken wordt in beeld gebracht door de ordinaat y naar beneden uit te zetten.

De berekening van een oppervlak met behulp eener bepaalde integraal geeft dus niet alleen de grootte van het oppervlak, maar de uitkomst laat tevens door middel van het teeken + of — zien, of het oppervlak boven dan wel onder de x-as gelegen is.

Het kan nu natuurlijk ook voorkomen, dat een oppervlak gedeeltelijk boven, gedeeltelijk onder de x-as ligt. Uit het bovenstaande volgt dan onmiddellijk, dat dan de integraal het verschil van de grootte van het oppervlak boven de x-as en van de grootte van het oppervlak onder de x-as zal leeren kennen.

Zoo is het oppervlak O begrensd door een volledige golf en de x-as in fig. 8 gelijk aan:

$$O \int_{0}^{2\pi} \sin x d x = (-\cos x)_{0}^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0,$$

dwz. het verschil der absolute grootte (dwz. de grootte zonder teeken) van de deelen boven en onder de x-as gelegen, is nul. De golf ligt evenveel boven als beneden de x-as.

Opgaven: Bereken: 1) $\int_{0}^{\pi/2} \sin x \, dx.$

2) $\int_{0}^{\pi/2} \cos x \, d x$. (teekening!)

3) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$

4) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x} dx.$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

5) $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)dx.$

6) $\int_{-1}^{+1} (4x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 8)\,dx.$

7) $\int \sin 2x\,dx.$

8) $\int_0^{\pi/6} \cos 3x\,dx.$

§14. Eenige belangrijke regels der integraalrekening.

In de voorgaande § zijn eenige integralen berekend, door de overeenkomstige formules der differentiaalrekening om te keeren.

Zoo kunnen we ook, uitgaande van de rekenregels van de differentiaalrekening, komen tot de belangrijkste formules der integraalrekening.

In § 9 is bewezen, dat het differentiaalquotient van de som van twee funkties gelijk is aan de som van de differentiaalquotienten van die funkties, elk afzonderlijk beschouwd, of

I. Is $y(x) = u(x) + v(x)$, dan is $y'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Hieruit volgt:

$$\int\{u'(x) + v'(x)\}dx = \int y'(x)dx = y(x) + C = u(x) + v(x) + C =$$
$$\int u'(x)dx + \int v'(x)dx,$$

want

$$\int u'(x)dx = u(x) + C_1$$

en

$$\int v'(x)dx = v(x) + C_2$$

zoodat

$$\int\{u'(x) + v'(x)\}dx = \int u'(x)dx + \int v'(x)dx$$

of in woorden: De integraal van de som van twee funkties is gelijk aan de som van de integralen van elk der funkties afzonderlijk.

Deze regel kan uitgebreid worden tot een willekeurig aantal

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

termen, evenals de overeenkomstige regel der differentiaalrekening (blz. 32), zoodat

$$\int\{u'(x) + v'(x) + w'(x) + \ldots\}\, d\,x =$$

$$= \int u'(x)dx + \int v'(x)dx + \int w'(x)dx + \ldots.$$

II. Op blz. 33 is bewezen:

Het differentiaalquotient van het produkt van een funktie met een constante is gelijk aan het produkt van die constante en het differentiaalquotiënt van die funktie, of

is $y(x) = a\,.\,u(x)$, dan is $y'(x) = au'(x)$.

Hieruit volgt:

$$\int a\,u'(x)dx = \int y'(x)dx = y(x) = a\,u(x) = a\,.\int u'(x)dx$$

of

$$\int a\,u'(x)dx = a\int u'(x)dx,$$

in woorden: De integraal van het produkt van een funktie met een constante is gelijk aan het produkt van die constante en de integraal van de funktie.

Toepassing:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\int (n+1)x^n dx = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1} + C.$$

(Vergelijk blz. 44).

De formule $\int x^n d\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ is een zeer belangrijke integraal, bv.

$$\int(7x^3 - 30x^2 + 8x + 6)dx = 1\tfrac{3}{4}x^4 - 10x^3 + 4x^2 + 6x + C.$$

Een tweede voorbeeld van voorgaande rekenregel is:

$$\int 7\cos x dx = 7\int \cos x dx = 7\sin x + C.$$

III. Op blz. 32 is bewezen:

Het differentiaalquotient van 't produkt van twee funkties is gelijk aan het produkt van de eerste funktie en het differentiaalquotient van de tweede, vermeerderd met het produkt van de tweede funktie en het differentiaal-quotient van de eerste, of

is $y(x) = u(x)\,.\,v(x)$, dan is $y'(x) = u(x)\,v'(x) + v(x)\,.\,u'(x)$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Hieruit volgt:

$$\int\{u(x)v'(x) + v(x)u'(x)\}dx = u(x).v(x) + \mathrm{C}.$$

Volgens Regel I is de integraal te splitsen in twee integralen:

$$\int\{u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)\}dx =$$

$$= \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx = u(x).v(x) + \mathrm{C}.$$

of ook

$$\int v(x)u'(x)dx = u(x).v(x) + \mathrm{C} - \int u(x)v'(x)dx.$$

Maken we er een bepaalde integraal van tusschen de grenzen a en b, dan komt er:

$$\int_a^b v(x)u'(x)dx = \Big[u(x).\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

of

$$\int_a^b vu'\,dx = \Big[u\,.\,v\Big]_a^b - \int_a^b uv'\,dx.$$

Met behulp van deze formule kunnen we een integraal $\int vu'\,dx$ herleiden tot een andere $\int uv'\,dx$, die dikwijls eenvoudiger is als de eerste, b.v. $\mathrm{I} = \int x\cos x\,dx$.

In dit geval is

$$v(x) = x, \qquad \text{dus } v'(x) = 1$$

$$u'(x) = \cos x, \text{ dus } u(x) = \int u'(x)dx = \int \cos x\,dx = \sin x.$$

Volgens de gevonden formule is dus:

$$\mathrm{I} = \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x.$$

Hieruit volgt b.v. de bepaalde integraal $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Bovenstaande bewerking noemt men *partieel* (gedeeltelijk) *integreeren*.

Opgaven: Integreer

1) $\int x^2\cos x\,dx.$ 2) $\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx.$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

3) $\int_0^{\pi/2} \{x^2 \cos x + x \sin x + 8x - 6\}\, dx.$

4) $\int \frac{dx}{x^n}$ (voor n geheel grooter dan 1). 5) $\int \frac{1 - x^3}{1 - x}\, dx.$ 6) $\int \frac{1 - x^n}{1 - x} \cdot dx.$

7) $\int (a + bx)^3 dx.$ 8) $\int \cos^2 x\, dx.$ 9) $\int \sin^2 x\, dx.$

10) $\int (x - \frac{1}{3}\sqrt{x})^3\, dx.$ 11) $\int (\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^3\, dx.$

12) $\int (x - \sin x)^2 dx.$ 13) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi\, d\varphi.$

14) $\int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi)^2\, d\varphi.$

§ 15. Het integreeren volgens de substitutiemethode.

Beschouwen we de integraal $I = \int \cos\sqrt{x}.\, dx.$

De funktie $y = \cos \sqrt{x}$ verkrijgt een eenvoudiger gedaante, indien we voor $\sqrt{x}$ t schrijven, dus x beschouwen als een funktie van een nieuwe onafhankelijk veranderlijke$t$. De funktie $y = \cos\sqrt{x}$ gaat door deze substitutie $x = t^2$ over in de funktie $y = \cos t$.

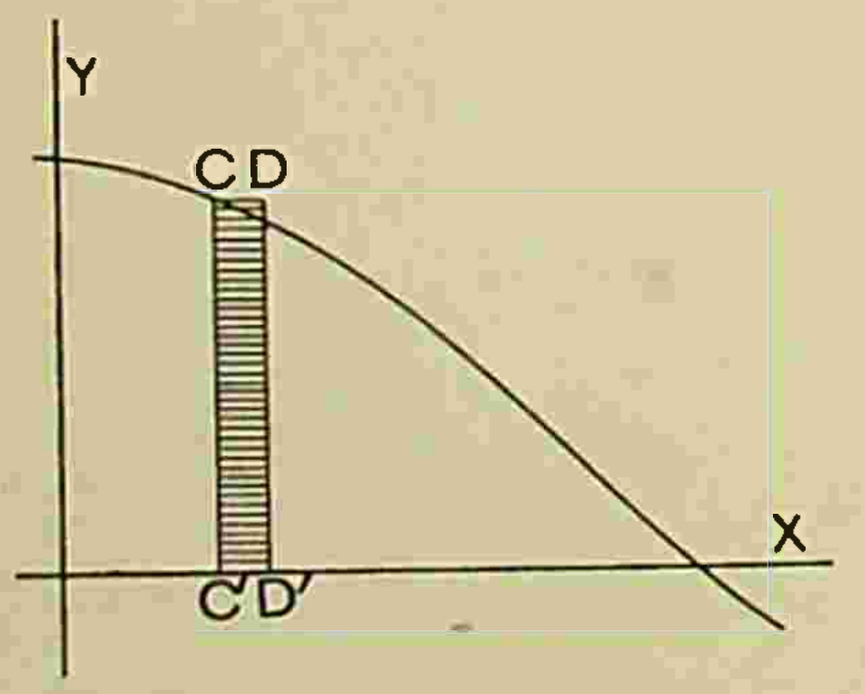


Fig. 9*a*.

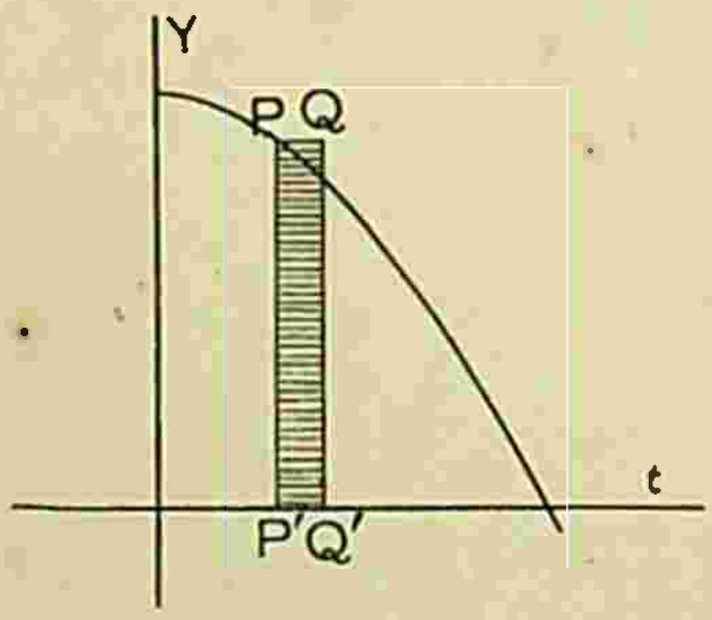


Fig. 9*b*.

Brengen we beide funkties $y = \cos \sqrt{x}$ en $y = \cos t$ in teekening op een assenkruis x, y resp. t, y (fig^{e}. 9*a* en 9*b*), dan zijn de ordinaten in overeenkomstige punten, dwz. in punten, wier abscissen x en t voldoen aan de betrekking $x = t^2$, even groot.

Beschouwen we nu een rechthoekje C′CDD′ in fig. 9*a*, dan

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

gaat dit door de substitutie $x = t^2$ over in het rechthoekje P'PQQ' (fig. 9*b*) met *dezelfde* hoogte. De basis $C'D' = \Delta x$ blijft daarentegen *niet* evengroot, zoodat het oppervlak van P'PQQ' niet gelijk is aan dat van C'CDD'. Vandaar dat we, om dezelfde oppervlakken te verkrijgen, we 't opp. P'PQQ' met een faktor f moeten vermenigvuldigen.

Noemen we de afstand P'Q', die door de substitutie $x = t^2$ ontstaat uit $\Delta x = C'D'$, Δt, dan moet f zoo groot zijn, dat

① $$\Delta x = f\,\Delta t.$$

Nu is

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dt^2}{dt} = 2\,t = \lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

dus bij benadering is $2t = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ of

② $$\Delta x = 2t\,\Delta t,$$

een benadering, die des te nauwkeuriger is, naarmate Δx (en dus ook Δt) kleiner genomen wordt.

Vergelijken we ① met ②, dan zien we, dat de gezochte faktor f gelijk is aan $2t$, d.i. de afgeleide van de funktie $x = t^2$ naar t.

Het oppervlak C'CDD' is dus gelijk aan:

$$CC' \times C'D' = \cos\sqrt{x}\,.\,\Delta x = \cos t.\ 2t\,\Delta t.$$

Hieruit volgt:

$$\lim_{\Delta x=0} \sum \cos\sqrt{x}.\,\Delta x = \lim_{\Delta t=0} \sum \cos t\,.2t\,.\Delta t$$

of

$$\int \cos\sqrt{x}.dx = \int \cos t.2t.dt = 2\int t\cos t\,dt.$$

Volgens blz. 49 is

$$2\int t\cos t dt = 2\{t\sin t + \cos t\} + C$$

dus, daar $t = \sqrt{x}$ is:

$$\int \cos\sqrt{x}.dx = 2\{\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\} + C.$$

Opgave: Controleer bovenstaand resultaat door de integraalfunktie te differentieeren. Vergelijk blz. 37. Opg. 9.

Gaan we nu over tot 't algemeene geval:

$$\int f(x)\,.dx = \lim_{\Delta x=0} \sum f(x)\,.\Delta x.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Vervangen we nu x door $\varphi(t)$, dan is $f(x) = f\{\varphi(t)\}$, terwijl $\Delta x \equiv \varphi'(t)\Delta t$, want $\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t)$, dus

$$\lim_{\Delta x=0} \sum f(x)\,\Delta x = \lim_{\Delta t=0} \sum f\{\varphi(t)\}\,\varphi'(t)\Delta t$$

of

$$\int f(x)\,dx = \int f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)dt.$$

Van de keuze van $\varphi(t)$ hangt het nu af, of de nieuwe integraal in t eenvoudiger is dan de gegeven integraal.

In deze formule beteekent dx een aangroeiing van x, die willekeurig klein genomen moet worden: overgang van $\lim_{\Delta x=0} \Sigma \int f(x)\Delta x$ op $\int f(x)\,dx$. Dit symbool dx noemen we de differentiaal van x.

Bij de substitutie $x = \varphi(t)$ in de integraal zien we, dat de differentiaal dx niet vervangen wordt door de nieuwe differentiaal dt, maar door $\varphi'(t)\,dt$. Dit is in overeenstemming met

$$\frac{dx}{dt} = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t).$$

$$\text{of} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t) + \varepsilon$$

waarbij ε een kleine grootheid is, die met Δt tot nul nadert.

We kunnen dit ook schrijven

$$\Delta x = \varphi'(t)\,\Delta t + \varepsilon\Delta t$$

waarbij de term $\varepsilon\Delta t$ oneindig klein wordt t.o.z. van de beide andere termen (zij bevat *twee* oneindig klein wordende factoren).

Symbolisch kunnen we dit schrijven

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$

zoodat bij de substitutie van $x = \varphi(t)$ de differentiaal dx vervangen moet worden door 't product van 't differentiaalquotient van x naar t en de differentiaal van t.

1ste Voorbeeld:

$$I = \int (a + bx)^n\,dx.$$

Het ligt voor de hand, dat we stellen $a + bx = t$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Hieruit volgt $b\frac{dx}{dt} = 1$ of symbolisch $bdx = dt$ of $dx = \frac{1}{b}dt$

$$I = \int t^n \frac{1}{b} dt = \frac{1}{b}\int t^n dt = \frac{1}{b}\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)} + C = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b} + C.$$

bv. voor $n = 3$: $\int (a+bx)^3 dx = \frac{1}{4b}(a+bx)^4 + C.$

2e Voorbeeld.

$$I = \int \sin 2x.\, dx.$$

Stel $2x = t$, dan is $2dx = dt$ of $dx = \frac{1}{2}dt$, dus

$$I = \int \sin 2x.\, dx = \int \sin t.\tfrac{1}{2}\, dt = -\tfrac{1}{2}\cos t + C = -\tfrac{1}{2}\cos 2x + C.$$

3e Voorbeeld:

$$I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Stel $1 - x^2 = t^2$, dan is $-2xdx = 2t\,dt$ of $xdx = -t\,dt$

$$I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_a^b \frac{-tdt}{t} = -\int_a^a dt.$$

De grenzen a en b van de integraal in t kunnen we als volgt bepalen.

De integraal in x moet genomen worden tusschen de grenzen 0 en 1, maar als $x = 0$ is, dan is, volgens de betrekking $+\sqrt{1-x^2} = t$, $t = 1$; terwijl voor $x = 1$ de waarde van t gelijk aan 0 is.

Doorloopt dus de veranderlijke x de waarden van 0 tot 1, dan doorloopt t gelijktijdig het interval van 1 tot 0.

$$I = -\int_a^b dt = -\int_1^0 dt = -\left[t\right]_1^0 = 1.$$

Bij het gebruik der substitutiemethode bij de berekening van een bepaalde integraal moet men niet alleen de funktie onder het integraalteeken veranderen, maar tevens nieuwe grenzen invoeren.

1) $\int x\sqrt{a-x}\,dx.$

2) $\int \sin x \cos^2 x\, dx.$

3) $\int \cos x \sin^2 x\, dx.$

4) $\int_0^{\pi/2} \sin^4\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi.$

5) $\int \sin^3\varphi\, d\varphi.$

6) $\int \cos^3\varphi\, d\varphi.$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

7) $\int \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi$.

8) $\int \mathrm{tg}^2 x \, dx$.

9) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

10) $\int_0^a \frac{(a^2 - b^2 x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$. (Stel $x = a \sin t$).

11) $\int_0^1 \mathrm{bg} \sin x \, dx$.

12) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. (Stel $x = \sin\varphi$).

13) $\int \frac{dx}{(ax + b)^n}$.

14) $\int \sin 3\varphi \cos 2\varphi \, d\varphi$.

15) $\int \sin 3\varphi \sin \varphi \, d\varphi$.

§ 16. De logarithmische funktie.

We zullen nu eens hetgeen we in de voorgaande §§ behandeld hebben, gaan toepassen op een belangrijke kromme lijn, die we reeds in de natuurkunde als grafische voorstelling van de wet van Boyle hebben leeren kennen. Het is de *orthogonale* of gelijkzijdige *hyperbool* met de vergelijking $xy = 1$. (Vergelijk $PV = C^{te}$).

In fig. 10 (blz. 63) is deze lijn $y = \frac{1}{x}$ geteekend.

Volgens de integraalrekening is nu het oppervlak, begrensd door de kromme lijn, de x-as en de ordinaten $x = a$ en $x = b$ gelijk aan

$$\textcircled{1} \qquad \int_a^b \frac{1}{x} \cdot dx.$$

Passen we op deze bepaalde integraal de substitutiemethode toe en noemen $x = \frac{t}{m} = \varphi(t)$, dan is $\varphi'(t) = \frac{1}{m}$ en wordt de integraal ①:

$$\int_a^b \frac{1}{x} \cdot dx = \int_{ma}^{mb} \frac{m}{t} \cdot \frac{1}{m} dt = \int_{ma}^{mb} \frac{dt}{t}.$$

N.B. Voor de bepaling der nieuwe grenzen zie men het 3e voorbeeld van § 15, blz. 53.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De waarde van de bepaalde integraal $\int_{ma}^{mb} \frac{dt}{t}$ is natuurlijk onafhankelijk van de naam van de veranderlijke onder het integraalteeken. We noemen de nieuwe veranderlijke t dus maar weer x, zoodat

$$\int_{ma}^{mb} \frac{dt}{t} = \int_{ma}^{mb} \frac{dx}{x}.$$

Deze schrijfwijze heeft nu het groote voordeel, dat deze bepaalde integraal door dezelfde kromme lijn $y = \frac{1}{x}$ an fig. 10 wordt uitgebeeld als de oorspronkelijke integraal. Het is het oppervlak, begrensd door de orthogonale hyperhool, de x-as en de ordinaten $x = ma$ en $x = mb$.

Zoo'n oppervlak, begrensd door de orthogonale hyperbool, de x-as en twee ordinaten, zullen we voortaan een hyperbolische schijf noemen.

Uit de formule:

② $$\int_{a}^{b} \frac{dx}{x} = \int_{ma}^{mb} \frac{dt}{t} = \int_{ma}^{mb} \frac{dx}{x}$$

volgt nu de

Stelling: Twee hyperbolische schijven gelegen tusschen de grenzen a_1, b_1 en a_2, b_2 hebben gelijk oppervlak, indien de abscissen van hun overeenkomstige begrenzende ordinaten een evenredigheid vormen:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2.$$

Bewijs: Zij de verhouding $a_1 : a_2 = m$, dan is $a_1 = ma_2$ en $b_1 = mb_2$. Het oppervlak van de eerste schijf is:

$$I_1 = \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{x} \text{ en van de tweede schijf } I_2 = \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{x}.$$

Nu is $I_1 = \int_{ma_2}^{mb_2} \frac{dx}{x}$, volgens ② is dus $I_1 = I_2$.

Opgave: Bewijs de formule ② $\int_{a}^{b} \frac{dx}{x} = \int_{ma}^{mb} \frac{dx}{x}$ door de beschouwing van de elementaire rechthoekjes.

Vermenigvuldig de basis van elk rechthoekje van de eerste integraal met de factor m t.o.z. van O. Het verkregen nieuwe

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

lijntje nemen we als basis van een rechthoekje voor de tweede integraal. De hoogte hiervan is juist $m \times$ zoo klein, zoodat overeenkomstige rechthoekjes steeds gelijk oppervlak hebben.

In de formule ② $$\int_a^b \frac{dx}{x} = \int_{ma}^{mb} \frac{dx}{x}$$

kunnen we nu m zoo groot kiezen, dat de nieuwe schijf juist aansluit tegen de oude. Daarvoor moet de bovenste grens b van de eerste integraal gelijk zijn aan de onderste grens der tweede, dus $b = ma$ of $m = \frac{a}{b}$.

Zoo komen we tot de twee aaneensluitende gelijke oppervlakken:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \text{ en } \int_b^{b^2/a} \frac{dx}{x}.$$

Een derde even groote schijf ontstaat door nog eens met $\frac{b}{a}$ te vermenigvuldigen.

We komen tot de schijf

$$\int_{b^2/a}^{b^3/a^2} \frac{dx}{x}.$$

Zoo kunnen we voortgaan met vermenigvuldigen en kunnen een willekeurig groot aantal even groote, aaneensluitende schijven bepalen. Is N hun aantal, o hun oppervlak, dan is hun gezamenlijk oppervlak

$$O = N \,.\, o,$$

een oppervlak, dat geheel gelegen is tusschen de hyperbool, de x-as en de ordinaat $x = a$. Dit oppervlak O is dus oneindig groot, want O kan elke eindige waarde overschrijden, indien we N maar groot genoeg nemen.

Uit symmetrie volgt, dat ook 't oppervlak, tusschen de hyperbool en de y-as oneindig groot is. Vandaar dat we als onderste grens van onze integralen niet *nul* kunnen nemen.

In het volgende zullen we steeds dezelfde waarde voor de onderste grens van onze integraal nemen, en wel $x = 1$.

Bij deze abscis $x = 1$ behoort op de hyperbool het punt A (1, 1), dat juist in 't midden van de hyperbool gelegen is. De lijn OA is een lijn van symmetrie voor de orthogonale hyperbool.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Beschouwen we nu de integraal.

$$\int_1^x \frac{dx}{x},$$

dan is deze gelijk aan het oppervlak van de hyperbolische schijf A′AXx (zie fig. 10blz. 63); een oppervlak, dat afhankelijk is van de eindordinaat x. Bij elke x vinden we een bepaald oppervlak, dat wordt gemeten door de bepaalde integraal $\int_1^x \frac{dx}{x}$. De bepaalde integraal is dus een funktie van x, die we $f(x)$ zullen noemen.

We hebben dus

$$\textcircled{3} \qquad \int_1^x \frac{dx}{x} = f(x).$$

We zullen nu de eigenschappen van deze funktie nader gaan bestudeeren.

Beschouwen we de funktie $f(x)$ voor de waarde $x=a$ en $x=b$.

Volgens de formule ③ is dan

$$f(a) = \int_1^a \frac{dx}{x} \quad \text{en} \quad f(b) = \int_1^b \frac{dx}{x} = \int_a^{ab} \frac{dx}{x}$$

volgens ②.

Hieruit volgt:

$$f(a) + f(b) = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^{ab} \frac{dx}{x} = f(a.b)$$

volgens ③ of

$$\textcircled{4} \qquad f(a.b) = f(a) + f(b)$$

in woorden: De funktie f van een produkt is gelijk aan de som van de f-funkties der faktoren.

Gevolg:

$$f(a.b.c \ldots l) = f(a) + f(b) + \ldots + f(l).$$

Deze kenmerkende eigenschap hebben we reeds in de algebra ontmoet bij de logarithme, nl. ${}^g\log a.b = {}^g\log a + {}^g\log b$ of in woorden: de logarithme van een produkt is gelijk aan de som van de logarithmen der faktoren. Het vermoeden ligt dus voor de hand, dat onze nieuwe funktie eigenlijk een oude bekende is, nl. de logarithmische funktie.

We kunnen dit dan ook als volgt aantoonen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

In de algebra is de volgende definitie van een logarithme gegeven: Onder de logarithme van een getal a verstaat men den exponent van de macht, waartoe men een standvastig getal g, grondtal genoemd, moet verheffen, om het eerste getal a te verkrijgen.

Uit deze bepaling volgt, dat ${}^{g}\log g = 1$.

Gaan we nu na, of onze funktie $f(x)$ aan bovenstaande bepaling voldoet. Zij e het getal, waarvoor $f(e) = 1$ is, dan moeten we bewijzen, dat

$$e^{f(a)} = a.$$

Beschouwen we nu de verschillende gevallen:

1°. a is een geheele positieve macht van e: $a = e^n$, dan is $f(a) = f(e^n) = f(e.e....e)$ (n faktoren) = (volgens de hoofdeigenschap)$= f(e) + f(e) + \ldots f(e)$ (n termen)$= n$ (volgens de definitie van e: $f(e) = 1$).

We vinden dus $e^{f(a)} = e^n = a$.

Voor elke waarde a, die een macht van e is, voldoet de funktie aan de definitie van een logarithme.

2°. $a = \dfrac{1}{e^n} = e^{-n}$.

Nu is, volgens ④,

$$f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1) = \int_1^1 \frac{dx}{x} = 0,$$

dus

$$f\left(\frac{1}{e^n}\right) + f(e^n) = 0 \quad \text{of} \quad f\left(\frac{1}{e^n}\right) = -f(e^n) = -n = f(a),$$

dus $e^{f(a)} = e^{-n} = a$. h. t. b. w.

3°. $a = \sqrt[m]{e^n} = e^{n/m}$

$$mf(a) = f(a^m) = f(e^n) = n,$$

dus

$$f(a) = \frac{n}{m}.$$

Hieruit volgt

$$e^{f(a)} = e^{n/m} = a. \quad \text{h. t. b. w.}$$

4°. Is a niet gelijk aan een geheele of gebroken, positieve of negatieve macht van e, bv. $a = e^{\sqrt{2}}$, dan kunnen we dien exponent

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

steeds benaderen door gebroken getallen, die dien exponent hoe langer hoe nauwer insluiten, bv.

$$\frac{n}{m} < \sqrt{\ } < \frac{n+1}{m}.$$

dan is ook $$e^{n/m} < e^{\sqrt{2}} = a < e^{\frac{n+1}{m}}.$$

(De leerling controleere aan de figuur 10 blz. 63, dat $e > 1$ is.)

Hieruit volgt:

$$f(e^{n/m}) < f(a) < f(e^{n+1/m}) \quad .$$

of $$\frac{n}{m} < f(a) < \frac{n+1}{m},$$

dus $$e^{n/m} < e^{f(a)} < e^{n+1/m}.$$

Vergelijken we dit met

$$e^{n/m} < a < e^{n+1/m},$$

dan zien we, dat a en $e^{f(a)}$ tusschen dezelfde grenzen liggen.

Deze grenzen verschillen slechts in een *faktor* $e^{1/m}$, die door m slechts grooter en grooter te nemen, hoe langer hoe meer nadert tot 1.

De grenzen schuiven hoe langer hoe meer naar elkaar toe, en laten voor a en $e^{f(a)}$ slechts een gelijke waarde toe, dus

$$e^{f(a)} = a.$$

Hiermee is bewezen, dat onze funktie $f(x)$ voldoet aan de definitie van een logarithme, met een grondtal e.

Deze logarithmen noemen we de hyperbolische logarithmen of Neperiaansche logarithmen, naar John Napier, een der uitvinders der rekenwijze met logarithmen.

Wij schrijven nu voortaan voor onze funktie $f(x)$:

$$f(x) = \lg x.$$

Het grondtal e wordt, evenals bij de Briggiaansche of gewone logarithmen, weggelaten. Het onderscheid tusschen beide blijkt uit de aan- of afwezigheid van de letter o:

Neperiaansche log van x is lg x.

Briggiaansche log van x is log x.

Uit het voorgaande blijkt, dat de Neperiaansche logarithme van een getal x gelijk is aan een bepaalde integraal:

$$y = 1 \text{ g} x = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De afgeleide funktie van deze Neperiaansche logarithme volgt onmiddellijk uit de hoofdeigenschap der integraalrekening (vergelijk § 12):

$$j(x) + C = \int f'(x)\, dx.$$

In ons geval is $j(x) + C = \lg x$, en $f'(x) = \frac{1}{x}$, dus als $y = \lg x$, dan is $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

Met behulp van deze formules kunnen we nu tal van andere funkties differentieeren en integreeren, bv.

I. $y = \lg (\sin x)$.

Noemen we $u = \sin x$, dan is $y = \lg u(x)$, dus

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$. (Vergelijk § 10).

Omgekeerd is

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx.$$

Noem $t = \sin x$, dan is

$$\frac{dt}{dx} = \cos x, \text{ dus } \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \frac{1}{\cos x}.$$

Bij substitutie komt er

$$\int \frac{\cos x}{t} \cdot \frac{1}{\cos x}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \lg t + C,$$

dus

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \lg \sin x + C.$$

II. $y = \lg (x + a)$.

Noemen we $x + a = u$, dan is $y = \lg u$, dus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{1}{x + a}.$$

Omgekeerd is

$$\int \frac{dx}{x + a} = \lg (x + a) + C.$$

Opmerking: De integraal $\int \frac{dx}{x + a}$ is een bijzonder geval van de

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

meer algemeene integraal $\int \frac{dx}{(x+a)^n}$. We kunnen deze volgens de substitutiemethode integreeren:

$$x + a = t, \text{ of } x = t - a = \varphi(t),$$

dus

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{(n-1)t^{n-1}} + C = -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C.$$

Deze uitkomst geldt voor elke waarde van n, behalve voor $n = 1$. In dit geval is, zooals we boven zagen:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \lg(x+a) + C.$$

Opgaven: Differentieer:

1) $y = \lg(ax + b)$.

2) $y = \lg \frac{ax+b}{ax-b}$ (op twee manieren).

3) $y = \lg \frac{a+bx}{a-bx}$ (op twee manieren).

4) $y = \lg \sin x$.

5) $y = \lg \cos x$.

6) $y = \lg \operatorname{tg} x$.

7) $y = \lg \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

8) $y = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

9) $y = x(\lg x - 1)$.

10) $y = x^2(\lg x^2 - 1)$.

11) $y = \sin x(\lg \sin x - 1)$.

12) $y = ax + b \lg x + \frac{c}{x}$.

13) $y = 2\sqrt{x} + x + 2 \lg(\sqrt{x} - 1)$.

14) $y = \lg(a + b \cos x)$.

15) $y = \lg(x-1)^3(x^2 + x + 1)$.

16) $y = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + 5$.

17) $y = \frac{(x-1)^2}{(x+5)^2} + \frac{12}{x+5} + 3$.

18) $y = 2\sqrt{1+x} + \sqrt{x(1+x)} - \lg\{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Integreer:

19) $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

20) $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^2}dx.$

21) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx.$

22) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx.$

23) $\int \frac{dx}{\sin x}.$

24) $\int \frac{dx}{\cos x}.$

§ 17. Het getal *e*.

In de voorgaande § hebben we de Neperiaansche logarithme van het getal x gedefinieerd door de bepaalde integraal $\int_1^x \frac{dx}{x}$, zoodat de hyperbolische schijf $A'AXx$ in zijn oppervlak de grootte van

① $$\lg x = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

weergeeft.

Vervolgens werd bewezen, dat de integraalfunktie van deze integraal voldoet aan de oude definitie van een logarithme, nl. dat

② $$e^{\lg x} = x.$$

Het grondtal of de basis van de Neperiaansche logarithmen is het getal e, want voor dit getal is de logarithme gelijk aan 1.

③ $$\lg e = 1 \quad \text{of} \quad \int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$$

In deze § willen we nu, uitgaande van de beteekenis van de integraal $\int_1^e \frac{dx}{x}$, het getal e berekenen.

De waarde van $\int_1^e \frac{dx}{x}$ is gelijk aan het oppervlak van een hyperbolische schijf, begrensd door de ordinaten $x = 1$ en $x = e$. De laatste ordinaat $x = e$ moeten we nu zoo bepalen, dat de schijf juist een oppervlakte gelijk aan de eenheid van oppervlakte verkrijgt [1]). Hiertoe herinneren we ons, dat een bepaalde integraal

---

[1]) Dit vraagstuk is een omkeering van de vraag naar het oppervlak, begrensd door de hyperbool, de x-as en twee *gegeven* ordinaten.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

ontstaat uit een som van steeds kleiner wordende termen, die elk het oppervlak van een rechthoekje voorstellen.

Wij zullen nu in het volgende steeds gebruik maken van omgeschreven rechthoekjes, d.w.z. rechthoekjes, waarvan de linkerordinaat juist reikt tot op de kromme. (Zie fig. 10).

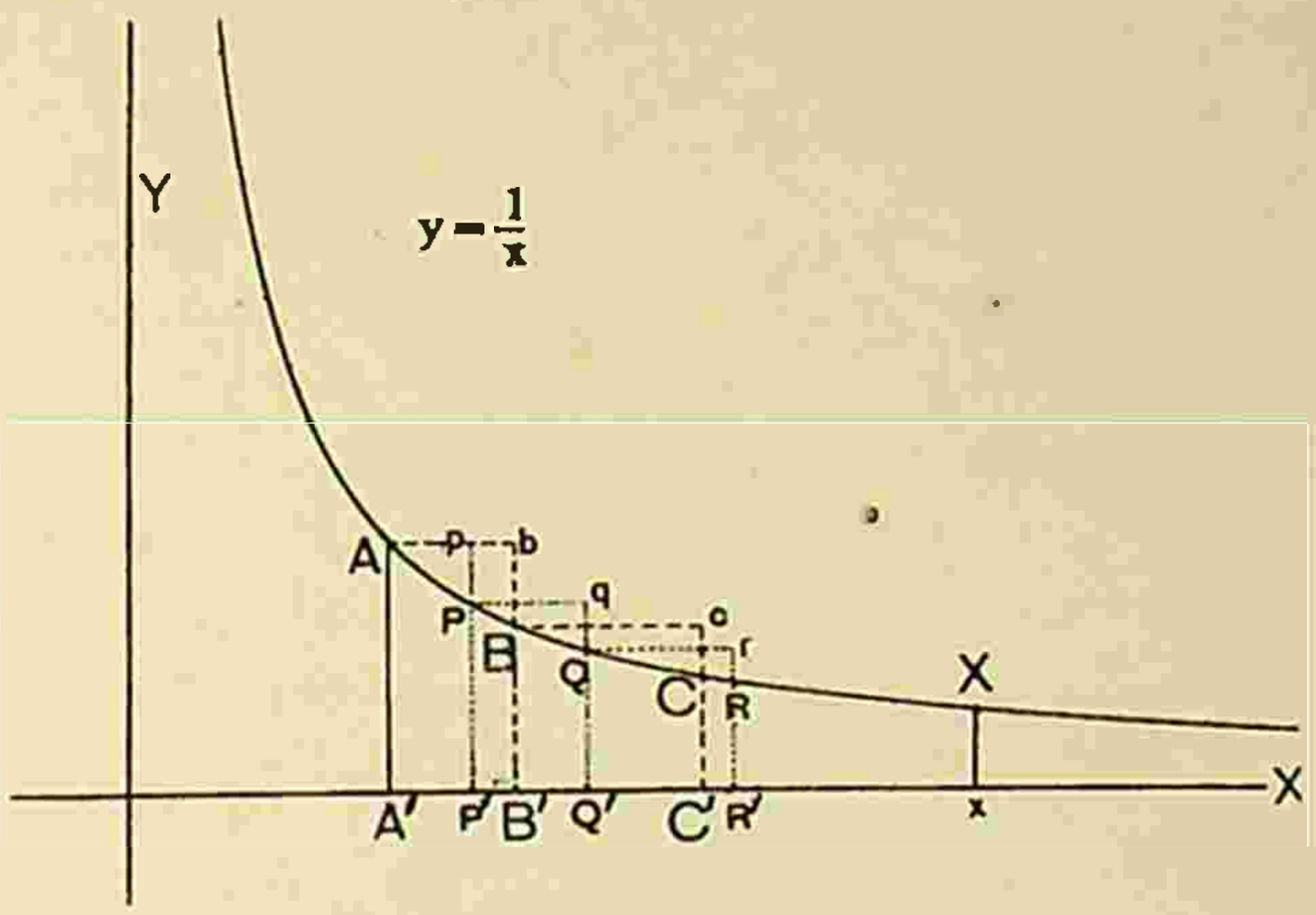


Fig. 10.

Uit de figuur blijkt dan duidelijk, dat elk rechthoekje voor een klein gedeelte buiten (boven) de hyperbool valt, want de hyperbool nadert tot de x-as, naarmate x grooter wordt. (Let op de vergelijking $y = \frac{1}{x}$).

Beginnen we nu het oppervlak 1 op te bouwen uit twee omgeschreven rechthoekjes van gelijk oppervlak, dus elk gelijk aan $\frac{1}{2}$.

De linkerordinaat van het eerste rechthoekje AA′ is $x = 1$, de grensordinaat van de schijf.

Nu is AA′ = 1 en opp. A′A*b*B′ = $\frac{1}{2}$, dus A′B′ = $\frac{1}{2}$.

De abscis van het punt B′ is dan $1 + \frac{1}{2}$.

Het tweede rechthoekje B′B*c*C′ kunnen we nu 't gemakkelijkst laten ontstaan, door de basis van de rechthoek A′A*b*B′ te vermenigvuldigen t.o.z. van O met de faktor $1 + \frac{1}{2}$.

Hierdoor gaat A′ (1,0) over in B′ $(1 + \frac{1}{2}, 0)$

$$B'(1+\tfrac{1}{2}, 0) \text{ in } C'((1+\tfrac{1}{2})^2, 0),$$

terwijl de hoogte AA′ overgaat in BB′, die juist $(1 + \frac{1}{2}) \times$ zoo *klein* is als AA′. De basis B′C′ is daarentegen $(1 + \frac{1}{2}) \times$ zoo *groot* als A′B′, dus is het oppervlak hetzelfde gebleven, of

$$\text{opp. } B'BcC' = \tfrac{1}{2}.$$

De figuur A′A*b*B*c*C′A′ heeft dus een oppervlakte gelijk aan 1. De inliggende hyperbolische schijf A′ABCC′A′ heeft dus een oppervlakte kleiner dan 1, waaruit volgt, dat de hyperbolische schijf

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van 't getal e, met een oppervlak gelijk aan 1, verder reikt dan tot de ordinaat CC'.

Het getal e is zeker grooter dan de abscis van C, of

$$e > (1 + \tfrac{1}{2})^2.$$

Gaan we nu het oppervlak 1 verdeelen over drie gelijke omgeschreven rechthoekjes, elk met een oppervlak $= \frac{1}{3}$.

Het eerste rechthoekje A'AϕP' heeft weer een hoogte AA' = 1, dus een basis gelijk aan $\frac{1}{3}$. De abscis van P' is dus $1 + \frac{1}{3}$.

Het volgend aángrenzend en even groot rechthoekje ontstaat uit het eerste door vermenigvuldiging met $1 + \frac{1}{3}$. De abscis van Q is dan $x = (1 + \frac{1}{3})^2$. Vermenigvuldigen we nog eens, dan ontstaat uit P'PqQ', het derde rechthoekje Q'QrR', terwijl de abscis van R gelijk is aan $(1 + \frac{1}{3})^3$.

De figuur A'AϕPqR'A' heeft bijgevolg een oppervlakte gelijk aan de eenheid. De inliggende hyperbolische schijf A'APQRR' heeft dus een oppervlakte kleiner dan 1, waaruit volgt, dat de ordinaat $x = e$, die de schijf met een oppervlak = 1 begrenst, rechts van de ordinaat $x = (1 + \frac{1}{3})^3$ ligt, of

$$e > (1 + \tfrac{1}{3})^3.$$

Zoo kunnen we voortgaan en de eenheid van oppervlakte verdeelen over 4, 5, ... n even groote, aaneensluitende rechthoekjes. Evenals voor de gevallen $n = 2$ en $n = 3$, zullen we vinden:

$$e > (1 + \tfrac{1}{4})^4$$
$$e > (1 + \tfrac{1}{5})^5$$
enz.

In 't algemeen is

$$④ \qquad e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Uit de afleiding van deze ongelijkheid blijkt, dat e daarom niet gelijk is aan $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, omdat van elk der n rechthoekjes een klein gedeelte buiten de hyperbolische schijf uitsteekt. We kunnen analoog aan § 12 bewijzen, dat dit verschil tusschen de oppervlakten van de schijf en van alle n rechthoekjes samen, nadert tot nul, wanneer we n maar grooter en grooter nemen. De rechthoekjes hebben in dit geval ongelijke basissen, zoodat we het verschil eerst vergrooten door elke rechthoek de basis van de grootste te

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

geven. Deze nieuwe som nadert toch tot nul, omdat ook de grootste basis oneindig klein wordt met onbegrensd toenemende n.

We mogen dus schrijven

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Opgave: Bewijs met behulp van 2, opv. 3, 4 , . . . n ingeschreven gelijke rechthoekjes, dat

opv.
$$e < (1 + \tfrac{1}{1})^2$$
$$e < (1 + \tfrac{1}{2})^3$$
$$e < (1 + \tfrac{1}{3})^4$$
enz.

in 't algemeen

⑥ $$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

N.B. Een ingeschreven rechthoek is een rechthoek, waarvan de rechter begrenzende ordinaat juist tot aan de hyperbool reikt.

Uit bovenstaande formules ④ en ⑥ volgt

⑦ $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

De beide grenzen $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ en $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ verschillen slechts in één faktor $1 + \frac{1}{n}$. Hoe grooter we dus n nemen, des te minder zullen de grenzen, waartusschen e ligt, onderling verschillen. Hieruit volgt opnieuw

⑤ $$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

In het onderstaande tabelletje is de ongelijkheid ⑦ voor enkele waarden van n berekend, waardoor we even zoovele benaderingen voor e vinden.

$n = 3$	$2{,}37037 < e < 3{,}16049$
$n = 6$	$2{,}52162 < e < 2{,}94189$ dus $e = 2{,}\ldots$
$n = 10$	$2{,}59374 < e < 2{,}85299$
$n = 20$	$2{,}65330 < e < 2{,}78596$
$n = 30$	$2{,}67431 < e < 2{,}76345$
$n = 40$	$2{,}68507 < e < 2{,}75220$
$n = 100$	$2{,}70483 < e < 2{,}73188$ dus $e = 2{,}7\ldots$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Deze berekening van benaderende waarden voor e is geheel analoog aan die voor $\sqrt{2}$ in de algebra en het getal π in de meetkunde. Vooral als we ons herinneren, hoe het oppervlak van een cirkel (πR^2) gedefinieerd is als de grenswaarde van de oppervlakken van den in- en omgeschreven regelmatigen n-hoek, waarvan het aantal zijden steeds toeneemt (som van n kleine driehoekjes), zien we de groote overeenkomst tusschen de berekening van de getallen π en e.

We kunnen e veel gemakkelijker berekenen, indien we de macht $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ontwikkelen in een reeks, met behulp van het binomium van Newton.

Volgens de algebra is:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} . b + \frac{n(n-1)}{1 . 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} a^{n-3} b^3 + \ldots$$

dus

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 . 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 . 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 . 2 . 3} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{1 . 2 . 3 . 4} + \ldots$$

Hieruit volgt, voor $n = \infty$,

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 . 2} + \frac{1}{1 . 2 . 3} + \frac{1}{1 . 2 . 3 . 4} + \ldots$$

of

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots \text{ enz.}$$

De notatie 4! (spreek uit: vier fakulteit) beteekent: 1 . 2 . 3 . 4.

Noemen we de som der eerste n termen van deze e-reeks S_n, dan zijn S_1, S_2, S_3 enz. even zoovele benaderingen voor e, die hoe langer hoe nauwkeuriger worden.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Men vindt b.v.

$$S_1 = 1$$

$$\frac{1}{1!} = 1$$

$$S_2 = 2$$

$$\frac{1}{2!} = 0,5$$

$$S_3 = 2,5$$

$$S_3 = 2,5$$

$$\frac{1}{3!} = 0,1666667^-$$

$$S_4 = 2,6666667^-$$

$$\frac{1}{4!} = 0,0416667^-$$

$$S_5 = 2,7083333^+$$

$$\frac{1}{5!} = 0,0083333^+$$

$$S_6 = 2,7166667^-$$

$$\frac{1}{6!} = 0,0013889^-$$

$$S_7 = 2,7180557$$

$$\frac{1}{7!} = 0,0001984$$

$$S_8 = 2,7182541$$

$$\frac{1}{8!} = 0,0000246$$

$$S_9 = 2,7182787$$

$$\frac{1}{9!} = 0,0000027$$

$$S_{10} = 2,7182814$$

enz.

Zoo voortgaande, kan men e in een willekeurig groot aantal decimalen berekenen. In 12 decimalen nauwkeurig, is:

$$e = 2,718.\ 281\ .\ 828.\ 459\ldots$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 18. De e-funktie: $y = e^x$.

Is

$$y = e^x, \tag{1}$$

dan is volgens de algebraïsche definitie van de logarithme voor het grondtal e

$$x = \lg y = \int_1^y \frac{dt}{t}. \tag{2}$$

In de voorgaande § hebben we nu de waarde van y leeren berekenen voor $x = 1$. We vonden:

$$y = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \tag{3}$$

We kunnen nu, op geheel dezelfde wijze, de waarde van y berekenen voor b.v. $x = 3$.

(Opgave: De leerling trachte de geheele gedachtegang te herhalen voor $x = 3$).

In dit geval is het resultaat:

$$y = e^3 \text{ (vergelijk formule (1))} = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n =$$

$$1 + \frac{3}{1.} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} \cdots$$

Zoo kan men te werk gaan met elke waarde voor x, zoodat we komen tot de algemeene ontwikkeling:

$$y = e^x = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{4}$$

die geldig is voor elke waarde van x.

Met behulp van deze reeks (4) kunnen we nu ook de afgeleide funktie van $y = e^x$ bepalen. Daartoe hebben we de reeks slechts term voor term te differentieeren.

Uit

$$y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

volgt dan

$$y' = 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x,$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

in woorden: *De afgeleide van de exponentiëele funktie* (*d.w.z.* e^x) *is de funktie zelve.*

Dit is de belangrijkste eigenschap van de *e*-funktie.

Hieruit volgen weer tal van belangrijke differentiaalquotienten en bij omkeering belangrijke integralen, b.v.

I. $y = a^x$.

Volgens de algebraïsche definitie eener logarithme, is

$$a = e^{\lg a}, \text{ dus } y = e^{x \lg a}.$$

Noemen we $x \lg a = u$, dan is y een samengestelde funktie van x, door tusschenkomst van $u = x \lg a$.

Hieruit volgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \,.\, \lg a = e^{x \lg a} \lg a = a^x \lg a,$$

dus voor $y = a^x$, is $y' = a^x \lg a$.

Bij omkeering is dan:

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\lg a} + C.$$

In het bijzondere geval, dat $a = e$ is, vindt men

$$\int e^x \, dx = e^x + C.$$

Opgave: Bewijs, dat voor

$$y = e^{kx}, \qquad y' = ke^{kx}$$

en

$$\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C.$$

II. Bereken

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \, dx.$$

Noemen we $e^x = t$, dan is $x = \lg t = \varphi(t)$, dus $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$.

Bij substitutie komt er:

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx = \int \frac{t + 1}{t - 1} \cdot \frac{1}{t} \, dt \,.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

We kunnen nu de breuk $\frac{t+1}{t(t-1)}$ splitsen in

$$\frac{a}{t}+\frac{b}{t-1}\equiv\frac{t+1}{t(t-1)}.$$

Bij vermenigvuldiging met $t(t-1)$ komt er

$$a(t-1)+bt\equiv t+1$$

dus voor $t=0$ $\quad -a=1.$ of $a=-1$,

„ $t=1$ $\quad b=2$,

dus

$$\int\frac{t+1}{t(t-1)}dt=\int\frac{-1}{t}dt+\int\frac{2dt}{t-1}=-\int\frac{dt}{t}+2\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$-\lg t+2\lg(t-1)=\lg\frac{(t-1)^2}{t}=\lg\frac{(e^x-1)^2}{e^x}=\lg\{e^x-2+e^{-x}\},$$

dus

$$\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx=\lg\{e^x-2+e^x\}+C=\lg a\{e^x-2+e^{-x}\}.$$

Veel kórter, doch kunstmatiger, is de volgende weg:

$$\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx=\int\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}dx=\int\frac{2d(e^{x/2}-e^{-x/2})}{e^{x/2}-e^{-x/2}}=$$

$$2\lg(e^{x/2}-e^{-x/2})+C=\lg\{e^x-2+e^{-x}\}+C.$$

Opmerking: In de formule ① $y=e^x$ denkt men zich gewoonlijk x als onafhankelijk veranderlijke, en y als afhankelijk veranderlijke, b.v. men kan y berekenen, zoodra x bekend is.

In de formule ② $x=\lg y$ is het daarentegen juist omgekeerd, x wordt door y bepaald. Vandaar dat men de funkties $y=e^x$ en $x=\lg y$ *omgekeerde funkties* noemt.

Een ander voorbeeld van omgekeerde funkties is $y=x^2$ en $x=\sqrt{y}$.

Een voor de hand liggende eigenschap van omgekeerde funkties is, dat hun differentiaalquotienten elkaars *omgekeerden* zijn, d.w.z. hun produkt is 1, b.v.:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Voor $y = e^x$, is $\frac{dy}{dx} = e^x$

voor $x = \lg y$ is $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$ (blz. 60)

dus

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{e^x}{y} = 1.$$

Deze eigenschap volgt onmiddellijk uit de definitie van het differentiaalquotient.

Opgaven: Differentieer:

1) $y = e^{ax+b}$. 2) $y = e^{x^2}$. 3) $y = e^{\sin x}$. 4) $y = x^2 e^{3x}$.

5) $y = \lg (ae^x + b)$. 6) $y = \lg \left(\frac{a + be^x}{a - be^x}\right)$ (op twee manieren).

Integreer:

7) $\int xe^x \, dx$. 8) $\int x^2 e^x \, dx$. 9) $\int x^3 e^x \, dx$. 10) $\int xe^{2x} \, dx$.

11) $\int a^x dx$. 12) $\int \frac{dx}{e^{kx}}$. 13) $\int_0^1 x \lg x \, dx$. (Stel $\lg x = t$).

14) $\int_0^1 x^2 \lg x \, dx$. 15) $\int_0^\infty e^{-kx} dx$.

16) $\int_0^\infty xe^{-x} \, dx$. 17) $\int_0^\infty x^2 e^{-x} \, dx$.

18) $\int_0^\infty x^3 e^{-x} \, dx$. 19) $\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx$.

§ 19. Toepassingen.

I. De berekening van de logarithmentafel.

We gaan uit van de integraal (zie blz. 60).

① $$\lg (1 + x) = \int_0^x \frac{dx}{1 + x}.$$

N.B. De onderste grens is hier 0.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nu kunnen we de breuk $\frac{1}{1+x}$ in een reeks ontwikkelen:

$$\text{②} \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \text{ enz.}$$

die convergeert voor $|x| < 1$.

Opmerking: De notatie $|x|$ (spreek uit: modulus x) beteekent, dat we de absolute waarde van x, d.i. de waarde zonder teeken, bedoelen.

Substitueeren we deze reeks in de integraal, en integreeren we vervolgens term voor term, dan komt er:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x \{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\}\, dx =$$

$$\left[\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right]_0^x = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

dus

$$\text{③} \qquad \lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \text{ enz.}$$

Ook deze reeks convergeert voor $|x| < 1$, want zijn termen zijn stuk voor stuk kleiner dan die van de meetkundige reeks ②.

Uitgaande van ③ kan men nu andere reeksen afleiden, die sterker convergeeren, en ons in staat stellen ook de lg van getallen grooter dan 2 te berekenen, b.v.

Vervangen we in ③ x door $-x$, zoo vinden we:

$$\text{④} \qquad \lg(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots$$

dus

$$\lg(1+x) - \lg(1-x) = \lg\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right\}.$$

Hieruit volgt, door de substitutie

$$x = \frac{z}{2a+z}$$

$$\lg\frac{1+\frac{z}{2a+z}}{1-\frac{z}{2a+z}} = \lg\frac{2a+z+z}{2a} = \lg\frac{a+z}{a} =$$

$$2\left\{\frac{z}{2a+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^5 + \ldots\right\}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

b.v. voor $a = 1$ en $z = 1$ vinden we

$$\lg 2 = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right\}$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333$$

$$\frac{1}{81} = 0{,}01234$$

$$\frac{1}{1215} = 0{,}00082$$

$$\frac{1}{15309} = 0{,}00007$$

$$0{,}34656 \quad +$$

$$\lg 2 = 0{,}6931.$$

Opgave: Bereken lg 5, door te stellen $a = 125$, $z = 3$.
Antw.: $\lg 5 = 1{,}6094$.
Bereken: lg 3 ($a = 80$, $z = 1$).
Antw.: lg 3 = 1,0986.
Bereken: lg 7.
Antw.: lg 7 = 1,9459.

Zijn eenmaal de Neperiaansche logarithmen berekend, dan zijn de Briggiaansche logarithmen gemakkelijk hieruit af te leiden.

Is $y = \lg a$, en $x = \log a$, d.w.z. is y de Neperiaansche en x de Briggiaansche logarithme van een getal a (vergelijk blz. 59), dan is

$$a = e^y = 10^x$$

dus als we de Neperiaansche lg nemen:

$$\lg a = y = x \lg 10,$$

of

⑤ $$x = \log a = \frac{\lg a}{\lg 10}.$$

Nu vonden we

$$\begin{array}{l} \lg \ 2 = 0{,}6931 \\ \lg \ 5 = 1{,}6094 \\ \hline \lg 10 = 2{,}3025 \end{array} \quad +$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dus ⑤ wordt:

⑥ $$\log a = \frac{\lg a}{2{,}3025} = 0{,}43429 \lg a,$$

b.v.

$$\log 2 = 0{,}43429 \lg 2 = 0{,}43429 \times 0{,}6931 = 0{,}3010.$$

II. Een vraagstuk uit de samengestelde-interest rekening.

Een kapitaal wordt uitgezet tegen samengestelde interest tegen $p\,^0/_0$. Na hoeveel jaren is dit kapitaal verdubbeld?

Oplossing: Noemen we het kapitaal K_0 en het aantal jaren n, dan is

$$2K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n K_0,$$

of, indien we gebruik maken van de Neperiaansche logarithmen:

$$n = \frac{\lg 2}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

Volgens de voorgaande toepassing is nu:

1°. $\lg 2 = 0{,}6931$, (zie blz. 73).

2°. $\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{p}{100}$ bij groote benadering (blz. 72 form.③)

dus

$n = \frac{69}{p}$, een formule, die geldig is voor alle gebruikelijke procenten, b.v.

$p = 3$. $n = 23$ jaar.
$p = 5$. $n = 14$ jaar.

Uit dit voorbeeld blijkt, dat het grondtal e te verkiezen is boven het grondtal 10.

Opmerking: De gewone logarithmen hebben echter het enorme voordeel, dat de logarithmen van twee getallen, die slechts in de plaats der komma verschillen, dezelfde mantisse hebben, terwijl hun verschillende wijzers gemakkelijk te bepalen zijn.

Bij bovenstaande berekening wordt de rente jaarlijks bijgeschreven.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Heeft de rentebijschrijving echter telkens na $\frac{1}{k}$ jaar plaats dan is de grootte van het kapitaal na n jaar $= nk$ perioden.

$$K_n = \left(1 + \frac{p}{100k}\right)^{nk} K_0.$$

Men spreekt nu van continue rente, als we k onbegrensd groot laten worden. In dit geval is:

$$K_n = \lim_{k=\infty} \left(1 + \frac{p}{100k}\right)^{nk} K_0 = \left\{ \lim_{k=\infty} \left(1 + \frac{p}{100k}\right)^{k} \right\}^{n} K_0 = {}_{\text{b}}\left(\begin{matrix}\text{Verg.}\\ \text{lz. } 6\,8\end{matrix}\right)$$

$$= \left\{ e^{\frac{p}{100}} \right\}^{n} K_0 = e^{\frac{np}{100}} K_0.$$

Bij verdubbeling is dus

$$e^{\frac{np}{100}} = 2$$

$$\frac{np}{100} = \lg 2$$

$$n = \frac{100 \lg 2}{p} = \frac{69{,}31}{p}.$$

Voor continu bijgeschreven rente geldt 't gevonden resultaat dus precies.

III. De barometerstand als funktie van de hoogte.

Onderstellen we eens, dat de atmosfeer boven een bepaalde plaats A in evenwicht is, zoodat ook de temperatuur overal dezelfde is. De luchtdruk p zal daarentegen op grootere hoogte afnemen, want de onderste luchtlagen worden door de bovenste meer samengeperst.



Fig. 11.

Beschouwen we een luchtkolommetje, met een hoogte Δh, dan zal het drukverschil op grond- en bovenvlak juist het gewicht van dit kolommetje in evenwicht moeten houden. Dit gewicht is evenredig met de hoogte Δh en de druk, daar ter plaatse, p, dus $\Delta G = fp\Delta h$.

f is een evenredigheidsfaktor, die overal even groot is, omdat we ondersteld hebben, dat de temperatuur overal dezelfde is en we de doorsnede van de luchtkolom ook overal gelijk nemen.

De drukafname $-\Delta p$, bij een stijging over Δh, is dus

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$-\Delta p = f p \Delta h$$

of

$$\frac{\Delta p}{p} = -f\Delta h.$$

Voor een stijging van den grond tot op h m. vinden we dus

$$\sum_{p=p_0}^{p} \frac{\Delta p}{p} = -\sum_{h=0}^{h} f\Delta h$$

of

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -f\int_{0}^{h} dh,$$

dus

$$\lg p - \lg p_0 = -fh.$$

Hieruit volgt

$$\lg {}^{p}/_{p_0} = -fh$$

of

$${}^{p}/_{p_0} = e^{-fh}$$

dus

$$p = p_0 e^{-fh}$$

in woorden: De luchtdruk p neemt in een rustige atmosfeer af als de exponentiëele funktie.

IV. De afkoeling van een bol.

Brengen we een bol van een temperatuur T_0 (b.v. 100° C.) in een omgeving van 0°, dan zal deze bol zijn warmte allengs aan zijn omgeving afstaan. We willen aannemen, dat de temperatuur van de omgeving hierdoor niet merkbaar verandert, en vragen naar de temperatuur T van de bol na een willekeurigen tijd t.

Gedurende een klein tijdsdeeltje Δt zal de bol een hoeveelheid Δq afstaan aan de omgeving. Volgens de waarneming mogen we onderstellen dat deze hoeveelheid Δq evenredig is met Δt en met het temperatuursverschil, dat er gedurende dat tijdsverloop Δt bestaat tusschen den bol en zijn omgeving, dus

$$\Delta q = f(T - 0)\Delta t = fT\Delta t.$$

De faktor f is een constante, onafhankelijk van de temperatuur en van den tijd.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Is de warmtecapaciteit van den bol c, dan beteekent een warmteverlies Δq voor den bol een temperatuursdaling

$$-\Delta T = \frac{\Delta q}{c} = \frac{f}{c} T \Delta t = kT\Delta t,$$

als $k = \frac{f}{c}$.

Hieruit volgt

$$\frac{\Delta T}{T} = -k\Delta t,$$

dus, voor zeer vele opeenvolgende tijdsdeeltjes Δt, vinden we:

$$\sum_{T=T_0}^{T} \frac{\Delta}{T} = -k \sum_{t=0}^{t} \Delta t$$

of

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} = -k \int_{0}^{t} dt$$

dus

$$\lg T - \lg T_0 = -kt$$

of

$$T = T_0 e^{-kt},$$

in woorden: De temperatuur van den bol neemt af volgens de exponentieele funktie.

V. De wrijving van een koord langs een cylinder.

Het windas en de kaapstander zijn beide werktuigen, die ons in staat stellen de spanning in een koord belangrijk te vergrooten (aan boord van schepen gebruikt men het windas voor het in- en uitladen, voor het lichten der ankers, enz.).

Het windas bestaat in hoofdzaak uit een cilinder, waaromheen het koord wordt geslagen.

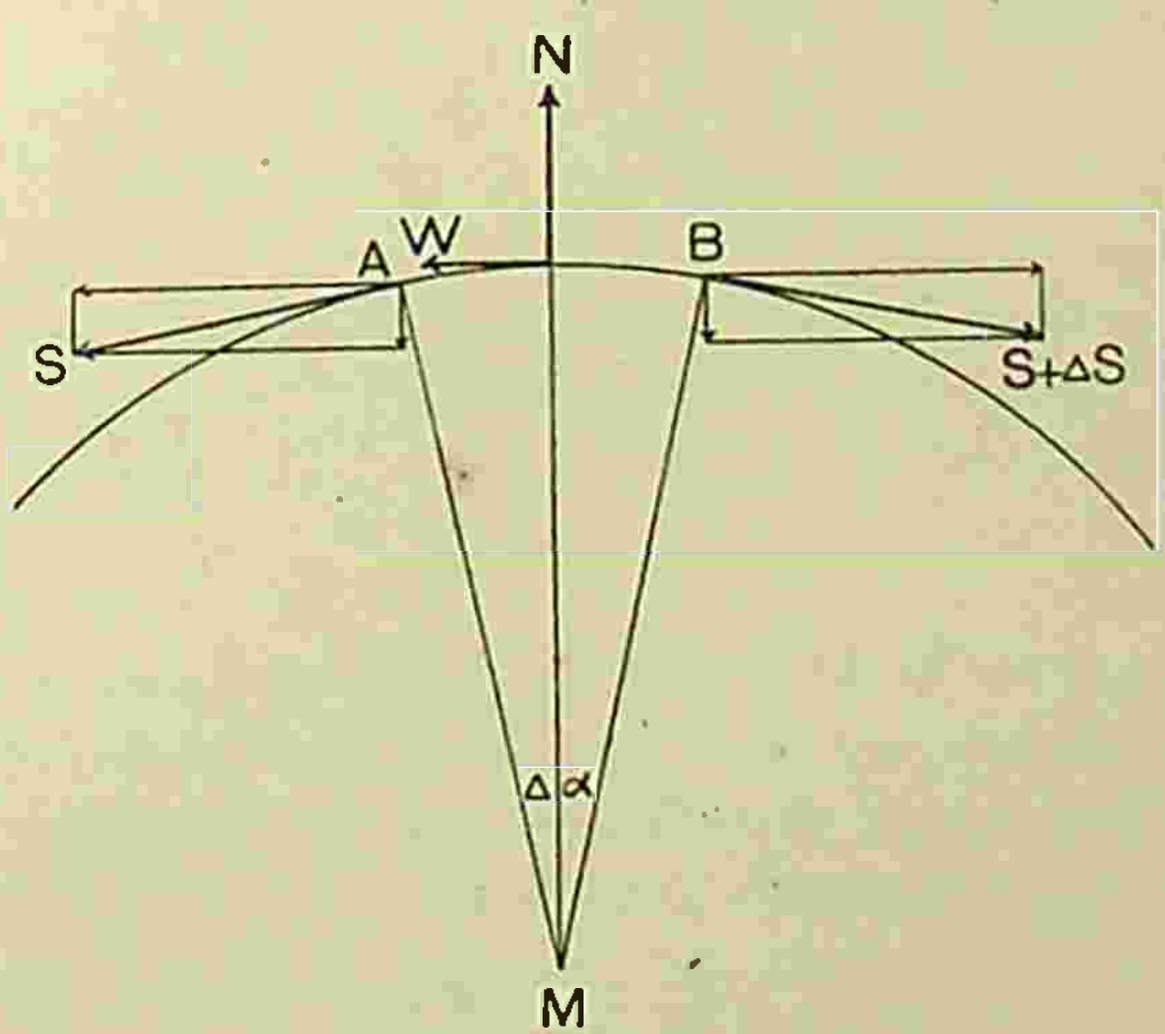


Fig. 12.

Beschouwen we nu een klein deel AB van den omtrek van den cilinder, waarop het koord rust. Zie figuur 12.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Noemen we in A de spanning in 't koord S, in B $S + \Delta S$, terwijl $\angle AMB = \Delta\alpha$ is.

Op het koorddeeltje AB werken nu de vier krachten S, $S+\Delta S$, de normale druk N en de wrijving W.

Ontbinden we S en $S + \Delta S$ in de richtingen van N en W, dan zijn de evenwichtsvoorwaarden:

$$N = S \sin \tfrac{1}{2}\Delta\alpha + (S + \Delta S) \sin \tfrac{1}{2}\Delta\alpha$$

of voor kleine waarden van $\Delta\alpha$, uitgedrukt in radialen (zie blz. 29)

$$N = S\Delta\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta S\Delta\alpha = S\Delta\alpha.$$

Deze benadering is des te nauwkeuriger, naarmate $\Delta\alpha$ kleiner is.
Verder is

$$W = \Delta S.$$

Is nu het koord op het punt langs de cilinder te glijden, dan is

$$W = fN,$$

als f de wrijvingscoëfficient tusschen koord en cilinder is.
Substitueeren we de waarden van W en N, dan komt er

$$\Delta S = fS\Delta\alpha.$$

Zoo kunnen we de geheele aanraking verdeelen over kleine deeltjes AB, steeds is

$$\frac{\Delta S}{S} = f\Delta\alpha.$$

Hieruit volgt door sommatie over alle kleine deelen AB:

$$\int_{S_0}^{S} \frac{dS}{S} = \int_{0}^{\alpha} f\, d\alpha$$

waarin S_0 de begin- en S de eindspanning in 't koord is, terwijl α de hoek is tusschen de stralen naar het eerste en laatste aanrakingspunt tusschen koord en cilinder.

Bij integratie vinden we

$$\lg S - \lg S_0 = f\alpha$$

of

$$S = S_0 e^{f\alpha} \qquad (\alpha \text{ in radialen!})$$

in woorden: De spanning in 't koord neemt toe met de aanrakingshoek α en wel volgens de exponentieele funktie.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

B.v. Is $f = \frac{1}{3}$, dan is

$$\begin{aligned} \text{voor } \alpha &= \pi & S &= 2{,}850 S_0 \\ \alpha &= 2\pi & S &= 8{,}121 S_0 \\ \alpha &= 4\pi & S &= 65{,}943 S_0. \end{aligned}$$

enz.

Hieruit blijkt, hoe enorm snel de spanning toeneemt.

Opmerking. Uit de voorgaande toepassingen blijkt, dat we de *e*-funktie op allerlei gebied ontmoeten. Ook in de zuivere wiskunde neemt de *e*-funktie een eerste plaats in.

Vandaar dat men de Neperiaansche logarithmen ook wel de *natuurlijke logarithmen* noemt. (Vergelijk toep. IX 1°. blz. 87).

VI. Berekening van eenige oppervlakken en inhouden.

1. Het oppervlak van een driehoek ABC.

Met behulp van lijnen evenwijdig aan de basis AC verdeelen we de driehoek in strooken, wier oppervlak nagenoeg gelijk is aan het oppervlak van een rechthoekje, b.v. de strook PQST is nagenoeg gelijk aan het oppervlak van 't rechthoekje PQQ'P'. Hieruit volgt, dat

$$\text{Opp. } \triangle ABC = \sum PQQP'.$$

Noemen we de basis AC b, de hoogte BD h, en de lengte BR x, gemeten vanaf 't punt B, zoodat $RR' = \Delta x$, dan is

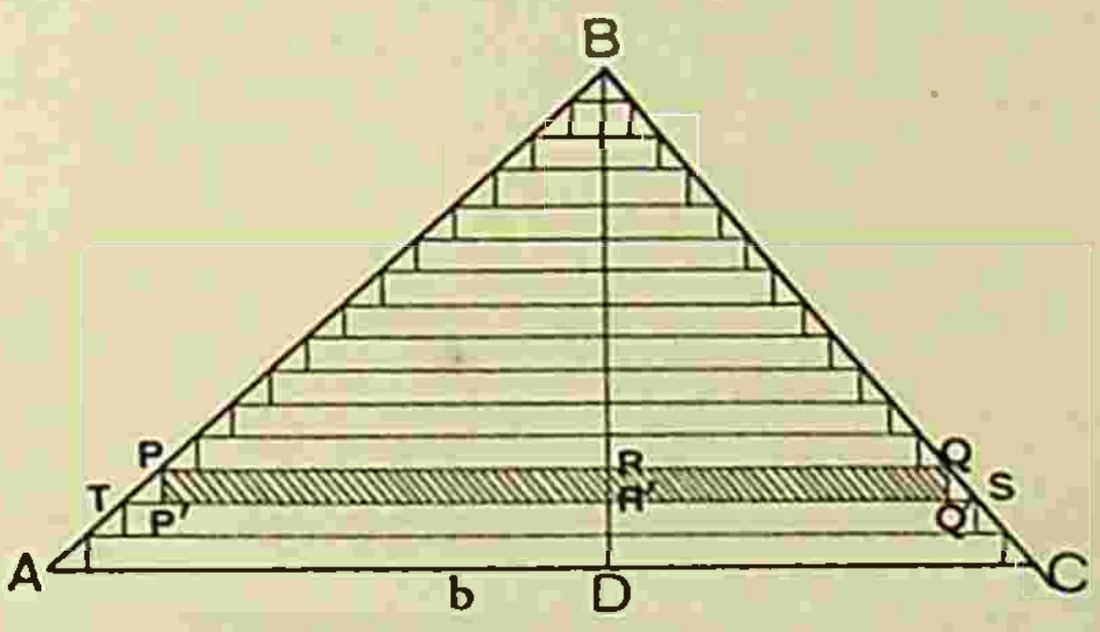


Fig. 13.

$$\text{Opp. } \triangle ABC = \sum PQ \cdot \Delta x.$$

Nu is $$\triangle BPQ \infty \triangle ABC,$$

dus $$PQ : BR = AC : BD$$

of $$PQ\, x = b : h$$

dus $$PQ = \frac{b}{h} x.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Substitueerende, vinden we

$$\text{Opp. } \triangle \text{ ABC} = \lim_{\Delta x=0} \sum_{x=0}^{x=h} \frac{b}{h}\, x\Delta x = \frac{b}{h}\int_0^h x\,dx = \frac{b}{h}\,(\tfrac{1}{2}x^2)_0^h = \tfrac{1}{2}bh,$$

dus $\mathbf{O = \frac{1}{2}\,hb}$ de bekende formule der planimetrie.

2. Het oppervlak van een trapezium.

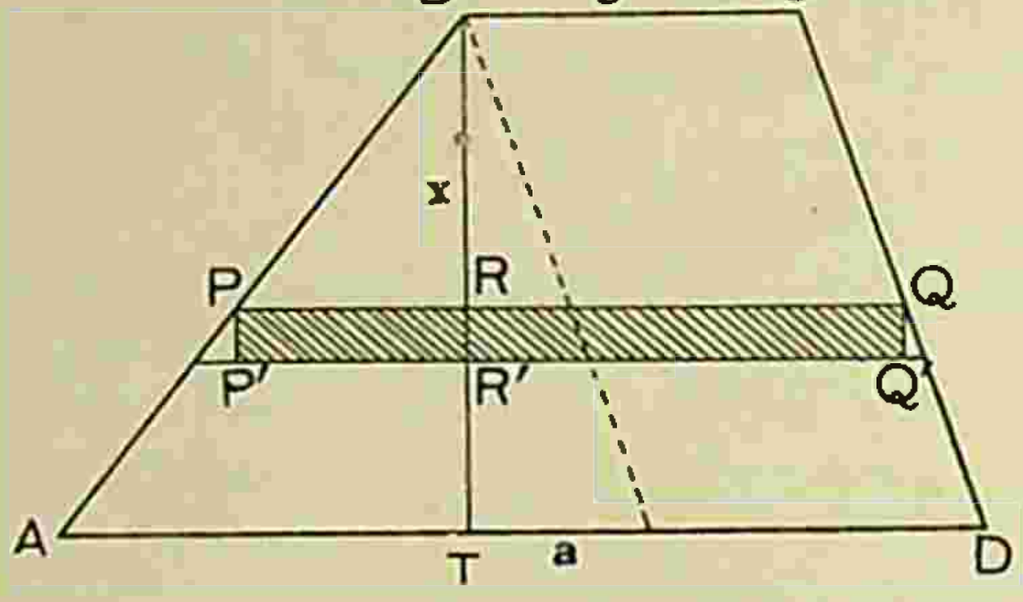


Fig. 14.

Zij AD $= a$
BC $= b$
de hoogte
BE $= h$
BR $= x$
dus RE $= h - x$
dan is

$$\text{PQ} = \frac{ax + (h - x)b}{h}$$

$$\text{RR}' = \Delta x.$$

We vinden

$$\text{Opp. trapezium} = \lim_{\Delta x=0} \sum \text{PQ}\,.\,\Delta x = \int_0^h \frac{ax + (h-x)h}{h}\,dx =$$

$$\frac{1}{h}\int_0^h \{(a-b)x + hb\}\,dx = \frac{1}{h}\left\{(a-b)\frac{x^2}{2} + hbx\right\}_0^h = \left\{\frac{a-b}{2} + b\right\}h = \frac{a+b}{2}\cdot h.$$

of: 't Oppervlak van een trapezium is gelijk aan het halve produkt van de hoogte en de som der evenwijdige zijden.

Het parallelogram kunnen we beschouwen als een trapezium met gelijke evenwijdige zijden $(a = b)$. Uit bovenstaande formule volgt dan:

Het oppervlak van een parallelogram is gelijk aan het product van basis en hoogte.

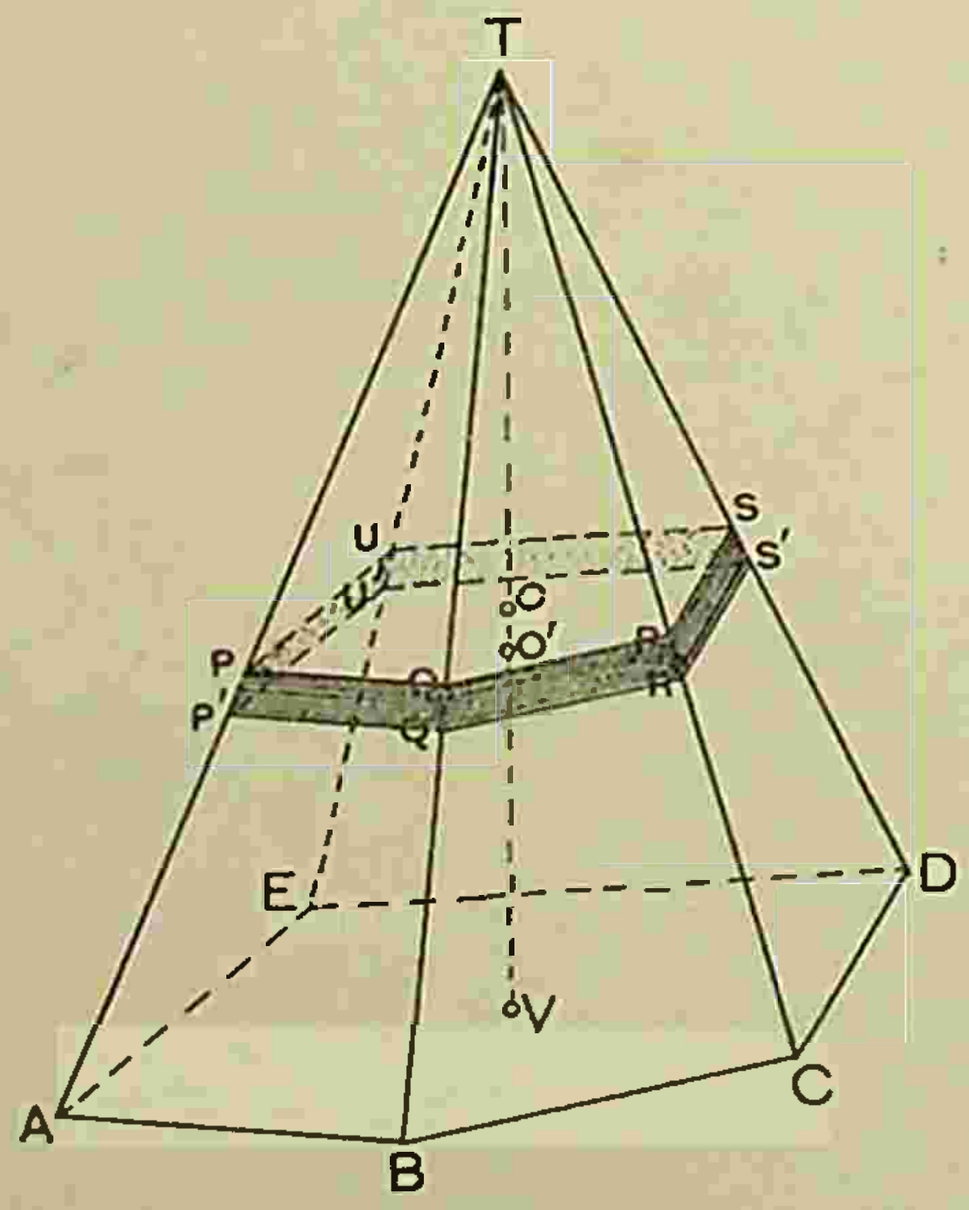


Fig. 15.

3. De inhoud van een piramide en kegel.

Zij opp. ABCDE $=$ G en de hoogte TV $= h$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Met behulp van vlakken, evenwijdig aan 't grondvlak verdeelen we 't lichaam in schijfjes, b.v. PQRSUP'Q'R'S'U', met een dikte $OO' = \Delta x$, als $TO = x$ is.

Uit de figuur blijkt, dat

$$TPQRSU \backsim TABCDE,$$

dus $$TO^2 : TV^2 = \text{opp. } PQRSU : \text{opp. } ABCDE$$

of $$x^2 : h^2 = \text{opp. } PQRSU : G$$

dus $$\text{opp. } PQRSU = \frac{x^2}{h^2} \cdot G.$$

Nu is

$$\text{Inhoud lichaam} = \lim_{\Delta x=0} \sum PQRSUP'Q'R'S'U'$$

$$= \lim_{\Delta x=0} \sum \text{opp. } PQRSU.\Delta x =$$

$$= \lim_{\Delta x=0} \sum_{x=0}^{x=h} \frac{x^2}{h^2} \cdot G \cdot \Delta x = \frac{G}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{G}{h^2} \cdot \tfrac{1}{3} h^3 = \tfrac{1}{3} h \cdot G.$$

De inhoud van een piramide of kegel is gelijk aan het product van het grondvlak en een derde deel der hoogte.

Integreeren we tusschen de grenzen h' en h, dan krijgen we den inhoud van een afgeknotte piramide (kegel):

Zij opp. $DEF = B$.

opp. $ABC = G$.

$TW = h'$

$TV = h$

en $VW = H = h - h'$,

dan is

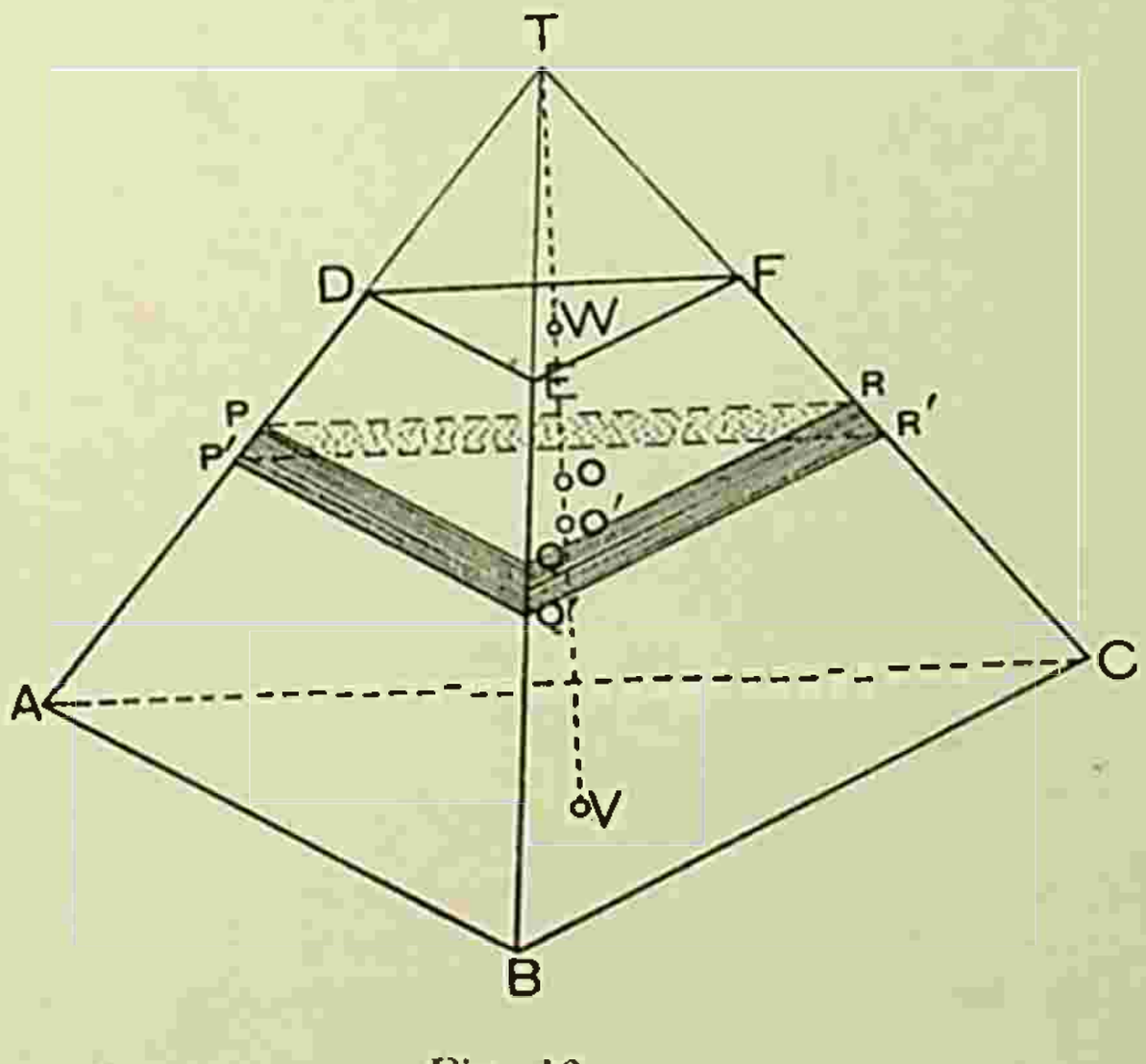


Fig. 16.

$$I = \frac{G}{h^2} \int_{h'}^{h} x^2 dx \text{ (zie boven)} = \frac{G}{h^2} \frac{(h^3 - h'^3)}{3} = \frac{G}{h^2} \frac{H}{3} \{h^2 + hh' + h'^2\}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Uit de gelijkvormigheid der piramiden TDEF en TABC volgt:

$$h'^2 : h^2 = \mathrm{B} : \mathrm{G}\,, \quad \text{of} \quad \frac{h'^2}{h^2} \cdot \mathrm{G} = \mathrm{B},$$

dus $$\mathrm{I} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{H}\{\mathrm{G} + \mathrm{B} + \sqrt{\mathrm{BG}}\}.$$

4. Inhoud van een bolschijf.

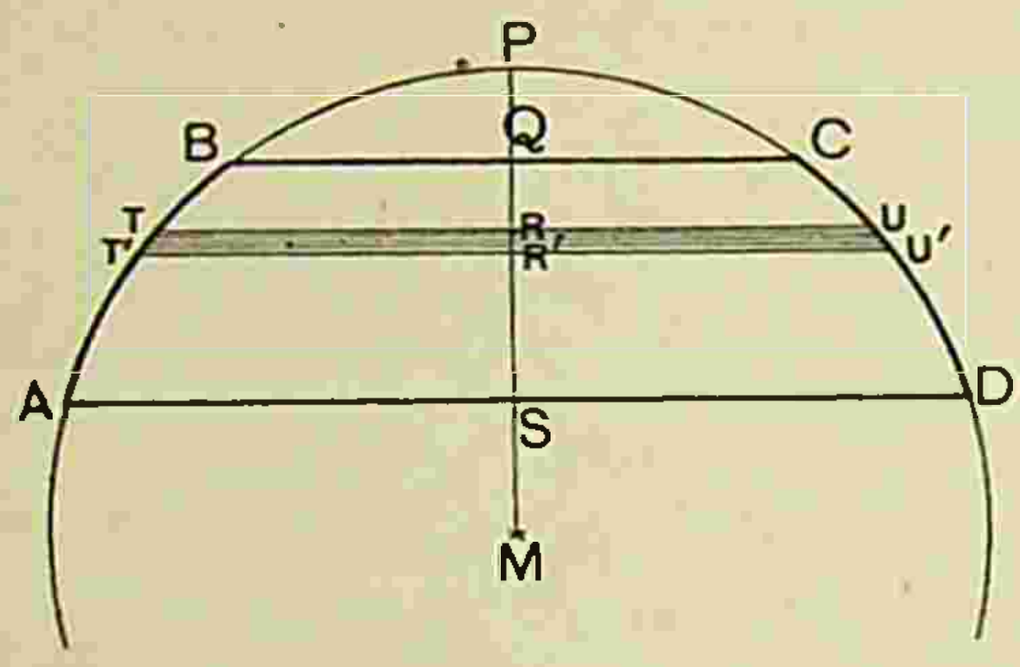


Fig. 17.

Met behulp van vlakken evenwijdig aan de platte zijvlakken der schijf verdeelen we het lichaam in een aantal schijfjes van geringe hoogte $RR' = \Delta x$. We noemen $PR = x$, $PQ = h_1$, $PS = h_2$ en $QS = h_2 - h_1 = h$, terwijl de straal van den bol R is.

Nu is de inhoud van 't schijfje

$$\mathrm{TUU'T'} = \pi \mathrm{T}\,\mathrm{R}^2 . \Delta x = \pi x(2\mathrm{R} - x)\Delta x,$$

dus

$$\mathrm{I} = \pi \int_{h_1}^{h_2} (2\mathrm{R}x - x^2)dx = \pi \left\{ \mathrm{R}x^2 - \frac{x^3}{3} \right\}_{h_1}^{h_2} =$$

$$\pi \left\{ \mathrm{R}h_2^2 - \mathrm{R}h_1^2 - \frac{h_2^3}{3} + \frac{h_1^3}{3} \right\} = \tfrac{1}{3}\pi h\{3\mathrm{R}(h_2 + h_1) - (h_2^2 + h_1 h_2 + h_1^2)\} =$$

$$\tfrac{1}{6}\pi h\,\{h^2 - (h_2 - h_1)^2 + 6\mathrm{R}(h_2 + h_1) - 2(h_2^2 + h_1 h_2 + h_1^2)\} =$$

$$\tfrac{1}{6}\pi h\{h^2 + 6\mathrm{R}(h_2 + h_1) - 3(h_2^2 + h_1^2)\} =$$

$$\tfrac{1}{6}\pi h\{h^2 + 3h_2(2\mathrm{R} - h_2) + 3h_1(2\mathrm{R} - h_1)\} =$$

$$\tfrac{1}{6}\pi h^3 + \tfrac{1}{2}\pi h . \mathrm{AS}^2 + \tfrac{1}{2} h \mathrm{BQ}^2 = \tfrac{1}{6}\pi h^3 + \tfrac{1}{2} h . \pi a^2 + \tfrac{1}{2} h . \pi b^2,$$

als we AS en BQ opv. a en b noemen.

Voor een bol hebben we de eenvoudige integraal

$$\mathrm{I} = \pi \int_0^{2\mathrm{R}} (2\mathrm{R}x - x^2)dx = \pi\{4\mathrm{R}^3 - \tfrac{1}{3}(2\mathrm{R})^3\} = \tfrac{4}{3}\pi \mathrm{R}^3.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

VII. Bepaling van het zwaartepunt van eenige figuren.

1. 't Zwaartepunt van een cirkelboog.

We verdeelen de boog AB in kleine stukjes PQ, en passen de momentenstelling toe ten opzichte van een vlak V door M $\perp$ MC.

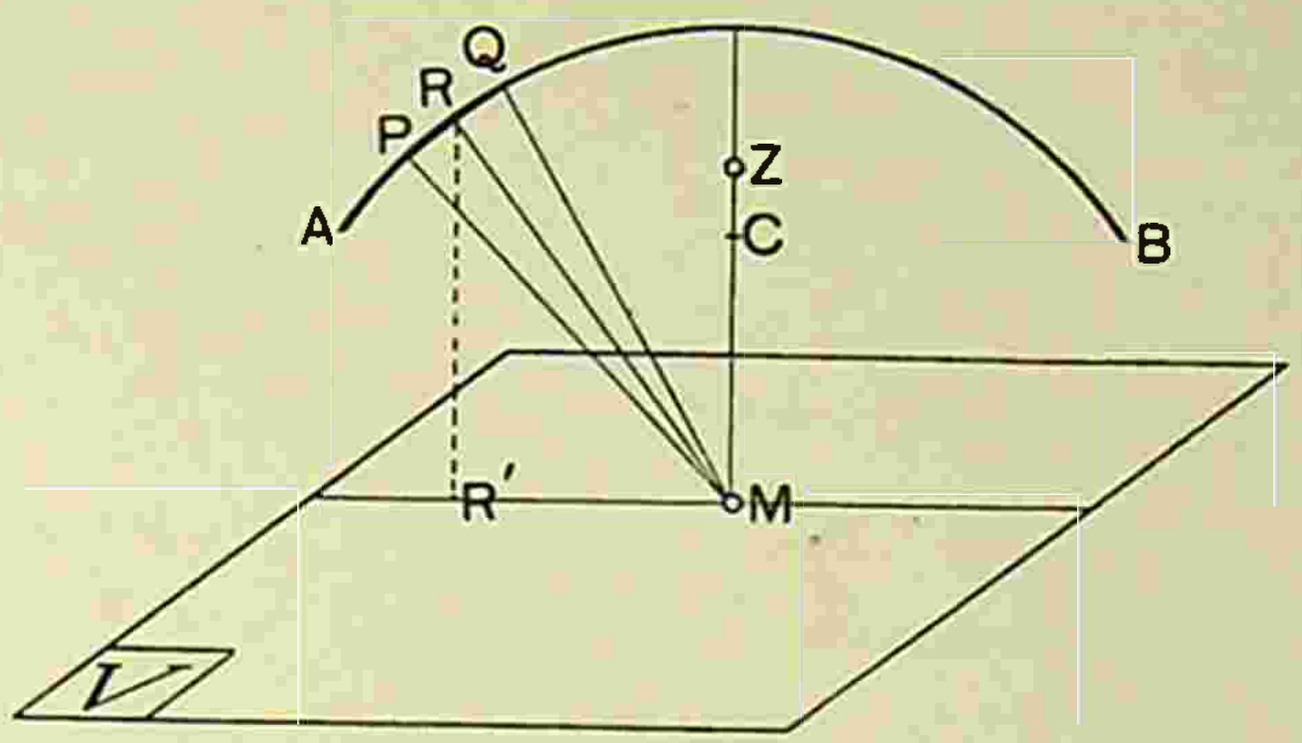


Fig. 18.

Noemen we den hoek PMR' α, gemeten in radialen en $\angle$ PMQ $\Delta\alpha$, dan is PQ = R$\Delta\alpha$, als R de straal van den cirkel is. Het moment van PQ t.o.z. van V is dan

$$PQ \times RR' = R\,\Delta\alpha .\ R \sin \alpha$$

dus

$$bg\ AB \times MZ = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R^2 \sin \alpha\, d\alpha$$

als $\angle$ R'MA $= \alpha_1$ en $\angle$ R'MB $= \alpha_2$ is.

Hieruit volgt:

$$MZ = \frac{R^2}{bg\ AB} \cdot \left(-\cos \alpha\right)_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{R^2}{bg\ AB} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) =$$

$$\frac{R}{bg\ AB}\{R\cos\alpha_1 - R\cos\alpha_2\} = \frac{R}{bg\,AB}\{AC + CB\} = \frac{kd\ AB}{bg\ AB} \cdot R.$$

Opgaven: Bepaal door integratie het zwaartepunt van:

1°. een driehoek.

2°. een trapezium.

3°. een cirkelsector (*niet* gebruik maken van de formule van den boog).

4°. (afgeknotte) piramide resp. kegel.

5°. bolschijfoppervlak.

6°. bolsector (in 't bijzonder halve bol).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

VIII. Snelheid, versnelling. De harmonische trilling.

Een belangrijk voorbeeld van het bestaan van een funktie tusschen twee grootheden hebben we ontmoet bij de beweging van een materieel punt P langs een rechte lijn. De plaats van het punt P wordt bepaald door den afgelegden weg s, d.i. den afstand van het punt P tot een *vast* punt O der rechte lijn. Op elk oogenblik t heeft s een bepaalde waarde, zoodat de waarden van s en t paarsgewijze optreden, d.w.z. s is een funktie van t of

$$s = f(t).$$

Onder gemiddelde snelheid verstaan we een afgelegden weg, gedeeld door den daarvoor benoodigden tijd, in teekens $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Hieruit volgt de snelheid ten tijde t als grenswaarde:

$$v = \lim_{\Delta t=0} v = \lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Regel: De snelheid is de afgeleide funktie van de funktie, die den afgelegden weg als funktie van den tijd voorstelt, of omgekeerd:

de afgelegde weg is de integraal der snelheid geïntegreerd over den tijd:

$$s = \int v\, dt.$$

N.B. Verklaar de beteekenis van $v\Delta t$.

Evenals de snelheid de afgeleide naar den tijd van de wegfunktie is, zoo is de versnelling de afgeleide der snelheid:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{df'(t)}{dt} = f''(t)$$

a ontstaat dus uit $f(t)$ door deze funktie twee keer achtereen te differentieeren; men zegt, dat a de tweede afgeleide is van de funktie $s = f(t)$ en schrijft

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\frac{ds}{dt}}{dt} = f''(t).$$

Regel: De snelheid is de eerste afgeleide, de versnelling de tweede afgeleide van de funktie $s = f(t)$:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{en} \quad a = \frac{dv}{dt}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Passen we het voorgaande toe op de harmonische (of enkelvoudige) trilling.

Onder een enkelvoudige trilling verstaan we de beweging van een punt P langs een rechte lijn, dat steeds de projectie is van een punt P_0, dat eenparig langs een cirkel beweegt. Deze beweging speelt een groote rol in de natuurkunde, b.v. geluidstrillingen (theorema van Fourier) lichttrillingen, enz.

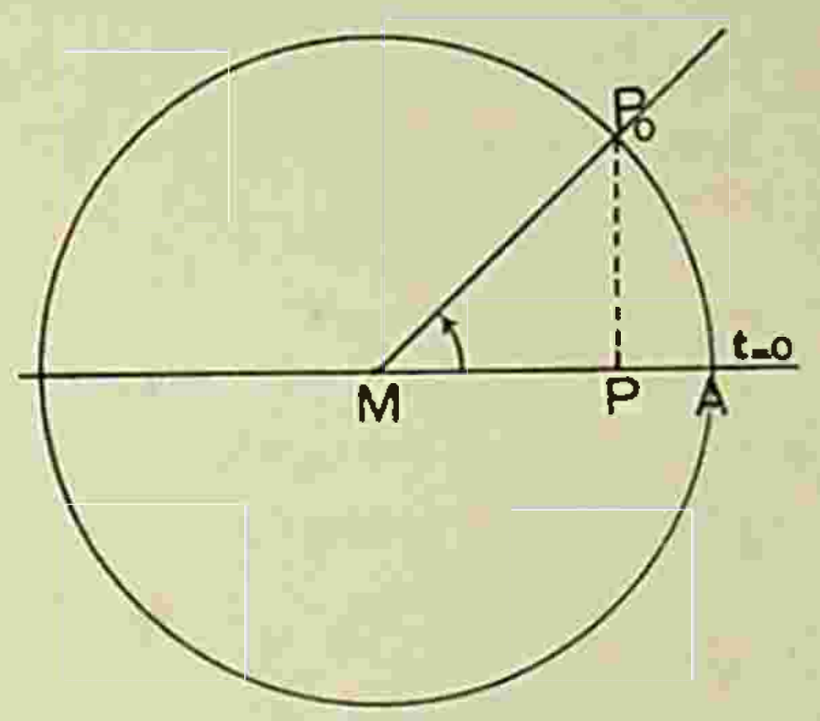


Fig. 19.

Uit fig. 19 volgt onmiddellijk de wegfunktie $s = f(t)$.

s is de afstand van M (het vaste punt) tot P: positief als P rechts ligt, negatief als P links ligt.

Ten tijde $t = 0$ is P in A; P heeft dan zijn grootste uitwijking $MA = a$.

Nu is $MP = s = a\cos\alpha = a\cos\omega t$ als $\alpha = \angle AMP_0$, gemeten in radialen, en ω de constante hoeksnelheid van P_0 is.

Uit $s = a\cos\omega t$, volgt nu onmiddellijk

$$v = \frac{ds}{dt} = -a\omega\sin\omega t$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 s.$$

De kracht K, die P deze versnelling geeft, is dus

$$K = ma = -m\omega^2 s = fs,$$

d.w.z. het is een kracht, die evenredig is aan de uitwijking, en steeds gericht is naar het middelpunt. Dit laatste volgt uit het — teeken.

IX. Eenige maxima- en minima-vraagstukken.

Beschouwen we nog eens een funktie $y = f(x)$ b.v. $y = \sin x$. Maken we van deze funktie een grafische voorstelling (zie fig. 8 blz. 45) dan zien we daarin de bijzondere punten T_1 en T_2, $\left(\pi/_2 \text{ en } \frac{3\pi}{2}\right)$.

Deze punten liggen, vergeleken met *hun naburige punten*, het verst van de x-as; de funktie y is daar zoo groot of zoo klein mogelijk. We zeggen, dat y in T_1 een maximum en in T_2 een

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

minimum bereikt. Uit de fig. blijkt, dat de punten gekenmerkt zijn door hun raaklijn. Deze loopt evenwijdig aan de x-as, d.w.z. de afgeleide funktie $\frac{dy}{dx}$, die gelijk is aan den tangens van den hoek tusschen raaklijn en x-as, is *nul*.

We komen dus tot de volgende:

Regel: Een funktie $y = f(x)$ heeft een maximum of minimum-waarde voor die waarden van x, die de afgeleide funktie $f'(x)$ nul maken.

Het onderzoek of we met een maximum of minimum te maken hebben, is gewoonlijk eenvoudig.

Hieronder volgen eenige voorbeelden:

1°. Men vraagt een getal s in twee deelen te verdeelen, zóó dat hun produkt zoo groot mogelijk zij.

Noemen we het eene deel x, dan is het andere $s - x$, dus

$$\text{P(rodukt)} = x\,(s - x) = f(x).$$

Dit produkt is maximum voor $f'(x) = 0$, dus voor

$$s - 2x = 0, \text{ dus } x = \frac{s}{2}.$$

We moeten het getal in twee gelijke deelen verdeelen, opdat het produkt maximum is.

Dit resultaat kunnen we meetkundig als volgt interpreteeren:

Van alle rechthoeken met gelijken omtrek ($2s$) heeft het vierkant het grootste oppervlak.

Vervolgens kunnen we vragen naar de splitsing van het getal s in drie deelen, zoodanig dat hun produkt maximum is.

Zijn de drie deelen x, y, z, dan zal 't produkt maximum zijn, indien het produkt van elke twee faktoren maximum is. Nemen we dus z willekeurig aan, dan zullen we de rest $s - z$ zoodanig tusschen x en y moeten verdeelen, dat hun produkt maximum is, dus, volgens 't voorgaande, moet $x = y$ zijn. Hadden we daarentegen x afgezonderd, dan vinden we door dezelfde redeneering $y = z$.

Hieruit volgt, dat $x = y = z = \frac{s}{3}$, d.w.z. we moeten s in drie gelijke deelen verdeelen, opdat het produkt der deelen maximum is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Onder alle rechthoekige parallelopipeda, waarvan de som der ribben een gegeven waarde s heeft, heeft de kubus den grootsten inhoud.

Zoo kan men voortgaan en bewijzen, dat het produkt van n getallen, wier som een vaste waarde s heeft, maximum is, indien alle faktoren evengroot zijn, dus gelijk aan $\frac{s}{n}$.

We komen nu vanzelf tot de vraag: In hoeveel deelen moeten we s verdeelen, opdat hun produkt zoo groot mogelijk is.

Noemen we 't aantal deelen x, dan weten we reeds, dat we alle deelen gelijk moeten nemen, dus elke faktor is $\frac{s}{x}$.

Het produkt is dan $\left(\frac{s}{x}\right)^x = f(x)$.

Dit produkt is maximum voor de wortels van $f'(x) = 0$.

We moeten de funktie $\left(\frac{s}{x}\right)^x = (sx^{-1})^x$ differentieeren.

We schrijven $x = e^{\lg x}$ dus

$$P_x = \{s e^{-\lg x}\}^x = \{e^{\lg s - \lg x}\}^x = e^{x \lg s - x \lg x}$$

dus
$$\frac{dP}{dx} = e^{x \lg s - x \lg x} \cdot \frac{d}{dx}\{x \lg s - x \lg x\}$$
$$= P_x\{\lg s - 1 - \lg x\} = 0$$

of
$$\lg s - \lg x = 1$$
$$\lg \frac{s}{x} = 1$$
$$\frac{s}{x} = e.$$

Elk deel $\frac{s}{x}$ is dus gelijk aan e, de basis der natuurlijke logarithmen. Ook hier zien we het getal e weer optreden (zie blz. 79).

Als voorbeeld kiezen we $s = 36$.

$P_{36} = 1^{36} = 1.$
$P_{18} = 2^{18} = 262144.$
$P_{12} = 3^{12} = 531441.$
$P_9 = 4^9 = 262144.$
$P_6 = 6^6 = 46656.$
$P_4 = 9^4 = 2187.$
$P_3 = 12^3 = 1728.$
$P_2 = 18^2 = 324.$
$P_1 = 36^1 = 36.$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Van alle produkten is P_{12} het grootst, want het grondtal van de macht, nl. 3, verschilt het minst van e.

2°. Waar moet men gaan staan tusschen twee even warme kachels om zoo weinig mogelijk warmte op te nemen?

Noemen we den afstand der kachels d en den afstand van den persoon tot de eene kachel x, dus tot de andere $d - x$.

Volgens de natuurkunde is de opgenomen warmte omgekeerd evenredig met het quadraat van den afstand, dus

$$\frac{f}{x^2} + \frac{f}{(d-x)^2} \text{ moet minimum zijn.}$$

Bij differentiatie komt er:

$$-\frac{2f}{x^3} + \frac{2f}{(d-x)^3} = 0 \quad \text{of} \quad x^3 = (d-x)^3.$$

Hieruit volgt: $x = \frac{1}{2}d$, d.w.z. de persoon moet juist midden tusschen de beide kachels gaan staan.

3°. Een fabrikant wil een cilindervormig busje construeeren, dat bij zoo gering mogelijk materiaalverbruik een bepaalden inhoud heeft.

(Of anders: welke gouden munt van bepaalde waarde heeft het geringste slijtvermogen).

Noemen we den straal van het grondvlak r en de hoogte h, dan is de inhoud $\pi r^2 . h = a$ een constante gegeven waarde.

Het totaal oppervlak is

$$2\pi rh + 2\pi r^2 = O = 2\left\{\frac{a}{r} + \pi r^2\right\}$$

als we h vervangen door $\frac{a}{\pi r^2}$.

Differentieeren we O naar r, dan is:

$$\frac{dO}{dr} = 2\left\{-\frac{a}{r^2} + 2\pi r\right\} = 0,$$

dus

$$r = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}} \text{ en } h = \frac{a}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4a}{\pi}} = 2r,$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

d.w.z. de hoogte moet gelijk zijn aan de middellijn van het grondvlak.

Opgave: Construeer een cilindrische inhoudsmaat uit zoo weinig mogelijk materiaal. Antw. $h = r$.

4°. Twee punten A en B liggen op afstanden a en b van een lijn l. Hun projecties A′ en B′ hebben een onderlingen afstand $= d$.

Men vraagt op l een punt C te bepalen, zoo dat AC+CB minimum is.

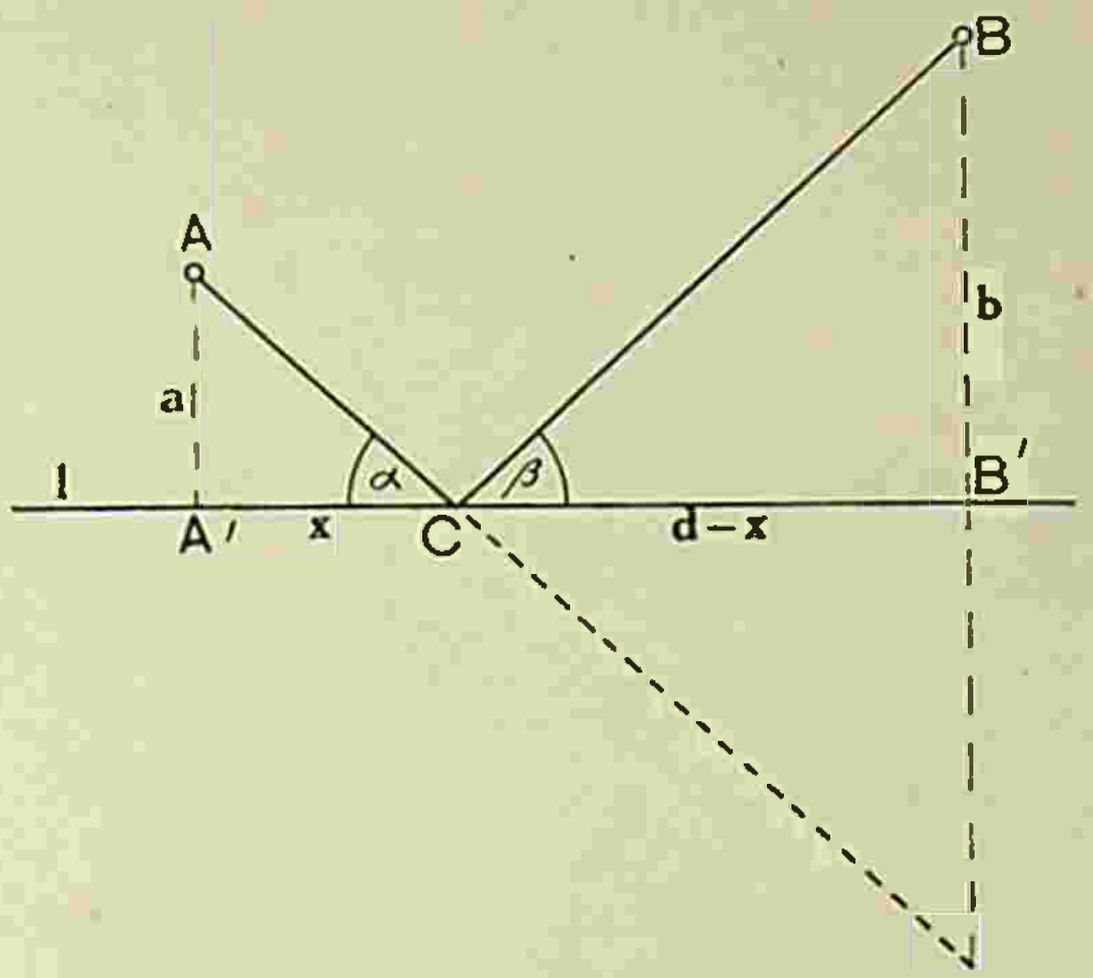


Fig. 20.

Noem $A'C = x$, dan is $CB' = d - x$, dus

$$AC + CB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2} = f(x).$$

Stellen we $f'(x)$ gelijk aan nul:

$$\frac{+x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0$$

of

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{B'C}{BC},$$

d.w.z. $\cos \alpha = \cos \beta$ of $\alpha = \beta$, in woorden:

De beide lijnen AC en BC maken gelijke hoeken met de lijn l. (Spiegelwet!)

Opgave: Waar moet C liggen, opdat $AC^2 + BC^2$ minimum is?

Antw.: In 't midden van A′B′.

5°. Twee homogene middenstoffen (bv. lucht en water) worden gescheiden door een plat vlak V. Een bewegend punt heeft in 't eene medium een snelheid v_1 en in het andere een snelheid v_2. Welke weg moet het bewegend punt doorloopen om in den kleinsten tijd van een punt A in het eene medium te gaan naar een punt B in het andere medium?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Oplossing: In elk medium zal het bewegend punt zich bewegen langs een rechte lijn. Ook ziet men gemakkelijk in, dat de beide wegen in de twee media in het vlak door A en B loodrecht op V gelegen moeten zijn. (Invallende straal, gebroken straal en normaal liggen in één vlak. 1ste wet van Snellius).

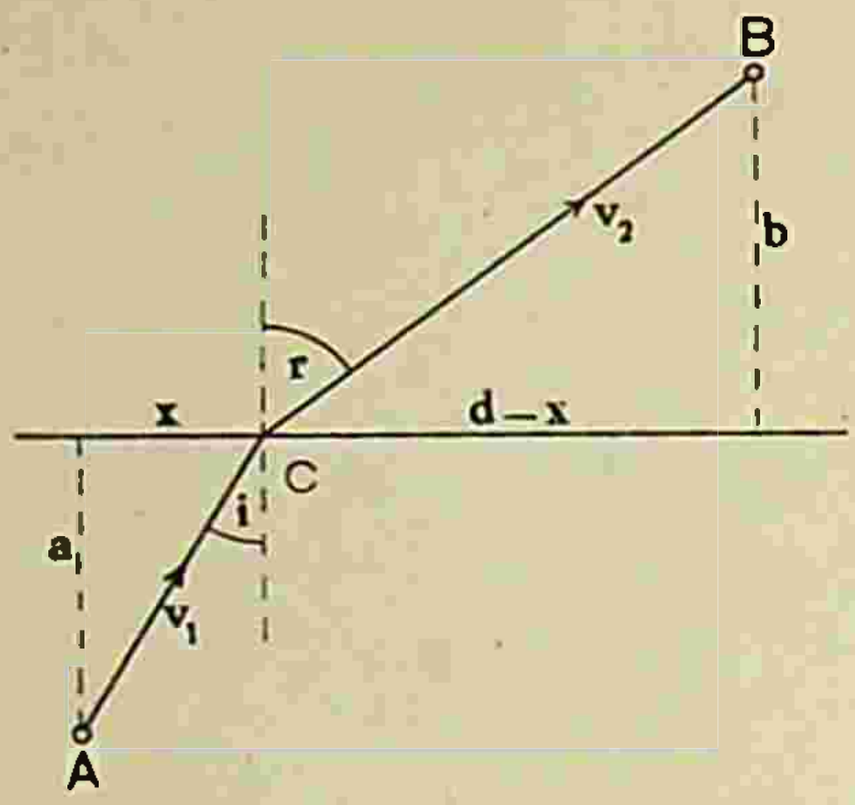


Fig. 21.

Nu moet de tijd

$$T = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2} \text{ minimum zijn.}$$

$$T = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2},$$

dus

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = 0$$

of

$$\frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin r}{v_2} \quad \text{w . z . } \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n \text{ (2e brekingswet van Snellius).}$$

6°. Een grootheid x is $n\times$ waargenomen. Het resultaat dier metingen is $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots . a_n$.

Elk dezer waarden is een benadering voor de onbekende grootheid x. Men vraagt nu welk is de *beste* waarde voor x, die we uit onze waarnemingen kunnen afleiden?

Als definitie der *beste* waarde voor x kiezen we die waarde x, waarvoor de som der quadraten der verschillen tusschen deze x en elk der waarnemingen zoo klein mogelijk is (principe der kleinste quadraten), dus

$(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots . + (x-a_n)^2$ moet minimum zijn.

Differentieeren we deze funktie:

$$2(x-a_1) + 2(x-a_2) + \ldots . + 2(x-a_n) = 0$$

of

$$nx = a_1 + a_2 + \ldots . a_n$$

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots . + a_n}{n}$$

d.w.z. men moet voor x het rekenkundig gemiddelde der waarnemingen nemen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

7⁰. Men heeft N galvanische elementen, elk met een E.M.K. gelijk aan E en een inwendigen weerstand $= r$. Hoe moet men deze elementen schakelen om bij een uitwendigen weerstand $= R$ een maximale stroomsterkte te verkrijgen?

Plaatsen we p elementen achter elkaar en q naast elkaar, dan wordt de inwendige weerstand $\frac{p}{q}r$, dus volgens de wet van Ohm is

$$i = \frac{pE}{\frac{p}{q}r + R} = \frac{pqE}{pr + qR} = \frac{NE}{pr + qR}$$

want het totale aantal elementen is $p \,.\, q = N$.

De teller NE is constant, welke faktoren p en q van N we ook uitkiezen. i zal dus maximum zijn, indien we de noemer

$$pr + qR = p\,r + \frac{NR}{p}$$

minimum maken.

Deze funktie van p is minimum voor $r - \frac{NR}{p^2} = 0$

of $$p^2 r - pqR = 0$$

of $$\frac{p}{q}\,r = R \text{ , d.w.z.}$$

Men verkrijgt de grootste stroomsterkte, indien we zorgen, dat de inwendige weerstand der batterij, zooveel mogelijk gelijk wordt aan den uitwendigen weerstand.

X. Berekening van de sinus- en cos-funktie. Formules van Euler.

In de toepassing I blz. 71 hebben we gezien, hoe men met behulp van een reeksontwikkeling de logarithmische funktie kan berekenen.

We willen nu trachten te berekenen $y = \sin x$, als x bekend is.

Onderstellen we, dat $\sin x$ in de volgende reeks ontwikkeld kan worden: $\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

dan moeten we de onbekende coëfficienten trachten te bepalen.

Allereerst is $a_0 = 0$, want voor $x = 0$ is $\sin x = 0$.

Gaan we nu beide leden differentieeren, zoo komt er

$$\cos x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4\,a_4 x^3 \ldots$$

Nu is $\cos x = 1$ voor $x = 0$, dus $a_1 = 1$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Differentieeren we nog eens, zoo komt er

$$-\sin x = \quad 1.2a_2 + 2.3a_3x + 3.4a_4x^2 + 4.5a_5x^3 + \ldots$$

of

$$\sin x = -1.2a_2 - 2.3a_3x - 3.4a_4x^2 - 4.5a_5x^3 - \ldots$$

Maar we onderstelden, dat

$$\sin x = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

dus

$$-1.2a^2 = 0 \quad \text{of} \quad a_2 = 0$$

$$-2.3a_3 = a_1 = 1 \text{ (Zie boven) dus } a_3 = -\frac{1}{3!}$$

$$-3.4a_4 = a_2 = 0 \qquad a_4 = 0$$

$$-4.5a_5 = a_3 = -\frac{1}{3!} \qquad a_5 = \frac{1}{5!}$$

$$-5.6a_6 = a_4 = 0 \qquad a_6 = 0$$

$$-6.7a_7 = a_5 = \frac{1}{5!} \qquad a_7 = -\frac{1}{7!}.$$

Hieruit volgt:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \ldots$$

en door differentiatie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \ldots$$

Opgave: Vergelijk bovenstaande reeksen met de reeks voor e^x (blz. 68) en bewijs de formules van Euler.

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\sin x \end{aligned}\right\}, \text{ a ls } i^2 = -1.$$

GEMENGDE OPGAVEN.

Differentieer:

1) $y = a^{x^2}$.

2) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Differentieer de verkregen funktie nog eens (2e afgeleide van $y = \sqrt{a^2 - x^2}$).

3) $y = e^{ax^2+b}$.

4) $y = x^2e^{3x}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

[5]) $y = x^x$.

[6]) $y = \frac{x^2}{e^{3x}}$.

Bereken de opvolgende afgeleiden van

[7]) $y = \sin x$.

Bewijs, dat de n^e afgeleide, die verkregen wordt door $n \times$ achtereen te differentieeren, gelijk is aan:

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

[8]) $y = \cos x$. [9]) $y = e^x$. [10]) $y = x^n$.

[11]) $y = (a + bx)^n$. [12]) $y = \lg (1 + x)$.

Bepaal de eerste afgeleide van

[13]) $y = \lg(a + b \cos x)$. [14]) $y = \lg \{e^x + \operatorname{tg} x\}$.

[15]) $y = e^x(x^2 - 4x + 5)$. [16]) $y = a^{px}$.

[17]) $y = \sin^2 x$. Bereken ook de n^e afgeleide.

[18]) $y = e^{x \cos \theta} \cos (x \sin \theta)$. Bereken ook de n^e afgeleide.

Integreer:

[19]) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. Stel $x = \sin t$, dan is

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{\cos t \,.\, dt}{\cos t} = t = \text{bg. sin } x,$$

d.i. de boog, waarvan de sinus gelijk x is.

Noemen we $y = \text{bg sin } x$, dan is dus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Bewijs deze formule ook met behulp van de opmerking op blz. 70.

[20]) $\int \frac{dx}{1 + x^2}$. Stel $x = \operatorname{tg} t$.

Bepaal de afgeleide van $y = \text{bg tg } x$.

[21]) Integreer $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ met behulp der substitutie $x = \cos t$. (Zie [19]).

Wat volgt hieruit?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

22) Integreer 20) met behulp der substitutie $x = \text{ctg } x$.

Integreer:

23) $\int e^x \sin x dx.$

24) $\int e^x \cos x \, dx.$

25) $\int xe^x \sin x \, dx.$

26) $\int \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} dx.$

27) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx.$

28) $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx.$

29) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} = \frac{\cos\varphi}{b} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin (x + \varphi)}$ als $\text{tg } \varphi = \frac{a}{b}$.

30) $\int \text{tg } 2\varphi \, d\varphi.$

31) $\int \text{ctg } 2\varphi \, d\varphi.$

32) $\int \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi.$

33) $\int \frac{\cos^4 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi.$

34) $\int \sin px \cos qx \, dx.$

35) $\int \sin px \sin qx \, dx.$

36) $\int \cos px \cos qx \, dx.$

Bewijs, als m en n geheele positieve getallen zijn, dat

37) $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$ als $m \neq n$
$= \pi$ als $m = n$.

38) $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0$ voor $m \neq n$
$= \pi$ voor $m = n$.

39) $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0.$

40) Bepaal den rechten cirkelkegel van den grootsten inhoud, die in een bol met een straal r beschreven kan worden.

41) Hoe groot moeten de hoeken aan de basis zijn van een gelijkbeenig trapezium, waarvan de bovenzijde en de beide opstaande zijden elk een lengte a hebben, opdat de oppervlakte een maximum zij?

42) Een figuur, bestaande uit een rechthoek en een gelijkbeenigen driehoek is in een halven cirkel beschreven. De basis van den driehoek valt samen met de bovenzijde van den rechthoek. De basis van den rechthoek ligt in de middellijn, die den halven

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

cirkel afsluit. Drie hoekpunten van de figuur liggen in den cirkelomtrek. Bereken de afmetingen, die de figuur moet hebben, opdat de oppervlakte zoo groot mogelijk zij.

43) Tusschen twee evenwijdige lijnen, ligt een punt P op afstanden a en b van die lijnen, en op een afstand c van een derde lijn, die het eerste paar rechthoekig snijdt. Men vraagt door P een vierde lijn zoodanig te trekken, dat het produkt van de stukken der evenwijdige lijnen tusschen die vierde lijn en de loodlijn gelegen, zoo klein of zoo groot mogelijk zij.

44) Een lichtend punt L is bewegelijk langs een rechte lijn, welke met haar onderste uiteinde A onder een hoek van 60° geplaatst is op een horizontaal vlak.

Hoe groot moet AL worden gekozen, opdat de belichting van dat vlak in een punt P zoo groot mogelijk zij, als dat punt gelegen is in de horizontale projectie der rechte lijn en $AP = a$.

45) Er moet een pakhuis met vierkanten plattegrond, platte bedakking en gegeven inhoud gebouwd worden. Zoo de prijzen per m^2 van den grond, van het muurwerk en van het dak zich verhouden als 1, 2 en 3, wordt het gebouw zoo goedkoop mogelijk, indien de hoogte gelijk is aan de lengte en breedte. Bewijs dit. De dikte der muren wordt buiten beschouwing gelaten.

46) Een zekere hoeveelheid vloeistof van hooge temperatuur wordt in een open vat boven een kleine vlam geplaatst. Wanneer nu mag worden aangenomen, dat bij een behoorlijke keuze der eenheden, de betrekking tusschen de verdampingssnelheid v en den tijd t wordt uitgedrukt door de vergelijking

$$v = a^t(a - 1) - t$$

waarin a een constante voorstelt, op welk oogenblik is dan die snelheid het grootst of het kleinst? Dit te onderzoeken voor het geval, dat $a = 2$.

47) De punten A en B zijn twee warmtebronnen van de intensiteit a en b. Waar moet op lijn AB een punt tusschen A en B geplaatst worden om zoo weinig mogelijk warmte op te vangen?

48) In een horizontaal vlak ligt een $\angle$ CAD = 60°; op de bissectrice van dien hoek wordt een punt B gekozen, zoodat $AB = 2a$. Een punt E ligt op een hoogte $= 3a$ vertikaal boven A.

Bepaal de maximum- en minimumwaarden van de ronde oppervlakte van rechte cirkelkegels, welker top valt op BE, terwijl de grondcirkel aan AC en AD raakt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

INHOUD.

		Blz.
OVERZICHT		5
§ 1.	Constante en veranderlijke grootheden	9
§ 2.	Het begrip „funktie"	10
§ 3.	Eenige voorbeelden van grenswaarden	15
§ 4.	Een voorbeeld van een grenswaarde in de meetkunde	18
§ 5.	De definitie van grenswaarde of limiet.	22
§ 6.	De funkties $y = x^2$, $y = x^3$ en $y = x^n$	24
§ 7.	De funkties $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ en $y = \frac{1}{x^n}$	27
§ 8.	De goniometrische funkties	29
§ 9.	Het differentiaalquotient van een som, produkt en quotient van twee funkties	31
§ 10.	Het differentiaalquotient van samengestelde funkties	35
§ 11.	Het oppervlak van een figuur.	37
§ 12.	Het oppervlak als grenswaarde	40
§ 13.	De onbepaalde integraal	44
§ 14.	Eenige belangrijke regels der integraalrekening	47
§ 15.	Het integreeren volgens de substitutiemethode	50
§ 16.	De logarithmische funktie.	54
§ 17.	Het getal e	62
§ 18.	De e-funktie: $y = e^x$	68
§ 19.	Toepassingen.	71
I.	De berekening van de logarithmentafel	71
II.	Een vraagstuk uit de samengestelde interestrekening	74
III.	De barometerstand als funktie van de hoogte	75
IV.	De afkoeling van een bol	76
V.	De wrijving van een koord langs een cilinder	77
VI.	Berekening van eenige oppervlakken en inhouden	79
VII.	Bepaling van het zwaartepunt van eenige figuren	83
VIII.	Snelheid, versnelling. De harmonische trilling	84
IX.	Eenige maxima- en minima-vraagstukken	85
X.	Berekening van de sinus- en cosinusfunktie. Formules van EULER	91
Gemengde Opgaven		92

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

NOORDHOFF's VERZAMELING VAN WISKUNDIGE WERKEN

I.	DE VIERDE DIMENSIE, door *Dr. Hk. de Vries*, 2de druk, gebonden	*f* 8.90
II.	GREPEN UIT DE MODERNE MEETKUNDE, door *Dr. Fred. Schuh*, gebonden	- 11.40
III.	DE GRONDSLAGEN DER REKENKUNDE, door *Dr. G. Schouten*, 2de druk, gebonden	- 8.90
IV.	ANALYTISCHE MEETKUNDE, door *Dr. J. A. Barrau.* 1ste deel — het Platte vlak, 2de druk, geb.	- 10.20
	2de deel — de Ruimte, gebonden.	- 14.50
V.	LEERBOEK DER THEORETISCHE REKENKUNDE, door *Dr. Fred. Schuh*, gebonden. . . .	- 10.20
VI.	LEERBOEK DER DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING EN VAN DE THEORIE DER DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN, door *Dr. Hk. de Vries.*	
	1ste deel — Differentiaal- en element. Integraalrekening, 2de druk, gebonden	- 19.20
	2de deel — Integraalrekening, gebonden.	- 16.50
	3de deel — Differentiaalvergelijkingen, gebonden . .	- 19.20
	De drie deelen samen, in eens besteld, gebonden . .	- 48.—
VII.	INLEIDING TOT DE ANALYTISCHE MEETKUNDE, door *Dr. J. G. Rutgers.*	
	1ste deel — het Platte vlak, 2de druk, gebonden. .	- 6.50
	2de deel — de Ruimte, gebonden.	- 6.50
VIII.	BEKNOPT LEERBOEK DER PROJECTIEVE MEETKUNDE, door *Dr. Hk. de Vries*, gebonden..	- 7.50
IX.	MEETKUNDE DER KEGELSNEDEN, door *Dr. J. G. Rutgers*, gebonden	- 5.—
X.	MODERNE INTEGRAALREKENING, door *Dr. C. H. van Os*, gebonden	- 5.50
XI.	LEERBOEK DER BESCHRIJVENDE MEETKUNDE, door *H. J. van Veen.*	
	1ste deel — Projectiemethoden, Kegelsneden, geb.	- 6.90
XV.	2de deel —Oppervlakken en Ruimtekrommen. Aanhangsel: Pooltheorie en Meetkundige verwantschappen, gebonden	- 7.75
XII.	BEKNOPTE HOOGERE ALGEBRA, door *Dr. Fred. Schuh*, gebonden.	- 15.—
XIII.	HET GETALBEGRIP, door *Dr. Fred. Schuh*, geb.	- 7.50
XIV.	HET NATUURLIJK GETAL, door *Dr. Fred. Schuh*, gebonden.	- 5.90

P. NOORDHOFF N.V. — GROONINGEN—BATAVIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE

REKENBOEK VOOR DE HOOGERE BURGERSCHOLEN,
Twee deelen, 15de en 9de druk, gecartonneerd à. . . *f* 1.70
Antwoorden I *f* 0.75, II . . . . . - 1.50

VRAAGSTUKKEN UIT REKENBOEK I, 8ste druk
Prijs, gecartonneerd . . . . . - 1.—
Antwoorden. . . . . - 0.40

VRAAGSTUKKEN UIT REKENBOEK II, 4de druk
Prijs, gecartonneerd . . . . . - 1.—
Antwoorden. . . . . - 0.50

P. WIJDENES en F. VAN GUNST

REKENBOEK VOOR HANDELSSCHOLEN. Prijs gecartonneerd. . . . . - 1.85
Uitwerkingen. . . . . - 2.50

Deze uitgave is een omwerking van Wijdenes' Rekenboek I voor de h. b. s., zoodanig, dat onze handelsscholen beschikken kunnen over een rekenboek, dat geheel bij haar leerplan aansluit. Achtereenvolgens worden behandeld: optelling en aftrekking, producten en vermenigvuldiging gedurige producten, quotienten en deeling, machten, G. G. D. en K. G. V., kenmerken van deelbaarheid, G. G. D. door deeling en evenredigheden. De theorie is zeer helder en geschikt om door de leerlingen zelfstandig bestudeerd te worden. Vele en practische oefeningen geven gelegenheid om 't geleerde toe te passen en vast te leggen .Een alleszins aanbevelenswaardig werkje, dat naar onze meening in een behoefte voorziet.
Hs. *De Katholicke school.*

P. JANSEN

OPGAVEN OVER THEORIE DER REKENKUNDE. Met aanteekeningen, ten dienste van kweekscholen en cursussen voor de hoofdacte. 3de druk, gebonden.... *f* 2.75

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET

ALGEBRA VOOR HOOGERE HANDELSSCHOLEN en voor akte K XII, 2de druk. Prijs, gebonden. . . . . *f* 2.50
Antwoorden. . . . . - 1.—

P. WIJDENES

ALGEBRA VOOR MIDDELBARE HANDELSDAGSCHOLEN.
Twee in heel linnen geb. deeltjes, 6de en 4de druk à - 1.75
Antwoorden I *f* 0.50; II. . . . . - 1.20

De wijze beperking der stof draagt zeker bij tot het succes van dit verdienstelijke boek.

De spiegel van handel en wandel.

Dr. H. J. E. BETH en Dr. P. J. VAN LOO

MECHANICA voor het middelbaar onderwijs, met vraagstukken, gebonden. . . . . *f* 2.50
Antwoorden. . . . . - 0.50

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

TAFELS

Dr. B. GONGGRIJP

Tafels in 5 decimalen:

A. Logarithmische en goniometrische tafels, 3de druk, gec.	*f*	1.35
B. Log. en goniometr. tafels, m. 10 bijtafels, 4de druk, geb.	-	1.90
C. Rechtstreeksche waarden goniometrische funeties, gec.	-	0.80
D. Tafel A, B en C bij elkaar gebonden, 5de druk. . . .	-	2.50
Zaktafels in 4 decimalen, gecartonneerd.	-	1.50

Dr. M. VAN HAAFTEN

Reziprokentafel aller ganzen Zahlen von 1—10.000, geb. .	-	2.40
NOORDHOFF's SCHOOLTAFEL, bewerkt door P. Wijdenes. Papier in twee kleuren. Gebonden in slap linnen band	-	1.50

Dr. J. DU SAAR

Rente-, annuïteiten- en sterftetafels, gebonden	-	1.—

Dr. D. P. A. VERRIJP

Vierdecimalige tafels. Sinus enz.-tafels, Briggsche log., log. sinus enz.-tafel.	-	0.40
10 ex., *f* 3.50; 100 ex.	-	30.—

J. VERSLUYS

A. Gewone logarithmen in 5 decimalen, van de rentefactoren in 7 decimalen, ingenaaid	-	0.40
C. Goniometrische logarithmen in 5 decimalen, ing. . . .	-	1.—
D. Tafel A en C bij elkaar, ingenaaid.	-	1.25
F. Antilog. in 5 dec. voor alle mantissen van 0000—9999, ing.	-	0.50
G. Tafel van tweedemachten, derdemachten, tweedemachtswortels en derdemachtswortels voor de getallen van 1—1000; de wortels in 7 decimalen, ingenaaid	-	0.60
H. Groote tafel, omvattende tafel A en C en verder de waarden der goniometrische functies met eenvoudige interpolatietafels en belangrijke bijtafels, op drie kleuren papier gedrukt, gec. *f* 2.75, gebonden.	-	2.90

P. WIJDENES

A. Logarithmen- en rentetafels, 6de druk, gecart.	-	0.60
B. Logarithmen- en rentetafels, met uitbr. der rentetafels (annuïteiten), 8ste druk, gecartonneerd	-	0.85
C. Logarithmentafels in 5 decimalen, 2de druk, ing.. . .	-	0.40
D. Rentetafels in 3 decimalen, 2de druk, ing. *f* 0.50, gecart.	-	0.75

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET

Tafel E. Logarithmen-, rente- en discontotafels. Met afzonderlijk hulpboekje, 2de druk, gecartonneerd.	-	3.25
Hulpboekje afzonderlijk, ingenaaid.	-	0.50

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA