LEERBOEK

DER

GONIOMETRIE & TRIGONOMETRIE

DOOR

Dr. B. Gonggrijp en P. Wijdenes

SIONAL RI

P. NOORDHOFF - GRONINGEN

0'Pro'03

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

3
224 4 hal.

Rp. 307400

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

LEERBOEK

DER

GONIOMETRIE EN TRIGONOMETRIE

DOOR

DR. B. GONGGRIJP EN P. WIJDENES

TWEEDE DRUK

P. NOORDHOFF — 1920 — GRONINGEN.

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI
DJAKARTA

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.
Tanggal : 28-6-2010
Nomor Induk : 58/DN-Inv.Sum/10
BIB - ID : 7165360
ITEM - ID : 21210372 1
Asal : Museum Pusat

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

VOORBERICHT

VAN HET

LEERBOEK DER GONIOMETRIE EN TRIGONOMETRIE

DOOR DR. B. GONGGRIJP EN P. WIJDENES

LEERAREN M. O. TE AMSTERDAM.

Het boek moge in hoofdzaak voor zich zelf spreken. Zijne inhoudsopgave is een uitvoerig en gedetailleerd prospectus. Waarin het afwijkt van het gewone of iets nieuws brengt mag echter wel in enkele opzichten nader worden aangeduid.

Bij de behandeling van verband en verloop der goniometrische verhoudingen is op den voorgrond geplaatst en consequent vastgehouden de afspraak, dat *projecteerende lijnen* (ordinaten) *boven de X-as positief, onder die as negatief* gerekend worden en dat *projecties* (abscissen) *positief of negatief* in rekening gebracht worden al naarmate zij *rechts* of *links van de Y-as gelegen zijn.*

Deze overeenkomst is geheel conform o. a. met de gewone Analytische Meetkunde en de Mechanica.

Zij geeft eenvoudige middelen om verband, verloop, hoofdwaarden en bijzondere waarden van de goniometrische verhoudingen na te gaan.

De, — in vroegere leerboeken meestal zeer op den voorgrond geplaatste, — *goniometrische lijnen* zou men dan achterwege kunnen laten. Ze geven echter nog eens een duidelijk overzicht over het verloop der gon. verhoudingen in de verschillende kwadranten.

Nieuw is dan bij deze goniometrische lijnen de constructie ook van secanten en cosecanten als abscissen en ordinaten, die dan op geheel gewone wijze positief of negatief teeken krijgen. Tot nu toe werd het „veranderlijke been" en het verlengde daarvan respectievelijk positief en negatief gerekend, terwijl de straal van den goniometrischen cirkel in alle richtingen als een absolute (positieve) grootheid gold. De nieuwe manier zal o. i. consequenter en natuurlijker gevonden worden dan de vroegere. Zij wordt, evenals de graphische voorstellingen, behandeld in Hoofdstuk XIV; men kan dit hoofdstuk echter, desverkiezende, onmiddellijk op Hoofdstuk IV laten volgen.

Nieuw is er meer, bijv. de regels in § 25 om op eenvoudige wijze, — zonder figuren, — over te gaan op argumenten, die door een even of een oneven aantal malen 90° met gegeven argumenten in verband staan.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nieuw zijn verder twee algemeene bewijzen voor de optellings-theorema's der goniometrische functies.

Concentrisch zouden wij willen noemen de vroegtijdige behandeling van enkele eenvoudige vraagstukken over rechthoekige en scheefhoekige driehoeken; wij hopen den leerling hierdoor ten spoedigste het practische nut van een vak als de goniometrie te doen inzien.

Concentrisch bedoeld is ook de bespreking reeds in den aanvang van enkele zeer eenvoudige goniometrische vergelijkingen. Wanneer deze geheel tot het laatst worden uitgesteld, raakt de leerling er zeer moeilijk in te huis.

In de *Trigonometrie* zal, naar wij hopen, de eenvoudige goniometrische behandeling van den voetpuntsdriehoek en van de stellingen van Ceva en Menelaus als een aanwinst gerekend worden.

Evenals aan de goniometrische vergelijkingen is ook aan de cyclometrische vormen meer zorg besteed dan gemeenlijk in de leerboeken geschiedt. *Nieuw* zijn hier dan weer formules, die voor alle cyclometrische functies *algemeen geldige* optellingstheorema's geven.

De leeraar, die voor de behandeling der cyclometrische vormen te weinig tijd heeft, of ze minder noodig oordeelt, — kan er zooveel van laten liggen of aanwenden, als hem zelf nuttig voorkomt.

Vraagstukken zijn in zeer ruim aantal, — nl. bijna 1000!, — aanwezig.

Naast onze toewijding aan het inwendige staat des uitgevers royale verzorging van het uitwendige van dit leerboek, waarvoor wij de firma Noordhoff gaarne onze erkentelijkheid betuigen.

DE SCHRIJVERS.

BIJ DEN 2DEN DRUK.

Het aantal vraagstukken is vermeerderd; de nieuwste zijn weer opgenomen. Men beschouwe bijvoorbeeld de rubrieken: Staatsex., Eindex. Gymn., Eindex. H. B. S. en Acte Wisk. L. O.

De behandeling der theorie is geheel dezelfde gebleven; alleen zijn een paar paragrafen toegevoegd over den koordenvierhoek en over de goniometrische oplossing der vierkantsvergelijking.

Een Aanhangsel over „Goniometrie en Complexe Grootheden" geeft in vogelvlucht een blik op de reeks-ontwikkelingen voor sin x, cos x, tg x en cot x.

Menig weetgierige beoefenaar van de Goniometrie zal dikwijls verlangd hebben *iets* te weten te komen van de manier, waarop goniometrische tafels, die hij voortdurend gebruikt, kunnen worden berekend.

DE SCHRIJVERS.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

INHOUD.

GONIOMETRIE.

		Blz.
Hoofdstuk I.	**Scherpe hoeken**	**1—8**
§ 1.	Definities	1
§ 2.	Eerste formules	2
§ 3.	Verdere betrekkingen	3
§ 4.	Opgaven	4
§ 5.	De scherpe hoek en zijn complement	6
Hoofdstuk II.	**Andere hoeken**	**9—18**
§ 6.	Definities	9
§ 7.	Tweede kwadrant	10
§ 8.	Derde kwadrant	11
§ 9.	Vierde kwadrant	11
§ 10.	Teekenregels	12
§ 11.	Herleiding naar het 1e kwadrant	12
§ 12.	Kwadraatformules gelden voor alle hoeken	15
§ 13.	Opgaven	16
Hoofdstuk III.	**Enkele meetkundige toepassingen**	**19—23**
§ 14.	Sinus- en cosinusformule	19
§ 15.	Enkele berekeningen	21
§ 16.	Opgaven	22
Hoofdstuk IV.	**Hoofdwaarden en bijzondere waarden**	**22—30**
§ 17.	Hoofdwaarden	24
§ 18.	Bijzondere waarden	28
§ 19.	Opgaven	29
Hoofdstuk V.	**Algemeene formules voor willekeurige hoeken**	**31—40**
§ 20.	Hoeken grooter dan 360°	31
§ 21.	Negatieve hoeken	31
§ 22.	Vermeerdering en vermindering met 180°	32
§ 23.	Toepassingen	33
§ 24.	Opgaven	35
§ 25.	Vermeerdering en vermindering met een oneven aantal malen 90°	35

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Blz.

*) § 26. Opgaven 39

Hoofdstuk VI. De logarithmen der gon. verhoudingen ..... 41—54

§ 27. Inrichting der tafels 41
§ 28. De log. der gon. functies 43
§ 29. Het terugzoeken 45
§ 30. Opgaven 47
§ 31. Negatieve getallen bij logarithmische berekeningen 49
§ 32. Opgaven 51
§ 33. **Eerste Herhaling** 52

Hoofdstuk VII. Optellings-theorema's ..... 55—76

§ 34. $\sin(\alpha + \beta)$ en $\cos(\alpha + \beta)$ 55
§ 35. $\sin(\alpha - \beta)$ en $\cos(\alpha - \beta)$ 56
§ 36. Bewijzen voor willekeurige hoeken 57
§ 37. Algemeen bewijs 59
§ 38. Opt. theorema's voor tangens en cotangens 62
§ 39. Opgaven 62
§ 40. Dubbele hoek en halve hoek 64
§ 41. Opgaven 65
§ 42. Herleiding tot producten 66
§ 43. Opgaven 68
§ 44. Gon. identiteiten 69
§ 45. Opgaven 71
§ 46. **Tweede herhaling** 73

TRIGONOMETRIE.

Hoofdstuk VIII. Rechthoekige driehoeken ..... 79—86

§ 47. Formules 79
§ 48. Voorbeelden van berekening 80
§ 49. Gelijkbeenige driehoeken 83
§ 50. Opgaven 84

Hoofdstuk IX. Scheefhoekige driehoeken ..... 87—106

§ 51. Sinus- en cosinusregel 87
§ 52. Formules afgeleid uit den sinusregel 87
§ 53. Formules afgeleid uit den cosinusregel 89
§ 54. Opgaven 92
§ 55. Oplossing der scheefhoekige driehoeken .. 93
§ 56. Opgaven 100

*) **N.B.** *Men kan hier ook Hoofdstuk XIV laten volgen.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Blz.
§ 57. Het oppervlak van den driehoek 102
§ 58. Opgaven 105
Hoofdstuk X. Merkwaardige lijnen ..... **107—120**
§ 59. Hoogtelijnen 107
§ 60. Stukken der zijden en hoogtelijnen 108
§ 61. Voetpuntsdriehoek 110
§ 62. Bisectrices 112
§ 63. Zwaartelijnen 113
§ 64. Ceva en Menelaus 115
§ 65. Stralen der om-, in- en aangeschreven cirkels 116
§ 66. Koordenvierhoek 117
§ 67. Opgaven 118
Hoofdstuk XI. Toegepaste driehoeksmeting .... **121—137**
§ 68. Onderwerp 121
§ 69. Bepalen van hoogten 122
§ 70. Bepalen van afstanden 123
§ 71. Opgaven 126
§ 72. Triangulatie; Snellius 128
§ 73. Opgaven 132
§ 74. **Derde herhaling** 133

VERGELIJKINGEN.

Hoofdstuk XII. Cyclometrische vormen ..... **141—154**
§ 75. Begrip 141
§ 76. Herleidingen 142
§ 77. Optellings-theorema's 145
§ 78. Opgaven 152
Hoofdstuk XIII. Goniometrische Vergelijkingen .. **155—178**
§ 79. Definitie. Periode 155
§ 80. Methoden van oplossing 155
§ 81. Verschillende typen met voorbeelden 157
§ 82. Opgaven 160
§ 83. De vergelijking $a \sin x + b \cos x = c$ 161
§ 84. Voorbeelden 166
§ 85. Vergelijkingen, die tot $a \sin x + b \cos x = c$ worden herleid 169
§ 86. Opgaven 171
§ 87. Twee verg. met twee onbekenden 174
§ 88. Opgaven 176

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Blz.

§ 89. Goniometrische oplossingen van de vierkants-vergelijking 177

Hoofdstuk XIV. Goniometrische lijnen. Grafieken 179—190

§ 90. Gon. cirkel. Gon. lijnen 179

§ 91. Alle kwadranten 181

§ 92. Radialen 186

§ 93. Graphische voorstellingen 187

Aanhangsel. Goniometrie en Complexe Grootheden 191—194

§ 94. Formule van De Moivre 191

§ 95. $a + b\,i = \mathrm{R}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ en e^z 191

§ 96. Ontwikkeling van $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\,x$ en $\cot x$ 192

VRAAGSTUKKEN.

§ 97. Staatsexamen 195

§ 98. Eindexamens Gymnasia 198

§ 99. Eindexamens H. B. S. 5-j. c. 205

§ 100. Acte Wiskunde L. O. 211

§ 101. Algemeene herhaling 216

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK I.

Scherpe hoeken.

§ 1.

Definities. Als men uit een willekeurig punt P van het eene been BA van een scherpen hoek ABC = α een loodlijn PQ neerlaat op het andere been BC, noemt men:

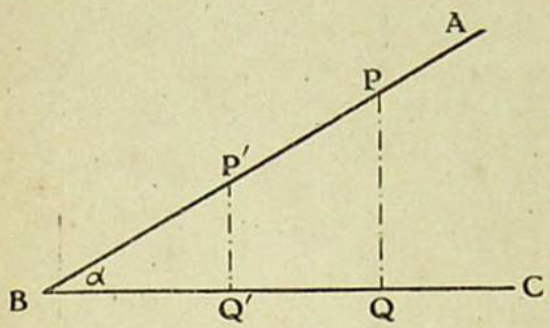


Fig. 1.

BQ de projectie van BP op BC;
BP het geprojecteerde stuk van BA;
PQ de projecteerende lijn.

Men geeft nu de volgende definities:

sinus $\sin\alpha = \frac{PQ}{BP}$, nl.: $\frac{\text{projecteerende lijn}}{\text{geprojecteerd stuk}}$;

cosinus $\cos\alpha = \frac{BQ}{BP}$, nl.: $\frac{\text{projectie}}{\text{geprojecteerd stuk}}$;

tangens $\text{tg}\,\alpha = \frac{PQ}{BQ}$, nl.: $\frac{\text{projecteerende lijn}}{\text{projectie}}$;

cotangens $\cot\alpha = \frac{BQ}{PQ}$, nl.: $\frac{\text{projectie}}{\text{projecteerende lijn}}$;

secans $\sec\alpha = \frac{BP}{BQ}$, nl.: $\frac{\text{geprojecteerd stuk}}{\text{projectie}}$;

cosecans $\text{cosec}\,\alpha = \frac{BP}{PQ}$, nl.: $\frac{\text{geprojecteerd stuk}}{\text{projecteerende lijn}}$.

Elk dezer verhoudingen is geheel bepaald, als de *scherpe* hoek α gegeven is. Omgekeerd is door elk van deze verhoudingen ook de *scherpe* hoek α volkomen bepaald. Immers, *elke rechthoekige* driehoek BP'Q', waarvan twee zijden zich verhouden als twee gelijkstandige zijden van $\triangle$ BPQ, zal met $\triangle$ BPQ gelijkvormig moeten zijn en dus eenzelfden hoek α tegenover P'Q' hebben als in $\triangle$ BPQ tegenover PQ staat. (Welke gevallen van gelijkvormigheid kunnen zich hier voordoen?)

[1]) Spreek uit: Sinus alfa enz.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 2.

Eerste formules. Uit onze *definities* volgt terstond:

1. . . . . $\cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ of $\mathbf{\cot\alpha \operatorname{tg}\alpha = 1}$;

2. . . . . $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ of $\mathbf{\sec\alpha \cos\alpha = 1}$;

3. . . . . $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ of $\mathbf{\operatorname{cosec}\alpha \sin\alpha = 1}$.

Verder kan men uit de definities onmiddellijk afleiden:

4. . . . . $PQ = BP \sin\alpha$;
5. . . . . $BQ = BP \cos\alpha$;
6. . . . . $PQ = BQ \operatorname{tg}\alpha$;
7. . . . . $BQ = PQ \cot\alpha$.

De betrekkingen (4) en (5) kunnen als volgt in woorden worden gebracht:

Stelling I. In een rechthoekigen driehoek is elke rechthoekszijde gelijk aan de schuine zijde maal den sinus van den overstaanden hoek of den cosinus van den aanliggenden hoek.

De formules (6) en (7) kunnen gezamenlijk uitgedrukt worden in

Stelling II. In een rechthoekigen driehoek is elke rechthoekszijde gelijk aan de andere rechthoekszijde maal den tangens van den overstaanden of den cotangens van den aanliggenden hoek.

Opmerking. Deze stellingen zouden geen zin hebben, wanneer men er niet in geslaagd was de goniometrische verhoudingen voor alle willekeurige scherpe hoeken te berekenen. Er bestaan echter tafels, waarin men deze verhoudingen of hare logarithmen met elken redelijken, gewenschten graad van nauwkeurigheid kan vinden en omgekeerd, bij elke gegeven gon. verh. den daarbij behoorenden scherpen hoek kan bepalen. Daardoor is dan o.a. terstond het middel gegeven, om uit één scherpen hoek en uit één zijde van een rechthoekigen driehoek de beide andere zijden te berekenen; ook om uit twee gegeven zijden de derde *en de hoeken* te berekenen.

Voorbeeld. *Geg. van een rechthoekigen driehoek de schuine zijde = 15 cM.; een der hoeken is 37° 15′.*

Gevr.: de *grootste* rechthoekszijde.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opl. De *grootste* rechthoekszijde zal den *kleinsten* scherpen *hoek* tot *aanliggenden* hoek hebben. Dus is

$$x = 15 \cos 37° 15'. \qquad \text{(cM.)}$$

In de tafel vinden wij: $\cos 37° 15' = 0{,}79600$, dus [1])

$$x = 15 \times 0{,}79600 = 11{,}94 \text{ (cM.)}$$

§ 3.

Verdere betrekkingen tusschen de goniometrische verhoudingen van een scherpen hoek.

Uit de *definities* kan men onmiddellijk afleiden:

8. . . . $\mathbf{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$; $\left[\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha};\quad \sin\alpha = \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha\right]$.

9. . . . $\mathbf{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$; $\left[\cos\alpha = \sin\alpha \cot\alpha;\quad \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cot\alpha}\right]$.

Verder is in fig. 1 $PQ^2 + BQ^2 = BP^2$,

dus $BP^2 \sin^2\alpha + BP^2 \cos^2\alpha = BP^2$ [2]) of

10. . . . . $\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$.

Deel nu beide leden van (10) door $\cos^2\alpha$. Met behulp van (8) en (2) vindt men dan:

11. . . . . $\mathbf{tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}$.

Als men beide leden van (10) deelt door $\sin^2\alpha$, krijgt men met behulp van (9) en (3):

12. . . . . $\mathbf{1 + \cot^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha}$.

Opmerking. Niet alle boven afgeleide formules zijn onafhankelijk van elkaar. Men kan er echter altijd *vijf*, van elkander onafhankelijke, betrekkingen uit kiezen, met behulp waarvan *alle zes* verhoudingen gevonden kunnen worden, als één daarvan gegeven is, (of wanneer een zesde onafhankelijke betrekking tusschen die verhoudingen gegeven wordt).

1e Voorbeeld. Geg.: $\cot\alpha = \sqrt{3}$ (α is een scherpe hoek).

Gevr.: *de andere goniometrische verhoudingen van* α.

1e Opl. Uit (12) volgt: $1 + 3 = \operatorname{cosec}^2\alpha$

dus $\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{4} = 2$ [3])

Dan is volgens (3): $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Verder is volgens (9): $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

---

[1]) Zie Dr. B. Gonggrijp, Tafels in vijf Decimalen. C en D.

[2]) In plaats van $(\sin\alpha)^2$ schrijft men $\sin^2\alpha$ (spreek uit: sinus kwadraat α).

[3]) Uit $\operatorname{cosec}^2\alpha = 4$ zou *kunnen* worden afgeleid: $\operatorname{cosec}\alpha = \pm 2$. Uit onze definitie van den cosec. van een *scherpen* hoek volgt echter onmiddellijk, dat *hier* alleen het positieve teeken in aanmerking komt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

en volgens (1): $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$;

eindelijk volgens (2): $\sec\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

2de Opl. Omdat $\cot\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{overstaande rechthoekszijde}}$ (zie st. II), heeft men slechts te teekenen fig. 2. De hyp. wordt 2; nu zijn òf volgens § 1 òf volgens st. I en II alle goniometrische verhoudingen van α direct op te schrijven.

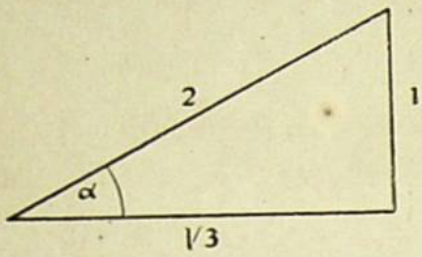


Fig. 2.

2de Voorbeeld. Geg. van een scherpen hoek α: $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Gevr.: de andere goniometrische verhoudingen.

1e Opl. Uit (10) blijkt:

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, dus $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. [1])

Uit (8) blijkt dan: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$.

Met behulp van (1) vindt men dan: $\cot\alpha = 1$.

Verder wordt $\sec.\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

en $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

2de Opl.

Omdat $\cos\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$

(zie st. I), heeft men slechts fig. 3 te teekenen. De overstaande rechthoekszijde wordt nu ook $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Alle gon. verhoudingen zijn nu direct op te schrijven.

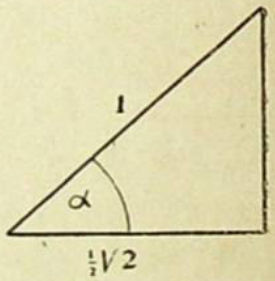


Fig. 3.

Opgaven.

§ 4. 1. Bewijs, dat $\sin 30° = \frac{1}{2}$ is.

Bereken de andere goniometrische verhoudingen van dezen hoek; *a.* uit de figuur met behulp van de definities; *b.* met behulp van de formules.

2. Bereken alle goniometrische verhoudingen van een hoek van 45°.

3. Bepaal alle goniometrische verhoudingen van 60° en vergelijk ze met die van 30°.

1) Het — teeken vervalt hier weer om dezelfde reden als bij [3]) op blz. 3.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

4. *Construeer* den scherpen hoek, waarvan de sinus $= {}^1/_4$ is; en een anderen, waarvan de sinus $= {}^2/_3$ is.

5. *Construeer* den scherpen hoek, welks cosinus $= {}^1/_3$ is; en een anderen, die 0,4 tot cosinus heeft.

6. Hoe construeert men een scherpen hoek, waarvan de tangens $= {}^1/_2\sqrt{5}$ is?

7. Gegeven van een scherpen hoek α: cot $\alpha = \sqrt{10}$; construeer dien hoek.

8. Construeer den scherpen hoek, waarvan de secans $= \sqrt{3}$.

9. Als van een scherpen hoek de cosecans $= \sqrt{7}$ is, hoe wordt dan die hoek geconstrueerd?

10. Gegeven een scherpe hoek α. Construeer nu een scherpen hoek x, zóó dat sin $x = {}^1/_2 \sin \alpha$.

11. Een gegeven scherpe hoek α is kleiner dan 30°. Construeer een anderen scherpen hoek y, zoodanig dat sin $y = 2 \sin \alpha$.

Waarom moet hier de gegeven hoek $< 30°$ zijn?

12. De sinus van een scherpen hoek is p; druk alle andere gon. verhoudingen uit in p.

Opl. Teeken een rechthoekigen driehoek met schuine zijde 1 en noem de rechthoekszijde over α dan p; de aanliggende rechthoekszijde is nu $\sqrt{1-p^2}$. Men kan dan met § 1 alle gon. verhoudingen direct opschrijven:

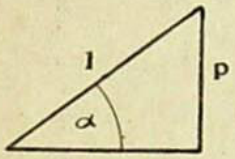


Fig. 4.

$$\sin \alpha = \frac{\text{overstaande rhz.}}{\text{hypotenusa}} = \frac{1}{\text{cosec } \alpha}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{aanliggende rhz.}}{\text{hypotenusa}} = \frac{1}{\sec \alpha}.$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{overstaande rhz.}}{\text{aanliggende rhz.}} = \frac{1}{\cot \alpha}.$$

13. Eveneens als de cosinus q is (zie 12).

14. Ook in den tangens r (zie 12).

15. Druk alle gon. verhoudingen van een scherpen hoek uit in den cotangens door middel van de formules 1, 2, 3 (blz. 2) en 8—12 (blz. 3).

Opl. $\text{tg } \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ (form. 1); $\text{cosec } \alpha = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}$ (form. 12),

dus $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$ (form. 3); $\cos \alpha = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$ (form. 9),

dus $\sec \alpha = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha}$ (form. 2).

N.B. Uitkomsten met wortels in den noemer worden niet tot breuken met rationeelen noemer herleid.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

16. Insgelijks in den secans (zie 15).

17. Ook nog in den cosecans (zie 15).

18. Druk den sinus van een scherpen hoek achtereenvolgens uit in de andere goniometrische verhoudingen.

Opl. Uit form. 10 volgt: $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$; volgens form. 2 is dan $\sin \alpha = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sec^2 \alpha}\right)} = \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha}$; volgens 3 is $\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$, dus $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$ (nr. 12) en dit wordt (als men $\cot \alpha$ vervangt door $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$) $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$.

19. Doe hetzelfde met den cosinus.

20. Eveneens met den tangens.

21. Ook met den cotangens.

22. Insgelijks met den secans.

23. Ten slotte met den cosecans.

24. De schuine zijde van een rechthoekigen driehoek is 5 cM. De sinus van den kleinsten hoek is $\frac{1}{5}\sqrt{2}$. Bereken de kleinste en daarna ook de grootste rechthoekszijde.

25. De kleinste rechthoekszijde van een rechthoekigen driehoek is 1,5 dM. De tangens van den kleinsten hoek is $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Bereken de andere rechthoekszijde en ook de schuine zijde.

Hoe groot zijn de scherpe hoeken van dezen driehoek?

26. De schuine zijde van een rechthoekigen driehoek is 0,5 dM. en de secans van den grootsten der scherpe hoeken = 2. Bereken de andere zijden.

Is ook hier iets te vinden voor de scherpe hoeken van den driehoek?

§ 5

De scherpe hoek en zijn complement.

Bij een scherpen hoek kan men gemakkelijk een verband vinden tusschen zijn goniometrische functies (verhoudingen) en die van zijn complement.

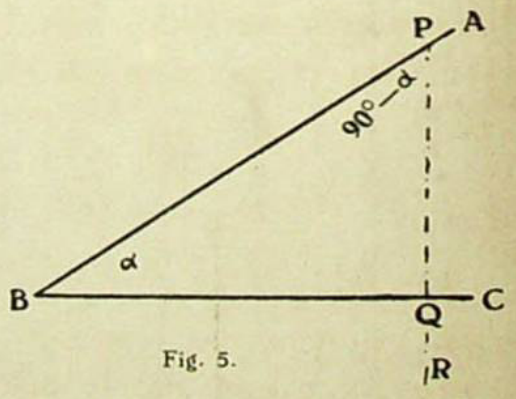


Fig. 5.

In △ BPQ (zie fig. 5) komen α en $90° - \alpha$ als scherpe hoeken in een zelfden rechthoekigen driehoek voor. Om de gon.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

verhoudingen van $90° - \alpha$ te vinden onderstellen wij, dat het stuk PB van het eene been geprojecteerd is op het andere been PR. De projecteerende lijn is voor $90° - \alpha$ dan BQ en de projectie PQ.

Uit onze definitie van § 1 volgt dan : $\sin (90° - \alpha) = \frac{BQ}{PB}$.

Uit dezelfde definitie volgt : $\cos \alpha = \frac{BQ}{BP}$.

Wij *zien* dus :

13. $$\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha.$$

Op dezelfde wijze blijkt :

14. . . . . $\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha \quad \left(= \frac{PQ}{BP}\right)$.

15. . . . . $\text{tg} (90° - \alpha) = \cot \alpha \quad \left(= \frac{BQ}{PQ}\right)$.

16. . . . . $\cot (90° - \alpha) = \text{tg} \alpha \quad \left(= \frac{PQ}{BQ}\right)$.

17. . . . . $\sec (90° - \alpha) = \text{cosec} \alpha \quad \left(= \frac{BP}{PQ}\right)$.

18. . . . . $\text{cosec} (90° - \alpha) = \sec \alpha \quad \left(= \frac{BP}{BQ}\right)$.

Het spreekt van zelf, dat men ook mag schrijven :

$\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$; $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$;
$\text{tg} \alpha = \cot (90° - \alpha)$; $\cot \alpha = \text{tg} (90° - \alpha)$;
$\sec \alpha = \text{cosec} (90° - \alpha)$; $\text{cosec} \alpha = \sec (90° - \alpha)$.

De *cosinus* van een scherpen hoek is dus de *sinus* van het *complement* ; de *cotangens* is de *tangens* van het *complement* en de *cosecans* is de *secans* van het *complement*.

Opmerking. Aan deze eigenschap hebben de benamingen cosinus, cotangens en cosecans hun ontstaan te danken; zij zijn ontstaan door afkorting van complementi-sinus, complementi-tangens en complementi-secans.

Opgaven.

1. Als gegeven is $\text{tg} x = 1 + \sqrt{2}$, bereken dan $\text{tg} (90° - x)$.
2. Bewijs, dat $\text{tg} x \times \text{tg} (90° - x) = 1$.
3. Eveneens, dat $\text{tg} (45° + x) \times \text{tg} (45° - x) = 1$.
4. Van welken scherpen hoek is de cosinus gelijk aan den sinus?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

5. Bereken sin 55° 15′, als gegeven is: sin 34° 45′ = 0,57.
6. Druk alle goniometrische verhoudingen van 75° uit in tg 15°.
7. Gegeven is: $\text{tg}(\alpha + x) = \cot(\alpha - x)$; bepaal $\angle\ \alpha$.
8. Van de twee scherpe hoeken A en B van een driehoek is gegeven: sin A = cos B. Wat is dit voor een driehoek?
9. Van zekeren scherpen hoek x is de tangens 2 maal zoo groot als de cosinus van zijn complement. Bereken $\angle\ x$.
10. Waarom behoeft een tafel van de goniometrische verhoudingen van scherpe hoeken niet verder te gaan dan tot 45°?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK II.

Goniometrische functies van andere dan scherpe hoeken.

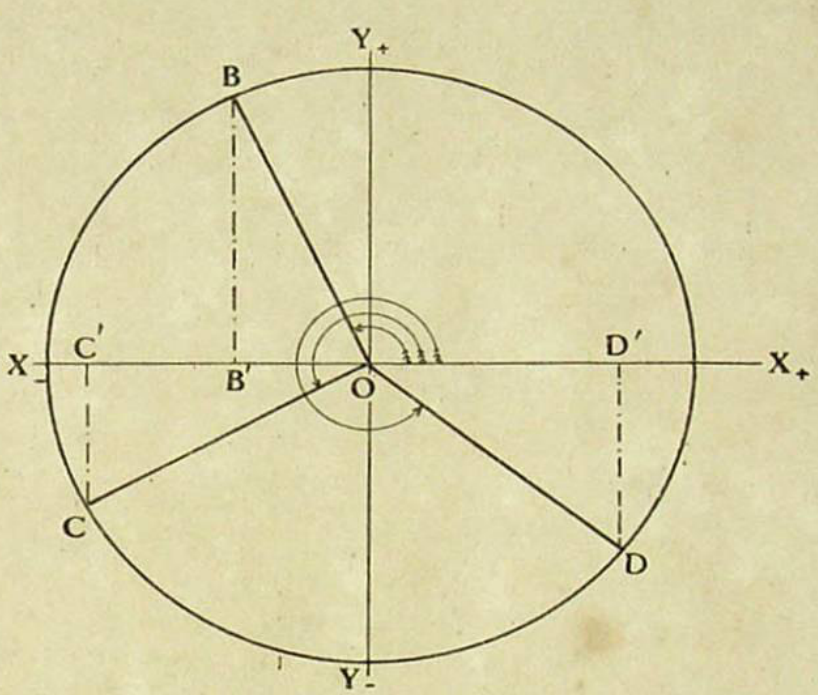


Fig. 6.

§ 6.

Definities. Bij deze hoeken behouden wij dezelfde definities voor de goniometrische verhoudingen.

Wij zetten een willekeurig stuk op het eene been van den hoek af en projecteeren dit op het andere been (of op het verlengde daarvan).

Onder den sinus van een hoek verstaan wij dus *altijd* het onbenoemde quotient:

$$\frac{\text{projecteerende lijn}}{\text{geprojecteerd stuk}}.$$

De cosinus is dus altijd gelijk aan de verhouding:

$$\frac{\text{projectie}}{\text{geprojecteerd stuk}}, \text{ enz.}$$

Het blijkt dan echter, dat van zeer verschillende hoeken sommige

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

goniometrische verhoudingen geheel gelijk uitvallen. Om nu uit de gegeven goniometrische verhoudingen van een hoek dien hoek zelf met zekerheid te kunnen bepalen heeft men zich genoodzaakt gezien aan deze verhoudingen een *teeken* toe te kennen.

Men denkt zich in verband hiermee een stelsel van twee onderling loodrechte lijnen of assen $X_+ X_-$ en $Y_+ Y_-$ (zie fig. 6). Een willekeurige, bijv. stompe, hoek β[1]) wordt nu met zijn hoekpunt geplaatst in het snijpunt O (oorsprong) van deze assen. Het eene been wordt tot samenvalling gebracht met OX_+, het z.g. positieve deel van de X-as. Het andere been krijgt dan den stand OB. Nu kiest men OB als geprojecteerd stuk; BB′ zal dus de projecteerende lijn en OB′ de projectie zijn.

Nu maakt men echter de volgende afspraak:

Projecteerende lijnen, boven de X-as gelegen, worden positief gerekend; liggen zij beneden de X-as, dan rekent men ze negatief.

Projecties, rechts van de Y-as gelegen, worden eveneens positief gerekend; als zij links van die as liggen, worden zij negatief in rekening gebracht.

§ 7.

Hoeken in het tweede kwadrant (tusschen 90° en 180°).

Volgens deze afspraak zal, als $\angle X_+ OB = \beta$,

$$\sin\beta = \frac{+BB'}{OB}, \text{ dus } +;$$

maar

$$\cos\beta = \frac{-OB'}{OB}, \text{ dus } -;$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{+BB'}{-OB'}, \text{ dus } -;$$

$$\cot\beta = \frac{-OB'}{+BB'}, \text{ dus } -;$$

$$\sec\beta = \frac{OB}{-OB'}, \text{ dus } -;$$

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{OB}{+BB'}, \text{ dus } +.$$

Wij zien dus: voor stompe hoeken zijn alle verhoudingen negatief, behalve de *sinus* en de *cosecans*.

[1]) Spreek uit: bèta.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 8.

Hoeken in het derde kwadrant (tusschen 180° en 270°).

In fig. 6 is $\angle X_+OC = \gamma$[1]) zulk een hoek. Hier is:

$$\sin\gamma = \frac{-CC'}{OC},\ \text{dus}\ -;$$

$$\cos\gamma = \frac{-OC'}{OC},\ \text{dus}\ -;$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{-CC'}{-OC'},\ \text{dus}\ +;$$

$$\cot\gamma = \frac{-OC'}{-CC'},\ \text{dus}\ +;$$

$$\sec\gamma = \frac{OC}{-OC'},\ \text{dus}\ -;$$

$$\operatorname{cosec}\gamma = \frac{OC}{-CC'},\ \text{dus}\ -.$$

In het derde kwadrant zijn dus alle verhoudingen negatief behalve de *tangens* en de *cotangens*.

§ 9.

Hoeken in het vierde kwadrant (tusschen 270° en 360°).

Zie fig. 6. Zij $\angle X_+OD = \delta$[2]). Nu is

$$\sin\delta = \frac{-DD'}{OD},\ \text{dus}\ -;$$

$$\cos\delta = \frac{+OD'}{OD},\ \text{dus}\ +;$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{-DD'}{+OD'},\ \text{dus}\ -;$$

$$\cot\delta = \frac{+OD'}{-DD'},\ \text{dus}\ -;$$

$$\sec\delta = \frac{OD}{+OD'},\ \text{dus}\ +;$$

$$\operatorname{cosec}\delta = \frac{OD}{-DD'},\ \text{dus}\ -.$$

In het 4de kwadrant blijken dus alle verhoudingen negatief te zijn, behalve de *cosinus* en de *secans*.

[1]) Spreek uit: gamma.

[2]) Spreek uit: delta.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 10.

Teekenregel.

De **sinus** *is* **+** *in het* **1e en 2de** *kwadrant*; **— in het 3de en 4de;**
de **cosinus** *is* **+** „ „ **1e en 4de** „ ; **— in het 2de en 3de;**
de **tangens** *is* **+** „ „ **1e en 3de** „ ; **— in het 2de en 4de.**

De *cotangens* gedraagt zich in dit opzicht geheel als de *tangens*, de *secans* als de *cosinus* en de *cosecans* als de *sinus*; dit blijkt direct uit de formules (1), (2) en (3) van blz. 2.

Opmerking I. De sinus en de cosinus zijn altijd, afgezien van het teeken, gelijk aan de verhouding van een rechthoekszijde tot de hypotenusa van een rechthoekigen driehoek. Derhalve:

De volstrekte waarde van sin α en van cos α is hoogstens gelijk aan de eenheid.

Hieruit volgt weer onmiddellijk:

De volstrekte waarde van cosec. α en van sec α is minstens gelijk aan de eenheid.

Opmerking II. De formules (1), (2), (3), (8) en (9) volgden onmiddellijk uit de *definities*. Deze definities werden onveranderd overgenomen voor hoeken grooter dan 90°. *Dezelfde formules gelden daarom voor hoeken in alle kwadranten.*

Wij zullen later bewijzen, dat ook (10) en dientengevolge (11) en (12) geheel algemeen geldig zijn.

§ 11.

Herleiding van goniometrische verhoudingen naar het 1e kwadrant.

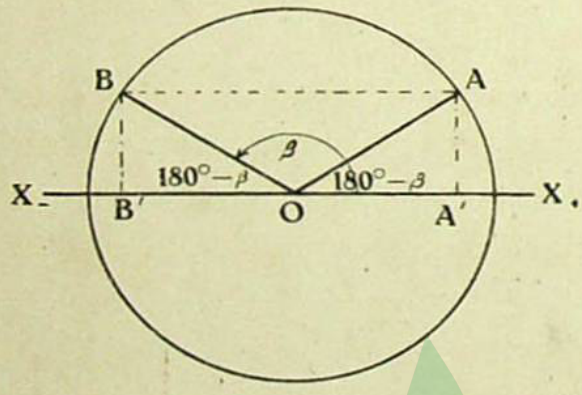


Fig. 7.

I. Tweede kwadrant.

Zij $\angle X_+ OB = \beta$ een hoek in het 2de kwadrant.

Trek $BB' \perp X_+X_-$, $BA \parallel X_-X_+$ en $AA' \perp X_+X_-$.

Het behoeft nu wel geen uitleg, dat $AA' = BB'$, $OA' = OB'$, dat $\angle X_+OA = \angle BOX_- = 180° - \beta$.

In de figuur zien we nu: $\sin\beta = + \frac{BB'}{R}$, als R den straal van cirkel O voorstelt.

Maar $\sin(180° - \beta) = + \frac{AA'}{R} = + \frac{BB'}{R}$, derhalve

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

119. . . . . **sin β = sin (180° — β).**

In woorden:

De sinus van een hoek is gelijk aan dien van zijn supplement.

Opmerking I. Deze stelling geldt *voorloopig* alleen voor stompe en scherpe hoeken.

Opmerking II. Formule (19) stelt ons in staat, den sinus van een hoek in het 2de kwadrant te herleiden tot den sinus van een scherpen hoek (1e kwadrant).

Verder is $\cos\beta = -\frac{OB'}{R}$ en $\cos(180°-\beta) = +\frac{OA'}{R} = +\frac{OB'}{R}$, dus

120. . . . . **cos β = — cos (180° — β).**

In woorden: **De cosinus van een hoek is gelijk aan het tegengestelde van den cosinus van zijn supplement.**

Vervolgens is $\text{tg}\,\beta = \frac{+BB'}{-OB'} = -\frac{BB'}{OB'}$,

terwijl $\text{tg}\,(180°-\beta) = \frac{+AA'}{+OA'} = +\frac{AA'}{OA'} = +\frac{BB'}{OB'}$, derhalve:

121. . . . . **tg β = — tg (180° — β).**

Dus: **De tangens van een hoek is gelijk aan het tegengestelde van den tangens van zijn supplement.**

Verder hebben wij: $\cot\beta = -\frac{OB'}{BB'}$

en $\cot(180°-\beta) = +\frac{OA'}{AA'} = +\frac{OB'}{BB'}$, dus

122. . . . . **cot β = — cot (180° — β).**

Wij zien weer: **De cotangens van een hoek is gelijk aan het tegengestelde van den cotangens van zijn supplement.**

Formule (22) had onmiddellijk door omkeering uit (21) kunnen afgeleid worden. Door omkeering kan men uit (20) en (19) ook afleiden:

123. . . . . **sec β = — sec (180° — β)** en

124. . . . . **cosec β = cosec (180° — β).**

De lezer leide deze formules echter rechtstreeks af ter oefening in het aanwenden der definities en het bepalen van het juiste teeken der verhoudingen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

II. Derde kwadrant.

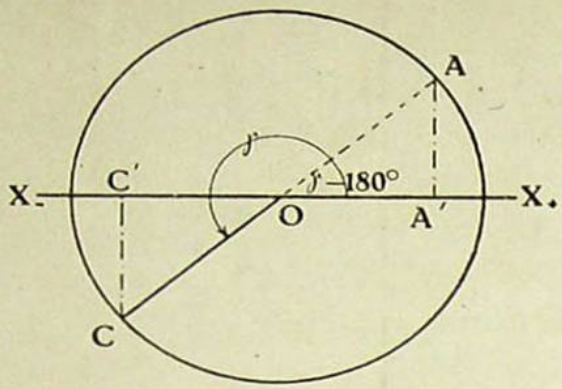


Fig. 8.

Zij $X_+OC = \gamma$ een hoek in het derde kwadrant.

Zij OA het verlengde van CO; trek CC′ en AA′ $\perp X_+X_-$.

Uit $\triangle AOA' \cong \triangle COC'$ volgt: $AA' = CC'$; $OA' = OC'$; $\angle AOA' = \gamma - 180°$.

Nu is $\sin\gamma = -\frac{CC'}{R}$ en

$\sin(\gamma - 180°) = +\frac{AA'}{R} = +\frac{CC'}{R}$; dus

25. . . . . **$\sin\gamma = -\sin(\gamma - 180°)$.**

Verder is $\cos\gamma = -\frac{OC'}{R}$ en $\cos(\gamma - 180°) = +\frac{OA'}{R} = +\frac{OC'}{R}$; dus

26. . . . . **$\cos\gamma = -\cos(\gamma - 180°)$.**

Vervolgens hebben wij:

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{-CC'}{-OC'} = +\frac{CC'}{OC'}$ en $\operatorname{tg}(\gamma - 180°) = +\frac{AA'}{OA'} = +\frac{CC'}{OC'}$; dus

27. . . . . **$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\gamma - 180°)$.**

Door omkeering [met behulp van (1), (2) en (3)] vinden wij hierbij:

28. . . . . **$\cot\gamma = \cot(\gamma - 180°)$.**

29. . . . . **$\sec\gamma = -\sec(\gamma - 180°)$.**

30. . . . . **$\operatorname{cosec}\gamma = -\operatorname{cosec}(\gamma - 180°)$.**

Wij raden den lezer echter weer aan, deze formules rechtstreeks af te leiden.

III. Vierde kwadrant.

$X_+OD = \delta$ moge een hoek in het 4de kwadrant voorstellen.

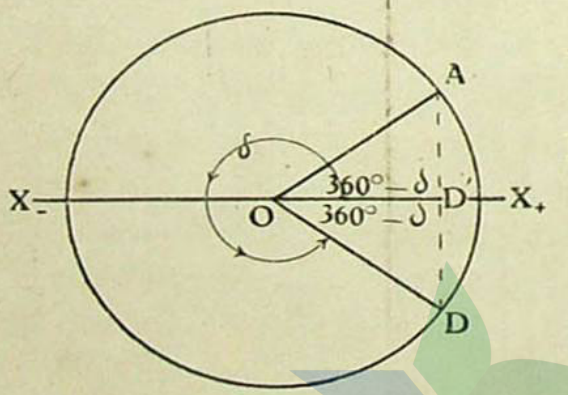


Fig. 9.

Wij trekken DD′A $\perp OX_+$ en verbinden A met O.

Uit $\triangle DOD' \cong \triangle AOD'$ volgt hier: $AD' = DD'$ en $\angle AOD' = \angle DOD' = 360° - \delta$.

Hier vinden wij:

$\sin\delta = -\frac{DD'}{R}$, terwijl

$\sin(360° - \delta) = +\frac{AD'}{R} = +\frac{DD'}{R}$, of

31. . . . . **$\sin\delta = -\sin(360° - \delta)$.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Verder is $\cos \delta = +\frac{OD'}{R}$ en $\cos (360° - \delta) = +\frac{OD'}{R}$; dus

32. . . . . **$\cos \delta = \cos (360° - \delta)$.**

Vervolgens is hier: $\text{tg } \delta = \frac{-DD'}{+OD'} = -\frac{DD'}{OD'}$,

maar $\text{tg } (360° - \delta) = \frac{+AD'}{+OD'} = +\frac{AD'}{OD'} = +\frac{DD'}{OD'}$; derhalve

33. . . . . **$\text{tg } \delta = -\text{tg } (360° - \delta)$.**

Hierop kunnen wij onmiddellijk laten volgen:

34. . . . . **$\cot \delta = -\cot (360° - \delta)$;**

35. . . . . **$\sec \delta = \sec (360° - \delta)$;**

36. . . . . **$\text{cosec } \delta = -\text{cosec } (360° - \delta)$.**

§ 12.

De kwadraatformules gelden voor alle hoeken.

Allereerst blijkt nu uit de „reductie-formules" van § 11, dat een goniometrische functie van een hoek in een willekeurig kwadrant altijd *in volstrekte waarde* gelijk is aan een overeenkomstige functie van een scherpen hoek. (Een sinus blijft een sinus enz.; alleen het teeken *kan* tegengesteld worden.)

Beschouwen wij nu onze vroegere formules (10), (11) en (12), dan merken wij op, dat deze alleen de *kwadraten* van de goniometrische functies bevatten.

In verband met het bovenstaande blijkt hieruit:

Stelling. De formules (10), (11) en (12) gelden voor hoeken in alle kwadranten.

Om bijv. aan te toonen, dat (10) geldt voor een hoek in het derde kwadrant, zullen wij herleiden:

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma$$

in de onderstelling, dat γ een hoek in het derde kwadrant is.

Wij mogen dan stellen:

$$\gamma = 180° + \alpha, \text{ zoodat } \alpha = \gamma - 180°,$$

waarbij α in het 1e kwadrant ligt.

Uit $\sin \gamma = -\sin (\gamma - 180°)$ volgt dan: $\sin \gamma = -\sin \alpha$; verder blijkt uit $\cos \gamma = -\cos (\gamma - 180°)$, dat $\cos \gamma = -\cos \alpha$. Dus is $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = (-\sin \alpha)^2 + (-\cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Toepassing. *Van een in het derde kwadrant gelegen hoek Φ is gegeven: $\text{tg } \Phi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Bereken de andere goniometrische verhoudingen.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Opl. Vooreerst is $\cot\varphi = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; verder

$$\sec^2\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \tfrac{3}{2} \text{ en dus:}$$
$$\sec\varphi = -\sqrt{\tfrac{3}{2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Hier vervalt het teeken +, want de sec moet negatief zijn voor een hoek in het 3de kwadrant.

Nu is verder $\cos\varphi = \frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{6}} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{6}$;

$\sin\varphi = \cos\varphi \times \operatorname{tg}\varphi = -\tfrac{1}{3}\sqrt{6} \times \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$;

eindelijk $\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{-\frac{1}{3}\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$.

Opgaven.

§ 13. *Opmerking.* In sin α is de sinus een goniometrische functie van α; men noemt omgekeerd α het *argument* (of den hoek) van den sinus.

1. Breng bij de volgende functies het argument over naar het 1e kwadrant:

sin 160°; cos 230°; tg 291° 13′; cot 315° 25′ 14″;
sec 249° 8′ 59″; cosec 181° 44′ 28″.

2. Eveneens bij:

cos 119° 18′ 51″; cot 270° 35′ 25″; sin 338° 11′ 37″;
cosec 147° 12′ 48″; tg 115° 0′ 31″; sec 92° 58′ 22″.

3. Doe hetzelfde met:

sec 300° 17′ 19″; cot 168° 5′ 59″; cos 299° 27′ 41″;
cosec 349° 1′ 1″; tg 200° 6′ 39″; sin 211° 34′ 3″.

4. Herleid, voor zoover noodig, alle uitkomsten van de drie voorafgaande vraagstukken tot goniometrische functies van hoeken kleiner dan 45°.

5. Bereken alle goniometrische verhoudingen van een hoek van 135°.

6. Hetzelfde voor een hoek van 120°.

7. Ook voor een hoek van 150°.

8. Bereken alle goniometrische functies, als het argument 225° of 315° is.

9. Eveneens, als het argument 240° of 300° is.

10. Van een in het 2de kwadrant gelegen hoek is de cosecans $= \sqrt{5}$; bereken de overige verhoudingen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

11. Gegeven: $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2}$; α ligt in het 3de kwadrant.
Gevraagd: de andere goniometrische functies van α.

12. Als α een stompe hoek is en $\cos\alpha = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$, welke waarde hebben dan de andere verhoudingen?

13. Gegeven: α ligt in het 2de kwadrant. Druk de andere goniometrische functies dan uit in $\sin\alpha$.

14. Als α gelegen is tusschen 270° en 360°, vraagt men alle andere goniometrische verhoudingen uit te drukken in $\cos\alpha$.

15. De hoek x ligt in het derde kwadrant. Druk nu alle andere verhoudingen uit in $\text{tg}\,x$.

16. Druk $\text{tg}\,\alpha$ uit in alle andere verhoudingen, als α in het 2de kwadrant gelegen is.

17. Druk $\sin z$ uit in alle andere goniometrische functies van z, als z in het 3de kwadrant ligt.

18. Gegeven: y is een hoek in het 4de kwadrant; druk $\cos y$ uit in alle andere goniometrische functies van hetzelfde argument.

19. Bewijs de waarheid van de formule:

$$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x,$$

wanneer x resp. in het 2de, 3de en 4de kwadrant gelegen is.

20. Bewijs, dat de formule:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

waar is, als x in het 2de of in het 4de kwadrant gelegen is.

21. Bewijs de waarheid van de formule:

$$\text{cosec}^2\,\alpha = 1 + \cot^2\alpha,$$

als α resp. in het 2de, 3de en 4de kwadrant gelegen is.

Bewijs de algemeene geldigheid van de formules:

22. $\dfrac{\text{tg}\,x}{\sec x} = \dfrac{1}{\text{cosec}\,x}$; $\dfrac{\cot x}{\text{cosec}\,x} = \cos x.$

23. $\cot\alpha\,\sec\alpha\,\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha\;\cos\alpha\;\sin\alpha} = \text{cosec}^2\alpha.$

24. $\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\sec\alpha - 1} = \dfrac{\sec\alpha + 1}{\text{tg}\,\alpha}.$

25. $\sin^2 z = (1 + \cos z)\,(1 - \cos z).$

26. $\text{tg}\,\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha\,\text{cosec}\,\alpha.$

27. $\cos^2\alpha = (1 - \sin\alpha)\,(1 + \sin\alpha).$

28. $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{1 - \sin\alpha\cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha.$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

29. $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \dfrac{2}{1 - 2\cos^2\alpha} = \dfrac{2}{2\sin^2\alpha - 1}$.

30. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha} \times \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + 1} = 1$.

31. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$.

32. $\operatorname{tg}^2\alpha - \cot^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$.

33. $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$.

34. $2 + \operatorname{tg}^2\alpha + \cot^2\alpha = \sec^2\alpha \operatorname{cosec}^2\alpha$.

35. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$.

36. In een rechthoekigen driehoek met rechten hoek = C, is sin 2 A = sin 2 B. Waarom?

37. Bewijs, dat in een willekeurigen driehoek

$$\sin(B + {}^1/_2A) = \sin(C + {}^1/_2A);$$
$$\cos(A + {}^1/_2B) = -\cos(C + {}^1/_2B);$$
$$\operatorname{tg}(B + {}^1/_2C) = -\operatorname{tg}(A + {}^1/_2C).$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK III.

Enkele meetkundige toepassingen.

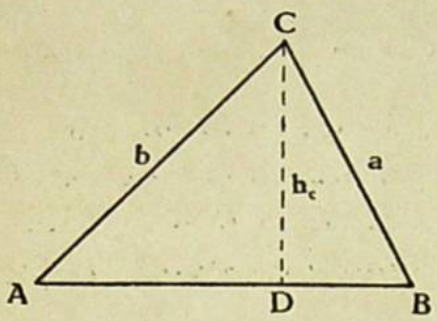


Fig. 10

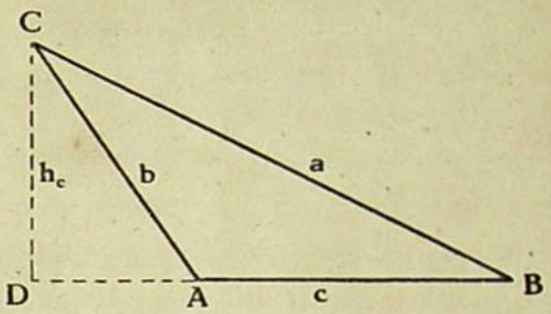


Fig. 11.

§ 14.

Sinus- en cosinusformule bij scheefhoekige driehoeken.

In $\triangle$ ACD (zie fig. 10) is $CD = b \sin A$;

in $\triangle$ BCD (zelfde figuur) is $CD = a \sin B$.

Dus $a \sin B = b \sin A$.

Deel nu beide leden door $\sin A \times \sin B$; er komt:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

In fig. 11 is een stomphoekige driehoek geteekend.

Hier is in $\triangle$ BCD $CD = a \sin B$;

in $\triangle$ ADC is $CD = b \sin CAD$.

Nu is $\sin CAD = \sin (180° - A) = \sin A$.

Dus is $CD = b \sin A$.

Ook in den stomphoekigen driehoek ABC van fig. 11 hebben wij dus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Door een tweede hoogtelijn (bijv. h_a) te trekken laat men gemakkelijk zien, dat aan deze gelijkheid als derde lid kan toegevoegd worden: $\frac{c}{\sin C}$. Wij hebben dus voor een willekeurigen driehoek:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Sinusregel:

37. . . . . $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

In woorden:

In elken driehoek is de verhouding van een zijde en den sinus van den overstaanden hoek constant.

Verder is in fig. 10

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD.$$

In $\triangle$ ACD is $AD = b \cos A$. Dus blijkt:

Cosinusregel:

38. . . . . $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$

In woorden:

Het kwadraat van een zijde van een scheefhoekigen driehoek is gelijk aan de som van de kwadraten van de beide andere zijden, min het dubbele product van deze beide andere zijden en den cosinus van den daardoor ingesloten hoek.

Formule (38) en dus ook de stelling, waardoor zij in woorden wordt uitgedrukt, is algemeen geldig, *ook wanneer tegenover de zijde*, die in het eerste lid genoemd wordt, *een stompe hoek staat.*

Zie weer fig. 11.

Hier is volgens de „projectie-stelling":

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times AD.$$

In $\triangle$ ACD is nu $AD = b \cos CAD$;

maar $\cos CAD = \cos (180° - A) = - \cos A$,

zoodat $AD = - b \cos A$

en $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$

Men zal terstond inzien, dat aan deze formule de twee volgende toegevoegd kunnen worden:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Opmerking. Men kan de beide laatste formules uit de voorafgaande afleiden door van a over te gaan op b, van b op c, van c weer op a (eveneens van A op B, van B op C, van C weer op A, enz.).

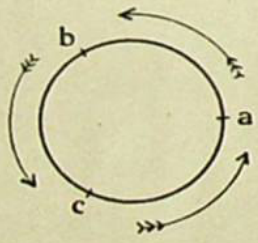


Fig. 12.

Cyclische verwisseling is de naam, dien men aan deze wijze van verwisseling der letters gegeven heeft. Men kan hierbij denken, dat de letters op den omtrek van een cirkel gelegen zijn, (fig. 12) waarlangs men dan gaat van a over b naar c, vandaar weer naar a, enz.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 15.

Enkele berekeningen. I. Geg.: *van* $\triangle ABC$*:*

$$a = 10 \text{ cM}; \angle B = 43°16'; \angle C = 51°27'.$$

Gevr.: *de overige elementen.*

Opl.: Wij hebben vooreerst:

$$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 180° - 94°43' = 85°17'.$$

Vervolgens is

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ of } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{10 \sin 43°16'}{\sin 85°17'} = \frac{10 \sin 43°16'}{\cos 4°43'} \text{ (cM.)}$$

Met behulp van de tafel der goniometrische functies*) vinden wij:

$$\sin 43°16' = 0{,}68539 \text{ en } \cos 4°43' = 0{,}99661.$$

zoodat

$$b = \frac{6{,}8539}{0{,}99661} = 6{,}877 \text{ (cM.)}.$$

Uit $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ volgt verder

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{10 \sin 51°27'}{\sin 85°17'} = \frac{10 \cos 38°33'}{\cos 4°43'} \text{ (cM.)}.$$

Dit geeft:

$$c = \frac{10 \times 0{,}78206}{0{,}99661} = 7{,}847 \text{ (cM.)}.$$

Contrôle.

Berekent men nu met de gevonden zijden b en c en den hoek A

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

dan vindt men:

$$a^2 = 99{,}996,$$

een waarde, die zeer nabijkomt aan de gegeven waarde

$$a^2 = 100 \text{ (cM.}^2\text{)}.$$

II. *Van* $\triangle ABC$ *is gegeven:*

$$a = 12 \text{ cM.}, b = 15 \text{ cM.}, \angle C = 109°29'.$$

Men vraagt de overige elementen.

Opl.

$$c^2 = 144 + 225 - 360 \cos 109°29' = 369 + 360 \times \sin 19°29' =$$
$$369 + 360 \times 0{,}33353 = 489{,}07.$$

$$c = \sqrt{489{,}07} = 22{,}115 \text{ (cM.)}.$$

---

*) Zie **Dr. B. Gonggrijp,** *Log. en Gon. Tafels en Bijtafels C of D.* Hierin vindt men de gon. verhoudingen van minuut tot minuut in 5 decimalen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De hoeken A en B berekent men nu gemakkelijk met behulp van den sinusregel. [1])

Opmerking. Reeds bij eenvoudige waarden voor de zijden blijken hier berekeningen van nog al eenigen omvang noodig te zijn. Daarom neemt men meestal zijn toevlucht tot het gebruik van logarithmen en *van tafels voor de logarithmen van de goniometrische functies.*

Opgaven.

§ 16. 1. *Gegeven* van $\triangle$ ABC:

$$a = 25 \text{ cM.}; \quad \angle A = 26^\circ 15'; \quad \angle B = 73^\circ 5'.$$

Gevraagd: de overige elementen.

2. Van $\triangle$ ABC is gegeven:

$$b = 6 \text{ cM.}; \quad c = 7 \text{ cM.}; \quad \angle A = 57^\circ 7'.$$

Bereken de overige elementen.

3. *Gegeven*: in $\triangle$ PQR is $p = 13$ cM., $q = 14$ cM. en $r = 15$ cM. Bereken eerst $\angle$ P en daarna de beide andere hoeken.

4. Twee steden A en B liggen op 6 KM. afstand van elkaar.

---

1) Om bij een geg. sinus den *scherpen* hoek uit de tafel te vinden gaat men als volgt te werk. Zij bijv. geg. sin $x = 0{,}50810$.

In de tafel staat: sin $30^\circ 32' = 0{,}50804$ en sin $30^\circ 33' = 0{,}50829$.

Aan een toename van 25 eenheden der laatste decimaal in de mantisse beantwoordt een toename van $1'$ in den hoek; voor een toename $= 1$ in de mantisse heeft men dan een toename van den hoek $= \frac{1'}{25}$. Bij een toename van de mantisse $= 6$ eenheden $(50810 - 50804)$ heeft men dus een toename van den hoek $= 6 \times \frac{1'}{25} = \frac{6'}{25} = \frac{360''}{25} = 14'',4$. Men rondt af en vindt $x = 30^\circ 32' 14''$.

Ter bepaling van den scherpen hoek, die behoort bij een geg. cosinus, handelt men aldus. Zij bijv. geg. cos $x = 0{,}83969$.

In de tafel vindt men: cos $32^\circ 53' = 0{,}83978$ en cos $32^\circ 54' = 0{,}83962$.

Aan een *afname* van 16 eenheden der laatste decimaal in de mantisse beantwoordt een toename van $1'$ van den hoek; bij een *afname* $= 1$ in de mantisse heeft men dan een toename van den hoek $= \frac{1'}{16}$. Bij een *afname* van de mantisse $= 9$ eenheden $(83978 - 83969 = 9)$ heeft men dus een toename van den hoek $= 9 \times \frac{1'}{16} = \frac{540''}{16} = 34''$. Men vindt dan $x = 32^\circ 53' 34''$. Bij den tangens redeneert men als bij den sinus; bij den cotangens als bij den cosinus.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Men vraagt de afstanden van deze steden tot een derde stad C, wanneer de richtingen AB en AC een hoek van 49° 21′ en de richtingen BA en BC een hoek van 73° 28′ met elkander maken.

5. Twee plaatsen K en L liggen op een afstand = 7 KM. van elkaar. K ligt verder 4 KM. van M en L 5 KM. van M. Onder welken hoek ziet men uit M de beide andere plaatsen?

6. Bepaal in cM. de zijden van een driehoek, waarvan de hoeken zijn: 51° 10′, 92° 30′ en 36° 20′, als de omtrek van den driehoek 10 M. is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK IV.

Hoofdwaarden en bijzondere waarden van de goniometrische functies.

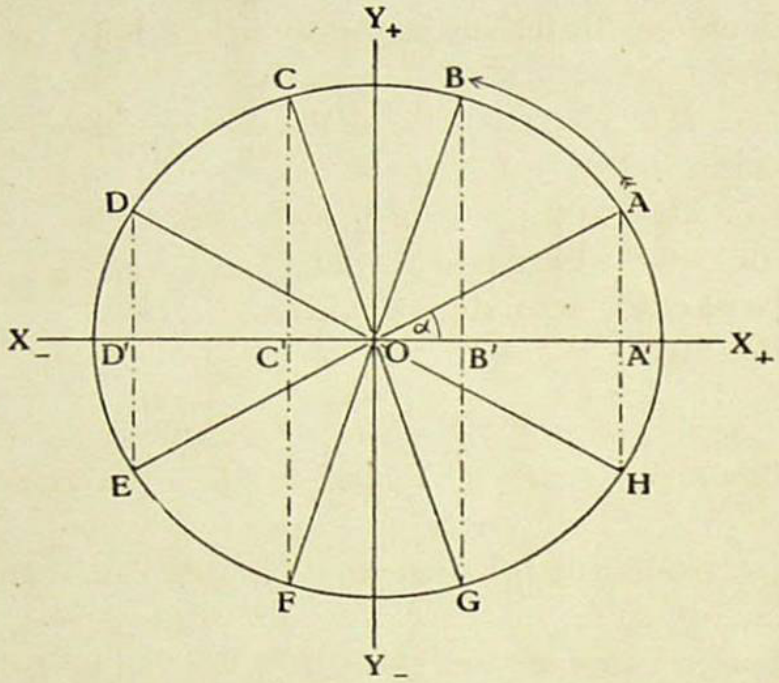


Fig. 13.

§ 17.

Hoofdwaarden. In bovenstaande figuur zijn hoeken in alle vier kwadranten geteekend. Men kan ze achtereenvolgens laten ontstaan door het been OA uit een eerst met OX_+ samenvallenden stand in de richting der pijl te laten draaien. Zoo ontstaan achtereenvolgens de hoeken X_+OA, X_+OB, X_+OC, X_+OD, X_+OE enz.

Het geprojecteerde stuk is bij elk dezer hoeken de straal R van den cirkel.

I. Hoofdwaarden van den sinus.

Als $\angle X_+OA$ zeer klein is, zal de projecteerende lijn AA′ ook zeer klein zijn en derhalve ook sin X_+OA een geringe waarde hebben, want het geprojecteerde stuk blijft = R.

Laten wij $\angle X_+OA$ tot 0 naderen, dan nadert ook AA′ tot 0.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dus hebben wij: $\sin 0° = 0.$ $\left(\frac{0}{R} = 0\right)$.

Laat nu OA wentelen in de door de pijl aangegeven richting. Bij het aangroeien van $\angle X_+OA$ tot $\angle X_+OB$ groeit AA′ aan tot BB′.

Als $\alpha = 90°$ geworden is, zal AA′ overgegaan zijn in Y_+O, dus in R.

Dan wordt $\sin 90° = 1.$ $\left(\frac{R}{R} = 1\right)$.

Door aandachtige beschouwing der figuur blijkt verder gemakkelijk genoeg:

$\sin 180° = 0$; (proj. lijn weer = 0).
$\sin 270° = -1$; (proj. lijn = — R).
$\sin 360° = 0.$ (proj. lijn weer = 0).

Deze waarde sluit weer aan bij $\sin 0°$.

II. Hoofdwaarden van den cosinus.

Zie weer fig. 13.

$$\cos \alpha = \frac{OA'}{R}.$$

Als α tot 0 nadert, groeit OA′ aan tot R. Wij zien:

$$\cos 0° = 1.$$

Als nu α aangroeit tot 90°, *neemt de projectie af* van 1 door OA′, OB′ enz. tot 0.

De cosinus neemt dan af van 1 tot 0. Wij hebben dus:

$$\cos 90° = 0.$$

Laten wij den hoek nu verder aangroeien, bijv tot X_+OC, dan wordt de projectie OC′ negatief, maar de volstrekte waarde er van groeit aan, totdat 180° bereikt is; dan is de projectie — R geworden. Wij zien dus:

$$\cos 180° = -1.$$

Bij verdere aangroeiing van α tot 270° blijft de projectie negatief, maar neemt in volstrekte waarde af tot 0.

Men ziet gemakkelijk in: $\cos 270° = 0.$

Ten slotte wordt $\cos 360° = 1.$

Deze waarde sluit weer aan bij $\cos 0°$.

Opmerking. Men lette er vooral op, dat *in het eerste kwadrant de sinus een aangroeiende en de cosinus een afnemende functie is.*

In dat kwadrant groeit de sinus aan van 0 tot 1, (als de hoek dus aangroeit van 0° tot 90°); de cosinus neemt af van 1 tot 0.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

III. Hoofdwaarden van den tangens.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AA'}{OA'}.$$

Als α tot 0° nadert, neemt de projecteerende lijn AA′ af tot 0, maar de projectie groeit aan tot R.

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$\operatorname{tg} 0° = 0. \qquad \left(\frac{0}{R} = 0\right).$$

Als nu α aangroeit tot 90°, neemt de projecteerende lijn voortdurend toe en nadert tot R; de projectie neemt echter af, (al blijft zij voortdurend positief) tot 0. Hieruit volgt:

$$\operatorname{tg} 90° = \infty. \qquad \left(\frac{R}{0} = \infty\right).$$

Blijft α nu aangroeien, dan wordt plotseling de projectie negatief; de projecteerende lijn blijft positief. Denken wij het „beweeglijke been" OC teruggewenteld naar den stand OY_+, dan zal α weer naderen tot 90°, *maar tg α zal nu* $-\infty$ *worden*, omdat CC′ nadert tot + R, terwijl OC′ tot 0 nadert, maar steeds *negatief* blijft. Wij krijgen op deze wijze:

$$\operatorname{tg} 90° = -\infty.$$

Wij zien derhalve:

Als α van het eerste kwadrant overgaat naar het tweede, springt tg α plotseling over van $+\infty$ *naar* $-\infty$.

Noch bij den sinus, noch bij den cosinus komen zulke sprongsgewijze overgangen voor. Men noemt deze functies daarom *doorloopende* of *continuë* functies van hun argument. De tangens is een voorbeeld van een *ondoorloopende* of *discontinuë* functie van zijn argument. [1])

Wij schrijven in het vervolg:

$$\operatorname{tg} 90° = \pm\infty.$$

Het + teeken wordt hier boven het — teeken geplaatst om te kennen te geven, dat men, komende van 0° en dan gaande door 90°, eerst de waarde $+\infty$ verkrijgt en dat deze waarde dan plotseling overspringt op $-\infty$.

---

1) Een ander, zeer eenvoudig voorbeeld is $\frac{1}{1+z}$; nadert z hier *van den positieven kant* tot — 1, dan nadert $\frac{1}{1+z}$ tot $+\infty$; als z van den negatieven kant tot — 1 nadert, zal $\frac{1}{1+z}$ juist naderen tot $-\infty$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Laten wij α nu verder aangroeien tot 180°, dan nadert de projecteerende lijn tot 0, zoodat;

$$\text{tg } 180° = 0.$$

Bij verdere aangroeiing van α in het derde kwadrant worden zoowel de projecteerende lijn als de projectie negatief; de tangens blijft dus positief en nadert tot $+\infty$, omdat de volstrekte waarde van de projecteerende lijn nadert tot R, terwijl die van de projectie tot 0 nadert. Wij hebben dus:

$$\text{tg } 270° = +\infty.$$

Het is echter na hetgeen bij tg 90° gezegd is gemakkelijk in te zien, dat bij den overgang naar het vierde kwadrant de tg plotseling weer overspringt naar $-\infty$. Laat men α n.l. een oneindig klein bedrag grooter worden dan 270°, dan blijft de projecteerende lijn *negatief* en in volstrekte waarde in de onmiddellijke nabijheid van R, terwijl de projectie een oneindig kleine *positieve* waarde krijgt. Derhalve wordt dan $\text{tg } 270° = -\infty$.

We schrijven weer: $\text{tg } 270° = \pm\infty$.

Hierna vinden wij verder zonder moeite:

$\text{tg } 360° = 0.$ (proj. lijn = 0; projectie = R).

Tg α is dus weer ondoorloopend voor $\alpha = 270°$.

Tg 360° sluit echter weer aan bij tg 0°.

IV. Hoofdwaarden van den cotangens.

In fig. 13 zien wij: $\cot \alpha = \frac{OA'}{AA'}$.

Nadert α tot 0, dan nadert AA′ eveneens tot 0, maar OA′ tot R.

Dus wordt: $\cot 0° = \infty.$ $\left(\frac{R}{0} = \infty\right)$.

Verder hebben wij: $\cot 90° = 0.$

Groeit nu α verder aan, dan wordt de *projectie negatief;* de volstrekte waarde groeit aan tot R; de projecteerende lijn neemt af tot 0. Wij zullen vinden:

$$\cot 180° = -\infty.$$

Gaat α echter door 180°, dan slaat het teeken van den cot plotseling om, want nu wordt ook de projecteerende lijn plotseling negatief. Wij hebben dus ook: $\cot 180° = +\infty$ en schrijven nu:

$$\cot 180° = \mp\infty.$$

Verder vindt men dan zonder moeite:

$$\cot 270° = 0.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

In het vierde kwadrant wordt cot α dan neg.; de volstrekte waarde wordt bij 360° oneindig groot. Dus is:

$$\cot 360° = -\infty.$$

Bij 360° komt het beweeglijke been weer in denzelfden stand als bij 0°. Daar hadden wij echter:

$$\cot 0° = +\infty.$$

Derhalve:

De cotangens vertoont een discontinuïteit (ondoorloopendheid) voor 0° en 180°.

Op dezelfde wijze vindt men de hoofdwaarden van sec α en cosec α.

Men kan deze ook gemakkelijk afleiden door de overeenkomstige waarden van cos α en sin α om te keeren en dan de teekens met behulp van den teekenregel van § 10 te bepalen. Zoo kan men ook de hoofdwaarden van cot α vinden uit die van tg α. We raden den lezer echter aan deze waarden alle — ter oefening — zelfstandig af te leiden.

In onderstaand lijstje zijn de hoofdwaarden van alle goniometrische functies vereenigd.

Hoofdwaarden der goniometrische functies.

	0°	90°	180°	270°	360°
sinus	0	1	0	— 1	0
cosinus	1	0	— 1	0	1
tangens	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
cotangens	∞	0	$\mp\infty$	0	$\mp\infty$
secans	1	$\pm\infty$	— 1	$\mp\infty$	1
cosecans	∞	1	$\pm\infty$	— 1	$\mp\infty$

§ 18.

Verdere bijzondere waarden van de goniometrische functies.

In de opgaven van § 4 komen reeds enkele voor over het berekenen van de goniometrische verhoudingen van hoeken als 30°, 45° en 60°. De later afgeleide formules maken het

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

mogelijk de waarden te bepalen van de gon. functies van hoeken in andere kwadranten, die in een eenvoudig verband staan met de eerstgenoemde argumenten.

. In onderstaand lijstje vereenigen wij de meest gebruikelijke bijzondere waarden van den sinus, den cosinus en den tangens; die voor de overige functies kunnen door omkeering onmiddellijk uit deze afgeleid worden. Deze moeten uit het hoofd geleerd worden.

Tafel van bijzondere waarden der gon. functies.

	sin	cos	tg		sin	cos	tg
0°	0	1	0	180°	0	-1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	240°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	$\pm\infty$	270°	-1	0	$\pm\infty$
120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
180°	0	-1	0	360°	0	1	0

Opgaven.

§ 19. 1. Bereken de gon. verhoudingen van een hoek van 15°.

Opl. 15° is *de halve middelpuntshoek* van een regelmatigen *twaalfhoek*. De zijde daarvan bij een straal gelijk aan 1 is $\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

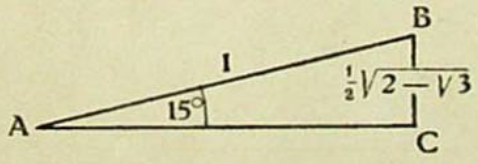


Fig. 14.

We teekenen dus een rechthoekigen driehoek en zetten bij de schuine zijde 1, bij de zijde over 15° dus $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Bereken nu AC met de stelling van Pythagoras; men heeft dan sin 15° = BC (eigenlijk $\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{1}$); cos 15° = AC; tg 15° $=\frac{BC}{AC}$. De andere drie vindt men door omkeering van deze drie.

2. Bereken de gon. verhoudingen van een hoek van 22½° (= halve middelpuntshoek van een regelmatigen achthoek) zie nr. 1.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

3. Idem van 18°.

4. Ook nog van 36°.

5. Bereken de gon. verhoudingen van een hoek van 198°.

Opl. Dit is een hoek in het derde kwadrant.

In § 11 blz. 13 vindt men:

$\sin 198° = -\sin 18°$; $\cos 198° = -\cos 18°$; $\operatorname{tg} 198° = \operatorname{tg} 18°$.

De formules 1, 2 en 3 geven verder:

$\cot 198° = \frac{1}{\operatorname{tg} 18°}$, $\sec 198° = -\frac{1}{\cos 18°}$ en $\operatorname{cosec} 198° = -\frac{1}{\sin 18°}$.

Dit vraagstuk wordt dus door reductie tot het 1e kwadrant bijna hetzelfde als nr. 3.

6. Bepaal de gon. verhoudingen van 195°.

7. Ook van 292½°.

8. Nog van 144°.

9. Ook nog van 337½°.

10. Bereken *a*) sin 108°; *b*) cos 126°; *c*) tg 157°30′; *d*) cot 202°30′; *e*) sec 216°; *f*) cosec 234°.

11. Bereken: *a*) sin 247°30′; *b*) cos 255°; *c*) tg 288°; *d*) cot 306°; *e*) sec 342°; *f*) cosec 345°.

12. Bereken sin 225° × cos 315°.

13. Eveneens tg 216° + tg 324°.

14. Ook nog cos 288° — cos 72°.

15. Bereken sin 112°30′ × cos 292°30′ × tg 157°30′ × × cot 202°30′.

N.B. Op dit hoofdstuk kan men laten volgen hoofdstuk XIV.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK V.

Algemeene formules voor willekeurige hoeken.

§ 20.

Hoeken grooter dan 360°. Wij denken $\angle\ \alpha$ (zie fig. 15) ontstaan door wenteling van het been OA uit den beginstand OX_+ *tegen de wijzers van een uurwerk in.* Laten wij het been OA nu in denzelfden zin 360° verder draaien, dan ontstaat een hoek $= 360° + \alpha$.

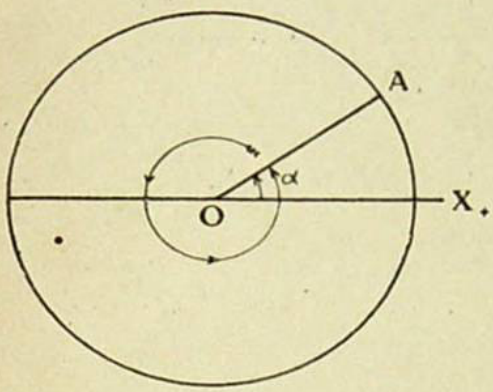


Fig. 15.

Het is terstond duidelijk, dat alle goniometrische functies van $360° + \alpha$ precies gelijk zullen zijn aan de overeenkomstige functies van α. Wij hebben dus:

$$\sin\ (360° + \alpha) = \sin \alpha;$$
$$\cos\ (360° + \alpha) = \cos \alpha;$$
$$\operatorname{tg}\ (360° + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha; \qquad \cot\ (360° + \alpha) = \cot \alpha;$$
$$\sec\ (360° + \alpha) = \sec \alpha; \qquad \operatorname{cosec}\ (360° + \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha.$$

Deze formules gelden natuurlijk voor alle mogelijke waarden van α.

Ook blijven alle gon. functies onveranderd bij toevoeging van *eenige malen* 360°. Derhalve:

$$\sin\ (\alpha + k \times 360°) = \sin \alpha; \qquad \cot\ (\alpha + k \times 360°) = \cot \alpha;$$
$$\cos\ (\alpha + k \times 360°) = \cos \alpha; \qquad \sec\ (\alpha + k \times 360°) = \sec \alpha;$$
$$\operatorname{tg}\ (\alpha + k \times 360°) = \operatorname{tg} \alpha; \qquad \operatorname{cosec}\ (\alpha + k \times 360°) = \operatorname{cosec} \alpha.$$

§ 21.

Negatieve hoeken. Onder $-\alpha$ verstaan wij den hoek, die ontstaat door het beweeglijke been uit den stand OX_+ *met de wijzers van een uurwerk mee* te wentelen over een hoek α.

Als men nu de gon. verhoudingen van (fig. 16) $-\alpha$ vergelijkt

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

met die van $+\alpha$, merkt men terstond op, dat de *projecteerende lijnen* bij $-\alpha$ allen in volstrekte waarde gelijk zullen zijn aan die van $+\alpha$, maar dat hun *teeken* altijd *tegengesteld* zal zijn. De *projecties* en ook de straal van den cirkel (het geprojecteerde stuk) zijn voor $+\alpha$ altijd, ook in teeken, gelijk aan die van $-\alpha$.

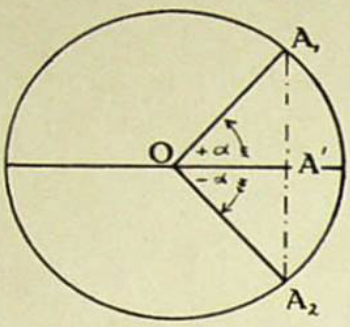


Fig. 16.

Wij behouden nu voor de gon. functies van $-\alpha$ dezelfde definities als bij $+\alpha$. Dan zal men gemakkelijk inzien:

39.
$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha; & \cos(-\alpha) = \cos\alpha; \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; & \cot(-\alpha) = -\cot\alpha; \\ \sec(-\alpha) = \sec\alpha; & \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha. \end{cases}$$

Opm. Deze waarden van de gon. functies van negatieve hoeken vindt men ook gemakkelijk door op te merken, dat de gon. verhoudingen van $-\alpha$ klaarblijkelijk dezelfde moeten zijn als die van $360° - \alpha$ [1]).

Uit onze definitie van negatieve hoeken volgt onmiddellijk de beteekenis van het verminderen van een hoek α met $360°$ of eenige malen $360°$.

Brengt men zulk een vermindering aan van $360°$ of $k \times 360°$, dan zullen alle verhoudingen van α terugkomen.

Wij hebben dus de algemeene formules:

$\sin(\alpha \pm k \times 360°) = \sin\alpha$; $\cos(\alpha \pm k \times 360°) = \cos\alpha$;
$\operatorname{tg}(\alpha \pm k \times 360°) = \operatorname{tg}\alpha$; $\cot(\alpha \pm k \times 360°) = \cot\alpha$;
$\sec(\alpha \pm k \times 360°) = \sec\alpha$; $\operatorname{cosec}(\alpha \pm k \times 360°) = \operatorname{cosec}\alpha$.

§ 22.

Vermeerdering of vermindering van het argument met 180° of eenige malen 180°.

Het is met behulp eener figuur en de definitie van dener sinus zeer gemakkelijk te controleeren, dat altijd: $\sin(\alpha + 180°) = -\sin\alpha$.

(Men kieze α in de verschillende kwadranten.)

Wij wisten reeds: $\sin(\alpha + 2 \times 180°) = \sin\alpha$ of $= (-1)^2 \sin\alpha$.

Verder zal dan: $\sin(\alpha + 3 \times 180°) = (-1)^3 \sin\alpha$

en in het algemeen: $\sin(\alpha + k \times 180°) = (-1)^k \sin\alpha$.

---

[1]) Bij alle verhoudingen van $-\alpha$ komt nu het minteeken in het 2de lididdd behalve bij den cos en den sec, *die positief zijn in het 4de kwadrant.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Eveneens zal men vinden:

$$\cos(\alpha + k \times 180^\circ) = (-1)^k \cos\alpha.$$

Het is even gemakkelijk in te zien, dat ook bij *vermindering* achtereenvolgens met 180°, $2 \times 180^\circ$ enz. het teeken bij den sinus en den cosinus telkens wisselt.

Wij hebben dus in het algemeen:

40. . . . . $\sin(\alpha \pm k \times 180^\circ) = (-1)^k \sin\alpha$;

. . . . . $\cos(\alpha \pm k \times 180^\circ) = (-1)^k \cos\alpha$.

Omdat altijd $\cos(+x) = \cos(-x)$ kunnen wij bij den cosinus zelfs zeggen:

41. . . . . $\cos(\pm\alpha \pm k \times 180^\circ) = (-1)^k \cos\alpha$.

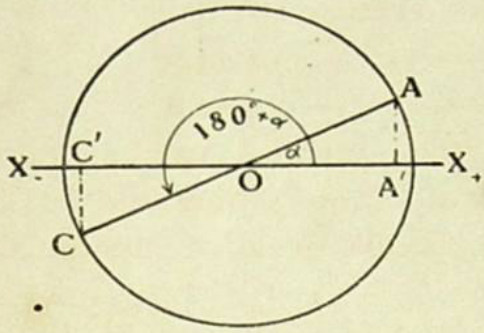


Fig 17.

Het is terstond duidelijk, dat de tangens in grootte en teeken volmaakt gelijk blijft, wanneer de hoek met 180° of *eenige malen 180° wordt vermeerderd of verminderd.*

In fig. 17 is bijv.:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{+AA'}{+OA'} = +\frac{AA'}{OA'};$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \frac{-CC'}{-OC'} = \frac{-AA'}{-OA'} = +\frac{AA'}{OA'}.$$

De lezer neme verder α in andere kwadranten en vermeerdere of vermindere met $k \times 180^\circ$.

Wij vinden dus in het algemeen:

42. . . . . $\operatorname{tg}(\alpha \pm k \times 180^\circ) = \operatorname{tg}\alpha$.

Door omkeering vindt men onmiddellijk:

$\cot(\alpha \pm k \times 180^\circ) = \cot\alpha$; $\sec(\pm\alpha \pm k \times 180^\circ) = (-1)^k \sec\alpha$;

$\operatorname{cosec}(\alpha \pm k \times 180^\circ) = (-1)^k \operatorname{cosec}\alpha$.

Een bijzonder geval van bovengenoemde algemeene formules kan als volgt in woorden gebracht worden: Bij vermeerdering of vermindering van het argument met 180° worden alle gon. functies tegengesteld behalve de tg en de cot.

§ 23.

Enkele toepassingen. Welk nut hebben bovenstaande algemeene formules?

Het antwoord op deze vraag moge gegeven worden door de oplossing van enkele zeer eenvoudige opgaven.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1. Gevraagd *worden de* **positieve waarden van x,** *tusschen 0° en 360° gelegen, waarvoor sin* $5x = {}^1/_2$.

Opl. Volgens de tafel van bijzondere waarden van § 18 hebben wij onmiddellijk:

$a.\quad 5x = 30°;$

$b.\quad 5x = 150°$ (het supplement van 30°).

Volgens (40) zullen er nu echter twee *reeksen* van oplossingen zijn, n.l.:

$a'.\quad 5x = 30° + 2k \times 180°$ en dus $x = 6° + k \times 72°;$

$b'.\quad 5x = 150° + 2k \times 180°$ en dus $x = 30° + k \times 72°.$

Wij nemen hier alleen het positieve teeken bij $2k \times 180°$, omdat anders $5x$ negatief zou worden en er alleen positieve waarden van x gevraagd worden.

Wij verkrijgen dan als oplossingen tusschen 0° en 360°:

$x_1 = 6°;\ x_2 = 78°;\ x_3 = 150°;\ x_4 = 222°;\ x_5 = 294°;$
$x_6 = 30°;\ x_7 = 102°;\ x_8 = 174°;\ x_9 = 246°$ en $x_{10} = 318°.$

2. *Men vraagt alle waarden van x, gelegen tusschen — 90° en + 90°, die voldoen aan: cos* $6x = {}^1/_2\sqrt{2}$.

Opl. Uit de tafel van § 18 (die van buiten gekend moet worden!) zien wij:

$a.\quad 6x = 45°;$

$b.\quad 6x = 315°.$

Volgens (41) zal dan in het algemeen:

$a'.\quad 6x = \pm\ 45° \pm k \times 360°$, of $x = \pm\ 7°30' \pm k \times 60°;$

$b'.\quad 6x = \pm 315° \pm k \times 360°$, of $x = \pm 52°30' \pm k \times 60°.$

Het is niet moeilijk na te gaan, dat men uit b' dezelfde waarden zal vinden als uit a'. Wij verkrijgen in het geheel:

$x_1 = -67°30';\ x_2 = -52°30';\ x_3 = -7°30';$
$x_4 = 7°30';\ x_5 = 52°30';\ x_6 = 67°30'.$

3. *Voor welke waarden van x tusschen 0° en 180° wordt tg* $(80° - 4x) = -\sqrt{3}$?

Opl. Als bijzondere oplossingen heeft men terstond:

$a.\quad 80° - 4x = 120°;$

$b.\quad 80° - 4x = 300°.$

De algemeene oplossingen zullen volgens (42) dan zijn:

$a'.\quad 80° - 4x = 120° \pm k \times 180°;$

$b'.\quad 80° - 4x = 300° \pm k \times 180°.$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De reeks van oplossingen b' is weer geheel bevat in a'. Wij hebben dus als algemeene oplossing:

$$4x = 80° - 120° \pm k \times 180° \text{ of}$$
$$x = -10° \pm k \times 45°.$$

Hieruit volgen:

$$x_1 = 35°;\quad x_2 = 80°;\quad x_3 = 125°;\quad x_4 = 170°.$$

(Geen enkele negatieve waarde voor k kan voldoen).

§ 24. Opgaven.

1. Voor welke waarden van x, tusschen 0° en 360° gelegen, wordt $\sin 3x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$?

2. Voor welke waarden van x, tusschen 0° en 180° gelegen, wordt $\sin 6x = -\frac{1}{2}$?

3. Bereken de scherpe hoeken α, waarvoor $\cos(60° - 5\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

4. Voor welke waarden van α, tusschen 0° en 360° gelegen, wordt $\operatorname{tg}(3\alpha - 45°) = \sqrt{3}$?

5. Men vraagt alle oplossingen, tusschen — 360° en + 360° gelegen, van: $\operatorname{tg}(2\alpha - 5°) = -1$.

6. Als $\cos 12°50' = 0{,}975$, welke oplossingen tusschen 0° en 360° heeft dan: $\cos 2x = 0{,}975$?

7. *Gegeven:* $\operatorname{tg} 34°20' = 0{,}683$. *Gevraagd:* de oplossingen van $\operatorname{tg} 3x = -0{,}683$ (tusschen 0° en 360° gelegen).

8. Als $\cot 29° = 1{,}804$, welke oplossingen tusschen — 180° en + 180° voldoen dan aan de goniometrische vergelijking:

$$\cot(120° - 3x) = -1{,}804?$$

9. Los op: $\sin x = \sin 15°$; $\sin x = \cos 8°$.

10. Eveneens: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 37°$; $\operatorname{tg} x = \cot 21°$.

11. Verder: $\cos x = \cos 49°$; $\cos x = \sin 52°$.

12. Voor welke waarden tusschen 0° en 1000° is

a) $\sin x = \cos x$? *b*) $\sin x = \operatorname{tg} x$? *c*) $\operatorname{tg} x = \cot x$?

§ 25.

Herleiding van goniometrische functies, wier argument een oneven aantal malen 90° bevat.

In § 5 bewezen wij *voor scherpe hoeken:*

43.
$$\begin{cases} \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha; & \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha; & \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \cot\alpha; \\ \cot(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha; & \sec(90° - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha; & \operatorname{cosec}(90° - \alpha) = \sec\alpha. \end{cases}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Men drukt deze eigenschap als volgt in woorden uit :

Bij overgang van het argument naar het complement daarvan, worden alle goniometrische functies complementair.

Op *de eerste leden* der formules (43) passen wij nu de formules (19) tot en met (24) toe. (Wij vervangen in het eerste lid $90° - \alpha$ dus door het supplement daarvan d.i. door $90° + \alpha$).

Dan vinden wij :

44.
$$\begin{cases} \sin(90° - \alpha) = \sin(90° + \alpha); & \cos(90° - \alpha) = -\cos(90° + \alpha); \\ \operatorname{tg}(90° - \alpha) = -\operatorname{tg}(90° + \alpha); & \cot(90° - \alpha) = -\cot(90° + \alpha); \\ \sec(90° - \alpha) = -\sec(90° + \alpha); & \operatorname{cosec}(90° - \alpha) = \operatorname{cosec}(90° + \alpha). \end{cases}$$

Uit (43) en (44) gezamelijk blijkt dan :

45. . . . . $\mathbf{\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha}$;

46. . . . . $\mathbf{\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha}$;

47. . . . . $\mathbf{\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\cot\alpha}$;

48. . . . . $\mathbf{\cot(90° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha}$;

49. . . . . $\mathbf{\sec(90° + \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha}$;

50. . . . . $\mathbf{\operatorname{cosec}(90° + \alpha) = \sec\alpha}$.

N.B. Men lette vooral op (45) en (46).

Door nu in de eerste leden der formules (43) het argument met 180° te vermeerderen en dan te letten op de eigenschap aan het slot van § 22, vindt men uit (43) :

51.
$$\begin{cases} \sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha; & \cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha; \\ \operatorname{tg}(270° - \alpha) = \cot\alpha; & \cot(270° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha; \\ \sec(270° - \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha; & \operatorname{cosec}(270° - \alpha) = -\sec\alpha. \end{cases}$$

Door dan nog in de eerste leden der formules (45) tot en met (50) het argument met 180° te vermeerderen en weer op de slot-eigenschap van § 22 te letten vinden wij :

52.
$$\begin{cases} \sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha; & \cos(270° + \alpha) = \sin\alpha; \\ \operatorname{tg}(270° + \alpha) = -\cot\alpha; & \cot(270° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \\ \sec(270° + \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha; & \operatorname{cosec}(270° + \alpha) = -\sec\alpha. \end{cases}$$

De formules (43) tot en met (52) zijn, strikt genomen, nu alleen *bewezen* voor *scherpe hoeken* α.

Men kan echter gemakkelijk aantoonen, dat zij gelden voor *alle mogelijke willekeurige hoeken*, bijv. door eerst de algemeene geldigheid te laten zien der formules (43), enz.

Verder kunnen de in deze § afgeleide formules uitgebreid worden tot het algemeene geval, dat er in het argument een *oneven aantal malen* 90° voorkomt.

Wij zullen deze formules hier niet afleiden of zelfs opgeven,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

maar liever enkele algemeene regels geven, waardoor zij in woorden uitgedrukt worden.

Regel I. Bij overgang van het argument op een ander, dat met het eerste een **even aantal malen 90°** *tot* **som** *of tot* **verschil** *heeft, blijven alle goniometrische functies* **gelijknamig.**

Regel II. Bij overgang van het argument op een ander, dat met het eerste een **oneven aantal malen 90°** tot **som** of tot **verschil** heeft, worden alle goniometrische functies **complementair.**

Regel III. Ter bepaling van het *teeken*, dat voor het 2de lid geplaatst moet worden, mag men, als er in het argument een letter voorkomt, daaronder altijd eenvoudigheidshalve een hoek in het 1e kwadrant verstaan. (De formule zal dan echter algemeen geldig zijn).

Voorbeeld 1. *Herleid cos (540° + α) tot een goniometrische functie van α.*

1e Opl. $540° + \alpha = 6 \times 90° + \alpha$;

α heeft dus met $540° + \alpha$ een *even* aantal malen 90° tot verschil.

Er zal dus in elk geval weer een cos komen.

Het teeken daarvan *kan* bijv. aldus gevonden worden:

$540° + \alpha = 3 \times 180° + \alpha =$ een *oneven aantal malen* $180° + \alpha$.

Dus zal $\cos (540° + \alpha) = (-1)^3 \cos \alpha = -\cos \alpha$. (Zie § 22).

Wij hebben dus: $\cos (540° + \alpha) = -\cos \alpha$.

2de Opl. Terstond is duidelijk:

$\cos (540° + \alpha) = \cos (180° + \alpha) = \cos (2 \times 90° + \alpha)$.

Omdat er nu een *even* aantal malen 90° in het argument staat, zal er weer cos α komen.

Om het teeken te vinden mogen wij α in het 1e kwadrant denken; dan is $\cos (2 \times 90° + \alpha)$ de cos van een hoek in het derde kwadrant, dus een *negatief getal*; cos α is dan echter een positief getal. Dus kan onmogelijk $\cos (2 \times 90° + \alpha) = \cos \alpha$, maar moet $\cos (2 \times 90° + \alpha) = -\cos \alpha$.

Zoo blijkt dan:

$$\cos (540° + \alpha) = -\cos \alpha.$$

Voorbeeld 2. *Men vraagt tg (270° + α) te herleiden tot een goniometrische verhouding van α.*

Opl. α en $270° + \alpha$ hebben een oneven aantal malen 90° tot verschil. De functie zal dus complementair worden; er moet dus $\pm$ cot α komen. Het juiste teeken wordt weer bepaald door te onderstellen, dat α in het 1e kwadrant ligt; $270° + \alpha$ is dan een

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

hoek in het 4de kwadrant en bijgevolg tg $(270° + \alpha)$ een *negatieve* grootheid; + cot α zou echter een positief getal zijn. De eenige mogelijkheid is dus:

$$\text{tg } (270° + \alpha) = -\cot \alpha.$$

Opgave. De lezer herhale deze redeneering in de onderstelling, dat α in het 2de kwadrant ligt.

Voorbeeld 3. *Sec $(\alpha - 270°)$ te herleiden tot een goniometrische functie van α.*

De functie wordt weer complementair; er komt dus $\pm$ cosec α. Ter bepaling van het juiste teeken is het nu wel het eenvoudigst α in het *4de kwadrant* te denken. Dan ligt $\alpha - 270°$ in het 1e; sec $(\alpha - 270°)$ is dan een positief getal en cosec α negatief. Dus moet:

$$\sec (\alpha - 270°) = -\operatorname{cosec} \alpha.$$

De oplossing van bovenstaande opgaven wordt ook dikwijls uit een figuur „gezien."

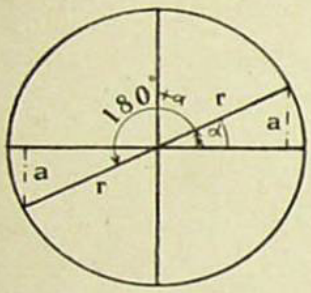


Fig. 18.

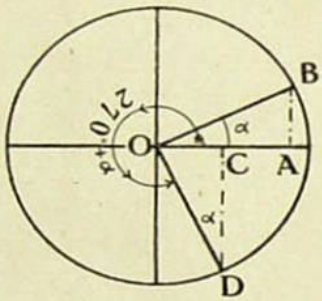


Fig. 19.

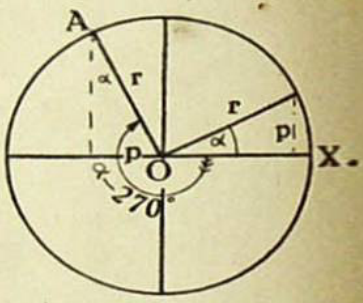


Fig. 20.

Ook hier wordt weer α in het 1e kwadrant genomen.

1. $540° + \alpha$ wordt direct vervangen (fig 18.) door $180° + \alpha$; nu is $\sin (180° + \alpha) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r} = -\sin \alpha$.

2. Zie fig. 19 voor $\text{tg } (270° + \alpha) = \frac{-\text{CD}}{\text{OC}} = -\frac{\text{CD}}{\text{OC}} = -\frac{\text{OA}}{\text{AB}} = -\cot \alpha$.

3. Zie fig. 20 voor $\sec (\alpha - 270°) = \sec \angle \text{X} + \text{OA} = \frac{r}{-p} = -\frac{r}{p} = -\operatorname{cosec} \alpha$.

Hier is voor α een hoek in het 1e kwadrant genomen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opgaven.

§ 26. **1.** Bewijs volgens den algemeenen regel de formules:
$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ en $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$.
Denk ter bepaling van het teeken α achtereenvolgens in de 4 kwadranten.

2. Doe hetzelfde met de formules voor
$\text{tg}(90° + \alpha)$, $\cot(90° + \alpha)$, $\sec(90° + \alpha)$ en $\text{cosec}(90° + \alpha)$.

3. Leid, eveneens volgens den algemeenen regel, formules af voor:
$\sin(180° + \alpha)$, $\cos(180° + \alpha)$, $\text{tg}(180° + \alpha)$, $\cot(180° + \alpha)$, $\sec(180° + \alpha)$ en $\text{cosec}(180° + \alpha)$.

4. Beredeneer ook de formules voor de goniometrische functies van $270° - \alpha$.

5. Eveneens van $270° + \alpha$.

6. Leid op dezelfde wijze ook nog de formule af voor de goniometrische verhoudingen van $360° - \alpha$.

7. Herleid de volgende verhoudingen tot andere van hoeken, die hoogstens 45° zijn en bereken ze daarna:
$\cos 210°$; $\text{tg}\,225°$; $\text{cosec}\,210°$; $\sin 225°$; $\cot 240°$; $\sec 480°$.

8. Doe hetzelfde met:
$\sin 240°$, $\text{cosec}\,135°$, $\text{tg}\,480°$, $\cos 300°$, $\cot 210°$, $\sec 225°$.

9. Verander in goniometrische functies van hoeken kleiner dan 45°:
$\cos 112°25'37''$; $\sin 117°2'43''$; $\text{tg}\,172°18'22''$;
$\cot 321°5'31''$; $\sec 198°0'59''$; $\text{cosec}\,213°27'8''$.

10. Doe hetzelfde met:
$\sin 213°15'12''$; $\text{tg}\,240°7'3''$; $\cos 230°54'19''$;
$\cot 122°13'8''$; $\sec 327°48'14''$; $\text{cosec}\,300°1'11''$.

11. Druk door een enkele gon. functie van een enkelen hoek uit:

$$\frac{\cos 157°46'55'' \times \text{cosec}\,112°13'5'' \times \sin 337°46'55''}{\cot 157°46'55'' \times \text{tg}\,202°13'5'' \times \sec 247°46'55''}.$$

12. Eveneens:

$$\frac{\sec 138°59'33'' \times \sin 318°59'33'' \times \text{tg}\,221°0'27''}{\cot 131°0'27'' \times \cos 221°0'27'' \times \text{cosec}\,138°59'33''}.$$

13. Bewijs, dat $\cos(180° \pm \alpha) = \sin(270° \pm \alpha)$.

14. Bewijs, dat $\text{tg}(270° - \alpha) = \cot(180° + \alpha)$.

15. Eveneens, dat $\text{tg}(270° + \alpha) = \cot(360° - \alpha)$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

16. Is $\text{tg}\,(135° + \alpha) = \cot\,(135° - \alpha)$?

17. Breng verband tusschen $\cos\,(315° + \alpha)$ en $\sin\,(315° - \alpha)$.

18. Herleid:

$$\left\{\frac{\text{tg}\,(135° + \alpha)}{\cot\,(315° - \alpha)} + \frac{\sin\,(270° - \alpha)}{\sec\,\alpha}\right\} \times$$

$$\times \left\{\frac{\sin\,(180° + \alpha)\ \text{tg}\,(180° - \alpha)}{\cos\,(-\alpha - 90°)\ \cot\,(270° + \alpha)} - \frac{\text{tg}\,(\alpha - 90°)}{\cot\,(270° - \alpha)}\right\}.$$

19. Bewijs, dat $\cos^2\,(\alpha - 30°) + \cos^2\,(\alpha + 60°) = 1$.

20. Eveneens, dat $\sec^2\,(30° + \alpha) = 1 + \cot^2\,(60° - \alpha)$.

21. Bereken: *a*) $\sin\,750°$; *b*) $\cos\,(-67°30')$; *c*) $\text{tg}\,435°$; *d*) $\cot\,1200°$; *e*) $\sec\,1380°$; *f*) $\text{cosec}\,(-570°)$.

22. Bereken: *a*) $\sin\,1380°$; *b*) $\cos\,2400°$; *c*) $\text{tg}\,918°$; *d*) $\cot\,(-846°)$; *e*) $\sec\,(-2142°)$; $\text{cosec}\,1224°$.

23. Bereken $\cos^2 a + 6\cos a$, als $a = 1020°$.

24. Bereken $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, als $\alpha = 660°$ en $\beta = 60°$.

25. Bereken $\sin 780°\cos 330° + \cos(-300°)\sin(-210°)$.

26. Druk uit in gon. verhoudingen van hoeken kleiner dan 45° de volgende: $-\sin 372°$; $-\text{tg}\,(-1684°)$; $\cot\,(-172°)$; $\cos 1360°$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK VI.

De logarithmen der goniometrische verhoudingen.

§ 27.

Inrichting der tafels. De hoogere wiskunde leert de goniometrische functies en ook de logarithmen daarvan voor alle willekeurige waarden van het argument berekenen. Wij zagen reeds vroeger, dat een tafel niet verder behoeft te gaan dan van 0° tot hoogstens 45°, omdat de gon. functies van grootere hoeken op zeer eenvoudige wijze uit die van hoeken $< \text{en} = 45°$ gevonden kunnen worden.

Er bestaan vele zulke tafels voor de logarithmen der goniometrische functies. Vroeger werd zeer veel gebruik gemaakt van tafels in 7 decimalen, bijv. die van François Callet (1795), Vega—Bremiker (1858) en Schrön (1859).

Hoewel een nauwkeurigheid als met deze tafels te bereiken is voor sommige doeleinden bijv. in de astronomie zeker vereischt wordt (soms is zelfs een rekening in 10 decimalen onvermijdelijk), heeft men later toch ingezien, dat bij de meeste practische toepassingen een tafel in 5 decimalen genoegzame nauwkeurigheid waarborgt [1]).

De beste inrichting van zulk een tafel is die, waarbij de hoeken met een verschil van 1 minuut opklimmen. Elke graad kan dan over 2 naast elkaar geplaatste bladzijden verdeeld worden.

De beste opeenvolging van de verhoudingen, die in een horizontale lijn boven aan de bladzijde geplaatst worden, is de onderstaande:

log sin log tg log cot log cos

De log sec en de log cosec worden niet in de tafel opgenomen, omdat zij altijd kunnen vermeden worden.

---

[1]) Menigmaal is zelfs een tafel in 4 decimalen voldoende; deze is dan zeer beknopt.

Zie de Zaktafels in vier decimalen door Dr. B. Gonggrijp.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Immers, $\log \sec x = \log \frac{1}{\cos x} = -\log \cos x$ en

$$\log \operatorname{cosec} x = \log \frac{1}{\sin x} = -\log \sin x.$$

Ook log cot zou gemist kunnen worden. Men kan echter elke tafel, ingericht voor het interval van 0° tot 45°, door toevoeging van enkele aanwijzingen onmiddellijk tevens toepassen voor het interval van 45° tot 90°. Dan bewijst die kolom voor log cot echter zeer goede diensten, zooals wij zullen zien.

Aanhangsel I geeft een bladzijde van zulk een logarithmentafel te zien.

Links boven aan de bladzijde leest men 34°. In de kolom daaronder worden de verdere minuten aangegeven; het getal 14 van die meest linksche kolom beteekent dus eigenlijk 34°14′. De kolom daarnaast geeft onmiddelijk: log sin 34°14′ = 9,75017—10. Deze toevoeging — 10 is niet in de tafel te vinden. Men moet ze zelf aanbrengen, omdat de logarithmen der verhoudingen, die met uitzondering alleen van log cot alle *negatief* zouden zijn over het geheele interval van 0° tot 45°, met 10 vermeerderd zijn en daarna in tafel gebracht.

Naast de kolom voor log sin ziet men een andere met het opschrift: D. 100″. Dit beteent: Differentia of verschil per 100″. Het gebruik van deze kolom blijkt terstond uit een voorbeeld.

Wenscht men bijv. log sin 34°14′17″, dan leest men eerst af:

$$\log \sin 34°14' = 9{,}75017 - 10.$$

Daarnaast vindt men D. 100″ = 32.

Voor elke secunde *hoektoename* moet hier nu ook voor log sin een *toename* en wel = 0,32 eenheid van de mantisse in rekening gebracht worden.

De sinus en dientengevolge ook de log sin neemt immers toe, als de hoek toeneemt van 0° tot 90°. Voor 17″ toename van den hoek heeft men dus een vermeerdering van de mantisse van log sin = 17 × 0,32 = 5,44. In de bijtafel onder 32 vindt men, dat 10′ geeft 3,2 en 70′ geeft 22,4 dus 7′ geeft 2,24; samen 5,44. Dit getal wordt afgerond tot 5 en men heeft:

$$\log \sin 34°14'17'' = 9{,}75022 - 10.$$

Tusschen de kolommen voor log tg en log cot vindt men een kolom met opschrift: D. C. 100″. Dit opschrift is een afkorting

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van : Differentia Communis per 100″ of gemeenschappelijk verschil per 100″.

Omdat n.l. log. cot $x = \log \frac{1}{\text{tg } x} = -\log \text{ tg } x$ zal op elke plaats in de tafel *log cot x* altijd met hetzelfde bedrag *verminderen*, als waarmee *log tg x opklimt.* Rechts van de kolom voor log cos heeft men weer een kolom met D. 100″. Men houde echter goed in het oog:

Zoowel log cos x als log cot x zijn *afnemende functies* voor alle waarden van *x* van 0° tot 45° *en ook tot 90°.* Men moet daarom voor deze beide functies altijd *verminderen* met het bedrag, dat de D.-kolom oplevert. Bij log sin en log tg moet men vermeerderen.

§ 28.

De logarithmen der andere gon. functies.

Voorbeelden.

1. *Gevraagd:* log cos 34°9′23″.

Oplossing. log cos 34°9′ = 9,91781 — 10
23 × 0,15 = . . . 3
— ———————
log cos 34°9′23″ = 9,91778 — 10.

20″ = 3,0
3″ = 0,45
———
3.—

2. *Men vraagt:* log tg 34°24′13″.

Oplossing. log tg 34°24′ = 9,83551 — 10
13 × 0,45 = 6
+ ———————
log tg 34°24′13″ = 9,83557 — 10.

10″ = 4,5
3″ = 1,35
———
6

3. *Te berekenen:* log cot 34°29′47″.

Oplossing. log cot 34°29′ = 0,16314
47 × 0,45 = 21
— ———————
log cot 34°29′47″ = 0,16293.

40″ = 18,0
7″ = 3,15
———
21

Als het aantal secunden dicht bij 60 is, kan men heel geschikt terugrekenen :

log cot 34°30′ = 0,16287
13 × 0,45 = 6
+ ———————
log cot 34°29′47″ = 0,16293.

10″ = 4,5
3″ = 1,35
———
6.

4. *Gevraagd : log sin 55°47′19″.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dezelfde bladzijde, die voor log sin, log tg, log cot en log cos van 34°0′ tot en met 34°30′ is ingericht, is ook pasklaar gemaakt voor de logarithmen van de functies der complementen van deze hoeken, dus voor de hoeken van 55°30′ tot en met 55°60′ of 56°0′. Geheel rechts onder aan de bladzijde leest men nu: 55°.

Daarboven staat nu de kolom der minuten, opklimmend van 30′ tot 60′.

Aan den voet der bladzijde leest men nu log cos, log cot, log tg, log sin, d.w.z. dezelfde opschriften als die aan het hoofd van de pagina staan, *maar juist in omgekeerde volgorde.*

Men begrijpt deze inrichting onmiddellijk, als men bedenkt, dat bijv.:

log sin 34°16′ = log cos (90° — 34°16′) = log cos 55°44′;
log cos 34°38′ = log sin 55°22′;
log tg 34°21′ = log cot 55°39′;
log cot 34°45′ = log tg 55°15′.

Men moet dus log cos 55°44′ op dezelfde plaats vinden, waar log sin 34°16′ staat.

Keeren wij nu terug naar ons voorbeeld:

log sin 55°47′19″.

Wij lezen *rechts* geheel onderaan de bladzijde 55°; gaan in de minuten-kolom *naar boven* tot 47′ en lezen dan in de kolom, die *boven* log sin staat, af:

log sin 55°47′ = 9,91746 — 10.

De kolom voor D. 100″ staat nu weer rechts van de vorige; *men kan zich echter onmogelijk vergissen,* omdat er links van de kolom voor log cos geen D.-kolom te vinden is [1]).

Wij moeten nu *vermeederen* met 19 × 0,15 = 2,85; dit bedrag wordt weer afgerond tot 3 en wij vinden:

log sin 55°47′19″ = 9,91749 — 10.

5. *Uit de tafel op te zoeken:* log cos 55°36′41″.

Oplossing.

log cos 55°36′ = 9,75202 — 10.
41 × 0,30 = 12
log cos 55°36′41″ = 9,75190 — 10.

40″ = 12,00
1″ = 30
12

[1]) Wanneer log sin en log cos naast elkaar geplaatst zijn, komt log sin voor hoeken > 45° tusschen twee D.-kolommen te staan, zoodat vergissingen dikwijls plaats kunnen hebben.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

6. *Te berekenen* log tg 55°44′9″.

Oplossing.

$$\log \text{tg } 55°44' = 0{,}16666$$
$$9 \times 0{,}45 = \quad 4$$
$$+$$
$$\log \text{tg } 55°44'9'' = 0{,}16670.$$

7. *Men vraagt* log cot 55°31′12″ [1])

Oplossing.

$$\log \text{cot } 55°31' = 9{,}83686 - 10$$
$$12 \times 0{,}45 = \quad 5$$
$$-$$
$$\log \text{cot } 55°31'12'' = 9{,}83681 - 10.$$

$10'' = 4{,}5$
$2'' = 0{,}9$
5

§ 29.

Het bepalen van een scherpen hoek, als de logarithme van een zijner goniometrische verhoudingen gegeven is.

Voorbeelden.

1. *Gegeven:*

$\log \sin x = 9{,}74968 - 10.$

Gevraagd x.

In de tafel zoeken wij nu de naast *kleinere* log sin op en vinden dan: $\log \sin 34°11' = 9{,}74961 - 10.$

Terugzoeken. De mantisse van deze naast-kleinere log moet nu met 7 eenheden *vermeerderd* worden om de mantisse van de gegeven log op te leveren. In de D.-kolom lezen wij nu, dat elke vermeerdering van de mantisse met 0,32 eenheden beantwoordt aan 1″ vermeerdering van den hoek. Als wij dus 0,32 deelen op 7, zien wij met hoeveel secunden de hoek 34°11′ vermeerderd moet worden, opdat de log sin van dien hoek de geg. mantisse krijgt. Nu is $\frac{7}{0{,}32} = 22$ (afgerond); wij moeten dus 22″ toevoegen. Derhalve vinden wij: $x = 34°11'22''$.

Vraag. Welke andere oplossingen heeft nu dit voorbeeld? Welke van deze oplossingen ligt nog tusschen 0° en 360°?

2. *Welke scherpe hoek wordt bepaald door:*

$$\log \cos x = 9{,}91786 - 10 \text{ ?}$$

Omdat *log cos x afdaalt*, als de *hoek aangroeit*, zoeken wij hier eerst de *naast-grootere* logarithme op en zien:

$$\log \cos 34°8' = 9{,}91789 - 10.$$

---

1) Log cot (van onderen gelezen) staat nu ook tusschen 2 D.-kolommen in, maar vergissing is om *twee* redenen haast ondenkbaar: vooreerst weet men, dat bij log cot en log tg altijd een *gemeenschappelijk* verschil moet genomen worden; ten tweede belet de zware streep links van de kolom het opzoeken van een verkeerd verschil.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De mantisse van deze log cos moet nu 3 eenheden dalen; de D.-kolom zegt, dat die mantisse 0,13 eenheden *daalt* voor elke secunde, die de hoek aangroeit. Evenveel malen als 0,13 op 3 begrepen is, evenveel malen 1″ moet dus de hoek van 34°8′ aangroeien.

Nu is $\frac{3}{0{,}13} = 23$ (afgerond). Wij vinden dus:

$$x = 34°8'23''.$$

Vraag. Welke andere hoeken behooren nu bij dezelfde geg. log cos? Welke van die andere hoeken liggen tusschen — 360° en + 360°?

3. *Gevraagd de scherpe hoek x, waarvoor*

$$\log tg\, x = 0{,}16930.$$

Oplossing. Wij zien onmiddellijk, dat wij voor dit geval de tafel van beneden naar boven moeten lezen.

Omdat de tangens en dientengevolge weer log tg *tegelijk met den hoek aangroeit* (tusschen 0° en 90°) beginnen wij hier weer met de *naast-kleinere logarithme.*

Dus: $\log tg\, 55°53' = 0{,}16911.$

De mantisse moet aangroeien tot 16930, dus met 19 eenheden; de D.-kolom geeft op, dat aan elke aangroeiing van de mantisse = 0,45 eenheden een toename van den hoek met 1″ beantwoordt. De geheele toename van den hoek zal dus worden: $\frac{19}{0{,}45} \times 1'' = 42''$.

Derhalve: $x = 55°53'42''.$

Opgave. Geef de andere hoeken op, waarvan de log tg = 0,16930 is. Welke van deze hoeken liggen tusschen 0° en 600°?

4. *Bereken den scherpen hoek α, waarvoor*

$$\log cot\, x = 9{,}83421 - 10.$$

Oplossing. Ook hier moeten wij de tafel van beneden naar boven lezen.

Omdat *log cot* echter *afdaalt*, als de *hoek aangroeit* beginnen wij hier weer met de *naast-grootere* logarithme.

Dus lezen wij eerst af:

$$\log cot\, 55°40' = 9{,}83442 - 10.$$

De mantisse moet 21 eenheden afdalen; aan een *daling* van

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

0,45 eenheden beantwoordt een hoek*toename* van 1″. Wij moeten dus aan den hoek toevoegen:

$$\frac{21}{0{,}45} \times 1'' = 47''.$$

Dus zal hier:

$$x = 55°40'47''.$$

Vraag. Welke andere hoeken kunnen dezelfde log cot hebben? Welke daarvan zijn tusschen — 300° en + 300° gelegen?

Evenals bij het opzoeken, kan men ook bij het terugzoeken gebruik maken van de veelvouden van het verschil, die in de zijrijen zijn opgenomen. Daardoor worden de deelingen voorkomen.

Vb. 1. 7

20″ . . . 6,4

0,6; dit wijst nog op 2″, samen dus 22″ [1]).

Vb. 2. 3

20″ . . . 2,6

0,4; dus nog 3″, samen 23″ [2]).

Vb. 3. 19

40″ . . . 18

1; nog 2″, samen 42″ [3]).

Vb. 4. 21

40″ . . . 18

3; dit geeft nog 7″; dus samen 47″. [4]).

Deze bewerking kan men bijna steeds uit het hoofd doen. *Zij bestaat in het gewoon interpoleeren van 2 cijfers.*

Opgaven.

30. **1.** Bepaal:

log sin 32°38′13″; log cos 18°15′21″; log tg 44°19′42″; log cot 11°15′59″; log sec 23°0′25″; log cosec 29°5′33″.

2. Eveneens:

---

[1]) Want voor 10 × 0,6 = 6 zou men krijgen 20″; voor 0,6 dus 2″;
[2]) „ „ 10 × 0,4 = 4 „ „ „ 30″; voor 0,4 dus 3″;
[3]) „ „ 10 × 1 = 10 „ „ „ 20″; voor 1 dus 2″;
[4]) „ „ 10 × 3 = 30 „ „ „ 70″; voor 3 dus 7″.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

log cos 69°13′28″; log cot 45°3′31″; log sin 68°59′59″; log tg 79°8′15″.

3. log cos 19°1′11″; log sin 89°36′14″; log tg 89°12′3″; log cot 0°16′7″.

4. log sin 113°32′17″; log cos 312°18′55″; log tg 185°6′23″; log cot 251°48′2″. (De gegeven hoeken vervangen door hoeken in het 1e kwadrant met dezelfde gon. verhouding).

5. Bepaal den scherpen hoek x, als gegeven is:
log sin $x = 9{,}26094 - 10$; log cos $x = 9{,}98105 - 10$;
log tg $x = 9{,}62201 - 10$; log cot $x = 0{,}24221$;
log sec $x = 0{,}08632$; log cosec $x = 0{,}21269$.
Welke andere hoeken voldoen aan dezelfde logarithmisch-goniometrische vergelijkingen?

6. Zoek van de volgende log.-gon.-verg. eerst een oplossing in het 1e kwadrant en geef daarna de algemeene oplossing:
log cos $x = 9{,}81554 - 10$; log sin $x = 9{,}91474 - 10$;
log tg $x = 0{,}50813$; log cot $x = 9{,}91999 - 10$.

7. *Gegeven:* log cot $x = 0{,}51369$; *Gevraagd:* log sin x.
log cos $y = 9{,}01268 - 10$; log cot y.
log sin $z = 8{,}25712 - 10$; log cos z.

8. *Gegeven:* log cos $x = 9{,}56134 - 10$; *Gevraagd:* log tg x.
log cot $y = 9{,}81463 - 10$; log cos y.
log tg $z = 8{,}27213 - 10$; log sin z.
Welke is de kleinste en wat is de algemeene oplossing van de volgende vergelijkingen?

9. log sin $(80° - x) = 7{,}95131 - 10$;
log tg $(x - 22°30') = 9{,}60326 - 10$; log cos $(x + 18°) = 9{,}83972 - 10$;
log tg $(123° + x) = 0{,}24187$.

10. sin$(x - 7°30') = 0{,}42683$; log cos$(67°30' - x) = 9{,}96521 - 10$;
tg $(x + 75°) = 8$; log cot $(x - 4°30') = 9{,}69568 - 10$.

11. log sin $3x = 9{,}95000 - 10$; log cos $4x = 9{,}41972 - 10$.
log tg $\frac{1}{2}x = 9{,}71014 - 10$; log cot $\frac{1}{3}x = 0{,}12794$.

12. $$\sin x = \frac{\cos 163°25'36'' \sin 213°18'41'' \operatorname{cosec} 108°39'18''}{\operatorname{tg} 118°55'12'' \sec 331°31'14'' \cot 299°11'3''}.$$

12. $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 99°11'27'' \sec 285°43'2'' \cot 110°22'43''}{\cos 208°45'4'' \operatorname{cosec} 281°2'15'' \operatorname{tg} 319°5'52''}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 31.

Behandeling van negatieve getallen bij logarithmische berekeningen.

1. *Op te lossen :* $\sin x = -0{,}35782$.

Opl. Natuurlijk is $\sin(360° - x)$ [1]) $= -\sin x = 0{,}35782$.

Wij bepalen met behulp van een gewone log tafel :

$$\log \sin(360° - x) = 9{,}55366 - 10$$

en vinden dan *uit de log.-gon.-tafel* :

1°. $360° - x = 20°57'58''$.

Hieraan kunnen wij onmiddellijk toevoegen :

2°. $360° - x = 159°2'2''$. (Supplement !)

Bij de eerste, uit de tafel gevonden, waarde behoort als *algemeene* oplossing :

$$360° - x = 20°57'58'' \pm k \times 360°,$$

waaruit volgt :

a) $$x = 339°2'2'' \pm n \times 360°.$$

Bij het supplement behoort de reeks van oplossingen :

$$360° - x = 159°2'2'' \pm k \times 360°.$$

Men kan er uit afleiden :

b) $$x = 200°57'58'' \pm n \times 360°.$$

1e Opmerking. Men kan de oplossing ook in den volgenden vorm brengen :

$$\left.\begin{aligned} x &= 200°57'58'' \pm 2p \times 180° ; \\ x &= -200°57'58'' \pm (2p + 1) \times 180°. \end{aligned}\right\}$$

De laatste reeks gaat n.l. onmiddellijk over in a), wanneer men $3 \times 180°$ van $(2p + 1) \times 180°$ afneemt en bij $-200°57'58''$ voegt.

2de Opmerking. Omdat beide hoeken, die bij een gegeven sinus worden gevonden, aan weerszijden evenver liggen van 90°, kan men het complement nemen van den hoek, dien men in de log. sinustafel vindt ; de beide uitkomsten onder 1° en 2° vermeld, worden dan samengevat in $360° - x = 90° \pm 69°2'2''$; omdat men er een willekeurig veelvoud van 360° of van $4 \times 90°$ bij kan tellen of van aftrekken, wordt de algemeene oplossing :

$$360° - x = (\pm 4k + 1)\,90° \pm 69°2'2'', \text{ waaruit volgt:}$$

$$x = (\pm 4t - 1)\,90° \mp 69°2'2''.$$

Men kan dus drie oplossingen geven

1) $$\left\{\begin{aligned} x &= 339°2'2'' \pm n \,.\, 360°. \\ x &= 200°57'58'' \pm n \,.\, 360°. \end{aligned}\right.$$

---

1) Men kan ook overgaan op $180° + x$; de lezer voere dit uit ter oefening.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

2) $\begin{cases} x = -200°57'58'' \pm (2p + 1)\,180°. \\ x = 200°57'58'' \pm 2p\,.\,180°. \end{cases}$

3) $x = (\pm 4t - 1)\,90° \mp 69°2'2''$.

2. *Op te lossen* $\cos 3x = -0{,}2$.

Opl. Nu is $\cos(180° - 3x)$ [1]) $= +0{,}2$.

$$\log\cos(180° - 3x) = 9{,}30103 - 10.$$

1°) $180° - 3x = 78°27'47'' \pm k \times 360°$.

2°) $180° - 3x = 281°32'13'' \pm k \times 360°$.

Uit 1° volgt: $3x = 101°32'13'' \pm k \times 360°$ of

a) $x = 33°50'44'' \pm k \times 120°$.

Uit 2° leiden wij af: $3x = -101°32'13'' \pm k \times 360°$ of

b) $x = -33°50'44'' \pm k \times 120°$.

Opm. *a*) en *b*) kunnen vereenigd worden tot:

$$x = \pm 33°50'44'' \pm k \times 120°.$$

Als oplossingen tusschen 0° en 360° vinden wij:

$x_1 = 33°50'44''$; $x_2 = 86°9'16''$; $x_3 = 153°50'44''$;

$x_4 = 206°9'16''$; $x_5 = 273°50'44''$; $x_6 = 326°9'16''$.

3. *Men vraagt de oplossingen van:*

$$tg\,4x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Opl. Nu kan men nemen:

$$\operatorname{tg}(180° - 4x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ ^{2})$$

$$\log\operatorname{tg}(180° - 4x) = 9{,}93753 - 10$$

$$180° - 4x = 40°53'36'' \pm k \times 180°$$

$$4x = 139°6'24'' \pm k \times 180°$$

$$x = 34°46'36'' \pm k \times 45°.$$

Tusschen 0° en 360° hebben wij:

$x_1 = 34°46'36''$; $x_2 = 79°46'36''$; $x_3 = 124°46'36''$; $x_4 = 169°46'36''$; $x_5 = 214°46'36''$; $x_6 = 259°46'36''$; $x_7 = 304°46'36''$; $x_8 = 349°46'36''$.

4. *Welke waarden van* x *tusschen 0° en 360° voldoen aan:*

$$\sin(90° + 2x) = \frac{\sin 215°42'10'' \times \operatorname{tg} 208°10'6''}{\operatorname{cosec} 93°10'5'' \times \cos 350°5'2''}\ ?$$

L. O. 1895.

Oplossing.

$$\cos 2x\ ^{3}) = \frac{-\sin 35°42'10'' \times \operatorname{tg} 28°10'6'' \times \sin 93°10'5''}{\cos 9°54'58''};$$

---

[1]) Men kan ook verder werken o.a. met $180° + 3x$; de lezer voere de verdere bewerkingen ter oefening uit.

[2]) De lezer make zelf de berekening met $\operatorname{tg}(360° - 4x)$ of met $\cot(90° + 4x)$.

[3]) Zie formule 45 op blz. 36.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\cos(180° - 2x) = + \frac{\sin 35°42'10'' \times \operatorname{tg} 28°10'6'' \times \cos 93°10'5''}{\cos 9°54'58''}.$$

$\log \sin 35°42'10'' = 9{,}76610 - 10$
$\log \operatorname{tg} 28°10'6'' = 9{,}72875 - 10$
$\log \cos 3°10'5'' = 9{,}99934 - 10$
[1])$-\log\cos 9°54'58'' = 0{,}00654$ $\log \cos 9°54'58'' = 9{,}99346 - 10.$
$\log \cos(180° - 2x) = 9{,}50073 - 10$

1°. $180° - 2x = 71°31'59'' \pm k \times 360°.$

2°. $180° - 2x = 288°28'1'' \pm k \times 360°.$

Uit 1°. volgt: $2x = 108°28'1'' \pm k \times 360°$
of *a*) $x = 54°14'0,''5 \pm k \times 180°.$

Uit (2) leiden wij af: $2x = -108°28'1'' \pm k \times 360°$
of *b*) $x = -54°14'0,''5 \pm k \times 180°.$

Tusschen 0° en 360° liggen de oplossingen:
$x_1 = 54°14'0,''5$; $x_2 = 125°45'59,''5$;
$x_3 = 234°14'0,''5$; $x_4 = 305°45'59,''5$.

Opmerking. Uit $\log \cos(180° - 2x) = 9{,}50073 - 10$ kan men in plaats van 1° en 2° ook afleiden:

$$\pm(180° - 2x) = 71°31'59'' \pm k \times 360°.$$

Hoe vindt men hieruit dan de reeksen *a*) en *b*)?

Opgaven.

§ 32. Los op:

1. $\sin(x - 60°) = -0{,}27081.$
2. $\cos 4x = -\frac{1}{3}\sqrt{5}.$
3. $\operatorname{tg}(5x - 18°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$
4. $\sec(120° - 3x) = -3.$
5. $\cot(2x - 75°) = -2.$
6. $\operatorname{cosec}(3x + 54°) = -3.$
7. $\sin^2(2x - 30°) = \frac{1}{3}.$
8. $5\cot^2(36° - x) = \operatorname{cosec}^2(36° - x).$
9. $14\cot x = 3\sec x \operatorname{cosec} x.$
10. $\operatorname{tg}^3(2x - 60°) = 13\operatorname{tg}(2x - 60°).$

---

[1]) In plaats van met log cos 9°54'58'' te verminderen, vermeerderen wij hier met — log cos 9°54'58''.

Men noemt — log cos 9°54'58'' wel het Arithmetisch Complement van log cos 9°54'58'' en duidt dit dan wel aan door a. c. log cos 9°54'58''.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bereken alle waarden van x tusschen 0° en 360°, die voldoen aan de vergelijkingen:

11. $\sin(90° + 2x) = \dfrac{-\sin 324°17'15'' \times \operatorname{tg} 208°23'52'' \times \operatorname{cosec} 117°12'25''}{\cos 195°16'36''}$.

(H. B. S. 1903).

12. $\operatorname{tg}(270° - x) = \dfrac{\sin 315°10'10'' \times \operatorname{tg} 100°5'20''}{\sec 290°35'50'' \operatorname{cosec} 200°0'5''}$.

(L. O. 1900).

13. $\cot(270° - 2x) = \dfrac{\sin 200°20'10'' \times \operatorname{cosec} 300°5'7''}{\cot 95°}$.

(L. O. 1896).

14. $\operatorname{tg}(90° + 3x) = \dfrac{\cos 312°38'50'' \times \operatorname{tg} 236°15'40'' \times \sec 110°56'10''}{\sin 218°12'4''}$.

(H. B. S. 1906).

§ 33. Eerste Herhaling.

1. Bereken de goniometrische verhoudingen van 756°.

2. Eveneens van 1098°.

3. Ook van 252° en 288°.

4. Vervolgens van 1944°; — 162°; — 198°.

5. Verder van 3222°; — 306° en 324°.

6. Gegeven: $\cot\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$; α ligt in het 3de kwadrant. Bereken de andere goniometrische functies van α.

7. Druk uit: $\cos\alpha$ in $\cot\alpha$, als α gelegen is in het 3de kwadrant.

8. Druk uit: $\sin\alpha$ in $\sec\alpha$, als α gelegen is in het 2de kwadrant.

9. Gegeven: $\sec\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; α ligt in het 4de kwadrant. Bereken de andere goniometrische functies van α.

10. Druk uit: $\operatorname{tg}\alpha$ in $\sin\alpha$, als α ligt in het 2de kwadrant.

11. Druk uit: $\cos\alpha$ in $\operatorname{cosec}\alpha$, als α ligt in het 4de kwadrant.

Bewijs de formules:

12. $\sec^2\alpha(1 - \sin^4\alpha) - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$.

13. $(\sec^4\alpha - \operatorname{tg}^4\alpha)(\operatorname{cosec}^4\alpha - \cot^4\alpha) = 1 + \dfrac{2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$.

14. $\operatorname{cosec}^4\alpha(1 - \cos^4\alpha) - 2\cot^2\alpha = 1$.

15. $\sec^2\alpha - \cot^2\alpha - (\operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha) = 2\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha}$.

16. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \dfrac{1 - \cos^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

17. Voor welken scherpen hoek x is:
$\sin(270° - x)\cos(270° + x)\,\mathrm{tg}(90° + x) = 3\sin x \cos x\,\mathrm{tg}\,x$?

18. Los op: $\mathrm{tg}(90° - x) =$

$$\frac{\cos 309°20'16'' \times \mathrm{tg}\,230°39'44'' \times \mathrm{cosec}\,140°39'44''}{\sin 219°20'16'' \times \cot 50°39'44'' \times \sec 320°39'44''}.$$

N.B. Herleid het 2de lid eerst tot één enkele functie.

19. Los op: $\mathrm{tg}(270° - x) =$

$$\frac{\cot 306°7'25'' \times \mathrm{cosec}\,108°25'17'' \times \cot 185°17'28''}{\cos 175°10'36'' \times \sec 265°17'48''}.$$

L. O. 1910.

20. Druk met behulp van logarithmische en goniometrische tafels de zijde van den regelmatigen 5-, 8-, 10-, 12- en 15-hoek uit in den straal van den omgeschreven cirkel.

21. Doe hetzelfde met de zijden van den regelmatigen 9-, 18-, 36- en 72-hoek.

22. Insgelijks met de zijden van den regelmatigen 7-, 11-, 13- en 17-hoek.

23. Als men den omtrek van een regelmatigen 360-hoek gelijkstelt aan dien van den omgeschreven cirkel, hoe groot wordt dan de verhouding van den omtrek en de middellijn van den cirkel gerekend?

24. Druk met behulp van logarithmische en goniometrische tafels de zijde van den regelmatigen 5-, 6-, 8-, 10-, 12- en 15-hoek uit in den straal van den ingeschreven cirkel.

25. Doe hetzelfde met de zijden van den regelmatigen 9-, 18-, 36- en 72-hoek.

26. Insgelijks met de zijden van den regelmatigen 7-, 11-, 13- en 17-hoek.

27. Bereken met behulp van een tafel in 5 decimalen het verschil tusschen de zijde van een regelmatigen om- en die van een regelmatigen ingeschreven 600-hoek, als de straal van den cirkel 1 dM is.

28. Hoe groot is het verschil tusschen de omtrekken van een regelmatigen om- en een regelmatigen ingeschreven 100-hoek, als de straal van den cirkel 1 M is?

29. Los op door middel van een vierkantsverg.:

$$\cos^2 x = \sin x + \tfrac{1}{4}.$$

30. Bereken: *a*) $\mathrm{tg}\,30° \times \mathrm{tg}\,45° \times \mathrm{tg}\,60°$ en zeg dan uit het hoofd: *b*) $\cot 30° \times \cot 45° \times \cot 60°$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

31. Bereken de sinussen der hoeken van een gelijkbeenigen driehoek, waarvan de tophoek is $\frac{3}{20}\pi$ (radialen). [1])

32. Bereken alle waarden van x uit de verg.:
$3\,\mathrm{tg}^4 x - 10\,\mathrm{tg}^2 x + 3 = 0$.

33. Bereken: $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, als $\alpha = 225°$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ en $\gamma = -60°$.

34. De tophoek van een gelijkbeenigen driehoek is 35°15′34″; bereken de verhouding van basis en been.

35. Herleid: *a*) $\sqrt{\sec^2 a + \mathrm{cosec}^2 a} - \mathrm{tg}\, a$.

b) $\frac{\mathrm{cosec}\, a}{\mathrm{cosec}\, a - 1} + \frac{\mathrm{cosec}\, a}{\mathrm{cosec}\, a + 1}$.

c) $\frac{\cos x}{1 - \mathrm{tg}\, x} + \frac{\sin x}{1 - \cot x}$.

36. Bereken: *a*) $\mathrm{tg}\frac{5}{12}\pi + \cot\frac{5}{12}\pi$.

b) $\sqrt{1 + \sin 2a} + \sqrt{1 - \sin 2a}$, als $a = (16k + 7)\frac{\pi}{8}$.

37. Bereken: $\sin\alpha\cos\beta\cot\gamma + \cos\beta\cot\delta + \mathrm{tg}\,\alpha\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma$, als $\alpha = 45°$, $\beta = 540°$; $\gamma = 210°$ en $\delta = 135°$.

38. Als $\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = \frac{p^2}{q^2}$, bereken dan $\mathrm{tg}\, a$.

39. Bepaal: *a*) $\sin(4k + 1)\frac{\pi}{4}$; *b*) $\cos(2k - 1)\frac{\pi}{2}$;

c) $\mathrm{tg}\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$; *d*) $\cot\left(k\pi - \frac{\pi}{4}\right)$; *e*) $\sec\left(2k\pi \pm \frac{3}{4}\pi\right)$;

f) $\mathrm{cosec}\, k\pi$. Men neme voor k resp. 0, 1, 2 enz.

40. In een rechthoekigen driehoek met een scherpen hoek van 18° trekt men de bissectrice van dezen hoek. Bereken planimetrisch de stukken van de overstaande zijde en bereken daarna de gon. verhoudingen van hoeken van 9° en van 81°. De schuine zijde = 4 stellen.

41. Bereken:

a) $\sin 120°\,\mathrm{tg}\,210°\sec 315° + \cos 150°\cot 240°\,\mathrm{cosec}\,135°$.

b) $(\sin {}^5/_6\pi + \cos {}^1/_6\pi)\,(\cos {}^2/_3\pi + \sin {}^1/_3\pi)$.

---

[1]) Indien de radialen nog niet in de planimetrie besproken zijn, dan kan men eerst § 92 nalezen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK VII.

Optellings-theorema's.

§ 34.

Onder optellings-theorema's voor de goniometrische functies verstaat men formules, waardoor de functies van de som of het verschil [1]) van twee argumenten worden uitgedrukt in de goniometrische functies van de termen van die som of dat verschil, dus formules voor sin $(\alpha + \beta)$, sin $(\alpha - \beta)$, cos $(\alpha + \beta)$, cos $(\alpha - \beta)$, tg $(\alpha + \beta)$, tg $(\alpha - \beta)$ enz. enz.

I. sin $(\alpha + \beta)$.

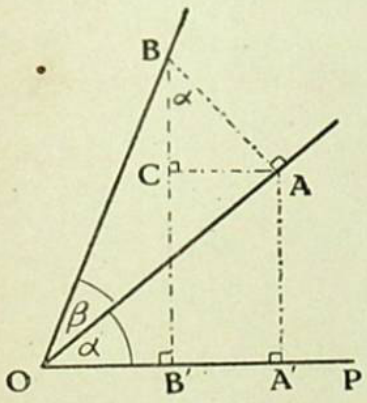


Fig. 21.

Wij zetten de twee scherpe hoeken α en β naast elkaar uit. Om nu iets te kunnen vinden voor sin $(\alpha + \beta)$ moeten wij volgens onze definitie (§ 1) een stuk OB van het eene been van $\alpha + \beta$ (het „sombeen") projecteeren in OB′ op het andere been; dan wordt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BB'}{OB}.$$

Om nu verband te brengen tusschen sin $(\alpha + \beta)$ en de gon. functies van α en β afzonderlijk, ligt het zeer voor de hand om bij β hetzelfde geprojecteerde stuk OB te nemen, dat bij $\alpha + \beta$ werd gekozen en dus BA $\perp$ OA te trekken; om dan verder de gon. functies van α zoo eenvoudig mogelijk te kunnen voorstellen kiezen wij bij α het zooeven ontstane stuk OA als geprojecteerd stuk en dus AA′ als projecteerende lijn. Verband tusschen de projecteerende lijnen van $\alpha + \beta$, β en α (en dientengevolge tusschen de gon. functies dezer hoeken) ontstaat nu zienderoogen, wanneer nog AC $\perp$ BB′ getrokken wordt. Hierdoor wordt dan CB′ = AA′. In $\triangle$ ABC is verder

---

[1]) Het verschil van α en β is de algebraïsche som van α en $-\beta$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$\angle ABC = \alpha$, omdat de beenen van $\angle ABC$ loodrecht getrokken zijn op die van $\angle \alpha$.

Nu is:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BB'}{OB} = \frac{BC}{OB} + \frac{CB'}{OB} = \frac{BC}{OB} + \frac{AA'}{OB}.$$

Geen der twee termen, in wier som $\sin(\alpha + \beta)$ nu uitgedrukt staat, is nog gelijk aan een gon. functie van α of β. Wij kunnen deze verhoudingen echter gemakkelijk laten optreden.

Immers $\frac{BC}{OB} = \frac{BC}{AB} \times \frac{AB}{OB}$ [1]) $= \cos\alpha \times \sin\beta$.

Verder is $\frac{AA'}{OB} = \frac{AA'}{OA} \times \frac{OA}{OB} = \sin\alpha \times \cos\beta$.

Wij vinden dus:

53. . . . . **$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.**

II. **$\cos(\alpha + \beta)$.**

In dezelfde figuur zien wij:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OB} - \frac{A'B'}{OB} = \frac{OA'}{OB} - \frac{AC}{OB}.$$

Nu is $\frac{OA'}{OB} = \frac{OA'}{OA} \times \frac{OA}{OB} = \cos\alpha\cos\beta$

en $\frac{AC}{OB} = \frac{AC}{AB} \times \frac{AB}{OB} = \sin\alpha\sin\beta$. Derhalve

54. . . . . **$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.**

N.B. Bij $\cos(\alpha + \beta)$ een — teeken in het 2de lid!

§ 35.

III. **$\sin(\alpha - \beta)$.**

Zij $\angle POQ = \alpha$.

Nu wordt $\angle \beta$ zoo geplaatst, dat het eene been valt langs OQ en het andere binnen $\angle \alpha$.

Dan is $\angle POR = \alpha - \beta$.

Om nu iets te vinden voor $\sin(\alpha - \beta)$ moeten wij het geprojecteerde stuk OA op OR kiezen, (d.i. op het z.g. „ver-

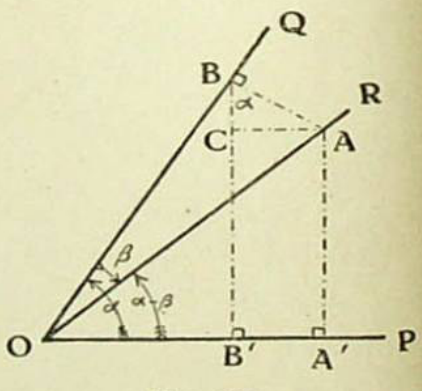


Fig. 22.

[1]) Wij schrijven opzettelijk de verhouding $\frac{BC}{AB} = \cos\alpha$ op en *moeten* dan van zelf vermenigvuldigen met $\frac{AB}{OB} = \sin\beta$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

schilbeen"). Dit stuk OA wordt in OA′ geprojecteerd. Dan zal

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{AA'}{OA}.$$

Om nu de gon. functies van de beide andere hoeken op eenvoudige wijze in te voeren, zullen wij weer ditzelfde stuk OA projecteeren op OQ (in OB) en dan OB weer in OB′ op OP. De projecteerende lijnen en daardoor de gon. functies van de hoeken α, β en $\alpha - \beta$ worden nu weer met elkaar in verband gebracht door AC $\perp$ BB′ te trekken. Wij hebben dan:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OA} - \frac{BC}{OA}.$$

De termen van het tweede lid worden weer in verband gebracht met gon. functies van α en β:

$$\frac{BB'}{OA} = \frac{BB'}{OB} \times \frac{OB}{OA} = \sin\alpha \cos\beta;$$

$$\frac{BC}{OA} = \frac{BC}{AB} \times \frac{AB}{OA} = \cos\alpha \sin\beta.$$

Derhalve:

55. . . . **$(\sin \alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.**

IV. **$\cos(\alpha - \beta)$.**

Uit fig. (22) ziet men ook terstond:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OA} + \frac{B'A'}{OA} = \frac{OB'}{OA} + \frac{AC}{OA}.$$

Verder is dan

$$\frac{OB'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \times \frac{OB}{OA} = \cos\alpha \cos\beta$$

en

$$\frac{AC}{OA} = \frac{AC}{AB} \times \frac{AB}{OA} = \sin\alpha \sin\beta.$$

Dus:

56. . . . **$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.**

N.B. Let op het + teeken in het 2de lid der formule voor $\cos(\alpha - \beta)$.

§ 36.

Bewijzen voor willekeurige hoeken. Wij wijzen er hier met nadruk op, dat de *bewijzen* van de formules voor $\sin(\alpha \pm \beta)$ en $\cos(\alpha \pm \beta)$ voorloopig alleen gelden voor waarden van α en β in het eerste kwadrant gelegen. [Bovendien is bij $\sin(\alpha - \beta)$ en $\cos(\alpha - \beta)$ stilzwijgend ondersteld: $\alpha > \beta$].

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Men kan echter bij alle denkbare andere onderstellingen omtrent α en β uit figuren, die met fig. 21 en fig. 22 overeenkomen, de algemeene geldigheid der formules bewijzen. Evenwel wordt een volledig bewijs door de noodzakelijkheid om vele bijzondere gevallen te onderscheiden zeer omslachtig. Wij zullen hier dan ook slechts een paar speciale gevallen behandelen en deze nog alleen, omdat het met overleg construeeren en dan toepassen der figuren een nuttig werk is. In de volgende § wordt dan een algemeen bewijs besproken, waarbij geen figuur noodig is.

Voorbeeld 1. Zij te bewijzen :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

als α ligt in het 2de, β in het 3de en $\alpha+\beta$ in het 4de kwadrant.

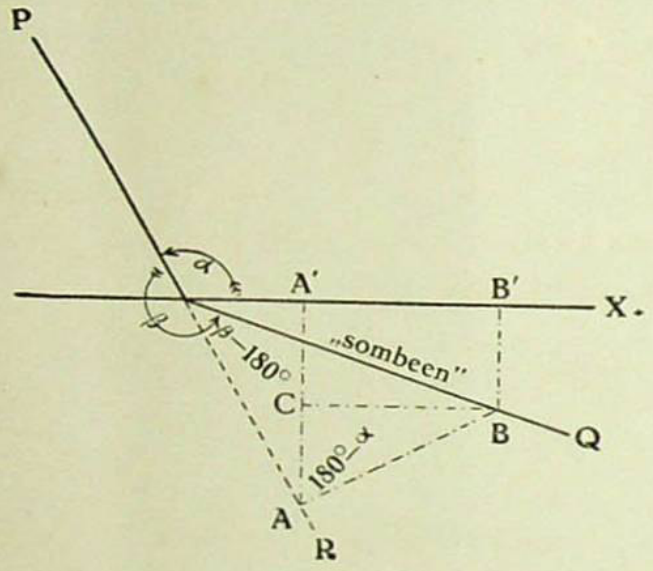


Fig. 23.

Bewijs. In fig. 23 is

$$\angle X_+ OP = \alpha;$$

$\angle POQ = \angle\beta$ heeft met α het been OP gemeen; de inspringende hoek X_+OQ is $\alpha+\beta$. Het stuk OB van het „sombeen" wordt weer geprojecteerd op OX_+ om $\sin(\alpha+\beta)$ te kunnen krijgen. Verder wordt ditzelfde stuk OB ook op (het verlengde van) het gemeenschappelijke been van α en β geprojecteerd, n.l. in OA; daarna OA weer op OX_+ en eindelijk wordt BC weer $\perp$ AA' getrokken.

Nu is:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{-BB'}{OB} = -\frac{AA'-AC}{OB} = -\frac{AA'}{OB}+\frac{AC}{OB}.$$

Verder is $\frac{AA'}{OB} = \frac{AA'}{OA}\times\frac{OA}{OB} = \sin(180°-\alpha)\cos(\beta-180°) = \sin\alpha\times-\cos\beta = -\sin\alpha\cos\beta.$

Vervolgens is $\frac{AC}{OB} = \frac{AC}{AB}\times\frac{AB}{OB} = \cos(180°-\alpha)\sin(\beta-180°) = -\cos\alpha\times-\sin\beta = \cos\alpha\sin\beta.$

Derhalve zal weer:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opmerking. Uit dezelfde figuur volgt ook gemakkelijk het bewijs van de formule voor cos $(\alpha + \beta)$ in de gegeven onderstellingen omtrent α en β. Ga dit na!

Voorbeeld 2. Te bewijzen:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta,$$

als α ligt in het 4de, β in het 2de en $\alpha - \beta$ in het 3de kwadrant.

Het stuk OA van het „verschilbeen" wordt geprojecteerd in OA′ (X-as) en ook in OB op het (verlengde van het) gemeenschappelijke been van α en β. Verder wordt OB weer geprojecteerd op de X-as (OB′). Eindelijk wordt de figuur weer gecompleteerd door BC $\perp$ AA′ te trekken.

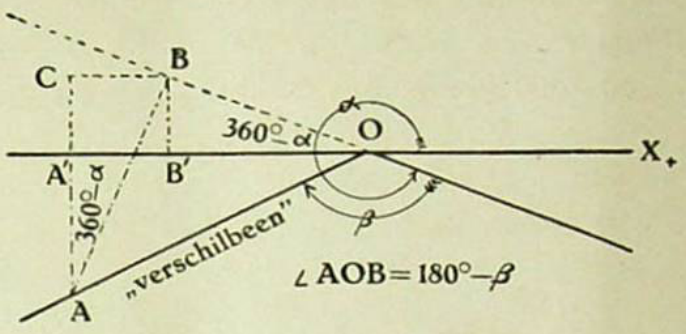


Fig. 24.

In de figuur blijkt nu gemakkelijk, dat $\angle AOB = 180° - \beta$ en $\angle CAB = 360° - \alpha$. (Men controleere dit).

Nu hebben wij:

$$\cos(\alpha - \beta) = -\frac{OA'}{OA} = -\frac{OB' + B'A'}{OA} = -\frac{OB'}{OA} - \frac{BC}{OA'}.$$

Verder is

$$\frac{OB'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \times \frac{OB}{OA} = \cos(360° - \alpha)\cos(180° - \beta) = -\cos\alpha\cos\beta;$$

$$\text{en } \frac{BC}{OA} = \frac{BC}{AB} \times \frac{AB}{OA} = \sin(360° - \alpha)\sin(180° - \beta) = -\sin\alpha\sin\beta.$$

Derhalve:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Opm. Uit dezelfde figuur blijkt even gemakkelijk de waarheid der formule sin $(\alpha - \beta)$ in dezelfde omstandigheden. (Men ga dit na).

§ 37.

Algemeen bewijs voor het optellingstheorema van den sinus.

Stelling. Als de formules voor sin $(\alpha + \beta)$ en cos $(\alpha + \beta)$ waar zijn voor zekere waarden van α en β, dan blijven zij waar, als α of β of beide vervangen worden resp. door $90° + \alpha$ en $90° + \beta$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opmerking. Wij behoeven alleen aan te toonen, dat één der argumenten met 90° vermeerderd mag worden; het andere argument komt op volmaakt dezelfde wijze in de formule voor. Wat dus geldt voor het eene is ook waar voor het andere argument. Verder, om te bewijzen, dat beide argumenten tegelijkertijd met 90° mogen vermeerderd worden, behoeft men, nadat bewezen is, dat het feit met één argument mag plaats vinden, de stelling slechts achtereenvolgens voor beide argumenten toe te passen. Wij hebben dus:

Onderstelde: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Gestelde:

$$\sin\{(90° + \alpha) + \beta\} = \sin(90° + \alpha)\cos\beta + \cos(90° + \alpha)\sin\beta.$$

Bewijs: $\sin\{(90° + \alpha) + \beta\} = \sin\{90° + (\alpha + \beta)\} = \cos(\alpha + \beta) =$

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Verder is

$$\sin(90° + \alpha)\cos\beta + \cos(90° + \alpha)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta^{1}).$$

Het tweede lid der te bewijzen formule krijgt dus juist dezelfde waarde als het eerste; derhalve is het gestelde bewezen.

Gevolg. De formule voor $\sin(\alpha + \beta)$ geldt voor alle willekeurige kwadranten.

De formule voor $\sin(\alpha + \beta)$ en $\cos(\alpha + \beta)$ zijn nl. rechtstreeks bewezen voor waarden van α en β, in het eerste kwadrant gelegen. Nu kunnen wij *alle* hoeken in het tweede kwadrant krijgen door die, welke in het eerste kwadrant liggen, met 90° te vermeerderen. De formule geldt dus volgens de zoo even bewezen stelling nu ook voor alle hoeken in het 2de kwadrant. Dientengevolge echter dan ook weer voor alle hoeken in het 3de kwadrant enz. enz.; zoo kan men van kwadrant tot kwadrant verder komen, dus algemeen bewijzen, dat de formule geldt voor alle willekeurige positieve hoeken.

Dan geldt de formule echter ook voor alle negatieve hoeken. Om dit te bewijzen hebben wij

Onderstelde: $\mathrm{Sin}(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;

Gestelde:

$$\mathrm{Sin}\{(-\alpha) + (-\beta)\} = \sin(-\alpha)\cos(-\beta) + \cos(-\alpha)\sin(-\beta).$$

Bewijs: $\mathrm{Sin}\{(-\alpha) + (-\beta)\} = \sin\{-(\alpha + \beta)\} = -\sin(\alpha + \beta).$

[1]) Zie de formules (45) en (46) van § 25.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Verder zal:

$\text{Sin}(-\alpha)\cos(-\beta) + \cos(-\alpha)\sin(-\beta) = -\sin\alpha\cos\beta +$
$+ \cos\alpha \times -\sin\beta = -(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta).$

Uit het onderstelde blijkt nu onmiddellijk, dat de beide leden van het gestelde precies aan elkaar gelijk zijn. Wij hebben dus bewezen de

Stelling: De formule:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

geldt voor alle positieve en negatieve waarden van α *en* β of anders gezegd:

Het optellingstheorema van den sinus geldt voor alle reëele waarden van de argumenten.

Om hetzelfde voor den cosinus te bewijzen hebben wij:

Onderstelde: $\text{Sin}(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$

Gestelde: $\cos\{(90° + \alpha) + \beta\} = \cos(90° + \alpha)\cos\beta -$
$- \sin(90° + \alpha)\sin\beta.$

Bewijs: $\cos\{(90° + \alpha) + \beta\} = \cos\{90° + (\alpha + \beta)\} =$
$-\sin(\alpha + \beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$

Het tweede lid der te bewijzen formule blijkt ook terstond $= -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ te zijn.

De geldigheid voor negatieve waarden van α en β blijkt voor de cosinus-formule even eenvoudig als bij de sinus-formule.

Opmerking. Uit de nu voor alle positieve en negatieve waarden van α en β *bewezen* formule voor $\sin(\alpha + \beta)$ kunnen wij zeer eenvoudig formules voor $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ en $\cos(\alpha - \beta)$ afleiden, die dan ook algemeen geldig moeten zijn.

Vervang bijv. eerst β door $-\beta$. Dit geeft terstond:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Vervang verder α door $90° + \alpha$. Er komt:

$\text{Sin}(90° + \alpha + \beta) = \sin(90° + \alpha)\cos\beta + \cos(90° + \alpha)\sin\beta$ of:

$\text{Cos}(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$ (Zie formule 46!)

Vervang daarna nog β door $90° - \beta$; men vindt:

$\text{Sin}(90° + \alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(90° - \beta) + \cos\alpha\sin(90° - \beta)$ of

$\text{Cos}(\alpha - \beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$ of eindelijk:

$\text{Cos}(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 38.

Optellingstheorema's voor tangens en cotangens.

Door beide leden der formule voor $\sin(\alpha + \beta)$ te deelen door de overeenkomstige leden der formule voor $\cos(\alpha + \beta)$ krijgt men:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Deel teller en noemer van de breuk in het 2de lid nu door $\cos\alpha\cos\beta$; men vindt dan:

57. . . . . . $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

Het quotient van $\sin(\alpha-\beta)$ en $\cos(\alpha-\beta)$ geeft:

58. . . . . . $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

Deeling van $\cos(\alpha+\beta)$ *door* $\sin(\alpha+\beta)$ geeft:

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}.$$

Door teller en noemer van de breuk in het 2de lid nu te deelen door $\sin\alpha\sin\beta$ krijgt men:

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha} \text{ of}$$

59. . . . . . $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$.

De cot van de som van twee hoeken staat nu uitgedrukt in de cotangenten van die hoeken; daarom is (59) weer een zuiver optellingstheorema voor den cotangens, zooals (57) dat is voor den tangens.

Bij deeling van $\cos(\alpha-\beta)$ *door* $\sin(\alpha-\beta)$ vindt men;

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}.$$

Deelt men teller en noemer in het 2de lid weer door $\sin\alpha\sin\beta$, dan krijgt men de formule:

60. . . . . . $\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$.

Opgaven.

§ 39. Bewijs met behulp eener figuur de formules voor:

1. Sin $(\alpha+\beta)$, als α en β beide in het 2de kwadrant liggen en $\alpha+\beta$ in het 3de kwadrant gelegen is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

2. Sin $(\alpha+\beta)$, als α ligt in het 3de, β in het 2de en $\alpha+\beta$ in het 4de kwadrant.

3. Cos $(\alpha+\beta)$, als α in het 3de, β in het 1e en $\alpha+\beta$ in het 4de kwadrant gelegen is.

4. Cos $(\alpha+\beta)$, als α in het 1e, β in het 2de en $\alpha+\beta$ in het 3de kwadrant ligt.

5. Sin $(\alpha-\beta)$, als α in het 3de, β in het 2de en $\alpha-\beta$ in het 2de kwadrant ligt.

6. Sin $(\alpha-\beta)$, als α in het 4de, β in het 2de en $\alpha-\beta$ in het 3de kwadrant gelegen is.

7. Cos $(\alpha-\beta)$, als α in het 4de, β in het 2de en $\alpha-\beta$ in het 2de kwadrant ligt.

8. Cos $(\alpha-\beta)$, als α in het 3de, β in het 2de en $\alpha-\beta$ in het 1e kwadrant gelegen is.

9. Leid uit de formule voor sin $(\alpha+\beta)$ formules af.

a. voor sin $(90°+\alpha)$; *b.* voor sin $(180°-\alpha)$;
c. voor sin $(180°+\alpha)$; *d.* voor sin $(270°-\alpha)$;
e. voor sin $(270°+\alpha)$; *f.* voor sin $(360°-\alpha)$.

10. Leid uit de optellings-theorema's formules af voor:
Cos $(90°+\alpha)$, cos $(180°-\alpha)$, cos $(180°+\alpha)$, cos $(270°-\alpha)$, cos $(270°+\alpha)$, cos $(360°-\alpha)$.

11. Bewijs op dergelijke wijze, dat:

$\text{tg}\,(90°+\alpha) = -\cot\alpha$; $\quad \text{tg}\,(180°-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$;
$\text{tg}\,(180°+\alpha) = \text{tg}\,\alpha$; $\quad \text{tg}\,(270°-\alpha) = \cot\alpha$;
$\text{tg}\,(270°+\alpha) = -\cot\alpha$; $\quad \text{tg}\,(360°-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$.

12. Eveneens, dat:

$\cot(90°+\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$; $\cot(180°-\alpha) = -\cot\alpha$;
$\cot(180°+\alpha) = \cot\alpha$; $\cot(270°-\alpha) = \text{tg}\,\alpha$; $\cot(270°+\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$;
$\cot(360°-\alpha) = -\cot\alpha$.

13. Bereken sin 15°, $(15° = 45° - 30°!)$.

14. Eveneens sin 75° en sin 105°.

15. Bereken cos 75° en cot 105°.

16. Eveneens tg 15° en tg 165°.

17. Ook nog tg 81° en cos 54°. $(54° = 90° - 36°)$.

Bewijs de volgende formules:

18. $$\text{tg}\,(45°+\alpha) = \frac{1+\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\,\alpha} = \cot(45°-\alpha).$$

19. $$\text{tg}\,(45°-\alpha) = \frac{1-\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}\,\alpha} = \cot(45°+\alpha).$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

20. $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ-\alpha)} = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$.

21. $\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha) = 2\cos\alpha\cos 45^\circ$.

22. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

23. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha-\sin^2\beta = \cos^2\beta-\sin^2\alpha$.

24. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha\cot\beta-\cot\alpha\operatorname{tg}\beta}{\cot\alpha\cot\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

25. Bewijs: *a*) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \sin(\alpha+\beta)\sec\alpha\sec\beta$.

b) $\sin\alpha\cos(\gamma-\alpha)+\cos\alpha\sin(\gamma-\alpha) = \sin\gamma$.

26. Bereken: *a*) $\cos(\alpha+\beta)\sec\beta\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{tg}\beta$.

b) $\cos(135^\circ+\alpha)+\sin(135^\circ-\alpha)$.

27. Bewijs:

a) $\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ+\beta)$.

b) $\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right) = 0$.

28. Bereken $\operatorname{tg}(a+b)$ als $\operatorname{tg}a = \dfrac{n}{n+1}$ en $\operatorname{tg}b = \dfrac{1}{2n+1}$.

29. Als $a+b+c+d = 180^\circ$, bewijs dan, dat
$\cos a\cos b+\cos c\cos d = \sin a\sin b+\sin c\sin d$.

30. Voor alle waarden van n heeft de som
$\sin(n+1)\alpha\sin(n-1)\alpha+\cos(n+1)\alpha\cos(n-1)\alpha$ dezelfde waarde. Bewijs dit zoo eenvoudig mogelijk.

31. Bereken:

a) $\sin(36^\circ+\alpha)-\sin(36^\circ-\alpha)+\cos(54^\circ+\alpha)-\cos(54^\circ-\alpha)$.

b) $(\cot\alpha-\operatorname{tg}\alpha)\{\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ)+\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)\}$.

32. Gegeven $\operatorname{tg}\alpha = {}^{39}/_{80}$ en $\operatorname{tg}\beta = {}^{8}/_{15}$; men vraagt te berekenen: $\sin(\alpha+\beta)$.

§ 40.

De goniometrische functies van den dubbelen en den halven hoek.

In de formules voor $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ en $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ stellen wij $\beta = \alpha$ en vinden dan achtereenvolgens:

61. . . . . . $\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$;

62. . . $\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = 1-2\sin^2\alpha}$;

63. . . . . . $\mathbf{\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$;

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}.$$

Uit (62) kan afgeleid worden:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1°. $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$,

dus $$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}.$$

Vervangt men α door $^1/_2\alpha$, dan vinden wij:

164. . . . . $$\cos {}^1/_2\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Uit (62) volgt verder:

2°. $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$,

dus $$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}.$$

Substitueert men voor α weer $^1/_2\alpha$, dan komt er:

65. . . . . $$\sin {}^1/_2\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Uit (64) en (65) kunnen wij weer afleiden:

66. . . . . $$\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

N.B. Let er op, dat ook bij $\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha$ het dubbele teeken moet staan. Immers, bij dezelfde waarde van $^1/_2\alpha$ behoeven $\sin {}^1/_2\alpha$ en $\cos {}^1/_2\alpha$ niet hetzelfde teeken te hebben. *Als echter α een hoek van een driehoek voorstelt, kan het — teeken in de formules* (64), (65) en (66) *vervallen.* Dan moet nl. $\alpha \leqq 180°$ en dus $^1/_2\alpha \leqq 90°$; het 1e lid van deze formules zal dan altijd positief zijn; het 2de moet dit dus ook zijn.

Wij vestigen de aandacht nog op de volgende formules, die uit (64) en (65) of evenals deze uit (62) volgen:

67. . . . . $\mathbf{1 + \cos\alpha = 2\cos^2 {}^1/_2\alpha}$;

68. . . . . $\mathbf{1 - \cos\alpha = 2\sin^2 {}^1/_2\alpha}$.

Opgaven.

§ 41. *Bewijs de formules:*

1. $\sec^2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

2. $2\cot 2\alpha = \cot\alpha - \operatorname{tg}\alpha$.

3. $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$.

4. $-\operatorname{tg}\alpha = \cot 2\alpha - \operatorname{cosec} 2\alpha$.

5. $\cot 2\alpha + \operatorname{cosec} 2\alpha = \cot\alpha$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

6. . . . . $\mathbf{tg\ \frac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}$.

7. . . . . $\mathbf{tg\ \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

8. $\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$. [$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$].

9. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

10. Bereken de gon. functies van 22°30′.

11. Ook die van 15°, uitgaande van $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

12. Bereken tg 52°30′. (H. B. S.)

13. Eveneens tg 7°30′. (H. B. S.)

14. Bewijs de formule:

$$\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \mathrm{tg}^2(45° + \tfrac{1}{2}\alpha).$$ (L. O.)

15. *Gegeven:* $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$; 2α ligt in het 2de kwadrant.
Gevraagd: de gon. functies van 3α.

16. *Gegeven:* $\mathrm{tg}\,2\alpha = -3\frac{3}{7}$; $90° < \alpha < 180°$.
Gevraagd: $\mathrm{tg}\,1\frac{1}{2}\alpha$; $\cos\frac{1}{4}\alpha$ en $\sin\frac{1}{4}\alpha$.

17. Druk $\mathrm{tg}\,3\alpha$ uit in $\mathrm{tg}\,\alpha$.

18. Bewijs, dat $\sin\alpha + \cos\alpha = \pm\sqrt{1+\sin 2\alpha}$.

19. Bewijs de formule: $\mathrm{tg}\,\varphi - \sin\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi \sin\varphi\ \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$.

20. Bewijs, dat:
$\mathrm{tg}(225° + a) + \cot(-a - 45°) - \mathrm{tg}\,135° = 1 + 2\mathrm{tg}\,2a$.

21. $\sin 8\alpha = 8\cos 4\alpha \cos 2\alpha \cos\alpha \sin\alpha$. Bewijs.

22. Bewijs, dat:
$\cos^2(x+\alpha) - 2\cos x \cos\alpha \cos(x+\alpha) + \cos^2 x = \sin^2\alpha$.

23. Leid een formule af voor $\sin(a+b+c)$.

24. Eveneens voor $\cos(a+b+c)$.

25. Bewijs de formule:

$$\mathrm{tg}(a+b+c) = \frac{\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b + \mathrm{tg}\,c - \mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b\,\mathrm{tg}\,c}{1 - \mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b - \mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,c - \mathrm{tg}\,b\,\mathrm{tg}\,c}.$$

§ 42.

Het optellen en aftrekken van gelijknamige gon. verhoudingen. (Herleiding tot producten).

Door de overeenkomstige leden op te tellen van de formules:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\text{en}\quad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

vinden wij:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Noemen wij: $\alpha + \beta = x$ en $\alpha - \beta = y$,
dan blijkt door optelling: $\alpha = \frac{1}{2}(x + y)$
en door aftrekking: $\beta = \frac{1}{2}(x - y)$.

De laatst gevonden formule kan dan aldus worden geschreven:

69. . . . . $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$.

In woorden: **de som van de sinussen van twee hoeken is gelijk aan het dubbele product van den sinus van de halve som en den cosinus van het halve verschil.**

Door de overeenkomstige leden van de formules voor $\sin(\alpha + \beta)$ en $\sin(\alpha - \beta)$ af te trekken ontstaat:

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \sin\beta \text{ of}$$

70. . . . . $\sin x - \sin y = 2\cos \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$.

In woorden: **Het verschil van de sinussen van twee hoeken is gelijk aan het dubbele product van den cosinus van de halve som en den sinus van het halve verschil.**

Beschouwen wij nu de formules:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

en $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

Door optelling ontstaat:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cos\beta \text{ of}$$

71. . . . . $\cos x + \cos y = 2\cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$.

In woorden: **De som van de cosinussen van twee hoeken is gelijk aan het dubbele product van de cosinussen van de halve som en van het halve verschil dier hoeken.**

Door aftrekking volgt uit beide cosinus-formules:

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha \sin\beta \text{ of}$$

72. . . . $\cos x - \cos y = -2\sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$.

N.B. Let op het —teeken.

In woorden: **Het verschil van de cosinussen van twee hoeken is gelijk aan het tegengestelde van het dubbele product van de sinussen van de halve som en van het halve verschil dier hoeken.**

Opmerking. Door middel van de formules (69) tot en met (72) herleidt men *sommen* en *verschillen* van sinussen en cosinussen tot *producten*; men maakt ze daardoor geschikt voor *berekeningen* met *logarithmen.*

Ook voor sommen en verschillen van tangenten en cotangenten kan men logarithmische vormen vinden; in deze vormen ontbreken de halve hoeken:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

73. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

74. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

75. $\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

76. $\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Dergelijke formules voor secanten en cosecanten zijn gemakkelijk uit die voor cosinussen en sinussen af te leiden.

Opgaven.

§ **43.** Herleid tot producten:

1. *a*) $\sin 3p + \sin p$; *b*) $\sin 3p - \sin p$;
c) $\cos 3p + \cos p$; *d*) $\cos p - \cos 3p$.

2 *a*) $\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha$; *b*) $\cot 2\alpha + \cot\alpha$;
c) $\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha$; *d*) $\cot\alpha - \cot 2\alpha$.

Bewijs de formules:

3. *a*) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg} {}^1\!/_2(\alpha + \beta)$;

b) $\operatorname{tg} {}^1\!/_2(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$.

4. $\operatorname{tg}(\alpha + 45°) + \operatorname{tg}(\alpha - 45°) = 2\operatorname{tg} 2\alpha$.

Maak voor logarithmische berekening geschikt:

5. *a*) $\cos\alpha + \sin\alpha$; *b*) $\cos\alpha - \sin\alpha$;
c) $\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha$; *d*) $\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$.

6. *a*) $\operatorname{tg} {}^1\!/_2(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} {}^1\!/_2(\alpha - \beta)$;
b) $\cot {}^1\!/_2(\alpha - \beta) - \cot {}^1\!/_2(\alpha + \beta)$.

7. Bewijs, dat:
a) $\sin(\alpha + 45°) + \sin(\alpha - 45°) = \sin\alpha\sqrt{2}$;
b) $\sin(\alpha + 30°) + \sin(\alpha - 30°) = \sin\alpha\sqrt{3}$;
c) $\sin(\alpha + 60°) + \sin(\alpha - 60°) = \sin\alpha$.

8. Eveneens, dat:
a) $\sin(\alpha + 45°) - \sin(\alpha - 45°) = \cos\alpha\sqrt{2}$;
b) $\sin(\alpha + 60°) - \sin(\alpha - 60°) = \cos\alpha\sqrt{3}$;
c) $\sin(\alpha + 30°) - \sin(\alpha - 30°) = \cos\alpha$.

9. Vervolgens, dat
a) $\cos(\alpha + 45°) + \cos(\alpha - 45°) = \cos\alpha\sqrt{2}$;

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

b) $\cos(\alpha + 60°) + \cos(\alpha - 60°) = \cos\alpha$;

c) $\cos(\alpha + 30°) + \cos(\alpha - 30°) = \cos\alpha\sqrt{3}$.

10. Ten slotte, dat:

a) $\cos(\alpha - 30°) - \cos(\alpha + 30°) = \sin\alpha$;

b) $\cos(\alpha - 60°) - \cos(\alpha + 60°) = \sin\alpha\sqrt{3}$;

c) $\cos(\alpha - 45°) - \cos(\alpha + 45°) = \sin\alpha\sqrt{2}$.

11. Maak voor logarithmische berekening geschikt:

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}.$$

12. Eveneens: $\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x$.

13. Bereken met behulp eener logarithmisch-goniometrische tafel: $\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x$,
als $x = 24°19'26''$.

14. Maak logarithmisch:

a) $2\sin\alpha + 1$; *b*) $2\sin\alpha - 1$; *c*) $1 - 2\sin\alpha$.

15. Eveneens:

a) $2\cos\alpha + 1$; *b*) $2\cos\alpha - 1$; *c*) $1 - 2\cos\alpha$.

16. Evenzoo: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

17. Insgelijks: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

18. Bewijs, dat $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x$.

19. Bewijs, dat $\dfrac{\sin 36° + \sin 24°}{\cos 36° + \cos 24°} = {}^1/_3\sqrt{3}$.

20. Eveneens, dat $\dfrac{\sin 72° + \sin 12°}{\cos 12° - \cos 72°} = \sqrt{3}$.

21. Bewijs, dat

$$\frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{\operatorname{cosec} x + \cot x} = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} x.$$

§ 44.

Goniometrische identiteiten, (formules), die onder zekere voorwaarden gelden. Er zijn verscheidene formules, waardoor goniometrische veeltermen herleid worden tot producten, wanneer tusschen de hoeken, die in den veelterm voorkomen, een bepaalde betrekking bestaat. Tot de belangrijkste van deze formules moeten die gerekend worden, welke *drie* hoeken bevatten, *wier som 180°* is. Zij stellen dan *eigenschappen van driehoeken* voor en kunnen daarom **trigonometrische identiteiten** genoemd worden.

Voorbeeld 1. *Te bewijzen*:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

77. $$tg\,A + tg\,B + tg\,C = tg\,A\ tg\,B\ tg\,C,$$
als $A + B + C = 180°$.

Bewijs. *Wij zullen onmiddellijk de gegeven voorwaarde invoeren:*

$$\text{tg}\,C = \text{tg}\ 180° - (A + B) = -\,\text{tg}\,(A + B);$$

$$\text{tg}\,A + \text{tg}\,B + \text{tg}\,C = \text{tg}\,A + \text{tg}\,B - \frac{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B}{1 - \text{tg}\,A\,\text{tg}\,B}.$$

Wij merken nu gemakkelijk op, dat de factor tg A tg B zal optreden, als het tweede lid tot één enkele breuk herleid wordt; er komt dan:

$$\frac{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B - (\text{tg}\,A + \text{tg}\,B)\,\text{tg}\,A\,\text{tg}\,B - \text{tg}\,A - \text{tg}\,B}{1 - \text{tg}\,A\,\text{tg}\,B} =$$

$$- \frac{(\text{tg}\,A + \text{tg}\,B)\,\text{tg}\,A\,\text{tg}\,B}{1 - \text{tg}\,A\,\text{tg}\,B}.$$

Nu tg A tg B reeds een factor van het 2de lid geworden is, *moet tg C weer terugkomen:*

$$\frac{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B}{1 - \text{tg}\,A\,\text{tg}\,B} = \text{tg}\,(A + B) = \text{tg}\,(180° - C) = -\,\text{tg}\,C.$$

Dus wordt het 2de lid: $+ \text{tg}\,A\,\text{tg}\,B\,\text{tg}\,C.$

Korter aldus:

$$\text{tg}\,C = \text{tg}\ 180° - (A + B) = -\,\text{tg}\,(A + B);$$

$\text{tg}\,C = -\dfrac{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B}{1 - \text{tg}\,A\,\text{tg}\,B}$; vermenigvuldigt men nu beide leden met den noemer van het 2de lid, dat komt er:

$$\text{tg}\,C - \text{tg}\,A\,\text{tg}\,B\,\text{tg}\,C = -\,\text{tg}\,A - \text{tg}\,B \text{ of}$$

$$\text{tg}\,A + \text{tg}\,B + \text{tg}\,C = \text{tg}\,A\,\text{tg}\,B\,\text{tg}\,C.$$

Voorbeeld 2. Zij te bewijzen de

Stelling: **In elken driehoek is**

78. $$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C.$$

Bewijs. Wij gaan weer allereerst de gegeven voorwaarde invoeren:

$$A + B + C = 180°, \text{ of } C = 180° - (A + B).$$

Nu wordt:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin (A + B).$$

Met het oog op het 2de lid is het duidelijk, dat men tot den halven hoek moet overgaan:

$2\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2} (A - B) + 2\sin \tfrac{1}{2} (A + B) \cos \tfrac{1}{2} (A + B) =$

$2\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A + B) + \cos \tfrac{1}{2}(A - B) =$

$2\sin (90° - \tfrac{1}{2}C) \times 2\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B = 4\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C.$

Tweede manier. Het eerst wegwerken en later weer invoeren

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van den derden hoek heeft, — al went men er spoedig aan, — iets kunstmatigs.

De wederinvoering van den derden hoek is echter niet noodzakelijk. Door zijn eliminatie is de gegeven voorwaarde in rekening gebracht; men behoeft dan nog slechts te laten zien, dat de *overgebleven gelijkheid onvoorwaardelijk geldt.*

Voorbeeld 1. *Onder voorwaarde, dat* $A + B + C = 180°$, *is te bewijzen:* $tg\,A + tg\,B + tg\,C = tg\,A\,tg\,B\,tg\,C$; *dus onvoorwaardelijk:*

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B - \operatorname{tg}(A + B) = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \times - \operatorname{tg}(A + B).$$

De gedachte dringt zich hier onmiddellijk op, dat de formule een gevolg zal zijn van die voor $\operatorname{tg}(A + B)$.

Nu is $\operatorname{tg}(A + B) = \dfrac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$,

dus $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \operatorname{tg}(A + B) - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg}(A + B)$.

Verminder nu beide leden met $\operatorname{tg}(A + B)$ en er komt de te bewijzen gelijkheid.

Voorbeeld 2. *Onder voorwaarde, dat* $A + B + C = 180°$, *te bewijzen* $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C$.

Dus onvoorw. te bewijzen:

$$\sin A + \sin B + \sin(A + B) = 4\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos\{90° - \tfrac{1}{2}(A+B)\};$$

of onvoorwaardelijk:

$$2\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B) + 2\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A + B) = 4\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}(A + B);$$

deel beide leden der formule door $2\sin \tfrac{1}{2}(A + B)$; dan blijft nog te bewijzen: $\cos \tfrac{1}{2}(A - B) + \cos \tfrac{1}{2}(A + B) = 2\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B$ en dit blijkt onmiddellijk waar te zijn.

Opgaven.

§ 45. *Bewijs, dat* **in elken driehoek** *de volgende betrekkingen gelden:*

1. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$. (H. B. S.)
2. $\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C = \operatorname{tg} 2A \operatorname{tg} 2B \operatorname{tg} 2C$.
3. $\sin A - \sin B + \sin C = 4\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C$.
4. $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C$.
5. $-\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C$.
6. Leid door optelling van 3, 4 en 5 af:
   $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A = 1$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

7. Leid deze laatste formule ook zelfstandig af.

Bewijs, eveneens voor $\mathbf{A + B + C = 180°}$:

8. $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$.

9. $\cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C = \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C$.

10. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$. (H. B. S.)

11. $\sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C = 2\cos A \cos B \cos C$.

12. Bereken $\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C$, als $A = 67°21'34''$, $B = 28°1'43''$ en $C = 84°36'43''$. (Zie 1e Vb. blz. 71).

13. Bereken $\sin A + \sin B + \sin C$, als $A = 41°19'57''$, $B = 59°47'14''$ en $C = 78°52'49''$. (Zie 2de Vb. blz. 71).

14. Bewijs, dat in elken driehoek:

$$\cot 2A \cot 2B + \cot 2B \cot 2C + \cot 2C \cot 2A = 1.$$

15. Eveneens, dat

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2. \quad \text{(H. B. S.)}$$

Bewijs de volgende identiteiten voor $\alpha + \beta + \gamma = 90°$:

16. $\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \cot \alpha \cot \beta \cot \gamma$.

17. $4\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma = \sin 2\alpha - \sin 2\beta + \sin 2\gamma$.

18. $\text{tg } \alpha \text{ tg } \beta + \text{tg } \beta \text{ tg } \gamma + \text{tg } \gamma \text{ tg } \alpha = 1$.

19. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2(1 + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)$.

Bewijs de volgende formules, als $\mathbf{x + y + z = 360°}$:

20. $\text{tg } x + \text{tg } y + \text{tg } z = \text{tg } x \text{ tg } y \text{ tg } z$.

21. $\cot x \cot y + \cot y \cot z + \cot z \cot x = 1$.

22. $\sin x + \sin y + \sin z = 4\sin \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}y \sin \frac{1}{2}z$.

23. $$\frac{\cot x + \cot y}{\text{tg } x + \text{tg } y} + \frac{\cot y + \cot z}{\text{tg } y + \text{tg } z} + \frac{\cot z + \cot x}{\text{tg } z + \text{tg } x} = 1.$$ (L.O.)

24. *Geg.* $\alpha + \beta + \gamma = 270°$.

Gevr. $\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma$ tot een produkt te herleiden.

25. *Geg.* $\alpha + \beta + \gamma = 270°$.

Te herleiden: $\text{tg } \alpha \text{ tg } \beta + \text{tg } \beta \text{ tg } \gamma + \text{tg } \gamma \text{ tg } \alpha$.

26. Bewijs, dat in elken driehoek:

$$\cos \tfrac{1}{2}A + \cos \tfrac{1}{2}B + \cos \tfrac{1}{2}C = 4\sin (45° + \tfrac{1}{4}A) \sin (45° + \tfrac{1}{4}B) \sin (45° + \tfrac{1}{4}C).$$

27. Men verbindt een willekeurig punt binnen een driehoek

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

met de hoekpunten. De hoeken, die deze lijnen vormen, zijn α, β en γ. Bewijs, dat

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

28. In $\triangle$ ABC trekt men de bisectrices AD, BE en CF, Men noemt $\angle AEB = \alpha$, $\angle ADC = \beta$ en $\angle BFC = \gamma$.

Bewijs, dat

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

29. *Geg.* $A + B + C = 180°$.

Gevr. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C$ te herleiden tot een product.

30. Herleid onder dezelfde voorwaarde ook $\sin(A + B) + \sin(B + C) + \sin(C + A)$ tot een product.

Tweede herhaling.

§ 46. 1. Gegeven $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; bereken $\cos 2\alpha$ en $\sin 3\alpha$.

2. Herleid: $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + 1$.

3. De sinus van een hoek in het tweede kwadrant is $\frac{11}{61}$; bereken de andere gon. verhoudingen.

4. Bereken zoo eenvoudig mogelijk:

$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ als $\alpha = 300°$ en $\beta = 390°$.

5. Herleid tot de eenvoudigste gedaante:

$$\sec^2\alpha\,\operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - \cot^2\alpha.$$

6. Construeer:

a) een hoek x in het 1e kwadrant, waarvan de sinus $\frac{2}{\sqrt{7}}$ is;

b) „ „ y in het 2de „ „ „ „ $\cos -\frac{2}{\sqrt{7}}$ is;

c) hoeken z, waarvan de tangens gelijk is aan den sec. van $-210°$.

7. Bereken $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha - \sec\alpha + 1} : \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$.

8. Zoek op: *a*) log sin 171°14′22″; *b*) log cos 313°44′5″; *c*) log tg 226°13′51″; *d*) log cot 400°40′4″.

9. Waarom kan men niet log cos 171° vinden? Ook niet log sin 313°? Hoe moet men handelen, als berekend moet worden: $\dfrac{\cos 171°\sin 313°\operatorname{tg} 95°}{\sin^2 276°\cos^2 213°}$?

10. Bewijs meetkundig: $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$. (Trek een middellijn AB van cirkel M; trek MC en verbind A met C; als $\angle BMC = \alpha$, dan is $\angle BAC = \frac{1}{2}\alpha$).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bewijs ook: $1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{1}{2}a$; ook de formules voor tg $\frac{1}{2}a$.

11. De tangens van een hoek is $2\sqrt{3}$ maal den sinus; bereken den secans.

12. Bereken: *a*) $\cot 2\frac{1}{6}\pi$; *b*) tg $(-3660°)$; *c*) sin $1125°$; *d*) cos $285°$.

13. Bewijs: $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 2\sec 2\alpha$.

14. Van een driehoek zijn twee zijden 19 en 23 cM en de ingesloten hoek $51°12'$. Bereken met den cosinusregel en de tafel van de gon. verhoudingen de derde zijde.

15. Maak logarithmisch:

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha}$.

b) $\sec^2\alpha\,(1 + \sec 2\alpha)$.

c) $\frac{1}{2}(\text{tg } \frac{1}{2}\alpha + \cot \frac{1}{2}\alpha)$.

16. Zeg uit het hoofd of $\cos a - \sin a$ positief of negatief is voor de volgende hoeken: 1) $147°$; 2) $228°$; 3) $342°$; 4) $-783°$.

17. Bereken de hoogtelijnen van een gelijkbeenigen driehoek, waarvan een been 26 cM is en de tophoek $137°25'10''$.

18. Herleid:

$$\sin (n+1)\alpha \cos (n-1)\alpha - \sin (n-1)\alpha \cos (n+1)\alpha.$$

19. Maak logarithmisch: *a*) $(\cot \alpha + \text{tg } \alpha)^{-1}$; *b*) $\frac{\text{cosec } \alpha}{\cot \alpha + \text{tg } \alpha}$.

20. Geef algemeene uitdrukkingen voor x uit de volgende verg.: *a*) $\sin 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; *b*) $\cot\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

21. Bewijs: *a*) $\frac{\cos 2x - \cos 2y}{\sin 2x + \sin 2y} = \text{tg } (y - x)$.

b) $\frac{\sin 2x + \sin 2y}{\sin 2x - \sin 2y} = \frac{\text{tg } (x+y)}{\text{tg } (x-y)}$.

22. Bereken $\cos 2a$ en $\sin 2a$, als $\sin a = \frac{3}{5}$.

23. In welke kwadranten stijgt 1) de sinus; 2) de cosinus; 3) de secans; 4) de cosecans?

Welke van de gon. verhoudingen is altijd stijgend? Welke altijd dalend?

24. $\sin x + \sin y = a$ en $\cos x + \cos y = b$; druk $\cos (x - y)$ uit in a en b.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

25. Als antwoord op een vraagstuk vind ik $(2m + 1)\frac{\pi}{4}$; een leerling vindt n. $180° \pm 45°$. Komen deze antwoorden overeen?

26. Van een rechthoekigen driehoek ($\angle A = 90°$) is $\angle B = \beta$ en $BC = a$. Men trekt in den driehoek een lijn AD naar eenig punt D van BC; deze lijn maakt met AB een hoek δ. Druk CD uit in a en de gon. verhoudingen van de gegeven hoeken.

27. Bereken alle waarden van x beneden 360°, die voldoen aan de verg.: $3\sec^2(60° - 5x) + 5\operatorname{tg}^2(60° - 5x) = 6\frac{1}{3}$.

28. Bewijs, dat $(1 + \sin a + \cos a)^2 = 2(1 + \sin a)(1 + \cos a)$.

29. Bereken x uit:

$$11 \sin x + \frac{2}{\sec^2 x} + 4 = 0.$$

30. Als antwoord op een vraagstuk vind ik: $x + 45° = n \cdot 180° + (-1)^n 30°$. Waarin gaat dit over voor $n =$ even en waarin voor $n =$ oneven?

31. Bereken: $\frac{\sin(A - B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin(B - C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C - A)}{\cos C \cos A}$.

32. Vereenvoudig: $\frac{\sin(A - C) + 2\sin A + \sin(A + C)}{\sin(B - C) + 2\sin B + \sin(B + C)}$.

33. Los op de vergelijking: $\sin 9x = \sin x$.

34. Van een hoek A is gegeven $\operatorname{tg} A = \frac{2p(p+1)}{2p+1}$; bereken de andere gon. verhoudingen.

35. A, B en C zijn de hoeken van een driehoek; herleid tot een product:

$$\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C.$$

36. Is $\sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha} = 2\sin\frac{1}{2}\alpha$? Komt het uit voor $\alpha = -30°$? Moet ik de positieve wortels nemen?

37. Bereken: *a*) sec 1665°; *b*) sin 2070°; *c*) cosec 3465° *d*) tg (−1470°).

38. Vereenvoudig: $\frac{\sin(p + 2q) - 2\sin(p + q) + \sin p}{\cos(p + 2q) - 2\cos(p + q) + \cos p}$.

39. Hoeveel radialen bevatten de hoeken van een driehoek, als deze zich verhouden als 2 : 5 : 11? Bereken ook de verhoudingen der zijden.

40. $1 + \sin x$ en $1 - \sin x$ zijn beide volkomen vierkanten; wat zijn de wortels?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

41. Als $\sin\alpha = p - q$ en $\cos\alpha = p + q$, hoeveel is dan $p^2 + q^2$?

42. Bewijs: $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

43. Bereken met logarithmen:

$$\frac{\operatorname{tg} 49^\circ\ (-\operatorname{cosec} 138^\circ 15')\ \cot 432^\circ 16' 40''}{\operatorname{tg} 19^\circ \sec 175^\circ 13' \cos 146^\circ 17' 28''}.$$

44. Herleid:

$\operatorname{tg}(45^\circ + x)\operatorname{tg}(135^\circ + x)\operatorname{tg}(225^\circ + x)\operatorname{tg}(315^\circ + x)$.

45. Bewijs: $\dfrac{\sin(3A - B) + \sin(3B - A)}{\cos(3A - B) + \cos(3B - A)} = \operatorname{tg}(A + B)$.

46. Een hoek x wordt bepaald door:

$(3x - \alpha) = n \,.\, 180^\circ \times (-1)^n (5x + \alpha)$; druk x uit in π en α; ten eerste voor $n = 2k$; ten tweede voor $n = 2k + 1$.

47. Vind met den cosinusregel en de log. sinustafel de hoeken van een driehoek, waarvan de zijden zijn 7, 6 en 4.

48. Als A, B en C de hoeken van een driehoek zijn, dan is $\dfrac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 8\sin {}^1\!/_2 A \sin {}^1\!/_2 B \sin {}^1\!/_2 C$. Bewijs.

49. Bewijs, dat $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 3\alpha$.

50. Bereken x uit:

$$\operatorname{tg}({}^1\!/_3 x - 14^\circ) = \frac{\operatorname{tg}^4 153^\circ 21' 12''}{\sin^3 213^\circ 19' 26'' \cos^5 266^\circ 13' 15''}.$$

51. Herleid:

$$\left\{\frac{\cos(270^\circ - a)}{\sin(a - 180^\circ)} \times \frac{\cot(-a)}{\operatorname{cosec}(90^\circ - a)}\right\} : \left\{\frac{\sec(a - 180^\circ)}{\operatorname{tg}(270^\circ - a)} : \frac{\sin(90^\circ + a)}{\cot(360^\circ - a)}\right\}.$$

52. Bereken alle waarden van x, die voldoen aan:

$$\cos(x - 360^\circ) = \frac{\sin(a + 180^\circ)\cos(b + 90^\circ)}{\operatorname{tg}(2c - 270^\circ)\sec(-d)},$$

als a, ${}^1\!/_2 b$, c en d scherpe hoeken zijn, gegeven door $\operatorname{tg} a = {}^3\!/_4$; $\cos {}^1\!/_2 b = {}^5\!/_{18}$; $\operatorname{tg} c = {}^1\!/_5$ en $\sin d = {}^4\!/_5$.

53. Bewijs, dat men in elken driehoek heeft:

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$.

54. Druk 1) $\operatorname{tg} 3a$ uit in $\operatorname{tg} a$;

2) $\sec 3a$ in $\sec a$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

TRIGONOMETRIE.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK VIII.

Rechthoekige Driehoeken.

§ 47.

Formules. In § 2 bewezen wij reeds de volgende stellingen:

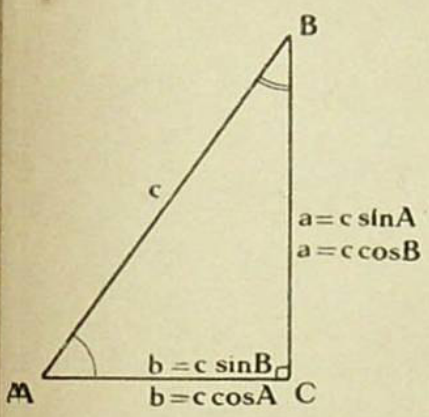


Fig. 25.

Stelling I. In elken rechthoekigen driehoek is een rechthoekszijde gelijk aan de hypotenusa maal den sinus van den overstaanden of den cosinus van den aanliggenden hoek. (Fig. 25).

Stelling II. In elken rechthoekigen driehoek is een rechthoekszijde gelijk aan de andere rechthoekszijde maal den tangens van den overstaanden of den cotangens van den aanliggenden hoek. (Fig. 26).

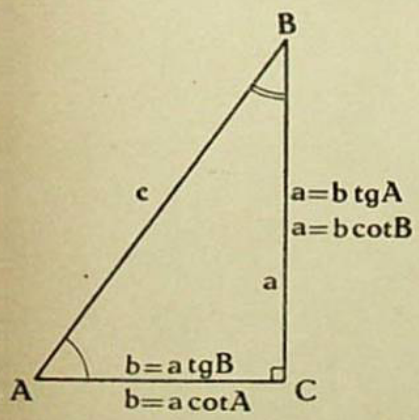


Fig. 26.

Deze stellingen staan uitgedrukt in de formules:

$$79.\ \begin{cases} a = c \sin A; \\ b = c \sin B. \end{cases} \qquad 81.\ \begin{cases} a = b \operatorname{tg} A; \\ b = a \operatorname{tg} B. \end{cases}$$

$$80.\ \begin{cases} a = c \cos B; \\ b = c \cos A. \end{cases} \qquad 82.\ \begin{cases} a = b \cot B; \\ b = a \cot A. \end{cases}$$

De formules (79) tot en met (82), te zamen met het *theorema* van *Pythagoras*:

$$83\ .\ .\ .\ a^2 + b^2 = c^2$$

stellen ons in staat *alle* elementen van een rechthoekigen driehoek te bepalen uit 2 *onafhankelijke gegevens* (behalve den rechten hoek).

Wij kunnen vijf gevallen onderscheiden, waarin de gegevens elementen van den driehoek zijn:

I. de hypotenusa en een scherpe hoek;
II. de hypotenusa en een rechthoekszijde;

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

III. een rechthoekszijde en de overstaande scherpe hoek;
IV. een rechthoekszijde en de aanliggende scherpe hoek;
V. twee rechthoekszijden.

§ 48. Voorbeelden van berekening.

Hypotenusa en scherpe hoek.

I. Geg. $c = 34{,}137$ cM; $A = 47°13'34''$.

Gevr. a, b en B.

Berekening. $a = c \sin A$, dus $\log a = \log c + \log \sin A$;

$$\begin{array}{rl} & \log c = 1{,}53322 \\ + & \log \sin A = 9{,}86572 - 10 \\ \hline & \log a = 1{,}39894. \end{array}$$

1^0. $a = 25{,}058$ cM.

Verder is $b = c \cos A$, dus $\log b = \log c + \log \cos A$;

$$\begin{array}{rl} & \log c = 1{,}53322 \\ + & \log \cos A = 9{,}83194 - 10 \\ \hline & \log b = 1{,}36516. \end{array}$$

2^0. $b = 23{,}183$ cM.

Contrôle. Als de rekening nauwkeurig genoeg is, moet $c^2 = a^2 + b^2$ of $c^2 - b^2 = a^2$ of

$(c + b)(c - b) = a^2$ of eindelijk:

$\log (c + b) + \log (c - b) = 2 \log a$.

Nu is

$$\begin{array}{lll} \log (c + b) = \log 57{,}32 & = 1{,}75831 \\ \log (c - b) = \log 10{,}954 & = 1{,}03957 \\ \hline \log (c^2 - b^2) & = 2{,}79788 \\ 2 \log a & = 2{,}79788. \end{array}$$

De overeenstemming is volkomen.

Ten slotte is

3^0. $B = 90° - 47°13'34'' = 42°46'26''$.

Hypotenusa en rechthoekszijde.

II. Geg. $c = 48{,}06$ cM; $a = 33{,}72$ cM.

Gevr. b, A en B.

Berekening. Wij berekenen bijv. eerst b:

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a);$$

$$b = \sqrt{(c + a)(c - a)};$$

$$\log b = \frac{\log(c + a) + \log(c - a)}{2}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\log(c + a) = \log 81{,}78 = 1{,}91265$$
$$\log(c - a) = \log 14{,}34 = 1{,}15655$$
$$+ \quad \text{---------------------}$$
$$2 \log b = 3{,}06920$$
$$\log b = 1{,}53460.$$

1°. $b = 34{,}25$.

Opmerking. Uit $\log b = 1{,}53460$ kan men minstens 3 decimalen voor b vinden; wij ronden b echter in 2 decimalen af, omdat de gegevens ook niet verder gaan.

Verder is :

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$
$$\log a = 11{,}52789 - 10$$
$$\log c = \ 1{,}68178$$
$$- \quad \text{---------------------}$$
$$\log \sin A = \ 9{,}84611 - 10.$$

2°. $A = 44°33'27''$.

3°. $B = 45°26'33''$.

Contrôle. $b = c \sin B$, dus $\log b = \log c + \log \sin B$.

$$\log c = 1{,}68178$$
$$\log \sin B = 9{,}85281 - 10$$
$$+ \quad \text{---------------------}$$
$$\log b = 1{,}53459.$$

Deze *logarithme* verschilt slechts 1 eenheid van de laatste decimaal met de vroeger gevonden waarde. Als men nu echter de waarde van b, die bij deze log. behoort, in 2 decimalen wil afronden, moet men $b = 34{,}24$ opgeven.

Men doet in beide gevallen echter nauwkeuriger, als men opgeeft: $b = 34{,}245$.

Rechthoekszijde en overstaande hoek.

III. Geg. $a = 387{,}24$ cM; $A = 33°27'3''$.

Gevr. b, c en B.

Berekening. $b = a \cot A$.

$$\log b = \log a + \log \cot A.$$
$$\log a = 2{,}58798$$
$$\log \cot A = 0{,}18003$$
$$+ \quad \text{---------------------}$$
$$\log b = 2{,}76801.$$

1°. $b = 586{,}15$ cM.

Verder is $a = c \sin A$,

dus $\log c = \log a - \log \sin A$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\log a = 12{,}58798 - 10$$
$$\log \sin A = 9{,}74133 - 10$$
$$\log c = 2{,}84665.$$

2°. $c = 702{,}50$ [1]).

B volgt onmiddellijk uit A.

3°. $B = 56°32'57''$.

Contrôle. Tusschen de drie berekende grootheden moet de betrekking bestaan: $b = c \sin B$ of $\log b = \log c + \log \sin B$.

$$\log c = 2{,}84665$$
$$\log \sin B = 9{,}92136 - 10$$
$$\log c + \log \sin B = 2{,}76801.$$

Vroeger vonden wij:

$$\log b = 2{,}76801.$$

De overeenstemming is weer volkomen.

Natuurlijk had ook als contrôle kunnen dienen:

$$(c + b)(c - b) = a^2.$$

Rechthoekszijde en aanl. scherpe hoek.

IV. Geg. $a = 11{,}328$ cM; $B = 67°1'52''$.

Gevr. b, c en A.

Berekening. Men voere deze nu zelf uit. Ter contrôle kan dienen: $b = c \cos A$

of $(c + b)(c - b) = a^2$.

Men zal vinden: $b = 26{,}727$ cM; $c = 29{,}029$ cM.

Opmerking. Uit $a = \sqrt{(c + b)(c - b)}$ zal men vinden:

$$a = 11{,}329 \text{ cM}.$$

De hoofdreden, dat men niet tot in de laatste decimaal de gegeven waarde van a terugvindt, ligt in het feit, dat er in het verschil $c - b$ slechts *vier* cijfers blijven staan. De onnauwkeurigheid van de laatste decimaal krijgt daardoor een veel grooteren invloed. In het vorige geval vindt men om een dergelijke reden ook $a = 387{,}21$ in plaats van 387,24.

Beide rechthoekszijden.

V. Geg. $a = 273{,}4$ cM; $b = 361{,}6$ cM. **Gevr.** A, B en c.

Berekening. Uit $\text{tg } A = \frac{a}{b}$ volgt: $A = 37°5'33''$; verder vindt men $B = 52°54'27''$; $c = 453{,}3$ cM.

---

[1]) De log. staat precies in de tafel; wij schrijven nu niet $c = 702{,}5$, maar wel $c = 702{,}50$, omdat wij door de laatste schrijfwijze te kennen geven, dat de fout in de uitkomst kleiner moet zijn dan $\frac{1}{2}$ eenheid van de 2de decimaal, dus kleiner dan 0,005; in 702,5 zou de fout 0,05 (hoogstens) kunnen bedragen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Contrôle. Uit $b = \sqrt{(c + a)(c - a)}$ vindt men terug:

$$b = 361{,}6 \text{ cM.}$$

Opmerking. Men kan natuurlijk c ook onmiddellijk uit a en b berekenen met behulp van het theorema van Pythagoras. De formule $c^2 = a^2 + b^2$ heeft echter een voor logarithmische berekening nog al ongeschikten vorm en geeft dan ook aanleiding tot vrij omslachtige berekeningen:

$$\log a = 2{,}43680; \qquad \log b = 2{,}55823;$$
$$2\log a = 4{,}87360; \qquad 2\log b = 5{,}11646;$$
$$a^2 = 74748. \qquad b^2 = 130755.$$

$$c^2 = 205503$$
$$2\log c = 5{,}31282$$
$$\log c = 2{,}65641$$
$$c = 453{,}3 \text{ (cM).}$$

§ 49.

Gelijkbeenige driehoeken. Deze kunnen evenals de rechthoekige driehoeken geheel berekend worden uit twee onafhankelijke gegevens. De oplossing, — in het algemeen met behulp van rechthoekige driehoeken, — zal ieder gemakkelijk zelf kunnen vinden. Alleen moge hier een opmerking plaats vinden over de berekening van den tophoek, als de basis en een been gegeven zijn en deze basis dan zeer klein is ten opzichte van dat been.

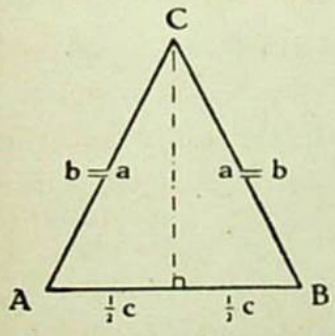


Fig. 27.

Zie fig. 27. *Zij bijv. gegeven:*

de basis c en het been a.

Dan is: $\frac{1}{2}c = a \sin \frac{1}{2}C$ of $\sin \frac{1}{2}C = \frac{c}{2a}$.

Men heeft dan, — bij zeer kleine waarde van $\frac{c}{2a}$, — vooreerst te werken met een niet bijzonder geschikt deel der tafel, *maar moet ook de gevonden waarde van* $\frac{1}{2}C$ *weer met 2 vermenigvuldigen.*

Men bepale C dan liever door middel van de formule:

$$\sin C = \frac{c\sqrt{(a - \frac{1}{2}c)(a + \frac{1}{2}c)}}{a^2}.$$

Deze vindt men aldus:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Volgens den sinusregel is : $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$,

zoodat: $\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{c \frac{CD}{a}}{a} = \frac{c \,.\, CD}{a^2} = \frac{c \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}c^2)}}{a^2}$,

of $\sin C = \frac{c \sqrt{(a - \frac{1}{2}c)(a + \frac{1}{2}c)}}{a^2}$.

Opgaven.

§ 50. *Bereken de* **onbekende elementen van een rechthoekigen driehoek,** *als gegeven is :*

1. de hypotenusa = 13,571 dM en een der scherpe hoeken = 37°5′21″.

2a. de schuine zijde = 0,03182 M en een der rechthoekszijden = 2,7818 cM ;

2b. de schuine zijde = 0,5163 M en een der rechthoekszijden = 0,5136 M.

3. een rechthoekszijde = 11,710 KM en de overstaande scherpe hoek = 49°46′58″.

4. een rechthoekszijde = 10,007 M en een aanliggende scherpe hoek = 17°13″.

5a. de rechthoekszijden resp. 15,7904 cM en 28,0031 cM;

5b. de rechthoekszijden resp. 45,099 en 0,26 cM.

Bereken de onbekende elementen **van een gelijkbeenigen driehoek,** *als gegeven is :*

6a. de basis = 509,67 cM en een been = 381,24 cM ;

6b. de basis = 6000 KM en een been = 400000 KM.

7. een been = 19,658 dM en de tophoek = 29°5′47″.

8. een been = 43,001 cM en een basishoek = 89°2′13″.

Bewijs, dat een driehoek rechthoekig is, *wanneer daarin de betrekking bestaat*:

9. $\sin B = \cos A \sin C$.

10. Eveneens, wanneer $\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$.

11. Ook, wanneer $\cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B - \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B = -1$.

12. Evenzoo, als $\sin A + \cos B = (\cos A + \sin B) \cot B$.

13. Verder, als $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \sec B \sec C$.

14. Eveneens, wanneer $\cot A + \cot C = \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} C$.

Bewijs, **dat een driehoek gelijkbeenig is,** *wanneer :*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

15. $\text{Sin}^2 C = \sin 2A \sin 2B$;

16. $\text{Sin } A \sin B = \cos^2 \frac{1}{2}C$;

17. $\cos A \cos B = \sin^2 \frac{1}{2}C$;

18. $a \cos B = b \cos A$.

19. $\cos C = \dfrac{\text{tg } B - \sin C}{\text{tg } B}$.

20. $\text{tg } \frac{1}{2}A = \dfrac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A}$.

21. $\sin A = \cot C (1 + \cos A)$.

22. Leid een formule af voor het oppervlak van een rechthoekigen driehoek in elk der vijf gevallen van § 48.

23. Bereken dit oppervlak voor de driehoeken, bedoeld in de opgaven 1 tot en met 5*b*.

24. Bewijs, dat het opp. van een gelijkb. driehoek met tophoek C en been $= a$ gelijk is aan $\frac{1}{2}a^2 \sin C$.

25. In een rechthoekigen driehoek is de zwaartelijn, naar de hypotenusa getrokken, 12,104 dM lang. Zij verdeelt den rechten hoek in 2 deelen, die zich verhouden als 7 tot 9. Bereken de onbekende elementen en ook de andere zwaartelijnen.

26. In een rechthoekigen driehoek verdeelt de bisectrice van den grootsten scherpen hoek de overstaande rechthoekszijde in twee deelen, resp. = 10 cM en 30 cM. Bereken alle elementen en alle bisectrices.

27. Tusschen de kleinste rechthoekszijde, de grootste rechthoekszijde en de hypotenusa van een rechthoekigen driehoek bestaat een constante verhouding. Bereken deze verhouding en de scherpe hoeken van den driehoek.

28. Van een rechthoek is de omtrek 43,170 M. Het oppervlak is gelijk aan het derde deel van het product der diagonalen. Bereken de zijden, de diagonalen, en de hoeken, waaronder de diagonalen en de zijden elkander snijden.

Opm. Bereken eerst de diagonalen, daarna het verschil van lengte en breedte, dan lengte en breedte afzonderlijk enz.; òf na de diagonalen terstond den hoek daartusschen (zie n°. 24).

29. Van een ruit is een scherpe hoek 40° en de langste diagonaal 6,342 M. Bereken de andere diagonaal, de zijde en het oppervlak.

30. Van een rechthoek is de scherpe hoek tusschen de diago-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

nalen = 51°23′15″,3 en het verschil van lengte en breedte = 2,1537 cM. Bereken de zijden.

31. Uit den top van een gelijkzijdigen driehoek zijn twee lijnen getrokken, die den driehoek in drie gelijke deelen verdeelen. Bereken de deelen van den tophoek.

32. Als in △ ABC

$$a^2\sin^2 B + b^2\sin^2 A = 2ab \cos A \cos B \text{ is,}$$

dan is ∠ C = 90°. Bewijs dat.

33. In △ ABC is ∠ C = 90°. Men verbindt C met een punt D van de overstaande zijde, zóó gekozen, dat AD = 6,913 dM en DB = 4,4618 dM. Als verder ∠ ACD = 48°2′57″,4 is, bereken dan AC, AB en ∠ A.

34. Op het oogenblik, waarop men, van de aarde uit, de maan juist „half" ziet, maken de richtingen maan-zon en maan-aarde een hoek = 90° met elkaar. De hoek tusschen de richtingen aarde-maan en aarde-zon is dan 89°51′18″. Hoeveel maal is op dat oogenblik de maansafstand begrepen in den zonsafstand? (Methode van Aristarchus voor de z.g. „dichotomie" van de maan.)

35. In zeker punt van een dal ziet men den top van een berg onder een hoek van 30° met den horizon. In een punt, 1800 M dichter bij den berg gelegen, is deze hoek = 50°. Hoe hoog is de berg? (Hulplijn uit het tweede punt.)

36. Van een rechthoekig trapezium ABCD zijn de niet-evenwijdige zijden AB en CD resp. 9,674 en 11,816 dM. De diagonaal BD is 11,645 dM. Bereken de onbekende zijden en hoeken, benevens de diagonaal AC.

37. Van een gelijkbeenig trapezium zijn de evenwijdige zijden resp. 5,12 en 9,88 dM en de niet-evenwijdige zijden 8,76 dM. Bereken de hoeken en de diagonalen.

38. Van een gelijkbeenig trapezium is de grootste der evenwijdige zijden = 14,173 M; de diagonalen zijn 11,581 M lang en snijden elkaar onder een hoek (van de basis uit gezien) van 110°7′12″. Bereken de onbekende zijden en hoeken van dit trapezium.

39. In een ruit is een zijde middenevenredig tusschen de diagonalen. Bereken de hoeken. Als verder de kleinste diagonaal = 26,835 cM is, bereken dan de andere diagonaal, de zijde en het oppervlak.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK IX.

Scheefhoekige driehoeken.

§ 51.

Sinus- en cosinusregel. In § 14 leidden wij reeds de sinus- en cosinusformules af.

Wij zullen hier aan den sinusregel een laatste lid toevoegen.

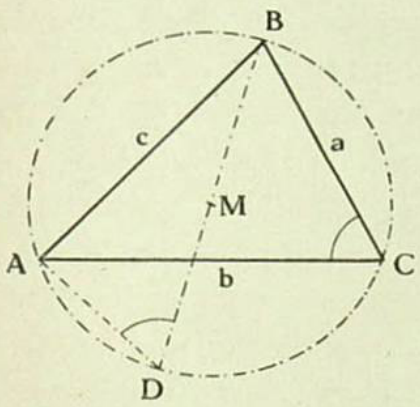


Fig. 28.

Zij in fig. 28 ABC een willekeurige driehoek en ABCD zijn omgeschreven cirkel. Wij trekken de middellijn BD en verbinden A met D.

Vooreerst is nu:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Verder is in $\triangle$ ADB:
$\angle$ BAD $= 90°$ en $\angle$ ADB $= \angle$ C.
(Waarom ?)

Dus zal: $c = 2R \sin C$ of $\frac{c}{\sin C} = 2R$ en kunnen wij opgeven als

84. Sinusregel: $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Wij herinneren hier verder aan den eveneens reeds in § 14 bewezen

Cosinusregel:

38. . . . . . $$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B; \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{array}\right\}$$

§ 52.

Formules, afgeleid uit den sinusregel. Wij schrijven dezen regel in den vorm:

$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Allereerst volgt hieruit door een bekende eigenschap der evenredigheden:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{2\sin \tfrac{1}{2}(A+B)\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}{2\cos \tfrac{1}{2}(A+B)\sin \tfrac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

Wij vinden hier den zeer gemakkelijk te onthouden

85. **Tangensregel:** $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

Uit dezelfde evenredigheid volgt verder:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{2\sin \tfrac{1}{2}(A+B)\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}{2\sin \tfrac{1}{2}C\cos \tfrac{1}{2}C} = \frac{2\cos \tfrac{1}{2}C\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}{2\sin \tfrac{1}{2}C\cos \tfrac{1}{2}C} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}{\sin \tfrac{1}{2}C},$$ dus:

86. . . . . $$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}{\sin \tfrac{1}{2}C}.$$

Even gemakkelijk blijkt:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \frac{2\cos \tfrac{1}{2}(A+B)\sin \tfrac{1}{2}(A-B)}{2\sin \tfrac{1}{2}C\cos \tfrac{1}{2}C} = \frac{2\sin \tfrac{1}{2}C\sin \tfrac{1}{2}(A-B)}{2\sin \tfrac{1}{2}C\cos \tfrac{1}{2}C} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos \tfrac{1}{2}C};$$ dus:

87. . . . . $$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos \tfrac{1}{2}C}.$$

Deeling van (87) op (86) geeft den tangensregel.

Opmerking. De formules (86) en (87) zijn de zoogenaamde **formules van Mollweide**; zij worden aldus aangeduid, omdat K. B. Mollweide in 1808 het eerst de aandacht er op gevestigd heeft. Wij raden ernstig *af*, ze van buiten te leeren, daar het tweede lid van beide formules een vorm heeft, die zeer licht tot verwarringen en fouten aanleiding geeft. Men onthoude, dat de formules uitdrukkingen geven voor $\frac{a+b}{c}$ en $\frac{a-b}{c}$ en leide ze dan uit den sinusregel af.

Ook kan men ze direct als volgt vinden: In de vlakke meetkunde komen de gegevens: „som der opstaande zijden" en „basis"

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

bij congruentie- en constructievraagstukken zoo dikwijls voor, dat men als van zelf figuren teekent als 29 en 30.

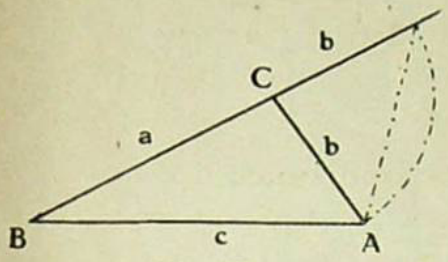


Fig. 29.

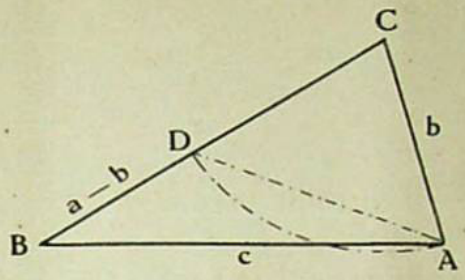


Fig. 30.

$\angle D = \frac{1}{2}C$ en $\angle DAB = A + \frac{1}{2}C$; dus $\frac{a+b}{c} = \frac{\sin(A + \frac{1}{2}C)}{\sin \frac{1}{2}C}$.

Leid hieruit formule 86 af.

$\angle BDA = 90° + \frac{1}{2}C$; $\angle BAD = \frac{1}{2}(A - B)$; de sinusregel geeft direct: $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}C}$; zie form. 87.

Een toepassing van deze formules vindt men in § 55.

§ 53.

Formules, afgeleid uit den cosinusregel.

Uit $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ volgt: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Deze formule zullen wij logarithmisch maken.

Eerste manier. Trek beide leden af van de eenheid:

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc};$$

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}.$$

Stellen wij nu, evenals in de gewone vlakke meetkunde,

$$\tfrac{1}{2}(a + b + c) = s \text{ of } a + b + c = 2s,$$

dan is $a - b + c = 2s - 2b = 2(s - b)$

en $a + b - c = 2s - 2c = 2(s - c)$.

Dus $2\sin^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{4(s-b)(s-c)}{2bc}$ of

88. . . . . $\mathbf{\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}$.

N.B. Het tweede lid behoeft hier geen dubbel teeken te hebben; als hoek van een driehoek is $A < 180°$, dus $\frac{1}{2}A < 90°$ en derhalve $\sin \frac{1}{2}A$ altijd positief.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Door cyclische verwisseling vormt men gemakkelijk uit 88 nog de formules:

$$\sin \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}};$$

$$\sin \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Tweede manier. Tel beide leden op bij de eenheid:

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc};$$

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc};$$

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{4s(s-a)}{2bc};$$

89. . . . . . $\cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$.

N.B. Ook hier vervalt het min-teeken in het 2de lid om de zelfde reden als in formule 88.

Door cyclische verwisseling geeft 89 nog de betrekkingen:

$$\cos \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}};$$

$$\cos \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

Uit (88) en (89) volgt door deeling onmiddellijk:

90. . . . . . $\text{tg} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, of

90a. $\text{tg} \tfrac{1}{2}A = \dfrac{1}{s-a}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

Aan deze formule kunnen wij nu zonder meer toevoegen:

$$\text{tg} \tfrac{1}{2}B = \frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}};$$

$$\text{tg} \tfrac{1}{2}C = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Opmerking. De groote waarde **dezer formules van Gauss** (88, 89 en 90) voor de eenvoudige logarithmische berekening van de hoeken van een driehoek uit de zijden springt duidelijk genoeg in het oog. Bij *zeer nauwkeurige* berekeningen zou men het

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

kunnen betreuren, dat de bijv. voor ½A gevonden waarde weer met 2 moet vermenigvuldigd worden; de fout, die in ½A als benaderde grootheid aanwezig is, wordt dan ook weer met 2 vermenigvuldigd. Aan dit bezwaar kan men tegemoet komen door uit 88 en 89 af te leiden:

$$2\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{of}$$

91. . . . . $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Deze formule zou ook aldus kunnen worden geschreven:

92. . . . . . $\sin A = \frac{2O}{bc}$,

als O het oppervlak van driehoek ABC voorstelt.

Formule 90 is ook zeer eenvoudig meetkundig in te zien. Zie fig. 31. Bekend is $r = \frac{O}{s}$ en $AE = s - a$.

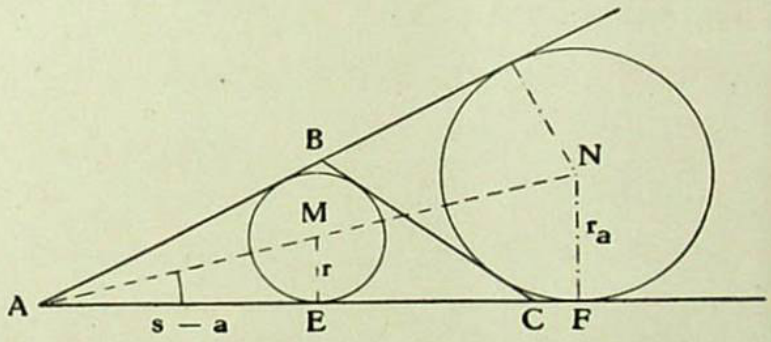


Fig. 31.

Dan is $\text{tg } \tfrac{1}{2}A = \frac{O}{s(s-a)} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

Men kan ook nemen: $\text{tg } \tfrac{1}{2}A = \frac{r_a}{AF} = \frac{r_a}{s} = \frac{O}{s(s-a)}$. Als de tangens bekend is, vindt men heel spoedig den sinus en den cosinus: een rechthoekige driehoek met r.h. zijden $\sqrt{(s-b)(s-c)}$ en $\sqrt{s(s-a)}$ heeft tot hypotenusa: $\sqrt{(s-b)(s-c)+s(s-a)} = \sqrt{bc}$. Dus is $\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ en $\cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$.

Verder volgt nog door directe beschouwing van een figuur de volgende

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Projectie-eigenschap:

93. . . . . . $\mathbf{a = b\cos C + c\cos B.}$

Men kan hieraan terstond toevoegen:

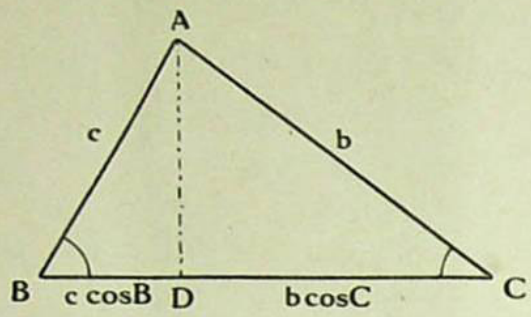


Fig. 32.

$$\mathbf{b = c\cos A + a\cos C;}$$
$$\mathbf{c = a\cos B + b\cos A.}$$

Deze formules zijn zeer gemakkelijk te onthouden of, bij voorkomende gelegenheid, onmiddellijk af te leiden. De laatste twee volgen weer door cyclische verwisseling uit de eerste.

Opgaven.

§ 54. Bewijs, dat in elken driehoek de betrekkingen gelden:

1. $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{(a+b+c)\sin A}{a}$.

2. $R = \dfrac{s}{\sin A + \sin B + \sin C} = \dfrac{s}{4\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}$.

3. $a + b - c = \dfrac{a}{\sin A}(\sin A + \sin B - \sin C) =$

$$\frac{2a\sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}A}.$$

4. $\dfrac{a^2 - b^2}{c^2} = \dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$; $\dfrac{b^2 - c^2}{a^2} = \dfrac{\sin(B-C)}{\sin A}$.

5. $\dfrac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2}$; $\dfrac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = \dfrac{a^2 - b^2}{c^2}$.

6. $a\cos A + b\cos B = c\cos(A - B)$.

7. a) $\dfrac{a\cos A + b\cos B}{a\cos B + b\cos A} = \cos(A - B)$.

   b) $2bc\cos A + 2ca\cos B + 2ab\cos C = a^2 + b^2 + c^2$.

8. $\dfrac{\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B}{\sin \frac{1}{2}C} = \dfrac{s}{c}$; $\dfrac{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}A} = \dfrac{s}{a}$;

   $\dfrac{\cos \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}A}{\sin \frac{1}{2}B} = \dfrac{s}{b}$.

9. $\dfrac{s-a}{b} = \dfrac{\cos \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}B}\sin \frac{1}{2}C$; $\dfrac{s-b}{c} = \dfrac{\cos \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}C}\sin \frac{1}{2}A$;

   $\dfrac{s-c}{a} = \dfrac{\cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A}\sin \frac{1}{2}B$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

10. $\frac{s-a}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}C} \sin \frac{1}{2}B$; $\frac{s-b}{a} = \frac{\cos \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}A} \sin \frac{1}{2}C$;
$\frac{s-c}{b} = \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}B} \sin \frac{1}{2}A$.

11. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B = \frac{s-c}{s}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{2}B \operatorname{tg} \frac{1}{2}C = \frac{s-a}{s}$;
$\operatorname{tg} \frac{1}{2}C \operatorname{tg} \frac{1}{2}A = \frac{s-b}{s}$.

12. $\frac{\cot \frac{1}{2}A}{\cot \frac{1}{2}B} = \frac{s-a}{s-b}$; $\frac{\cot \frac{1}{2}B}{\cot \frac{1}{2}C} = \frac{s-b}{s-c}$; $\frac{\cot \frac{1}{2}C}{\cot \frac{1}{2}A} = \frac{s-c}{s-a}$.

13. $a\cos B - b\cos A = \frac{a^2 - b^2}{c}$.

14. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2s(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$.

15. $s = a\sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(B - C) + b\sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(C - A) + c\sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}(A - B)$.

16. $a^2 - b^2 = a^2\cos^2 B - b^2\cos^2 A$.

17. $a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$.

18. $\frac{a\cos A - b\cos B}{b\cos A - a\cos B} = \cos C$.

19. $\frac{\sin^2 A - \sin B \sin C}{a^2 - bc} = \frac{\sin^2 B - \sin C \sin A}{b^2 - ca} = \ldots\ldots$

20. $(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C = 2s$.

21. $c^2 = (a - b)^2 \cos^2 \frac{1}{2}C + (a + b)^2 \sin^2 \frac{1}{2}C$.

22. $\sum \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} = 0$. Het teeken Σ (sigma) duidt aan de som van den gegeven vorm en de beide andere, die door cyclische verwisseling uit de eerste kunnen worden verkregen.

23. $\Sigma a\sin (B - C) = 0$. (Zie nr. 22).

24. $\sum \frac{b\cos C + c\cos B}{\sin A} = 6R$. (Zie nr. 22).

25. $\sum \frac{b - c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} = 0$. (Zie nr. 22).

§ 55.

Oplossing der scheefhoekige driehoeken.

Wij zullen de onbekende elementen van een driehoek berekenen, als gegeven zijn:

Ie Geval. Een zijde en de twee aanliggende hoeken.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

IIde Geval. Een zijde, een aanliggende en een overstaande hoek.

IIIde Geval. Twee zijden en de ingesloten hoek.

IVde Geval. Twee zijden en een hoek tegenover een dier zijden. (Het z.g. *„twijfelachtige" geval).*

Vde Geval. De drie zijden.

Een zijde en de aanliggende hoeken.

I. **Gegeven:**

$a = 31{,}567\ cM$; $B = 98°5'13''$; $C = 33°57'6''$.

Gevraagd: b, c *en* A.

Oplossing: Vooreerst is:

$$A = 180° - (98°5'13'' + 33°57'6'') = 47°57'41''.$$

Uit $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

volgt dan: $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{31{,}567 \cos 8°5'13''}{\sin 47°57'41''}$.

De berekening van b verloopt dan als volgt:

$$\log 31{,}567 = 1{,}49923$$
$$\log \cos 8°5'13'' = 9{,}99566 - 10$$
$$-\log \sin 47°57'41'' = 0{,}12919\ ; \quad \log \sin 47°57'41'' = 9{,}87081 - 10.$$
$$\log b = 1{,}62408$$
$$b = 42{,}080\ (cM).$$

Verder leiden wij uit $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

af: $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{31{,}567 \sin 33°57'6''}{\sin 47°57'41''}$.

$$\log 31{,}567 = 1{,}49923$$
$$\log \sin 33°57'6'' = 9{,}74702 - 10$$
$$-\log \sin 47°57'41'' = 0{,}12919\ ; \quad \log \sin 47°57'41'' = 9{,}87081 - 10.$$
$$\log c = 1{,}37544$$
$$c = 23{,}738\ (cM).$$

Contrôle. Deze kan bijv. met behulp van den tangensregel geschieden; $\frac{b+c}{b-c}$ moet dan gelijk zijn aan $\frac{\text{tg } \frac{1}{2}(B+C)}{\text{tg } \frac{1}{2}(B-C)}$ of

$$\frac{65{,}818}{18{,}342} = \frac{\text{tg } 66°1'9'',5}{\text{tg } 32°4'3'',5}.$$

Nu is de log. van het eerste lid = 0,55490 en die van het tweede = 0,55490; dus is het in orde.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Eén zijde, een aanl. en een overstaande hoek.

II. Gegeven:

$a = 613{,}57\ cM;\quad B = 49°2'29'';\quad A = 62°53'42''.$

Gevraagd: $b,\ c$ *en* $C.$

Oplossing: $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{613{,}57 \sin 49°2'9''}{\sin 62°53'42''};$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin (A + B)}{\sin A} = \frac{613{,}57 \sin 68°3'49''}{\sin 62°53'42''};$$

$$C = 180° - (A + B) = 68°3'49''.$$

Men zal hier vinden:

$$b = 520{,}54\ cM;\quad c = 639{,}39\ cM.$$

Contrôle. Deze kan bijv. geschieden met een der formules van Mollweide[1], bijv.:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B - C)}{\sin \frac{1}{2}A} = \frac{\cos \frac{1}{2}(C - B)}{\sin \frac{1}{2}A} \text{ of}$$

$$\frac{1159{,}93}{613{,}57} = \frac{\cos\ 9°30'40''}{\sin\ 31°26'51''}.$$

De log. van beide leden blijken, tot op een enkele eenheid van de laatste decimaal na, overeen te stemmen.

Twee zijden en de ingesloten hoek.

III. Gegeven:

$a = 17{,}884\ dM;\quad b = 29{,}041\ dM;\quad C = 55°2'1''.$

Gevraagd: $A,\ B$ *en* $c.$

Oplossing: $\frac{\text{tg } \frac{1}{2}(B - A)}{\text{tg } \frac{1}{2}(B + A)} = \frac{b - a}{b + a};$

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}(B - A) = \frac{b - a}{b + a} \text{tg } \tfrac{1}{2}(B + A) = \frac{11{,}157}{46{,}925} \text{tg } 62°28'59'',5.$$

$$\log 11{,}157 = 1{,}04754$$
$$\log \text{tg } 62°28'59'',5 = 0{,}28321$$
$$-\log 46{,}925 = 8{,}32860 - 10; \qquad \log 46{,}925 = 1{,}67140.$$

$$\log \text{tg } \tfrac{1}{2}(B - A) = 9{,}65935 - 10$$
$$\tfrac{1}{2}(B - A) = 24°31'56'',4$$
$$\tfrac{1}{2}(B + A) = 62°28'59'',5$$
$$B = 87°0'56'';$$
$$A = 37°57'3''.$$

[1]) Een formule, waarin het verschil van 2 zijden voorkomt, is hier niet gewenscht. Waarom niet?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De berekening van c kan nu geschieden òf met den sinusregel òf met een der formules van Mollweide; hierbij heeft men dan:

òf $$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{17{,}884 \sin 55°2'1''}{\sin 37°57'3''};$$

òf $$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}{\sin \tfrac{1}{2}C} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin \tfrac{1}{2}C},$$

dus $$c = \frac{(b+a) \sin \tfrac{1}{2}C}{\cos \tfrac{1}{2}(B-A)}.$$

Bij de laatste formule heeft men het voordeel, dat er slechts twee nieuwe logarithmen behoeven te worden opgezocht; de eerste vereischt het opzoeken van drie logarithmen, maar heeft weer deze aanbeveling, dat zij altijd zonder aarzeling uit het hoofd kan worden opgeschreven.

Beide formules geven, tot in de laatste decimaal overeenstemmend, $c = 23{,}831$ dM.

Contrôle. Deze kan hier niet bestaan in het onderzoek of $A + B + C = 180°$ is. Bij de berekening van A en B is nl. juist deze betrekking in aanmerking genomen. De overeenstemming der beide laatst gevonden waarden voor c kan reeds eenigermate als proef gelden. Een geheel betrouwbaar contrôlemiddel zou kunnen zijn: *de berekening van c door middel van den cosinusregel.* Wij zullen deze berekening hier mededeelen, omdat zij aanleiding geeft tot bespreking van een nieuw middel **tot het logarithmisch maken van een veelterm, nl. de invoering van een hulphoek.** Uit

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

leiden wij af:

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab(1 + \cos C) = (a+b)^2 - 4ab \cos^2 \tfrac{1}{2}C;$$

$$c^2 = (a+b)^2 \left\{ 1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \cos^2 \tfrac{1}{2}C \right\}.$$

Nu is licht in te zien, dat altijd:

$$0 < 4ab < (a+b)^2 \text{ en dus } 0 < \frac{4ab}{(a+b)^2} < 1.$$

Hulphoek.

Immers $(a-b)^2$ is altijd positief en dus:

$$0 < (a-b)^2.$$ Verder is

$$\begin{array}{r} 4ab = 4ab \\ + \\ \hline \text{dus } 4ab < (a+b)^2. \end{array}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bovendien is $4ab$ altijd positief.

Wij mogen dus stellen:

$$\frac{4ab}{(a+b)^2}\cos^2 \tfrac{1}{2}C = \cos^2\varphi$$

en hebben dan voor φ een der waarden te nemen, die volgen uit:

94a. . . . . $\mathbf{\cos \varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cos \tfrac{1}{2} C.}$

Ter berekening van c hebben wij dan verder:

$$c^2 = (a+b)^2 \sin^2 \varphi \text{ of}$$

94b. . . . . $\mathbf{c = (a+b) \sin \varphi.}$

Opmerking. Men kan natuurlijk evengoed

$$\frac{4ab}{(a+b)^2}\cos^2 \tfrac{1}{2}C = \sin^2 \varphi$$

stellen. Voor c heeft men dan: $c = (a+b) \cos \varphi$.

Ook kan men aldus te werk gaan:

$c^2 = (a-b)^2 + 2ab\,(1 - \cos C) = (a-b)^2 + 4ab \sin^2 \tfrac{1}{2} C$;

$$c^2 = (a-b)^2 \left\{ 1 + \frac{4ab}{(a-b)^2}\sin^2 \tfrac{1}{2}C \right\}.$$

Stel nu $\frac{4ab}{(a-b)^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}C = \operatorname{tg}^2 \psi$;

ψ moet dan een der waarden zijn, die voldoen aan:

95a. . . . . $\mathbf{\operatorname{tg} \Psi = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} \sin \tfrac{1}{2} C.}$

Verder heeft men voor c dan nog:

$$c^2 = (a-b)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) = (a-b)^2 \sec^2 \psi;$$

95b. . . . . $\mathbf{c = \frac{a-b}{\cos \Psi}.}$

N.B. In de laatste oplossing is $a > b$ gerekend; is het omgekeerde gegeven, dan stellen wij:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} \sin \tfrac{1}{2}C;$$

$$c = \frac{b-a}{\cos \psi}.$$

Toepassing. Wij kiezen het op blz. 95 en 96 op andere wijze behandelde voorbeeld III.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De berekening van φ (uit 93) verloopt als volgt:

$\log a = 1{,}25247$
$\log b = 1{,}46301^5$
$\log ab = 2{,}71548^5$
$\log \sqrt{ab} = 1{,}35774$
$\log 2 = 0{,}30103$
$\log \cos \frac{1}{2}C = 9{,}94786 - 10$
$-\log (a+b) = 8{,}32860 - 10$
$\log \cos \varphi = 9{,}93523 - 10$
$\varphi = 30°31'17''$.

$\log (a+b) = 1{,}67140$
$\log \sin \varphi = 9{,}70574 - 10$
$\log c = 1{,}37714$
$c = 23{,}831$ dM.

Wij vinden hier juist dezelfde waarde voor c als te voren. Over het algemeen is echter de berekening met den hulphoek nog al omslachtig en door het belangrijke aantal op te tellen logarithmen minder nauwkeurig dan de eerste.

Twee zijden en de hoek over één dier zijden.

IV. Gegeven:

$a = 8{,}7264\ M$; $b = 9{,}8004\ M$; $A = 57°53'2''$.

Gevraagd: *B, C en c.*

Oplossing: $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$, dus $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$.

$\log b = 0{,}99125$
$\log \sin A = 9{,}92787 - 10$
$-\log a = 9{,}05916 - 10$
$\log \sin B = 9{,}97828 - 10$.

$\log a = 0{,}94084$

Hieruit volgen twee waarden voor B:

1°. $B_1 = 72°1'45''$; 2°. $B_2 = 107°58'15''$.

De daarbij behoorende waarden van C zijn:

1°. $C_1 = 50°5'13''$; 2°. $C_2 = 14°8'43''$.

Wij vinden dus twee driehoeken, die aan de gegevens voldoen. Als twee zijden en de hoek tegenover de *grootste* dier zijden gegeven zijn, vindt men slechts 1 driehoek; de tweede hoek moet dan zeker scherp zijn.

N.B. Als bsin A > a, is het vraagstuk onmogelijk; dan zou immers sin B > 1 zijn.

Als bsin A = a, wordt sin B = 1, dus B = 90°; er voldoet slechts 1 driehoek; deze is dan rechthoekig.

Met behulp van den sinusregel berekent men gemakkelijk de

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

waarden van c, die bij de gevonden waarde(n) voor B en C behooren.

De *proef* kan geschieden met den tangensregel of een der formules van Mollweide.

Drie zijden.

V. Gegeven:

$a = 7{,}8483\ dM;\quad b = 8{,}1514\ dM;\quad c = 8{,}9022\ dM.$

Gevraagd: *A, B en C.*

Oplossing: Hier is:

$s = 12{,}45095;\ s - a = 4{,}60265;\ s - b = 4{,}29955;\ s - c = 3{,}54875.$

Wij zullen A, B en C afzonderlijk berekenen en dan controleeren of $A + B + C = 180°$ is.

Als de drie hoeken allen berekend moeten worden, geeft het gebruik van de formules voor de tangenten van de halve hoeken eenig voordeel.

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}A = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \frac{W}{s-a};\ \text{verder}$$

zal dan: $\text{tg } \tfrac{1}{2}B = \dfrac{W}{s-b}$; $\text{tg } \tfrac{1}{2}C = \dfrac{W}{s-c}$.

$\log (s-a) = 0{,}66301$
$\log (s-b) = 0{,}63342^5$
$\log (s-c) = 0{,}55008$ $\qquad \log s = 1{,}09520$
$-\log s = 8{,}90480 - 10$

$+$ $0{,}75131^5$

2

$\log W = 10{,}37566 - 10$

$\log (s-a) = 0{,}66301$

$-$

$\log \text{tg } \tfrac{1}{2}A = 9{,}71265 - 10$
$\tfrac{1}{2}A = 27°17'36'',5$
$A = 54°35'13''.$

$\log W = 10{,}37566 - 10$
$\log (s-b) = 0{,}63342^5$

$-$

$\log \text{tg } \tfrac{1}{2}B = 9{,}74223^5 - 10$
$\tfrac{1}{2}B = 28°54'55''$
$B = 57°49'50''.$

$\log W = 10{,}37566 - 10$
$\log (s-c) = 0{,}55008$

$-$

$\log \text{tg } \tfrac{1}{2}C = 9{,}82558 - 10$
$\tfrac{1}{2}C = 33°47'30'',4$
$C = 67°35'1''.$

Contrôle. $A + B + C = 180°0'4''$.

Nauwkeuriger overeenstemming kan men van een logarithmentafel in vijf

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

decimalen niet verwachten; de fout in A + B + C is nog slechts $\frac{1}{160000}$ van haar bedrag.

In andere woorden: de *relatieve* fout van het resultaat is slechts $\frac{1}{160000}$.

Opgaven.

§ 56.

Bereken de onbekende elementen van △ ABC, wanneer gegeven zijn:

1. A = 77°18′23″; B = 41°2′47″; c = 10,026 dM.
2. A = 36°7′2″; B = 57°31′32″; b = 8,3008 M.
3. A = 45°0′5″; b = 341,53 dM; c = 187,29 dM.
4. a = 12,8972 M; b = 10,0194 M; B = 49°18′23″.
5. b = 201,93 cM; c = 352,05 cM; B = 36°10′17″.
6. a = 27,084 dM; b = 29,306 dM; A = 67°32′33″.
7. a = 7,2019 M; b = 9,0037 M; c = 12,2163 M.
8. a = 36,411 cM; b = 48,548 cM; c = 60,685 cM.
9. b = 209,91 cM; c = 352,03 cM; A = 36°36′14″.
10. Bereken door middel van een hulphoek de zijde a van △ ABC, als gegeven is:

b = 19,909 dM; c = 26,217 dM; A = 107°7′25″.

11. Van een parallelogram zijn gegeven: twee opeenvolgende zijden: AB = 11,304 dM en BC = 18,015 dM; ∠ ABC = 103°15′7″. Bereken de deelen, waarin de diagonalen de hoeken verdeelen.
12. De diagonalen van een parallelogram zijn resp. 181,33 en 157,02 cM. Zij snijden elkander onder een hoek van 56°19′46″. Bereken de hoeken en de zijden van dit parallelogram.
13. Van een trapezium zijn de evenwijdige zijden 26,347 en 15,083 dM. De opstaande zijden zijn 17,524 en 24,816 dM. Men vraagt de hoeken en de diagonalen van dit trapezium.
14. Gegeven zijn van een trapezium: de diagonalen, die resp. 11,881 en 14,253 dM zijn en de evenwijdige zijden, die resp. 7,937 en 16,162 dM lang zijn. Men vraagt de hoeken en de opstaande zijden; verder den hoek tusschen de diagonalen en de deelen, waarin de hoeken van het trapezium door de diagonalen verdeeld worden.
15. Bereken de opstaande zijden van een trapezium, wanneer de evenwijdige zijden 12,991 en 5,143 cM lang zijn en de basishoeken 71°43′17″ en 43°5′42″ bedragen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

16. In △ ABC is een lijn CD getrokken. Op deze lijn CD ligt een punt P op een afstand = 6,319 cM van C. Verder maakt CD hoeken resp. = 29°31′18″ en 34°11′24″ met CA en CB. Vervolgens zijn de hoeken APD en BPD resp. = 55°14′5″ en 67°18′6″. Bereken de zijden en hoeken van den driehoek benevens PA, PB en PD.

17. Van een gelijkbeenig trapezium zijn de stukken, waarin de diagonalen elkaar verdeelen, 14,73 en 10,06 M. De opstaande zijde is 12,51 M. Bereken de evenwijdige zijden en de hoeken.

18. Van een „willekeurigen" vierhoek ABCD is AD = 5,3471 dM; DC = 18,9716 dM en CB = 13,011 dM; ∠ D = 71°16′19″; ∠ C = 44°59′59″. Men vraagt de onbekende elementen.

19. Van vierhoek PQRS is SP = 11,011 cM; PQ = 15,816 cM; ∠ S = 107°13′8″; ∠ P = 82°25′15″ en ∠ Q = 56°24′29″. Bereken de onbekende elementen.

20. Men vraagt de onbekende elementen van vierhoek ABCD, wanneer gegeven zijn: de diagonalen BD en AC resp. = 22,34 cM en 31,99 cM, de zijden AD en DC resp. 10,47 cM en 29,15 cM; ten slotte ∠ A = 106°5′55″.

21. Van △ ABC is gegeven: a = 80,34 M; C = 63,17 M; B = 69°15′54″. Bereken h_b.

22. In △ ABC is c = 29,815 cM; A = 41°39′12″; B = 57°43′8″; Men vraagt de bisectrice van ∠ C.

23. Van △ PQR is r = 51,04 M; p = 49,15 M; Q = 84°53′47″. Bereken de zwaartelijn PM.

24. In △ ABC is a = 37,133 cM; b = 34,615 cM en c = 18,017 cM. Men trekt de bisectrice van ∠ B en laat uit A en C daarop de loodlijnen AF en CE neer. Men vraagt de lengte van EF.

25. Gegeven van △ ABC: a = 19 dM; c = 12 dM; B = 73°18′5″. Bereken de deelen, waarin B verdeeld wordt door Z_b.

26. In △ ABC is c = 41,047 M, a = 34,906 M; ∠ C = 111°11′27″. De zwaartelijn uit B snijdt AC in E en de hoogtelijn uit A in F. Bereken AF, FD, AE, EC, BF, BE en EF.

Sommen en verschillen van elementen. Zie vooral de opm. op blz. 88.

27. Van een △ zijn gegeven: de zijde AB = 101, de som der beide andere zijden = 383 en het verschil der hoeken A en B = 7°40′14″. Gevraagd: de onbekende elementen.

28. Van een △ zijn gegeven: de basis = 37,25 M, de top-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

hoek = 76°18′56″ en de som der opstaande zijden = 58,076 M. Gevraagd: de onbekende zijden en hoeken.

29. Van △ ABC is $a - b = 1{,}9891$ dM, $\angle A = 60°51'$ en $c = 17{,}6344$ dM. Bereken $\angle C$.

30. Twee △△ hebben a, b, en A gelijk, maar zijn niet congruent. Bewijs, dat de som hunner oppervlakken gelijk is aan $\frac{1}{2}b^2 \sin 2A$.

31. De omtrek van △ ABC is 42 dM, $\angle A = 45°12'16''$ en $\angle B = 73°18'17''$. Bereken den straal van den omgeschreven cirkel.

32. In een △ is $c = 711$, $a - b = 432$ en $C = \frac{1}{2}(A - B)$. Bereken de hoeken en de onbekende zijden.

33. Van een △ is de eene grondhoek 120°15′30″, de basis 3,787 M en het verschil der opstaande zijden 2,274 M. Bereken de onbekende elementen.

34. Van △ ABC zijn gegeven: $\angle A = 60°$, $b + c = 20$ en $a + c = 24$. Bereken de onbekende hoeken en de zijden.

35. Gevraagd de onbekende elementen van een △, als gegeven zijn: $\angle A$; $a + b = m$ en $a + c = n$.

36. Als in een driehoek $b - a = nc$, dan heeft men:

1) $\cos(A + \frac{1}{2}C) = n \cos \frac{1}{2}C$;

2) $\cot \frac{B - A}{2} = \frac{1 + n \cos B}{n \sin B}$. Bewijs.

§ 57.

Het oppervlak van den driehoek. De berekening van het oppervlak van den rechthoekigen en den gelijkbeenigen driehoek zal wel nimmer aanleiding tot moeilijkheden geven. Voor den scheefhoekigen driehoek zullen hier de formules worden afgeleid, die in de vijf hoofdgevallen van § 55 toegepast kunnen worden. De eenvoudigste formule voor het oppervlak behoort bij het IIIde geval. Wij kunnen echter zonder bezwaar de volgorde van § 55 behouden.

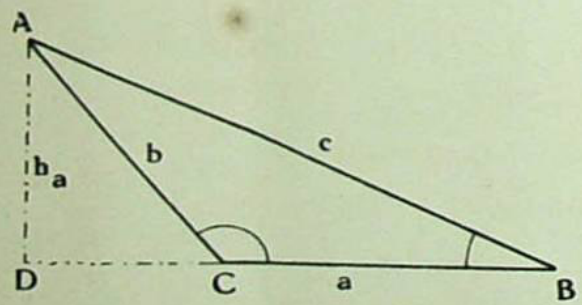


Fig. 33.

1e Geval. Gegeven: *a, B en C.*

Gevraagd: *O.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Oplossing: $O = \frac{1}{2}h_a \times a$; $h_a = b \sin C$;

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin (B + C)}; \quad h_a = \frac{a \sin B \sin C}{\sin (B + C)}.$$

96. . . . . $\mathbf{O = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}}$.

IIde Geval. Gegeven: a, B en A. **Gevraagd:** O.

Oplossing. Wanneer men in formule 96 C vervangt door $180° - (A + B)$ en B + C door $180° - A$, heeft men terstond:

97. . . . . $\mathbf{O = \frac{a^2 \sin B \sin (A + B)}{2 \sin A}}$.

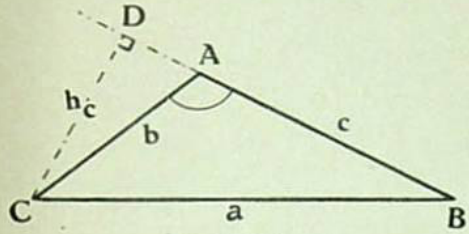


Fig. 34.

IIIde Geval.

Gegeven: A, b en c.

Gevraagd: O.

Oplossing:

$O = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}cb \sin(180° - A) = \frac{1}{2}bc \sin A$.

Wij hebben dus de

Stelling. Het oppervlak van een willekeurigen driehoek is gelijk aan het halve product van twee zijner zijden en den sinus van den ingesloten hoek:

98. . . . . $\mathbf{O = \frac{1}{2} bc \sin A}$.

Omdat een parallelogram door een diagonaal verdeeld wordt in twee gelijke driehoeken en de oppervlakte van één daarvan is $\frac{1}{2}bc \sin A$, vindt men:

Het oppervlak van een parallelogram is gelijk aan het gedurig product van twee zijden en den sinus van den ingesloten hoek.

Men kan natuurlijk ook *eerst* de oppervlakte van een par. vinden en daaruit die van een driehoek.

IVde Geval. Gegeven: a, b en A. **Gevraagd:** O.

Oplossing: $O = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \sin (A + B)$.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}, \text{ dus } \sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

Onder voorwaarde, dat $b \sin A < a$, volgen hieruit 2 waarden voor B, die *beide* dienst kunnen doen, als $a < b$ en dus twee zijden en de hoek tegenover de kleinste daarvan gegeven zijn. In het geval, dat $a > b$ is, mag voor B alleen de scherpe hoek genomen worden, die uit de laatste vergelijking volgt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Uit $O = \frac{1}{2}ab \sin (A + B)$ vindt men dan 2 waarden of 1 waarde voor het gevraagde oppervlak al naarmate $a < b$ of $a > b$.

Opm. I. Als $a = b \sin A$, is $B = 90°$ en wordt

$$O = \frac{1}{2}ab \cos A.$$

Opm. II. Een formule, waardoor O rechtstreeks wordt uitgedrukt in a, b en A, kan men vinden door $\sin (A + B)$ te ontwikkelen:

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \pm \sin A \sqrt{1 - \frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}} +$$

$$+ \cos A \times \frac{b \sin A}{a} = \frac{b \sin A \cos A}{a} \pm \frac{\sin A \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}}{a}.$$

Dus $O = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sin A}{a} (b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A})$ of

99. . . . . $\mathbf{O = \frac{1}{2} b \sin A (b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A})}$.

Deze formule is niet logarithmisch en daardoor veel minder geschikt voor de berekening dan de boven gevonden twee formules:

100. . . . . $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{\sin B = \frac{b \sin A}{a}} \\ \mathbf{O = \frac{1}{2} ab \sin (A + B)}. \end{array} \right.$ en

Zij laat echter gemakkelijk de gevolgtrekkingen toe:

1°. Voor een *reëele* oplossing is vereischt:

$$a \geqq b \sin A.$$

2°. Voor het — onder deze voorwaarde, — bestaan van twee (positieve) oplossingen is noodig:

$$b \cos A > \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A};$$
$$b^2 \cos^2 A > a^2 - b^2 \sin^2 A;$$
$$b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) > a^2;$$
$$b^2 > a^2; \quad \text{dus } b > a.$$

Als $b \cos A < \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$, kan in formule 99 alleen het +teeken gebruikt worden; deze voorwaarde stemt, zooals onmiddellijk is in te zien, overeen met: $b < a$.

Vde Geval. Gegeven: a, b en c. **Gevraagd:** O.

Oplossing. De Vlakke Meetkunde geeft ons terstond de formule:

$$O = \sqrt{s(s - a)\ (s - b)\ (s - c)}.$$

Deze kan goniometrisch als volgt worden afgeleid:

$$O = \frac{1}{2}bc \sin A = bc \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A =$$

$$= bc \sqrt{\frac{s(s - a)\ (s - b)\ (s - c)}{b^2 c^2}} = \sqrt{s(s - a)\ (s - b)\ (s - c)}.$$

Vergelijk ook formule 91 blz. 91.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opgaven.

§ 58. Bereken het oppervlak van een driehoek uit de volgende gegevens :

1. $a = 69{,}503$ cM ; $B = 47°22'16''$; $C = 59°19'34''$.
2. $b = 81{,}431$ M ; $A = 96°15'39''$; $B = 27°5'26''$.
3. $a = 482{,}17$ dM ; $B = 36°8'21''$; $A = 53°1'25''$.
4. $c = 4{,}1095$ M ; $A = 112°15'49''$; $C = 40°9'31''$.
5. $a = 191{,}37$ cM ; $b = 240{,}86$ cM ; $C = 61°2'58''$.
6. $b = 12{,}643$ M ; $c = 15{,}088$ M ; $A = 129°4'41''$.
7. $a = 27{,}015$ dM ; $b = 24{,}998$ dM ; $A = 48°49'5''$.
8. $a = 365{,}25$ M ; $b = 397{,}04$ M ; $A = 21°15'13''$.
9. $b = 28{,}206$ cM ; $c = 23{,}519$ cM ; $B = 72°3'35''$.
10. $c = 1003{,}4$ M ; $a = 1247{,}3$ M ; $A = 93°11'17''$.
11. $b = 613{,}72$ cM ; $c = 629{,}41$ cM ; $C = 50°50'18''$.
12. $a = 3{,}5247$ dM ; $b = 4{,}2192$ dM ; $c = 3{,}1915$ dM.
13. $a = 38{,}919$ cM ; $b = 51{,}892$ cM ; $c = 64{,}865$ cM.
14. $b = 14{,}807$ cM ; $A = 67°13'6''$; $C = 45°33'48''$.

15. Van een parallelogram is de grootste diagonaal 98,077 M, de grootste zijde = 69,914 M en de scherpe hoek = $44°9'37''$. Bereken het oppervlak.

16. Van een parallelogram is de kleinste diagonaal 121,31 cM ; de hoek, dien zij maakt met de kleinste zijde is $69°18'5''$; met de grootste zijde maakt zij een hoek van $54°29'44''$. Men vraagt het oppervlak, de grootste diagonaal, den hoek tusschen beide diagonalen en de zijden.

17. Bereken het oppervlak en de onbekende elementen van een parallelogram als gegeven zijn : de diagonalen, die 20,369 M en 14,816 M lang zijn, terwijl de hoek daartusschen $62°18'47''$ is.

18. De diagonalen van een parallelogram zijn 86,041 en 69,032 M lang ; de kleinste zijde is 56,617 M. Bereken het oppervlak.

19. Men vraagt de onbekende elementen en het oppervlak van een parallelogram, als de diagonalen 45,61 en 27,17 M lang zijn, terwijl de grootste zijde 31,53 M is.

20. Van een trapezium is de basis 34,872 dM ; de basishoeken zijn $66°29'37''$ en $44°1'23''$; de hoek, dien de kleinste diagonaal met de basis maakt, is $43°28'3''$. Bereken het oppervlak.

21. Bereken het oppervlak van een gelijkbeenig trapezium,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

als de basis = 12,805 cM is, elke opstaande zijde 8,914 cM en de ingesloten hoek 63°8′6″.

22. Van een trapezium is de basis 49,31 cM ; de opstaande zijden resp. 28,14 en 33,82 cM ; de grootste hoek aan de basis is 59°13′49″. Men vraagt het oppervlak.

23. Bereken het oppervlak van een trapezium uit de volgende gegevens : de diagonalen zijn 18,192 en 20,133 M ; de tegenover de basis gelegen stompe hoek daartusschen is 107°44′19″ ; de basis is 21,438 M.

24. Van trapezium ABCD zijn gegeven : de evenwijdige zijden AB en CD resp. = 31,476 en 19,173 dM ; de diagonalen AC en BD zijn resp. = 26,564 en 32,759 dM. Men vraagt het oppervlak.

25. Van vierhoek ABCD is :
AB = 7,827 cM ; BC = 5,904 cM ; CD = 14,109 cM ; BD = 18,403 cM en AC = 10,315 cM. Hoe groot is het oppervlak ?

26. *Gegeven* van vierhoek ABCD :
AB = 41,66 dM ; BC = 50,31 dM ; de diagonalen AC en BD resp. = 72,33 en 99,48 dM ; de tegenover AB gelegen scherpe hoek tusschen de diagonalen = 58°51′49″.
Gevraagd : de onbekende elementen en het oppervlak.

27. In vierhoek PQRS is PQ = 8,81 cM, RS = 13,44 cM ; ∠ P = 71°13′1″ ; ∠ Q = 117°5′56″ en ∠ R = 111°18′27″. Bereken de onbekende elementen en het oppervlak.

28. Van een driehoek ABC zijn gegeven :
∠ A = 60°20′40″ ; ∠ B = 59°39′20″ ; de inhoud 100 M². Bereken de zijde, die tegenover den derden hoek ligt. H. B. S. (1883).

29. De basis van een driehoek is 14,781 M, het verschil der opstaande zijden 2,834 M en de kleinste hoek aan de basis 25°11′20″. Bereken de opstaande zijden en de oppervlakte van den driehoek. Idem (1904).

30. Van een driehoek ABC is de zijde AB = 30, de zijde BC = 37 cM en de hoek ABC = 47°12′40″. Op AB als basis wordt een gelijkbeenige driehoek ADC beschreven, die evenveel oppervlak heeft als △ ABC. Bereken ∠ ADC. Idem (1885).

31. In een driehoek ABC is bekend :
AC = 177,285, BC = 89,214, ∠ C = 69°10′12″. Men vraagt op AC een punt M te vinden, waaruit een loodlijn MP op AB kan neergelaten worden, waardoor de driehoek in twee gelijke deelen wordt verdeeld. Idem (1894).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK X.

Merkwaardige lijnen in den driehoek.

§ 59.

De berekening der hoogtelijnen in de vijf gevallen. Wij zullen allereerst de berekening dezer lijnen aanduiden voor de gevallen, die in § 55 werden onderscheiden.

Geval I. Gegeven: a, B en C.

Hier vindt men voor h_b en h_c terstond $a\sin C$ en $a\sin B$.

Voor h_a leidt men zonder moeite af:

$$h_a = \frac{a\sin B \sin C}{\sin (B + C)}.$$ (Zie blz. 103).

Geval II. Gegeven: a, A en B.

Weer vindt men direct $h_b = a\sin (A + B)$ en $h_c = a\sin B$.

Voor h_a vindt men weer gemakkelijk:

$$h_a = \frac{a\sin B \sin (A + B)}{\sin A}.$$ (Zie blz. 103).

Geval III. Gegeven: b, c en A.

Ook nu kunnen h_b en h_c weer, omdat ze in rechthoekige driehoeken worden gevonden, direct worden uitgedrukt n.l. door $c\sin A$ en $b\sin A$.

Ter bepaling van h_a kan men eerst door den tangensregel B (en C) berekenen en dan h_a vinden uit:

$$h_a = c\sin B \text{ of } h_a = b \sin C.$$

Als *alleen* h_a gevraagd wordt, kan men als volgt handelen:

$$h_a = \frac{O}{\frac{1}{2}a} = \frac{2O}{a} = \frac{bc\sin A}{a}.$$

In § 55 vonden wij in dit geval ter bepaling van a:

$$\left.\begin{aligned} a &= (b + c)\sin\varphi; \\ \cos\varphi &= \frac{2\sqrt{bc}}{b + c}\cos\tfrac{1}{2}A. \end{aligned}\right\}$$

Hier zal dus:

$$h_a = \frac{bc\sin A}{(b + c)\sin\varphi};\quad \cos\varphi = \frac{2\sqrt{bc}}{(b + c)}\cos\tfrac{1}{2}A.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Men kan deze formules gemakkelijk wijzigen tot:

$$h_a = \sin \tfrac{1}{2}A \cot \varphi \sqrt{bc}\,; \quad \cos \varphi = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cos \tfrac{1}{2}A.$$

Geval IV. Gegeven: a, b en A.

Men vindt onmiddellijk: $h_c = b \sin A$.

Men berekene dan B en dus C. Men vindt hier 2, 1 of geen waarden. Daarna heeft men terstond alle noodige gegevens voor de gevraagde hoogtelijnen.

Geval V. Gegeven: a, b en c.

Uit de Vlakke Meetkunde weet men:

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Deze formule wordt in de Trigonometrie aldus gevonden:

$$h_a = b \sin C = 2b \sin \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}C = 2b \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \times \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} =$$

$$\frac{2b}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

§ 60.

De stukken, waarin de hoogtelijnen de zijden verdeelen.

Deze stukken kwamen vroeger reeds ter sprake bij de z.g. projectie-eigenschap. Hier zal een eigenschap van deze lijnen worden bewezen.

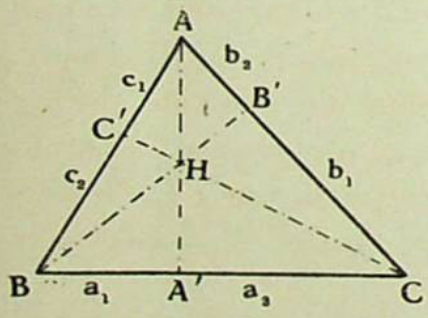


Fig. 35.

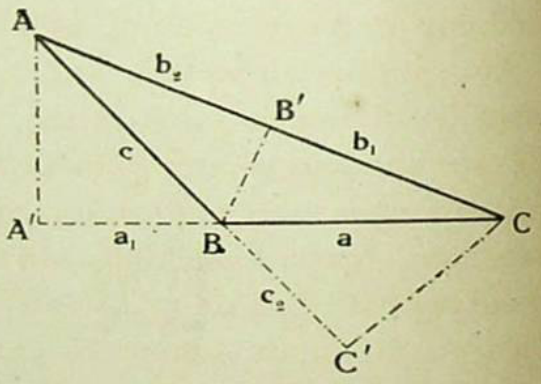


Fig. 36.

Wij beschouwen eerst een scherphoekigen driehoek (zie fig. 35). De stukken, waarin a, b en c door de bij die zijden behoorende hoogtelijnen worden verdeeld, zullen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 en c_2 genoemd worden. Dan is:

$$a_1 = c \cos B\,; \quad a_2 = b \cos C\,;$$
$$b_1 = a \cos C\,; \quad b_2 = c \cos A\,;$$
$$c_1 = b \cos A\,; \quad c_2 = a \cos B.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Wij zien onmiddellijk : $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$ en hebben dus bewezen de

Stelling. Wordt elke zijde van een driehoek op de beide andere geprojecteerd, dan is het product van de drie projecties, die geen eindpunt gemeen hebben, gelijk aan dat der drie andere. (Dit is natuurlijk een bijzonder geval van „Ceva" ; zie § 64).

Het bewijs van deze stelling geldt voorloopig slechts voor een scherphoekigen driehoek.

Beschouwen wij nu den stomphoekigen driehoek ABC van fig. 36.

Hier hebben wij :

proj. van c op $a = BA' = c \cos ABA' = -c \cos B = a_1$;

proj. van b op $a = CA' = b \cos C = a_2$;

proj. van a op $b = a \cos C = b_1$;

proj. van c op $b = c \cos A = b_2$;

proj. van b op $c = AC' = b \cos A = c_1$;

proj. van a op $c = BC' = a \cos CBC' = -a \cos B = c_2$.

Nu is $a_1b_1c_1 = -abc \cos A \cos B \cos C$, maar ook :

$$a_2b_2c_2 = -abc \cos A \cos B \cos C.$$

De stelling geldt dus ook voor een *stomphoekigen* driehoek.

Opmerking. Men kan de stelling ook aldus uitdrukken :

De voetpunten van de hoogtelijnen verdeelen de zijden van een driehoek zóó, dat het product van drie stukken, die geen eindpunt gemeen hebben, gelijk is aan dat der drie andere.

Als „stukken", waarin een zijde verdeeld wordt, moet men dan altijd beschouwen twee lijnen, wier *som* gelijk is aan die zijde. Bij stomphoekige driehoeken krijgen dan de stukken, die op het *verlengde* van een zijde liggen een negatief teeken. De stukken bijv., waarin de zijde a van den driehoek van fig. 36 verdeeld wordt, zijn dan CA' en $-BA'$, omdat $CA' + -BA' = a$. Men ga dit in de figuur verder na.

In dezelfde figuur vindt men **de afstanden van het hoogtepunt tot de zijden en tot de hoekpunten.**

$$HA' = a_1 \operatorname{tg} B'BC = c \cos B \operatorname{tg} (90° - C) = c \cos B \cot C.$$

Verder is $c \cos B \cot C = \dfrac{c \cos B \cos C}{\sin C} = \dfrac{b \cos B \cos C}{\sin B} = b \cos C \cot B$;

dit vindt men rechtstreeks, door te nemen $HA' = a_2 \operatorname{tg} (90° - B)$.

Evenzoo vindt men :

$$HB' = a \cos C \cot A = c \cos A \cot C ;$$
$$HC' = b \cos A \cot B = a \cos B \cot A.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Verder is $HA = \frac{b_2}{\cos A'AC} = \frac{c \cos A}{\sin C} = \frac{a \cos A}{\sin A} = a \cot A$; men vindt:

101. . . . $HA = a \cot A$; $HB = b \cot B$; $HC = c \cot C$.

§ 61.

De voetpuntsdriehoek. I. Bij een scherphoekigen driehoek.

A. **De hoeken.**

Beschouwen wij den scherphoekigen driehoek van fig. 37. De Vlakke Meetkunde leert, dat de driehoeken, die den voetpuntsdriehoek omsluiten, allen gelijkvormig zijn met den geheelen driehoek. Volledigheidshalve zij dit bewijs hier in 't kort opgenomen. Uit de gelijkvormigheid van de rechthoekige driehoeken BB'C en AA'C volgt:

$CB' : CA' = a : b$; hieruit blijkt dan, dat $\triangle A'B'C \sim \triangle ABC$, want deze hebben $\angle C$ gemeen en de zijden om dien hoek evenredig. Op dezelfde wijze blijkt de gelijkvormigheid der twee andere driehoeken met $\triangle ABC$.

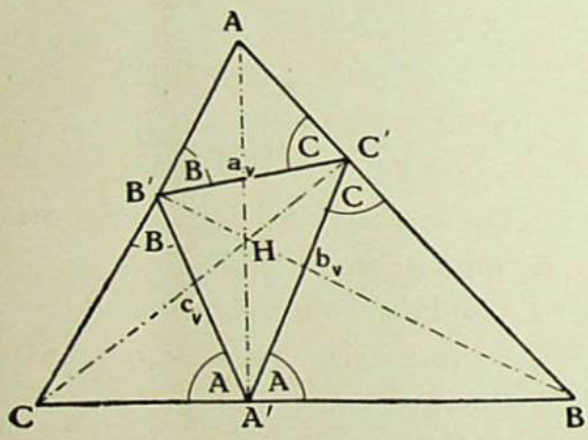


Fig. 37.

Uit deze gelijkvormigheden volgt de grootte der hoeken, zooals deze in de figuur aangegeven zijn.

Bij A', B' en C' krijgt men buiten den voetpuntsdriehoek telkens twee gelijke hoeken, resp. gelijk aan A, B en C.

De hoeken AA'B' en AA'C' worden dan beide $90° - A$; evenzoo blijken B' en C' gehalveerd te worden. Hieruit volgt dan allereerst de waarheid der bekende eigenschap:

De hoogtelijnen van een driehoek zijn de bisectrices van den voetpuntsdriehoek.

Verder zien wij:

$A' = 180° - 2A$, $B' = 180° - 2B$ en $C' = 180° - 2C$.

B. **De zijden.** a_v, b_v en c_v.

In $\triangle A'B'C$ is $\frac{A'B'}{\sin C} = \frac{CA'}{\sin B}$; $\frac{c_v}{\sin C} = \frac{b \cos C}{\sin B}$;

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$c_v = \frac{b\cos C \sin C}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \times \cos C \sin C = c\cos C;$$

evenzoo vindt men de beide andere; dus:

102. . . . $\mathbf{a_v = a\cos A;\ b_v = b\cos B;\ c_v = c\cos C.}$

C. **Het oppervlak.**

$O_v = \frac{1}{2}a_v\, b_v \sin C' = \frac{1}{2}ab \cos A \cos B \sin(180° - 2C) =$ $\frac{1}{2}ab \cos A \cos B \times 2\sin C \cos C = ab \sin C \times \cos A \cos B \cos C$, dus:

103. . . . . $\mathbf{O_v = 2O \cos A \cos B \cos C.}$

II. Bij een stomphoekigen driehoek.

AA′, BB′ en CC′ gaan, genoegzaam verlengd, weer door één punt.

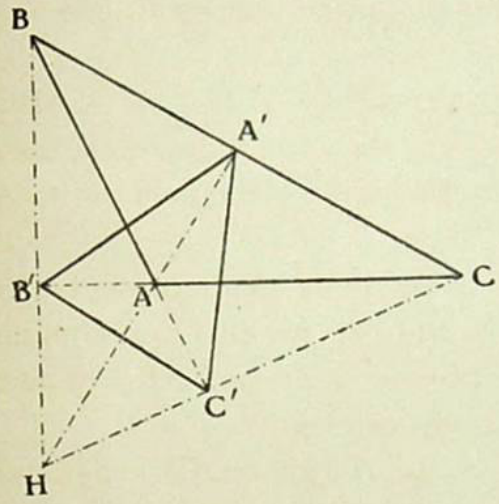


Fig. 38.

Beschouw nu △ HBC. Hierin zijn HA′, CB′ en BC′ hoogtelijnen, gaande door het hoogtepunt A. A′B′C′ is dus ook voetpuntsdriehoek van △ HBC.

Dus is

$\angle HA'B' = \angle HA'C' = 90° - H.$

$\angle BC'B' = \angle BC'A' = 90° - \angle B'BA' = C.$

$\angle CB'C' = \angle CB'A' = 90° - \angle A'CC' = B.$

De *hoeken* van den voetpuntsdriehoek zijn dus:

$$B' = 2B;\ C' = 2C;$$

$A' = 180° - 2H$ of $= 180° - 2(B + C) = 180° - 360° + 2A = 2A - 180°.$

(Hieruit volgt ook: $H = B + C$).

Voor de *zijden* heeft men volgens B:

$$a_v = a\cos H = a\cos(B + C) = -a\cos A;$$

$$b_v = BH \cos BCH = \frac{BA'}{\cos(90° - C)} \sin B = \frac{c\cos B \sin B}{\sin C} =$$

$$= \frac{b}{\sin B} \cos B \sin B = b\cos B;$$

$$c_v = CH \cos B'BA' = \frac{A'C}{\cos(90° - B)} \cos(90° - C) = \frac{b\cos C \sin C}{\sin B} =$$

$$= \frac{c}{\sin C} \cos C \sin C = c\cos C.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Voor de zijden vindt men dus precies dezelfde uitdrukkingen als bij een scherphoekigen driehoek; alleen heeft de cos van den der stompen hoek een min-teeken.

Voor het *Oppervlak* vinden wij hier:

$$O_v = -2O \cos A \cos B \cos C.$$

§ 62.

De bisectrices. Ook hier zullen we trachten in de vijf bekende gevallen de drie bisectrices te berekenen.

Geval I. Gegeven: a, B en C.

De deellijn d_b van $\angle B$ vindt men direct uit den sinusregel: $d_b : \sin C = a : \sin(A + \frac{1}{2}B)$; omdat $A + \frac{1}{2}B = 180° - (\frac{1}{2}B + C)$, vindt men:

$$d_b = \frac{a \sin C}{\sin(\frac{1}{2}B + C)} \text{ en evenzoo } d_c = \frac{a \sin B}{\sin(B + \frac{1}{2}C)}.$$

Met den sinusregel vindt men $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ en nogmaals met dezen regel $d_a : \sin C = \frac{a \sin B}{\sin A} : \sin(B + \frac{1}{2}A)$.

Vervangt men A door $180° - (B + C)$, dan wordt deze evenredigheid: $d_a : \sin C = \frac{a \sin B}{\sin(B + C)} : \cos \frac{1}{2}(B - C)$; waaruit:

$$d_a = \frac{a \sin B \sin C}{\sin(B + C) \cos \frac{1}{2}(B - C)}.$$

Geval II. Gegeven: a, A en B.

Ook hier direct: $d_b : \sin C = a : \sin(A + \frac{1}{2}B)$; vervanging van $\sin C$ door $\sin(A + B)$ geeft d_b uitgedrukt in de gegevens. Weer met den sinusregel vindt men:

$d_c : \sin B = a : \sin(A + \frac{1}{2}C) = a : \sin(90° + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = a : \cos \frac{1}{2}(A - B)$, waaruit:

$$d_c = \frac{a \sin B}{\cos \frac{1}{2}(A - B)}.$$

Voor de zijde c vindt men $\frac{a \sin C}{\sin A}$; weer geeft de sinusregel:

$d_a : \sin B = \frac{a \sin C}{\sin A} : \sin(B + \frac{1}{2}A)$, dus:

$$d_a = \frac{a \sin(A + B) \sin B}{\sin A \sin(\frac{1}{2}A + B)}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Geval III. Gegeven: *b, c en A.*

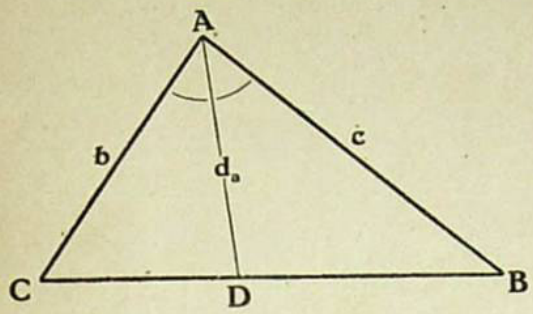


Fig. 39.

Omdat men met den tangensregel de hoeken B en C kan berekenen en dus ook ½B en ½C, kan men eenvoudig d_c, d_b en ook d_a berekenen. De bisectrice van ∠ A kan echter al heel eenvoudig direct bepaald worden door invoering van de oppervlakken:

$$\text{Opp. } \triangle ACD = \tfrac{1}{2}bd_a \sin \tfrac{1}{2}A$$
$$+ \quad " \quad \triangle ABD = \tfrac{1}{2}cd_a \sin \tfrac{1}{2}A$$
$$\tfrac{1}{2}bc \sin A = \tfrac{1}{2}d_a (b + c) \sin \tfrac{1}{2}A,$$

waaruit terstond volgt:

$$d_a = \frac{bc \sin A}{(b + c)\sin \tfrac{1}{2}A} = \frac{2bc \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}A}{(b + c) \sin \tfrac{1}{2}A}, \text{ dus}$$

104. . . . . $\mathbf{d_a = \frac{2bc \cos \frac{1}{2}A}{b + c}}$.

Geval IV. Gegeven: *a, b en A.*

Omdat met den sinusregel direct ∠ B kan worden berekend, kan dit geval teruggebracht worden op II of I.

Geval V. Gegeven: *a, b en c.*

De Vlakke Meetkunde geeft $d_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$.

Deze formule is logarithmisch en volgt onmiddellijk uit 104.

Volgens de formules van Gauss toch is $\cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ en dus $d_a = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$.

§ 63.
De zwaartelijnen.

De congruentie van de driehoeken AED en BFD geeft AE = BF. Noemt men de hoeken, die de zwaartelijn vormt met *a* en *b* resp. α en β, dan is:

$AE = b\sin\beta = BF = a\sin\alpha$; dus

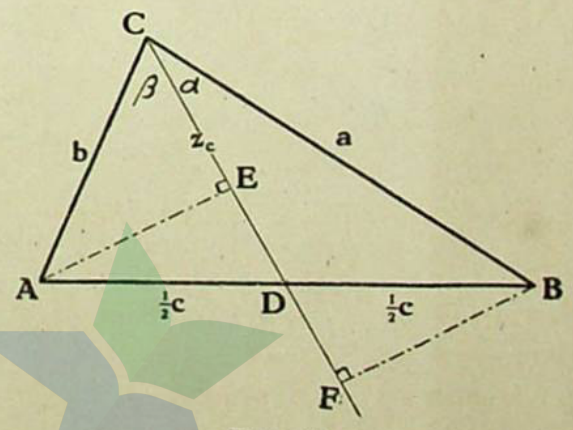


Fig. 40.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

105. . . . . . $\sin\alpha : \sin\beta = b : a$;

in woorden: *De sinussen van de hoeken, die de zwaartelijn maakt met a en b, zijn omgekeerd evenredig met die zijden.*

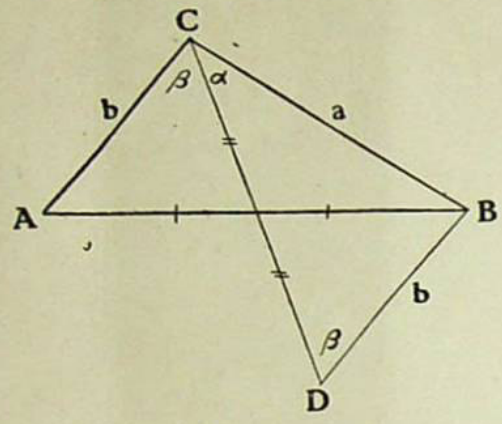


Fig. 41.

In de planimetrie verlengt men dikwijls de zwaartelijn met zich zelf; ook dat geeft hier een verrassend resultaat:

In $\triangle$ BCD heeft men dadelijk:

$$\sin\alpha : \sin\beta = b : a.$$

Verder vindt men nog in $\triangle$ DCB volgens den cosinusregel:

$(2z_c)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos DBC$;

omdat $\angle DBC = 180° - C$, volgt hieruit terstond:

106. . . . . . $z_c^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab\cos C)$,

waarbij dus in het derde geval (2 zijden gegeven en de ingesloten hoek) de tusschenliggende zwaartelijn op overeenkomstige wijze wordt uitgedrukt als de derde zijde.

Het zal niet noodig zijn in de vijf gevallen de zwaartelijnen uit te drukken in de gegevens, omdat deze vraagstukken alle heel eenvoudig zijn; geval I kan geheel worden behandeld met den sinusregel; de hoeken α en β (zie fig. 40 en 41) kunnen direct berekend worden door op te merken:

$$\sin\alpha : \sin\beta = b : a = \sin B : \sin A,$$

waaruit: $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\sin B + \sin A}{\sin B - \sin A}$; met de formules 69 en 70

geeft dit: $\frac{\text{tg } \frac{1}{2}C}{\text{tg } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\text{tg } \frac{1}{2}(B + A)}{\text{tg } \frac{1}{2}(B - A)}$ of

$\text{tg } \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \text{cotg}^2 \frac{1}{2}(B + A) \text{ tg } \frac{1}{2}(B - A)$; omdat $\alpha + \beta$ bekend is, weet men direct α en β. Geval II is hetzelfde als het eerste; geval III, twee zijden gegeven en de ingesloten hoek, kan voor twee zwaartelijnen direct worden behandeld met den sinusregel, terwijl de tusschenliggende zwaartelijn door form. 106 wordt bepaald. Zijn gegeven, zooals in het IVde geval a, b en B, dan heeft men ter bepaling van c volgens den cosinusregel:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, waaruit $c = a\cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B}$;

als de derde zijde bekend is, kan men alle zwaartelijnen direct

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

bepalen. [1]) Het Vde geval wordt opgelost met de bekende formules uit de planimetrie : $z_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$; enz.

§ 64.
Theorema van Ceva.

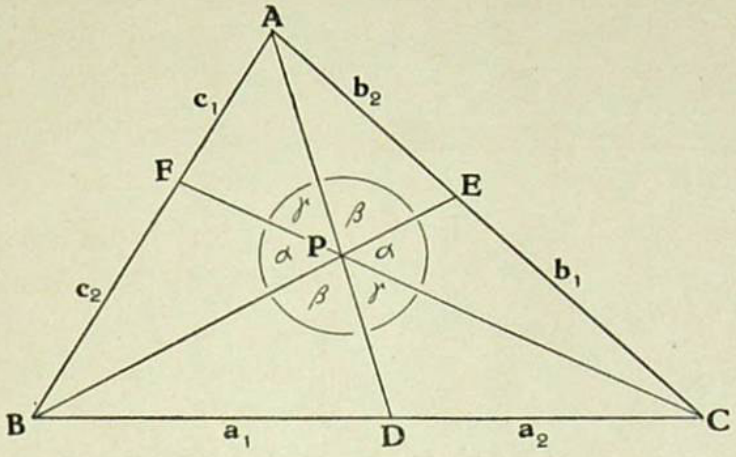


Fig. 42.

Stelling. Drie door één punt gaande hoektransversalen verdeelen de overstaande zijden van een driehoek zóó, dat het product van drie stukken, die geen eindpunt gemeen hebben, gelijk is aan dat der drie andere.

Bewijs. Laten AD, BE en CF drie willekeurige transversalen zijn, die gaan door hetzelfde punt P binnen den driehoek ABC. Noem de twee deelen, waarin $\angle$ BPC verdeeld wordt door APD, β en γ; dan is ook $\angle$ APE $= \beta$ en $\angle$ APF $= \gamma$. Noem dan nog $\angle$ CPE $= \alpha$, $\angle$ BPF $= \alpha$. De stukken, waarin a, b en c verdeeld worden, mogen a_1, a_2; b_1, b_2; c_1 en c_2 heeten.

Met het oog op bovenstaande figuur kan men nu onmiddellijk de volgende gelijkheden opschrijven :

$$\frac{a_1}{\sin\beta} = \frac{PB}{\sin PDB}; \qquad \frac{a_2}{\sin\gamma} = \frac{PC}{\sin PDC} = \frac{PC}{\sin PDB};$$

$$\frac{b_1}{\sin\alpha} = \frac{PC}{\sin PEC}; \qquad \frac{b_2}{\sin\beta} = \frac{PA}{\sin PEA} = \frac{PA}{\sin PEC};$$

$$\frac{c_1}{\sin\gamma} = \frac{PA}{\sin PFA}. \qquad \frac{c_2}{\sin\alpha} = \frac{PB}{\sin PFB} = \frac{PB}{\sin PFA}.$$

Door de gelijkheden, die in beide kolommen bevat zijn, voor

[1]) Men kan ook door den sinusregel tot een der vorige gevallen terugkeeren en dan meteen het aantal mogelijkheden onderzoeken.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

elke kolom afzonderlijk met elkaar te vermenigvuldigen, vindt men onmiddellijk : $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$.

Theorema van Menelaus.

Stelling. Als een transversaal twee zijden van een driehoek en het verlengde van de derde zijde (of de verlengden der drie zijden) snijdt, is het product van drie stukken, die geen eindpunt gemeen hebben, gelijk aan dat der drie andere.

Bewijs. Zij DEF een transversaal van $\triangle$ ABC, die a in E, b in F en het verlengde van c in D snijdt. Nu moeten wij aantoonen :

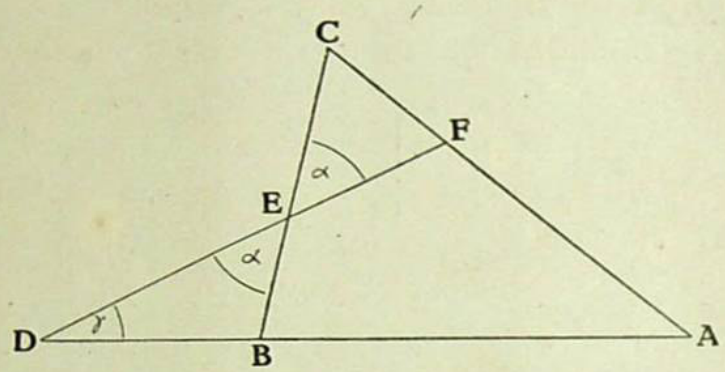


Fig. 43.

$$EC \times FA \times BD = BE \times CF \times AD.$$

Noem $\angle CEF = \alpha$ en $\angle BDE = \gamma$.

In $\triangle$ CEF is nu : $\dfrac{CE}{\sin CFE} = \dfrac{CF}{\sin \alpha}$;

in $\triangle$ FAD is verder : $\dfrac{FA}{\sin \gamma} = \dfrac{AD}{\sin AFD} = \dfrac{AD}{\sin CFE}$;

in $\triangle$ BDE hebben wij nog : $\dfrac{BD}{\sin \alpha} = \dfrac{BE}{\sin \gamma}$.

Door bovenstaande gelijkheden met elkaar te vermenigvuldigen zien wij onmiddellijk :

$$EC \times FA \times BD = BE \times CF \times AD.$$

§ 65. Stralen der om-, in- en aangeschreven cirkels.

I. *Geg.* a, B en C ; *Gevr.* R, r, r_a, r_b en r_c.

Opl. $R = \dfrac{a}{2 \sin (B + C)}$; uit $a = r(\cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C)$ volgt:

$$r = \frac{a}{\dfrac{\cos \frac{1}{2}B}{\sin \frac{1}{2}B} + \dfrac{\cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}C}} = \frac{a \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}(B + C)}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Verder is $r_a = s \operatorname{tg} \frac{1}{2} A$ en $s = \frac{1}{2} a (1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}) =$

$$= \tfrac{1}{2} a (1 + \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin C}{\sin A}) = \tfrac{1}{2} a \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A} =$$

$$= \tfrac{1}{2} a \frac{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A} = \frac{a \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (B + C)}.$$

Dus $r_a = \frac{a \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (B + C)} \times \cot \frac{1}{2} (B + C) = \frac{a \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} (B + C)}.$

Vervolgens blijkt $r_b = \frac{a \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (B + C)}$ en $r_c = \frac{a \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (B + C)}.$

II. *Geg.* a, A en B. *Gevr.* R, r, r_a, r_b en r_c.

Dit geval is onmiddellijk tot het vorige te herleiden.

Men vindt: $R = \frac{a}{2 \sin A}$; $r = a \frac{\sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} A}$;

$r_a = a \frac{\cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} A}$; $r_b = \frac{a \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} A}$;

$$r_c = \frac{a \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} A}.$$

III. *Geg.* b, c en A. *Gevr.* R, r, r_a, r_b en r_c.

Bepaal B (en C) door den tangensregel; daarna kan I of II worden toegepast.

IV. *Geg.* a, b en A. *Gevr.* R, r, r_a, r_b en r_c.

Bepaal B door den sinusregel; pas daarna weer I of II toe.

V. *Geg.* a, b en c. *Gevr.* R, r, r_a, r_b en r_c.

Hier heeft men terstond $R = \frac{abc}{4 \sqrt{s (s - a) (s - b) (s - c)}}$;

$r = \sqrt{\frac{(s - a) (s - b) (s - c)}{s}}$; $r_a = \sqrt{\frac{s (s - b) (s - c)}{s - a}}$; r_b en r_c door cyclische verwisseling.

§ 66. Het oppervlak van den koordenvierhoek.

In $\triangle$ ABD is $BD^2 = a^2 + d^2 - 2 ad \cos A$ en
in $\triangle$ CBD is $BD^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cos C$.

Hieruit volgt:

$$a^2 + d^2 - 2 ad \cos A = b^2 + c^2 + 2 bc \cos A,$$

zoodat: $$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2 (ad + bc)}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nu is $1 - \cos A = \frac{-(a-d)^2 + (b+c)^2}{2(ad+bc)} =$

$$\frac{(a+b+c-d)(-a+b+c+d)}{2(ad+bc)}.$$

Wanneer nu $a+b+c+d = 2s$ gesteld wordt, is

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2(s-a)(s-d)}{ad+bc} \text{ of}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}.$$

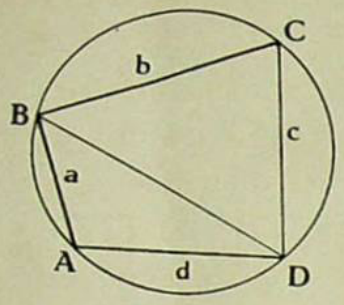


Fig. 44.

Op dezelfde wijze vindt men:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}}.$$

Verder is dan:

$$O = \tfrac{1}{2} ad \sin A + \tfrac{1}{2} bc \sin A = (ad+bc) \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A =$$

$$= (ad+bc) \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ad+bc} =$$

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Opgaven.

§ 67. **1.** Van een driehoek zijn gegeven: de hoeken en de zijde a; bereken de stukken, waarin deze wordt verdeeld door de hoogtelijn AD. Na de alg. oplossing $\angle A = 47°13'20''$, $\angle B = 59°16'40''$ en $a = 27{,}414$ dM.

2. Van een driehoek zijn de hoogtelijnen 42 M, 30 M en 35 M. Bereken de hoeken van dien driehoek.

3. Van $\triangle$ ABC is de basis AB = 24,56 M, $\angle A = 47°50'12''$ en $\angle B = 112°14'26''$. Bereken de hoogtelijn op AB, zonder eerst andere elementen te berekenen.

4. Bereken de zijden en de basishoeken van den driehoek, waarvan de hoogte 5,254 cM, de omtrek 27,46 cM en de tophoek $= 54°17'16''$ is.

5. Van een $\triangle$ ABC is de hoogte 1,234 M, de omtrek 6,843 M en een der basishoeken $59°12'17''$. Bereken de zijden.

6. D is een punt in de zijde AB van $\triangle$ ABC. Gegeven zijn AC = 15, AB = 12, $\angle A = 32°15'24''$, $\angle ACD = \angle BCD$. Bereken CD.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

7. Van een driehoek zijn gegeven: de opstaande zijden: 834,75 en 698,23 en de lijn, die den tophoek middendoor deelt: 725,83. Bereken de hoeken en de basis.

8. Van een driehoek zijn de lengten der lijnen, die den tophoek in 4 gelijke deelen verdeelen, 17,8 dM, 13,25 dM en 12,8 dM. Bereken den tophoek.

9. De lijn, die den rechten hoek van een rechthoekigen driehoek middendoor deelt, verdeelt de hypotenusa in twee stukken, lang 4,319 en 5,238. Bereken de scherpe hoeken van dien driehoek.

10. Van een driehoek zijn gegeven: $BC = 12{,}15$, $\angle B = 71°12'13''$ en $\angle C = 57°19'32''$. Bereken de stukken, waarin de gegeven zijde verdeeld wordt door de bisectrice van $\angle A$.

11. In $\triangle$ ABC deelt AD den tophoek middendoor. Als nu $\angle A = 40°$, $BD = 160$ en $CD = 280$ is, vraagt men AB, AC en AD te berekenen.

12. Van $\triangle$ ABC is $a = 18{,}4625$, $b = 15{,}3472$ en $\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 84°15'46''$. Bereken de lijn, die $\angle$ ACB halveert.

13. Van een driehoek zijn de drie zijden 35,142, 40,926 en 49,127. Bereken de lijn, die den grootsten hoek halveert.

14. Van een driehoek is de bisectrice van den tophoek 2,465, de basis 1,987 en het verschil der basishoeken 30°. Bereken die hoeken.

15. Van $\triangle$ ABC is $AB = 24$, $BC = 36$ en $\angle ABC = 72°30'$. Bereken de binnen- en de buitenbisectrice van dien hoek.

16. In een $\triangle$ ABC is de zijde BC door de punten D en E in 3 gelijke deelen verdeeld. Zoo nu $BC = 41{,}103$, $AD = 32{,}451$ en $AE = 30{,}349$ gegeven zijn, vraagt men naar de grootte van AB en van $\angle B$.

17. De opstaande zijden van een driehoek zijn 34 en 58 cM, terwijl de tophoek 85°16′ is. Bereken de deelen, waarin de tophoek verdeeld wordt door twee lijnen, die uit den tophoek getrokken zijn en den driehoek in drie gelijke deelen verdeelen.

18. In een $\triangle$ ABC worden op de basis BC twee punten D en E genomen zóó, dat $BD = DE = EC$; $\angle BAE = \alpha$, $\angle EAC = \beta'$, $\angle BAD = \alpha'$, $\angle DAC = \beta$. Bewijs, dat $\dfrac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha' \sin\beta'} = 4$.

19. $R = \dfrac{s}{\sin A + \sin B + \sin C} = \dfrac{s}{4\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C}$.

Bewijs.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

20. $4R = r_a \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A \sec \frac{1}{2}B \sec \frac{1}{2}C$. Bewijs.

21. Bewijs, dat $r_a = r + a \operatorname{tg} \frac{1}{2}A$.

22. $r_a + r_b + r_c = 3r + a\operatorname{tg} \frac{1}{2}A + b\operatorname{tg} \frac{1}{2}B + c\operatorname{tg} \frac{1}{2}C$. Bewijs.

23. $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{\cot \frac{1}{2}A}{s-a} = \frac{\cot \frac{1}{2}B}{s-b} = \frac{\cot \frac{1}{2}C}{s-c}$. Bewijs.

24. $O = s^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B \operatorname{tg} \frac{1}{2}C$. Bewijs dit.

25. Bewijs, dat $r_a = (s-b) \cot \frac{1}{2}C$.

26. $a^2 - b^2 = 4R^2 \sin (A - B) \sin C$. Bewijs.

27. Bewijs, dat $\cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C = \frac{s^3}{r_a\, r_b\, r_c}$.

28. Eveneens, dat $O = \frac{r_a\, r_b\, r_c}{s}$.

29. Men vraagt de diagonalen van den koordenvierhoek uit te drukken in de zijden.

30. Waarom is bij een koordenvierhoek altijd

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}D = 1\ ?$$

31. Bewijs, dat in een koordenvierhoek:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK XI.

Toegepaste driehoeksmeting.

§ 68.

Reeds in de planimetrie heeft men middelen om hoogten en afstanden te berekenen, die men niet door directe meting kan bepalen; de trigonometrie geeft betere middelen, maar dan moet men behalve afstanden ook hoeken meten. Zoowel bij het bepalen van afstanden als van hoogten, wordt de moeilijkheid grooter, wanneer bepaalde punten ontoegankelijk zijn b.v. een torenspits, een heuveltop, een punt aan de overzijde van een rivier, een schip voor anker, een vijandelijk fort. Systematisch geordend hebben we het volgende overzicht:

Bepalen van hoogten:

a) voet toegankelijk;
b) voet ontoegankelijk.

Bij het laatste geval kan het mogelijk zijn van uit twee punten B en C, *in dezelfde rechte met den voet* van de hoogte, de hoeken te meten, waaronder de hoogte wordt gezien; zoo dit niet mogelijk is, dan moet men het doen uit twee willekeurige punten.

Bepalen van afstanden, b.v. *van A tot B.*

Ook hier doen zich twee gevallen voor, n.l.:

a) Een der punten A of B is van uit C bereikbaar.
b) Geen van beide is bereikbaar.

Verder komt nog voor het vraagstuk: „*Als drie punten A, B en C gegeven zijn in ligging en de hoeken, waaronder AB en BC van uit een punt P worden gezien, bereken dan PA, PB en PC.*" Omdat, als uit *P* de punten A en B kunnen worden waargenomen, uit A en B ook P kan worden gezien, is dit vraagstuk bedoeld als contrôle op *a* hierboven.

Bij al deze vraagstukken wordt ondersteld, dat de aarde over het beschouwde gebied *een plat vlak is.* Verder treedt bij het

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

bepalen van hoogten steeds op de hoogte van het oog van den waarnemer; *zonder bezwaar kan men deze in de vraagstukken weglaten, omdat deze steeds bij de berekende waarde moet worden opgesteld.*

§ 69.

a. Bepalen van hoogten.

Zonder meer is duidelijk, dat de hoogte van den boom is $h = d \operatorname{tg} \alpha$.

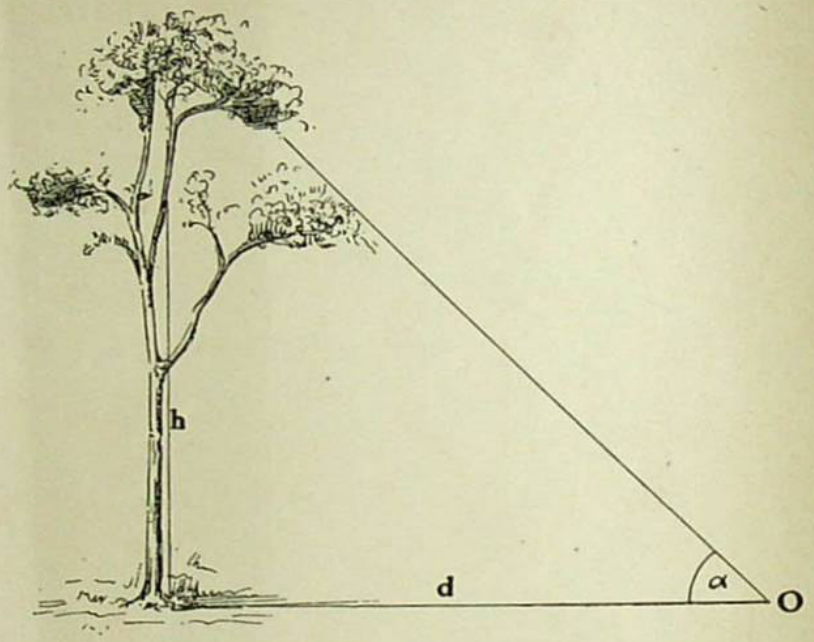


Fig. 45.

b. Zij A de top van den toren en AA′ de gevraagde hoogte.

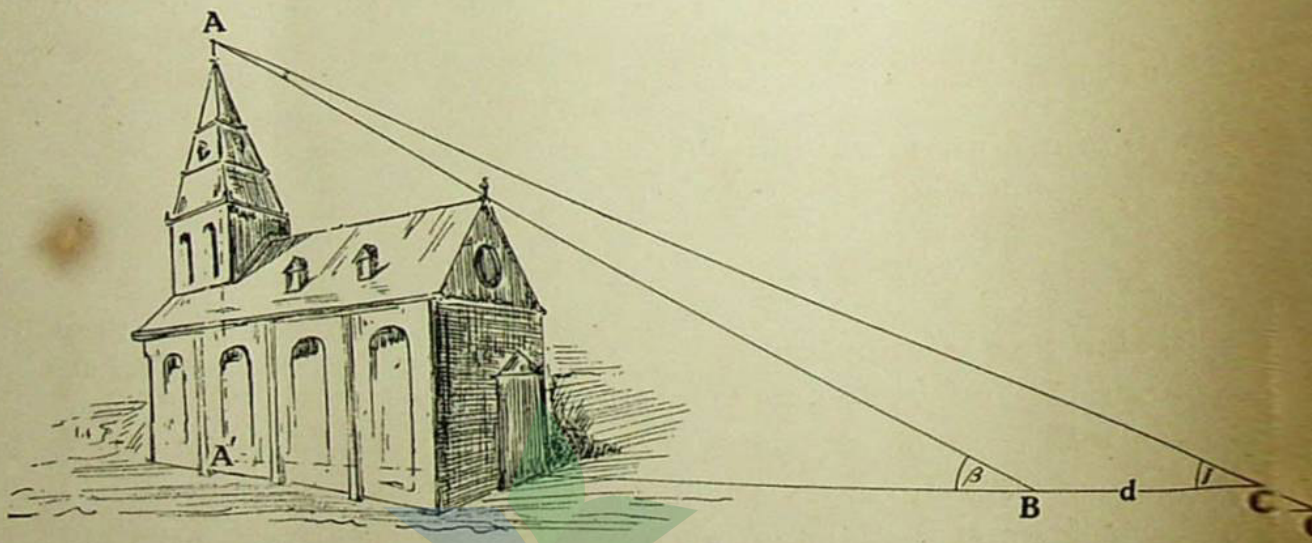


Fig. 46.

De punten A′, B en C liggen op een rechte, terwijl men meet

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

de hoeken β en γ. In $\triangle$ ABC heeft men $AB : \sin\gamma = d : \sin(\beta - \gamma)$; dus $AB = \frac{d \sin\gamma}{\sin(\beta - \gamma)}$. Omdat $AA' = AB \sin\beta$, heeft men:

$$AA' = h = \frac{d \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta - \gamma)}.$$

c. Kan men geen geschikt punt B op de lijn A'C vinden, dan moet men B ergens anders nemen; het doet er ook niet toe, of de punten A', B en C in een horizontaal vlak liggen of niet: men vindt natuurlijk slechts de verheffing boven een der waarnemingspunten.

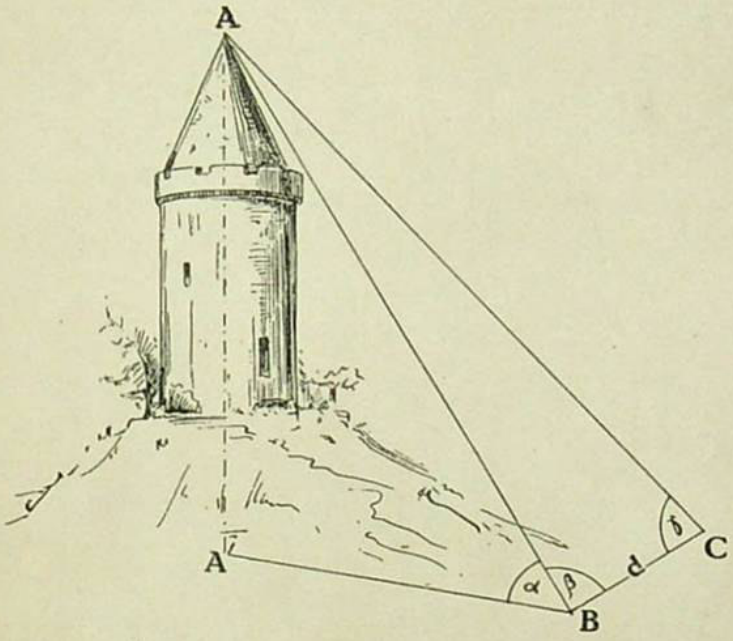


Fig. 47.

Men vindt met den sinusregel $AB = \frac{d \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$. Als verder de hoek tusschen de horizontale lijn BA' en de lijn $BA = \alpha$ is, dan is $AA' = h = \frac{d \sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$.

§ 70.

Bepalen van afstanden.

Als de afstand van eenig punt A van de kust moet bepaald worden tot een schip B, dat voor anker ligt, dan kan men een tweede punt C op de kust aannemen en den afstand AC meten; verder meet men de hoeken α en γ. De sinusregel geeft weer direct: $x : \sin\gamma = d : \sin(\alpha + \gamma)$, dus $x = \frac{d \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$; als x bekend

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

is, kan ook de afstand van het schip tot de kust direct worden gevonden.

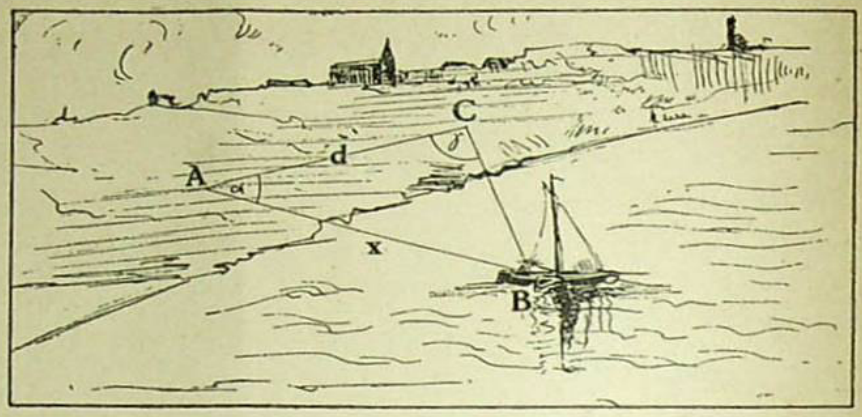


Fig. 48.

Moet de afstand bepaald worden van twee ontoegankelijke punten b.v. van twee op de reede liggende schepen, dan kan

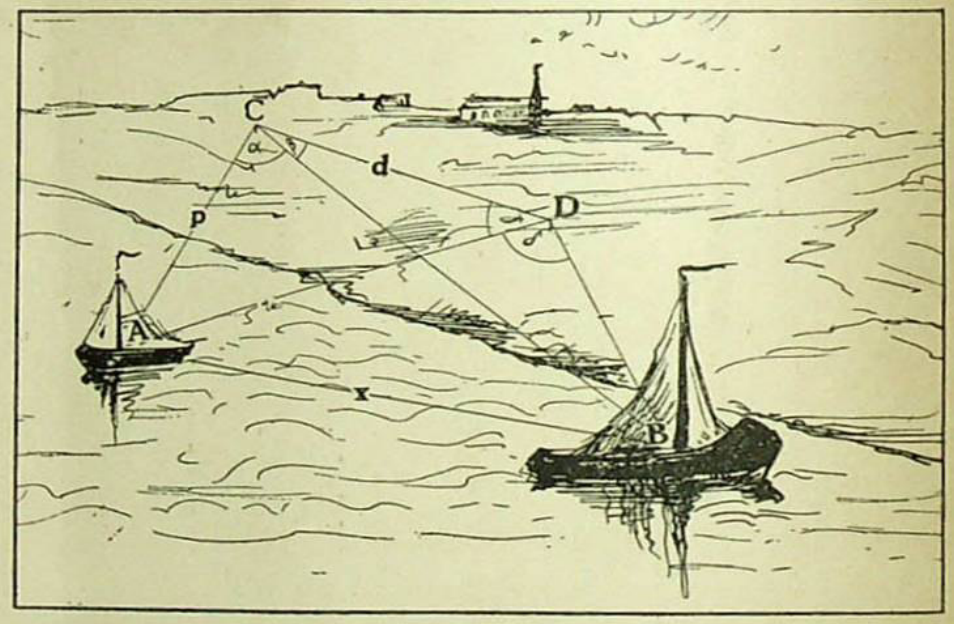


Fig. 49.
(De lijn CB = q).

men als volgt handelen: Men meet CD = d en de hoeken α, β, γ en δ. Men berekent nu p en q, waarna AB direct met den cosinusregel wordt berekend of indirect door toepassing van den tangensregel. Nu vindt men p in $\triangle$ ACD en q in $\triangle$ BCD:

$$p : d = \sin \gamma : \sin (\alpha + \beta + \gamma);$$
$$q : d = \sin (\gamma + \delta) : \sin (\beta + \gamma + \delta).$$

Van het laatste geval alleen willen we een voorbeeld geven:

Voorbeeld. *Aan de eene zijde van een riviermond staat een huis A; aan de andere een fort B. Een vijandelijk schip S laat*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

twee booten te water; de eene gaat liggen in C en de tweede in D. In D meet men ∠ ADB = 22°17′, ∠ BDS = 48°2′; in C meet men ∠ ACB = 53°18′ en ∠ BCS = 75°50′. Als de booten op

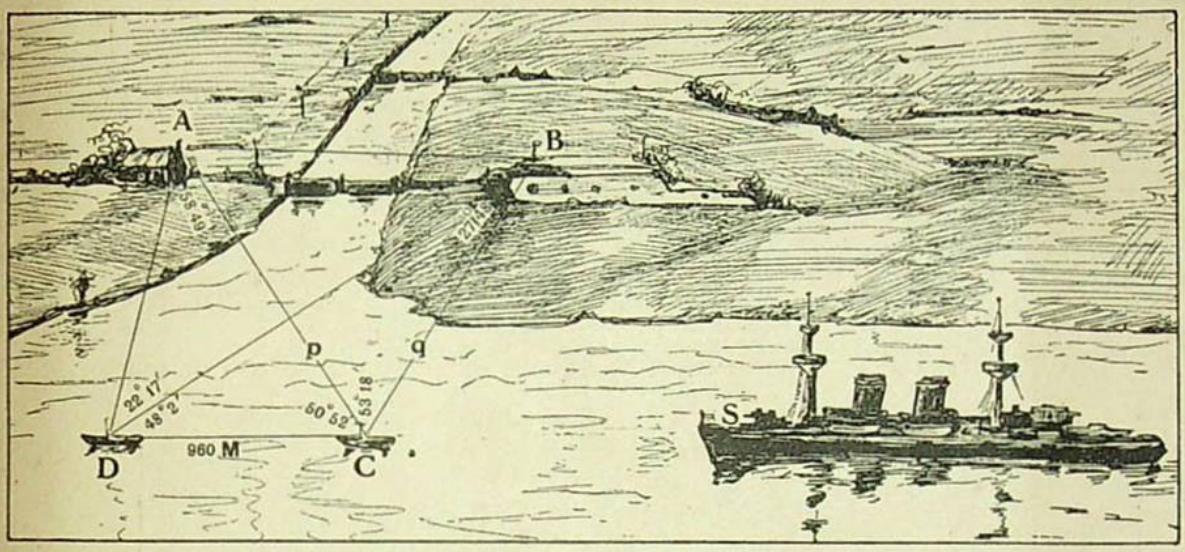


Fig. 50.

een afstand van 960 M liggen, hoever liggen dan het huis en het fort van elkaar?

Opl. $\angle$ ACD = 180° — 129°8′ = 50°52′;

$\angle$ DAC = 180° — 50°52′ — 70°19′ = 58°49′;

$\angle$ DBC = 27°48′.

$p : \sin 70°19′ = 960 : \sin 58°49′$;

$$\mathbf{p} = \frac{960 \sin 70°19′}{\sin 58°49′}.$$

$q : \sin 48°2′ = 960 : \sin 27°48′$;

$$\mathbf{q} = \frac{960 \sin 48°2′}{\sin 27°48′}.$$

log 960 = 2,98227	log 960 = 2,98227
log sin 70°19′ = 0,97385 — 1	log sin 48°2′ = 0,87130 — 1
colog sin 58°49′ = 0,06777	colog sin 27°48′ = 0,33125
log p = 3,02389	log q = 3,18482
log p^2 = 6,04778	log p^2 = 6,36964
p^2 = 1116300	q^2 = 2342300.

$AB^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos 53°18′$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$\log 2 = 0{,}30103$
$\log p = 3{,}02389$
$\log q = 3{,}18482$
$\log \cos 53°18' = 0{,}77643 - 1$
$6{,}28617$
laatste term = 1932700.

$p^2 = 1116300$
$q^2 = 2342300$
3458600
1932700
$AB^2 = 1525900$
$AB = \sqrt{1525900} = 1235.$
144
859
$243 \times 3 = 729$
$246\ 130$

De gevraagde afstand is 1235 M.

N.B. Deze afstand kan niet nauwkeuriger worden berekend en . . . . al kon het, dan nog zou het onzin zijn, den afstand bv. in dM of zelfs cM op te geven.

Opgaven.

§ 71. **1.** Iemand, wiens oog zich 1,70 M boven den grond bevindt, ziet de toppen van twee palen opv. 3,25 M en 5,25 M hoog, in een rechte lijn. Als de afstand der palen 27 M is, hoever is hij dan verwijderd van beide?

2. Een toren in aanbouw wordt op een afstand van 36 M gezien onder een hoek van 45°; eenige weken later meet men uit hetzelfde punt een hoek van 61°. Hoeveel M is de toren hooger geworden? Hoogte van het oog van den waarnemer 1,75 M boven den grond.

3. AB is een horizontale lijn, lang 390M; van een punt C op AB stijgt een ballon verticaal omhoog; eenigen tijd daarna meet men de hoeken, waaronder hij gezien wordt opv. uit A en B, n.l. 63°16′ en 49°22′. Op welke hoogte bevindt zich de ballon?

4. Twee punten A en B liggen met een voet van een toren in dezelfde rechte; als de toren 34,5 M hoog is en hij uit A onder een hoek van 59°20′ wordt gezien en uit B onder een hoek van 28°16′, bereken dan den afstand AB.

5. Ik zie den top van een toren uit eenig punt A onder een hoek van 27°20′ met den horizon; ga ik in de richting van den toren 39,6 M vooruit, dan zie ik hem onder een hoek van 40°16°. Bereken

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

de hoogte van den toren, als mijn oog zich 1,72 M boven den grond bevindt.

6. Op een schip, dat precies naar het Noorden vaart, ziet men een kaap 7°20′ westelijk van Noord; na 2 KM te hebben gevaren, ziet men de kaap 14°58′ westelijk. Op hoeveel M gaat het schip oostelijk van de kaap langs?

7. Een torentop wordt gezien onder een hoek van 15° met den horizon; wandelt de waarnemer *a* M in de richting van den toren, dan ziet hij hem onder een hoek van 75°; wat is de hoogte van den top boven de horizontale lijn door zijn oog? Dezelfde vraag, maar lees voor 15° α en voor 75° „het complement van α".

8. Een toren, hoog *h* M., staat op een rots; als de top van den toren onder een hoek α met den horizon wordt gezien en de voet onder een hoek β, op welken afstand bevindt men zich dan van den voet van de rots, als deze een nagenoeg cirkelvormige basis heeft met een omtrek van *a* M?

9. Iemand bevindt zich precies ten Zuiden van een toren, hoog *h* M en ziet dien onder een hoek α; hij begeeft zich westelijk naar A en ziet nu den toren onder een hoek β; hij wandelt in dezelfde richting verder en ziet hem van uit eenig punt B onder een hoek γ. Bereken den afstand AB.

10. Van uit twee waarnemingsposten A en B (AB = 1630 M) ziet men een wolkje onder hoeken ven 46°13′ en 35°19′ met den horizon. Hoe hoog bevindt zich de wolk boven den grond, als A 25 M boven den grond is en B 1,75 M?

Denk A, B en het wolkje in een zelfde verticaal vlak.

11. Uit een punt A ziet men een ballon in het N.W. onder een hoek van 20°30′ met het hor. vlak; 4300 M zuidelijk van A, ligt B; daar ziet men den ballon in het N.N.W. Hoe hoog bevindt zich op dat oogenblik de ballon?

12. Een schip bevindt zich 2280 M zuidelijk van een vuurtoren; nadat het in de richting N.N.W. 680 M gevorderd is, meet men, dat het licht met den horizon een hoek maakt van 4°16′; bereken de hoogte van het licht boven die van het dek van het schip.

13. Uit twee punten A en C (AC = 3 KM) ziet men een fort F zóó, dat $\angle$ FAC = 74°42′, $\angle$ FCA = 80°12′; uit A ziet men ook een batterij B; als AB = 2 KM en $\angle$ FAB = 35°7′, kan de batterij dan het fort beschieten, als de kanonnen een draagwijdte hebben van 6 KM?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

14. Om den afstand te bepalen van een schip C op de reede tot een punt A van de kust, loopt men één KM langs de kust tot B ; men meet $\angle CAB = 32° 19'$ en $\angle CBA = 83°21'$. Bereken den afstand van A tot C.

15. Twee schepen A en B, geankerd op de reede, liggen 2 KM van elkaar. Uit beide neemt men een kustlicht L waar. Als $\angle LAB = 85°3'$ en $\angle ABL = 82°19'$, hoever zijn dan de schepen verwijderd van het kustlicht ?

16. Uit twee plaatsen A en B neemt men aan de overzijde van een rivier twee torens C en D waar. Bereken hun afstand, als $\angle BAD = 40°46'$, $\angle BAC = 96°3'$, $\angle ABC = 42°12'$ en $\angle ABD = 112°19'$ en AB = 730 M.

17. Men wil den afstand van A tot eenig ontoegankelijk punt O enkel bepalen met den meetketting. Men neemt ergens AB = 500 M, zet een baak C tusschen A en O en een baak D tusschen B en O. Als nu AC = 100, BD = 100, AD = 560 en BC = 550 M, bereken dan AO.

18. Iemand wandelt langs het strand, dat Noord-Zuid loopt en ziet twee schepen voor anker liggen, het eene A in het N.O., het andere B in het Z.O. ; hij loopt 1400 M naar het Noorden en ziet nu A in O.N.O. en B in het Z.Z.O. Bereken den afstand der beide schepen.

§ 72.

Triangulatie. Probleem van Snellius.

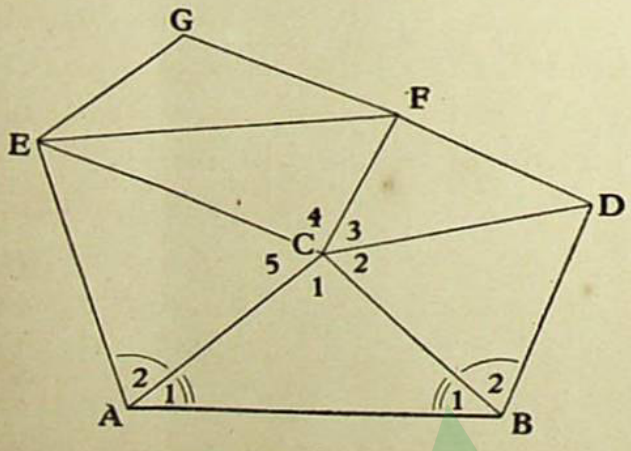


Fig. 51.

Wanneer men een terrein in kaart moet brengen, dan begint men met eenige bijzondere punten : in een bebouwde streek met torens, in een bergstreek met bergtoppen enz. Men meet dan uiterst precies één lengte, b.v. AB en meet de hoeken A_1 en B_1 ; met behulp van de basis AB van het net van driehoeken en de hoeken A_1 en B_1 kan men dan berekenen AC en BC ; in C meet men C_1, C_2, C_3, C_4 en C_5 ; in B nog B_2 en in A nog A_2. De driehoeken BCD en ACE zijn nu ook weer volkomen bepaald ;

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

zoo gaat men voort, telkens hoeken metende en lijnen berekenende. Men heeft door deze bewerking ook voortdurende contrôle; men kan EF vinden van af △ ABC via △ ACE en △ ECF, maar ook via BCD, DCF en ECF. Wanneer men op die manier tot het einddoel geraakt is, dat is, wanneer men een voldoend aantal punten nauwkeurig heeft vastgesteld, dan gaat men een paar van de laatst gevonden afstanden door directe meting verifiëeren.

Wanneer het net van driehoeken op schaal geteekend is, dan dient men ook andere punten zoo nauwkeurig mogelijk op de kaart aan te geven. Zij M een punt, dat moet worden bepaald; het punt ligt in een der driehoeken van het net, zoodat AB, BC, CA en de hoeken van △ ABC alle bekend zijn. Men kan nu α, β en γ meten en daarmee is door een bekende meetkundige constructie de plaats van M theoretisch bepaald; in werkelijkheid gaat het echter slecht een cirkelsegment te beschrijven, dat een hoek bevat, groot 115°17′19″ b.v. Men moet dus zijn toevlucht nemen tot berekening; kent men AM en BM en CM, dan is het snijpunt van de cirkels om A, B en C met deze afstanden als straal beschreven, het gezochte punt M. Dit is het bekende **probleem van Snellius:**

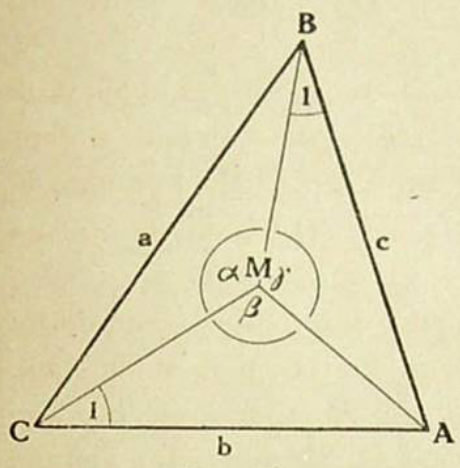


Fig. 52.

Gegeven: een driehoek, waarvan alle elementen bekend zijn; uit eenig punt M in het vlak van dien driehoek meet men de hoeken, waaronder AB, BC en CA gezien worden. Gevraagd: de afstanden van M tot de hoekpunten.

Men zal met den sinusregel MA en MB kunnen berekenen, als men weet $\angle B_1$; ook met den sinusregel MA en MC, als men weet $\angle C_1$. Nu is:

$\sin B_1 : MA = \sin \gamma : c$;

$\sin C_1 : MA = \sin \beta : b$.

——————— deelen

$$\frac{\sin B_1}{\sin C_1} : 1 = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} : \frac{c}{b}, \text{ dus } \frac{\sin B_1}{\sin C_1} = \frac{b \sin \gamma}{c \sin \beta}.$$

De som der hoeken B_1 en C_1 is ook bekend, want $B_1 + C_1 + A = \alpha$. Men heeft dus op te lossen B_1 en C_1 uit de beide verg.:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\frac{\sin B_1}{\sin C_1} = \frac{b\sin\gamma}{c\sin\beta} \text{ en } B_1 + C_1 = \alpha - A.$$

Uit de eerste volgt: $\frac{\sin B_1 - \sin C_1}{\sin B_1 + \sin C_1} = \frac{b\sin\gamma - c\sin\beta}{b\sin\gamma + c\sin\beta}$;

$$\frac{2\cos\tfrac{1}{2}(B_1 + C_1)\sin\tfrac{1}{2}(B_1 - C_1)}{2\sin\tfrac{1}{2}(B_1 + C_1)\cos\tfrac{1}{2}(B_1 - C_1)} = \frac{1 - \frac{c\sin\beta}{b\sin\gamma}}{1 + \frac{c\sin\beta}{b\sin\gamma}}.$$

Stelt men $\frac{c\sin\beta}{b\sin\gamma} = \operatorname{tg}\varphi$, dan heeft men:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - A)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B_1 - C_1) = \operatorname{tg}(45° - \varphi)$$
$$\text{en } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B_1 - C_1) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - A)\ \operatorname{tg}(45° - \varphi).$$

Als hieruit het verschil der hoeken B_1 en C_1 bepaald is, kan men B_1 en C_1 direct vinden, waarna de gevraagde afstanden kunnen worden afgeleid.

Voorbeeld: De zijden van △ ABC zijn AB = 2416 M; BC = 3072 M en CA = 2988 M. Uit een punt P in het vlak van den driehoek ziet men AB onder een hoek van 41°26′ en AC onder een hoek, groot 42°16′. Men vraagt de afstanden van P tot A, B en C. *(P ligt aan de andere zijde van BC als A).*

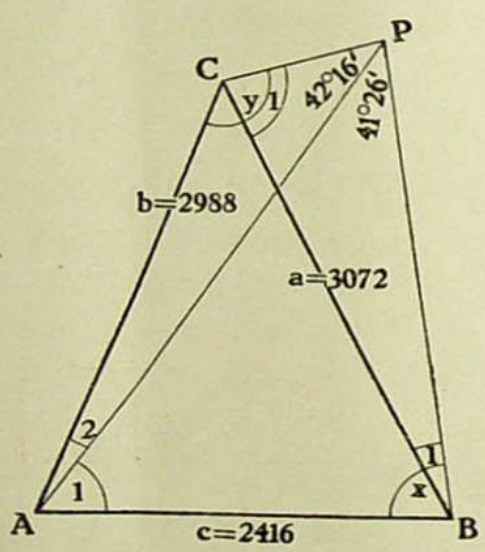


Fig. 53.

Oplossing. Van △ ABC is alleen noodig ∠ A; die wordt dus eerst berekend bijv. met de formule voor den tangens van den halven hoek:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

$a = 3072$	$s = 4238$	$s = 4238$	$s = 4238$
$b = 2988$	$a = 3072$	$b = 2988$	$c = 2416$
$c = 2416$	$s - a = 1166$	$s - b = 1250$	$s - c = 1822$
$2s = 8476$			

$\log(s-b) = 3{,}09691$ $\quad \log s = 3{,}62716$

$\log(s-c) = 3{,}26055$ $\quad \log(s-a) = 3{,}06670$

$\log \text{teller} = 6{,}35746$ $\quad \log \text{noemer} = 6{,}69386$

$\log \text{noemer} = 6{,}69386$

$1{,}66360 - 2$

2

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

log tg ½A = 9,83180 — 10, waaruit ½A = *34°10′20″*;
voor ½B vindt men bijna 32°20′40″ en voor ½C: 23°28′59″.

De hoeken ABP = x en ACP = y zijn dus samen:

$$360° - 68°20'40'' - 83°42' = 207°57'20''.$$

In △ ABP heeft men sin x : AP = sin 41°26′ : 2416.

In △ ACP heeft men sin y : AP = sin 42°16′ : 2988,

waaruit : $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{2988 \sin 41°26'}{2416 \sin 42°16'}$.

Stel deze verhouding = tg φ; door toepassing van: „In een evenredigheid staat het verschil van de termen der eerste reden tot hun som, als het verschil van de termen der tweede reden tot hun som", volgt:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\text{tg}\,\varphi - 1}{\text{tg}\,\varphi + 1}, \text{ of}$$

$$\frac{2\cos \tfrac{1}{2}(x+y) \sin \tfrac{1}{2}(x-y)}{2\sin \tfrac{1}{2}(x+y) \cos \tfrac{1}{2}(x-y)} = \frac{\text{tg}\,\varphi - \text{tg}\,45°}{1 + \text{tg}\,\varphi\,\text{tg}\,45°}, \text{ waaruit :}$$

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(x-y) = \text{tg}\,(\varphi - 45°)\,\text{tg}\,103°58'40''.$$

We berekenen nu eerst den hulphoek:

log 2988 = 3,47538	log 2416 = 3,38310
log sin 41°26′ = 9,82069 — 10	log sin 42°16′ = 9,82775 — 10
log teller = 3,29607	log noemer = 3,21085
log noemer = 3,21085	
log tg φ = 0,08522	
φ = 50°35′9″	

tg ½(x — y) = tg (+ 5°35′9″) cot (— 13°58′40″) =
tg ½(y — x) = + tg 5°35′9″ cot 13°58′40″.

log tg 5°35′9″ = 8,99035 — 10
log cot 13°58′40″ = 10,60395 — 10
\+ ———————
log tg ½(y — x) = 9,59430 — 10

½(y — x) = 21°27′4″,6 | y — x = 42°54′3″,2 | y = 125°25′42″
y + x = 207°57′20″ | x = 82°31′38″.

In △ ABP heeft men AP = $\frac{2416 \sin 82°31'38''}{\sin 41°26'}$ en

in △ ACP is AP = $\frac{2988 \sin 125°25'40''}{\sin 42°16'}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$\log 2416 = 3{,}38310$	$\log 2988 = 3{,}47538$
$\log \sin 82°31'38'' = 9{,}99630 - 10$	$\log \sin 125°25'42'' = 9{,}91108 - 10$
$\operatorname{colog} \sin 41°26'' = 0{,}17931$	$\operatorname{colog} \sin 42°16' = 0{,}17225$
$\log AP = 3{,}55871$	$\log AP = 3{,}55871$

Uit beide berekeningen vindt men AP = 3620 M. (Deze contrôle: de middelste der drie gevraagde lijnen in beide driehoeken te berekenen, mag men niet verzuimen).

$\angle A_1 = 180° - 82°31'38'' - 41°26' = 56°2'22''$.

$\angle A_2 = 180° - 125°25'42'' - 42°16'' = 12°18'18''$.

$BP : \sin 56°2'20'' = 2416 : \sin 41°26''$	$CP : \sin 12°18'18'' = 2988 : \sin 42°16'$
$\log 2416 = 3{,}38310$	$\log 2988 = 3{,}47538$
$\log \sin 56°2'22'' = 9{,}91877 - 10$	$\log \sin 12°18'18'' = 9{,}32861 - 10$
$\operatorname{colog} \sin 41°26' = 0{,}17931$	$\operatorname{colog} \sin 42°16' = 0{,}17225$
$\log BP = 3{,}48118$	$\log CP = 2{,}97624$
$BP = 3028$ M.	$CP = 947$ M.

De **proef** op deze waarden geeft de sinusregel in △ BCP:

$\angle B_1 = 82°31'38'' - 64°41'20'' = 17°50'18''$;

$\angle C_1 = 125°25'42'' - 46°57'58'' = 78°27'44''$.

$\sin B_1 : CP = \sin C_1 : BP$ of $\log \sin B_1 + \log BP = \log \sin C_1 + \log CP$.

$\log \sin B_1 = 9{,}48619 - 10$	$\log \sin C_1 = 9{,}99113 - 10$
$\log BP = 3{,}48118$	$\log CP = 2{,}97624$
$+$	$+$
2,96737	2,96737

Blijkbaar is de berekening volkomen in orde.

§ 73. Opgaven.

In 8 van de volgende vraagstukken worden gevraagd de **lengten der lijnen PA, PB en PC.**

1. Van △ ABC is $\angle B = 76°$; BA = 2081, BC = 1872; P ligt aan de andere zijde van AC als B; $\angle APB = 44°12'$ en $\angle CPB = 39°43'$.

2. P ligt binnen △ ABC; $\angle APB = 105°41'$, $\angle BPC = 123°41'$; BA = 3041, BC = 3816 en de ingesloten hoek B is 66°14'.

3. Van △ ABC zijn gegeven: $\angle B = 63°15'$, BA = 3420, BC = 4079; P ligt buiten den driehoek, aan dezelfde zijde van AC als het hoekpunt B; $\angle APB = 19°12'$ en $\angle BPC = 23°52'$.

4. Van △ ABC is BC = 4339; $\angle B = 60°$ en $\angle C = 43°$; P ligt buiten △ ABC aan de andere zijde van BC als A; $\angle APB = 34°$ en $\angle APC = 58°19'$.

5. Van △ ABC zijn gegeven: CA = 3014, CB = 4116 en

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$\angle C = 42°11'$; P ligt buiten den driehoek aan dezelfde zijde als het hoekpunt A ; $\angle APC = 25°15'$ en $\angle APB = 31°21'$.

6. De drie zijden van $\triangle ABC$ zijn $a = 3362$, $b = 3922$ en $c = 3889$; P ligt buiten den driehoek, aan den zelfden kant van de zijde b als het hoekpunt B. $\angle APB = 37°7'$ en $\angle BPC = 71°45'$.

7. $a = 4892$; $b = 5747$ en $c = 2951$; P ligt binnen $\triangle ABC$; $\angle APB = 90°$; $\angle BPC = 125°16'$.

8. $a = 5119$; $b = 4641$; $c = 3780$; P ligt buiten $\triangle ABC$ aan den zelfden kant van de zijde a als het hoekpunt A ; $\angle APC = 37°18'$ en $\angle APB = 29°2'$.

9. Driehoek ABC is gelijkzijdig ; P is een punt in het vlak van dien driehoek ; PA = PB = 2PC. Bereken PA en $\angle APC$, als de zijde van den driehoek 3,4 M is.

10. Drie plaatsen liggen in een rechte lijn op gelijke afstanden van elkaar. Uit D ziet men AB onder een hoek $ADB = 38°50'$ en BC onder een hoek $BDC = 21°10'$. Als nu AB = BC = 50, bereken dan BD.

11. Drie punten A, B en C liggen in een rechte lijn ; AB = 225, BC = 500. In een vierde punt D worden de hoeken ADB en BDC opv. $82°16'$ en $44°26'40''$ gemeten. Bereken hieruit BD.

Derde Herhaling.

N.B. Deze vraagstukken zijn alle van Eind-examens van Gymnasia ; de vergelijkingen vindt men in § 86, No. 25—59.

1. In een willekeurigen driehoek ABC is :

$\text{tg } \frac{1}{2}A \text{ tg } \frac{1}{2}C + \text{tg } \frac{1}{2}B \text{ tg } \frac{1}{2}C = \frac{c}{s}$. Bewijs dat.

2. Van een driehoek ABC is gegeven : $\angle C = 65°32'24''$; $\frac{BC}{AC} = 2{,}143$ en AB = 3,478. Bereken de onbekende elementen van den driehoek.

3. Van $\triangle ABC$ zijn gegeven : de zijde $c = 128{,}4$ cM, het verschil der beide andere zijden $a - b = 30{,}6$ cM, benevens $\angle C = 55°33'26''$. Bereken de onbekende elementen.

4. Van $\triangle ABC$ is $\angle C = 60°$, AC = 10 en BC = 15. Bereken de hoeken, waarin $\angle C$ verdeeld wordt door de zwaartelijn naar de zijde c.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

5. Indien in een driehoek ABC de zijde b harmonisch middenevenredig is tusschen a en c, dan is $\sin B = \frac{2\sin A \sin C}{\sin A + \sin C}$. Bewijs dat.

6. Aan den oever van een meer liggen de steden A en B op 12 KM afstand van elkaar verwijderd. Men wil den onderlingen afstand berekenen van twee steden C en D op den tegenover gelegen oever. Daartoe meet men in A hoek CAB = 90°, en hoek DAB = 40°30′. Evenzoo meet men in B hoek ABD = 105° en hoek ABC = 37°42′. Hoe ver ligt C van D? (Tot in Meters nauwkeurig is voldoende).

7. Van driehoek ABC is gegeven:

$$\angle A = 60°13'40'' \text{ en } \angle B = 33°14'20'',\ r = 15.$$

Bereken de hoogtelijn op c.

8. Van een driehoek ABC is M het middelpunt des omgeschreven cirkels en H het hoogtepunt. Bewijs, dat het oppervlak van driehoek AMH wordt voorgesteld door de positieve waarde van $\pm R^2 \cos A \sin (B - C)$.

9. In een gelijkbeenigen driehoek is eene lijn getrokken evenwijdig aan de basis en gelijk aan de som van de onderste stukken der beenen.

Bereken de lengte dier lijn, als gegeven zijn: de opstaande zijde = 12,231 en de tophoek = 34°20′.

10. Van een driehoek ABC is gegeven: c = 16,167 Meter, $A - B = 42°33'40''$ en $\sin A : \sin B = 7 : 4$. Bereken 't oppervlak des driehoeks en den straal van zijn omgeschreven cirkel.

11. Gegeven, dat A, B en C de hoeken zijn van een driehoek. Te bewijzen, dat uit

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sec A + \sec B} = \cos A \cos B \sin C$$

volgt, dat de driehoek rechthoekig is.

12. Van een vierhoek ABCD zijn de hoeken A, B en C resp. 70°30′, 52°30′, 99°20′, terwijl AB = 105,43 cM en CD = 72,34 cM is; hoe lang is de zijde AD?

13. Van een △ zijn de zijden 13, 14 en 15. Uit het tegenover de kleinste zijde gelegen hoekpunt, als middelpunt, is een cirkelboog beschreven, die den driehoek in 2 even groote deelen verdeelt. Hoe groot is de straal van dien boog?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

14. In elken driehoek geldt:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{\cot \tfrac{1}{2}A \,.\, \cot \tfrac{1}{2}B \,.\, \cot \tfrac{1}{2}C}{s}$$

(r_a = straal aangeschreven cirkel). Bewijs.

15. Van een driehoek is de tophoek 56°6′40″, terwijl de afstand van de uiteinden der basis tot het middelpunt van den ingeschreven cirkel 8,431 en 7,223 cM zijn.

Bereken de basishoeken en de lijn, die het middelpunt met den top verbindt.

16. In $\triangle$ ABC is BC door de punten D en E in drie gelijke deelen verdeeld. Zoo nu

BC = 40,125, AD = 30,371 en AE = 28,458, bereken dan $\angle$ B en AB.

17. Als A, B en C de hoeken van een driehoek zijn, dan bestaat de betrekking:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C.$$

Bewijs dit.

18. Als $(a^2 + b^2) \sin (A - B) = (a^2 - b^2) \sin (A + B)$, dan is de driehoek of gelijkbeenig of rechthoekig. Bewijs.

19. Van een driehoek zijn gegeven: de omtrek = $2s$ en twee der hoeken = α en β. Druk het oppervlak van dezen driehoek in deze gegevens uit, maak de gevonden uitkomst geschikt voor de berekening met logarithmen en stel na oplossing:

$$2s = 120,\ \alpha = 30°40'50'',\ \beta = 108°30'20''.$$

20. Van een driehoek ABC is gegeven:

$$a = 73{,}535 \text{ mM};\ B = 53°7'50'';\ C = 67°23'14''.$$

Bereken den straal van den cirkel, beschreven in den driehoek, waarvan de hoekpunten de voetpunten zijn der hoogtelijnen in driehoek ABC.

21. Van een driehoek zijn gegeven: de tophoek $\angle A = 40°$, de hoogtelijn uit den top op de basis $h_a = 15$ cM en de bisectrice van den tophoek $w_a = 20$ cM. Bereken de hoeken van den driehoek en den straal van den omgeschreven cirkel.

22. Gegeven van een driehoek ABC:

$$a = 1{,}2512;\ b = 2{,}0244$$

en de buitenbisectrice van hoek C, gemeten van C tot haar snijpunt met het verlengde van AB, is 2,5014.

Bereken hoek C.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

23. Van $\triangle$ ABC is gegeven: $a = 0{,}839$, $b + c = 2{,}556$ en $\angle B = 50°$. Bereken de onbekende elementen.

24. Van een driehoek is gegeven:

$$a + b = 31{,}205;\ c = 17{,}658;\ C = 66°58'50''.$$

Bereken r, den straal van den ingeschreven cirkel.

25. Van een koordenvierhoek zijn gegeven de zijden a, b, c en d. Druk in deze gegevens uit:

1°. de tangenten der halve hoeken;

2°. het oppervlak van dezen vierhoek.

Na oplossing $a = 13{,}567$, $b = 9{,}234$, $c = 12{,}36$, $d = 9{,}789$.

26. Van een driehoek kent men de basis = 7,48 dM; het verschil tusschen de aanliggende hoeken $= 11°29'24''$ en de verhouding hunner sinussen $= 4/3$. Bereken een opstaande zijde.

27. Bewijs dat de rechte lijn, die $\angle A$ van een driehoek middendoor deelt, gemeten tot de overstaande zijde, gelijk is aan $\dfrac{2bc\cos \frac{1}{2}A}{b + c}$.

28. In een driehoek ABC is $a = 60$, $b = 40$ en $c = 42$. Bereken de hoeken van de mediaan AD met de zijde BC.

29. Van $\triangle$ ABC is gegeven: de som der opstaande zijden $a + b = 18$ cM, de straal van den omgeschreven cirkel 6 cM, $\angle B = 41°48'38''$. Bereken het oppervlak van den driehoek.

30. Op de helling van een berg staat een toren van 70 M. Gaat men van den voet van den toren 50 M langs een hellend pad naar beneden, dan ziet men den toren onder een hoek van 45°. Hoeveel meters moet men langs dit zelfde pad verder naar beneden gaan om dien toren onder een hoek van 30° te zien? (Lengte van den waarnemer te verwaarloozen).

31. Als A, B en C de hoeken van een $\triangle$ zijn, bewijs dan:

$$\cos^2 A - \cos^2 B = \sin (B - A) \sin C.$$

32. Druk in een rechthoekigen driehoek den straal van den ingeschreven cirkel uit in een rechthoekszijde en den overstaanden hoek.

33. Van een driehoek ABC is bekend: $c = 2{,}1$, $a + b = 5{,}72$ en $r = 0{,}71$ (straal ingeschreven cirkel). Bereken de hoeken van dien driehoek.

34. Van een trapezium ABCD, waarin AB // CD is, is gegeven: AB = 216, CD = 423, $\angle ADC = 56°29'23''$, $\angle BCD = 73°48'55''$. Bereken de oppervlakte van het trapezium.

35. Van een driehoek zijn de zijden 13, 14 en 15 M. Hoe

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

lang is de lijn, die het hoekpunt van den kleinsten hoek met het middelpunt van den ingeschreven cirkel verbindt?

36. Van een driehoek ABC zijn gegeven:

$$AC = 98\,;\ BC = 205\,;\ \angle C = 69°54'24''.$$

Gevraagd wordt de straal van den omgeschreven cirkel te berekenen.

37. Van een driehoek is $\angle A = 40°35'15''$, de omtrek 9 M en R = 2,8 M. Bereken de onbekende elementen van den driehoek.

38. Van driehoek ABC zijn gegeven: $a = 11{,}3$; $b - c = 2{,}12$ en hoek $B = 71°4'49''$. Bereken de onbekende elementen.

39. Van een driehoek ABC zijn gegeven:

$$AB = 14,\ BC = 12,\ \angle ABC = 80°.$$

Binnen dezen driehoek is een punt O zóó genomen, dat $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC$.

Bereken den afstand van O tot het punt B.

40. De ingeschreven cirkel van $\triangle$ ABC raakt AB en AC in D en E. Bewijs, dat

$$DE = 2a.\ \sin \tfrac{1}{2}B.\ \sin \tfrac{1}{2}C.$$

41. In $\triangle$ ABC is eene lijn CD naar de basis AB getrokken. Als gegeven zijn: AD = 3, BD = 4, $\angle A = 45°33'4''$ en $\angle BCD = 40°$, bereken dan den straal van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC.

42. Van een driehoek ABC is gegeven: $C = 65°$, $a + b = 16$ cM, R = 5 cM. Bereken de hoeken.

43. Druk het oppervlak van een driehoek uit in den straal r des ingeschreven cirkels en in de hoeken.

44. Bewijs, dat in een rechthoekigen driehoek, waarvan de zijden een rekenkundige reeks vormen, en welks kleinste hoek A is,

$$4\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A + 2 = 3\sec^2 \tfrac{1}{2}A.$$

45. Een toren staat op de helling van een kegelvormigen berg. Honderd meter van den voet van den toren naar beneden ziet men dezen onder een hoek van 45°20′; nog 130 M verder onder een hoek van 24°10′. Bereken de hoogte van den toren.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

VERGELIJKINGEN.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK XII.

Cyclometrische vormen.

§ 75. Begrip.

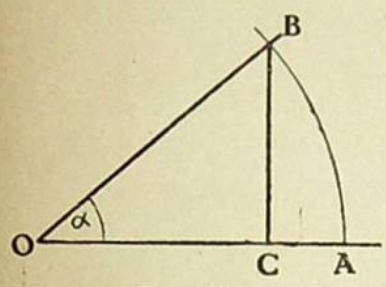


Fig. 54.

In fig. 54 heeft AOB tot sinus de verhouding $\frac{BC}{OB}$; laat deze verhouding zijn 0,53, dan is α een hoek, die tot sinus heeft 0,53; korter:
α is een hoek met sinus 0,53;
α = hoek met sin 0,53;
α = hoek sin 0,53. Omdat het aantal graden (radialen) van den boog AB gelijk is aan het aantal graden (radialen) van $\angle$ AOB, kan men voor hoek zetten boog. Men is zelfs gewoon dit altijd te doen en schrijft dus α = bg sin 0,53 (α = arc sin 0,53). Blijkbaar is de beteekenis niet anders dan de rechtstreeksche uitdrukking: sin α = 0,53.

Terwijl bij sin $\alpha = p$ men eerst α geeft en daarvan den sinus verlangt, waarvoor p wordt gevonden, is bij bg sin $p = \alpha$ de zaak deze: men geeft de verhouding p en zegt, dat dit een sinus is; het tweede lid geeft dan den hoek, behoorende bij den gegeven sinus. Men noemt daarom vormen als bg tg 1 = 45° wel omgekeerde goniometrische vormen[1]); meer gebruikelijk is de uitdrukking cyclometrische vormen, hetgeen beteekent: „cirkels (bogen) metend", natuurlijk door de gegeven goniometrische verhoudingen. We vinden dus:

bg sin p = α beteekent: de hoek, waarvan de sinus p is, is α; deze vergelijking kan direct worden omgezet in: sin α = p

Omdat sin 60° = ½√3, is bg sin ½√3 = 60° = ⅓ π.
„ cos 135° = — ½√2, is bg cos (— ½√2) = 135° = ¾ π.
„ tg 45° = 1, is bg tg 1 = 45° = ¼ π.

[1]) In Engeland is men gewoon het omgekeerde uit te drukken door den exponent — 1; aldus $\sin^{-1} 0{,}5 = 30°$; $\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{7} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{13} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{2}{9}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Meerwaardig. Op deze omzettingen is de volgende aanmerking te maken: 60° is niet de eenige hoek, die $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ tot sinus heeft; ook 120°; zelfs twee oneindige reeksen hoeken, die men samenvat in $60° + k \cdot 360°$ en $120° + k \cdot 360°$. Evenzoo is bg cos $(-\frac{1}{2}\sqrt{2})$ een hoek in het 2de of 3de kwadrant, 45° kleiner of grooter dan 180°; men heeft dus bg cos $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = (2k + 1)\,180° \mp 45°$; het derde voorbeeld wordt aldus: bg tg $1 = k \cdot 180° + 45°$.

In cyclometrische formules kunnen deze reeksen vermeden worden door scherpe definities. Zie § 77.

§ 76. Herleidingen.

We weten, dat bij een gegeven gon. verhouding de andere gemakkelijk kunnen worden berekend; vraagstukken als: „sin $\alpha = \frac{3}{5}$; bereken tg α en sec α", omgezet in cyclometrische vormen, luiden nu: „Vul in: bg sin $\frac{3}{5}$ = bg tg . . . = bg sec . . .", wat men het best leest als volgt: „Van een hoek is de sinus gelijk aan $\frac{3}{5}$, wat is zijn tangens en wat is zijn secans?"

1e Voorbeeld. *Gegeven een scherpe hoek, bepaald door* bg tg $\frac{2p}{p^2-1}$; *gevraagd denzelfden hoek uit te drukken door de andere gon. verhoudingen.*

Enkele hoek. **Opl.** Een hoek, wiens tangens $\frac{2p}{p^2-1}$ is, bevindt zich in een rechthoekigen driehoek, waarvan de overstaande en aanliggende rechthoekszijde opv. $2p$ en $p^2 - 1$ zijn. De hypotenusa is dus $p^2 + 1$. Men kan dus opschrijven:

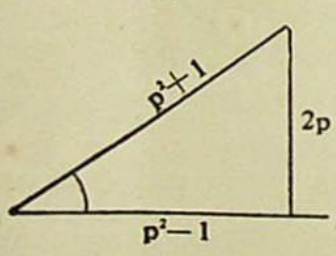


Fig. 55.

$$\text{bg tg}\,\frac{2p}{p^2-1} = \text{bg sin}\,\frac{2p}{p^2+1} = \text{bg cos}\,\frac{p^2-1}{p^2+1} =$$

$$\text{bg cot}\,\frac{p^2-1}{2p} = \text{bg sec}\,\frac{p^2+1}{p^2-1} = \text{bg cosec}\,\frac{p^2+1}{2p}.$$

2de Voorbeeld. *Gegeven een stompe hoek* α, *bepaald door:* bg cos $(-\frac{1}{3}) = \alpha$; *hoe bepaalt men denzelfden hoek door de andere gon. verhoudingen?*

Opl. Blijkbaar is de projecteerende lijn $2\sqrt{2}$, dus

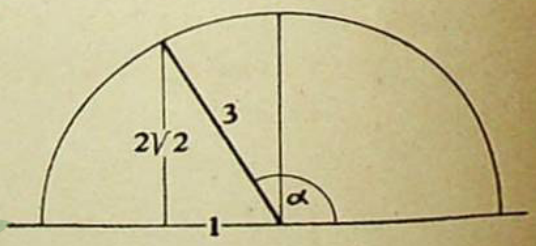


Fig. 56.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = -2\sqrt{2}$; $\cot\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\sec\alpha = -3$ en $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Het antwoord is dus: $\operatorname{bg}\cos(-{}^1/_3) = \operatorname{bg}\sin\frac{2\sqrt{2}}{3} = \operatorname{bg}\operatorname{tg}(-2\sqrt{2}) = \operatorname{bg}\cot\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \operatorname{bg}\sec(-3) = \operatorname{bg}\operatorname{cosec}\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

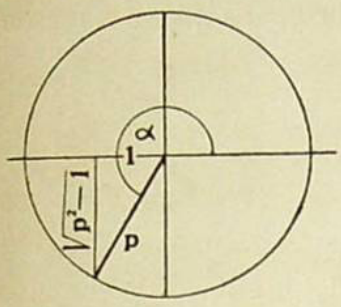


Fig. 57.

3de Voorbeeld. *Een hoek in het derde kwadrant is bepaald door bg sec (— p); bepaal dien hoek door de andere gon. verhoudingen.*

Opl. De figuur wijst van zelf de oplossing; men denke vooral aan de teekens:

$\operatorname{bg}\sec(-p) = \operatorname{bg}\cos\left(-\frac{1}{p}\right) = \operatorname{bg}\sin\left(-\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}\right) = \operatorname{bg}\operatorname{cosec}\left(-\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\right) = \operatorname{bg}\operatorname{tg}\sqrt{p^2-1} = \operatorname{bg}\cot\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}$.

4de Voorbeeld. *Bereken cot (bg sin a).*

Opl. Den genoemden boog of hoek α noemende, hebben we $\sin\alpha = a$; er wordt gevraagd naar den cotangens van dien hoek; de cos is $\sqrt{1-a^2}$, dus is de $\cot = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$; het teeken wordt bepaald door het kwadrant, waarin α ligt. Waar niets gegeven is, nemen we het 1e kwadrant. De oplossing is dus:

$$\cot(\operatorname{bg}\sin a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Sommen en verschillen. De opgave: „Bewijs: $\operatorname{bg}\sin{}^3/_5 + \operatorname{bg}\cos{}^{12}/_{13} = \operatorname{bg}\operatorname{tg}{}^{56}/_{33}$" komt neer op het volgende: Er is een hoek α gegeven, die tot sin heeft $^3/_5$ en daar telt men bij een hoek β, die tot cos heeft $^{12}/_{13}$; bewijs, dat de som van deze twee hoeken tot tg heeft $^{56}/_{33}$; korter: $\sin\alpha = {}^3/_5$, $\cos\beta = {}^{12}/_{13}$ wat is $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$?[1]). De oplossing verloopt als volgt:

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; $\sin\alpha = {}^3/_5$, dus $\operatorname{tg}\alpha = {}^3/_4$; $\cos\beta = {}^{12}/_{13}$, dus $\operatorname{tg}\beta = {}^5/_{12}$; $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ is dus $\frac{{}^3/_4 + {}^5/_{12}}{1 - {}^5/_{16}} = {}^{56}/_{33}$.

[1]) In de opgave worden scherpe hoeken bedoeld, in allen gevalle in het 1e lid.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

We behandelen nog een paar voorbeelden :

5de voorbeeld. *Herleid : bg cot 3 + bg cosec √5.*

Opl. Noem bg cot 3 = α en bg cosec √5 = β ; dan is cot α = 3 en cosec β = √5; de som der hoeken kan men b.v. bepalen door den sinus; $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta =$ $\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. De gevraagde hoek is dus 45° of $\frac{\pi}{4}$. (Is er niets omtrent de gegeven hoeken vermeld, dan neemt men de gegeven hoeken en het resultaat zoo klein mogelijk.)

6de voorbeeld. *Bewijs : bg sin* $\frac{4}{5}$ + *bg sin* $\frac{8}{17}$ + *bg sin* $\frac{13}{85} = \frac{\pi}{2}$.

Bewijs : Noem bg sin $^4/_5 = \alpha$, bg sin $^8/_{17} = \beta$ en bg sin $^{13}/_{85} = \gamma$; dan moeten we α + β + γ bepalen b.v. door den cosinus. Cos (α + β) = cos α cos β — sin α sin β. Uit sin α = $^4/_5$ volgt cos α = $^3/_5$; uit sin β = $^8/_{17}$ volgt cos β = $^{15}/_{17}$, dus is cos (α + β) = $^9/_{17} - {}^{32}/_{85} = {}^{13}/_{85}$. Nu hebben we te bewijzen : bg cos $^{13}/_{85}$ + bg sin $^{13}/_{85} = \frac{\pi}{2}$ (= 90°). Dit is natuurlijk in orde, want twee hoeken, waarvan de eene een sinus heeft gelijk aan *a*, de andere een cos gelijk aan *a*, zijn elkaars complement.

7de voorbeeld. *Los x op uit : bg tg (x — 1) + bg tg (2 — x) = 2bg tg* $\sqrt{3x - x^2 - 2}$.

Bewijs. Noem den eersten hoek α, dan is tg α = x — 1 ; noem den tweeden hoek β, dan is tg β = 2 — x. Blijkbaar geeft het eerste lid de som van de beide hoeken α en β ; deze som heeft tot tangens $\frac{(x-1)+(2-x)}{1-(-x^2+3x-2)} = \frac{1}{x^2-3x+3}$.

Het tweevoud van den hoek, die tot tangens heeft $\sqrt{3x - x^2 - 2}$, heeft tot tangens $\frac{2\sqrt{3x-x^2-2}}{1-(3x-x^2-2)} = \frac{2\sqrt{3x-x^2-2}}{x^2-3x+3}$.

De gegeven verg. gaat dus over in :

$\frac{1}{x^2-3x+3} = \frac{2\sqrt{3x-x^2-2}}{x^2-3x+3}$; men vindt spoedig : $x = 1\frac{1}{2}$.

8e voorbeeld. Bewijs : tg 2α = 2tg [α + bg tg (tg³ α)].

Bewijs : Noem bg tg (tg³ α) = φ, of met de directe notatie tg φ = tg³ α, dan staat er tusschen de accoladen α + φ en er moet

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

worden berekend: $\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^3\alpha}{1-\operatorname{tg}^4\alpha}=$

$=\frac{\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Het gestelde gaat dus over in $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, hetgeen een bekende identiteit is.

§ 77.

Optellings-theorema's van de Cyclometrische functies. De volgende formules worden opgesteld voor scherpe hoeken (bogen); in een verschil als bg cos p — bg cos q denken wij altijd den grootsten *hoek* (boog) *voorop* geplaatst. (Hier zal dus $p<q$ zijn; bovendien liggen p en q beide tusschen 0 en + 1).

Onder bg sin $(-x)$ zullen wij verstaan: — bg sin x $(0\leqq x\leqq+1)$;
„ bg cos $(-x)$ „ „ „ $180°-\text{bg cos}\,x$ of $\pi-\text{bg cos}\,x$;
„ bg tg $(-x)$ „ „ „ $-\text{bg tg}\,x$ (hier $0\leqq x\leqq+\infty$).

Hulp-elllingen. Alvorens de theorema's af te leiden, zullen wij enkele hulpstellingen, *eveneens voor scherpe hoeken*, bewijzen.

Ia. *Als* $\sin^2\alpha+\sin^2\beta>1$, *is* $\alpha+\beta>90°$ *en omgekeerd.*

Bewijs. Uit het gegeven volgt:

$\sin^2\alpha>1-\sin^2\beta$ of $\sin^2\alpha>\cos^2\beta$;
$\sin\alpha>\cos\beta$; (het minteeken vervalt, als α en β
$\sin\alpha>\sin(90°-\beta)$; scherpe hoeken zijn).
$\alpha>90°-\beta$; dus $\alpha+\beta>90°$.

Bewijs van het omgekeerde.

$\alpha>90°-\beta$, dus $\sin\alpha>\sin(90°-\beta)$ of $\sin\alpha>\cos\beta$; dus $\sin^2\alpha>\cos^2\beta$ of $\sin^2\alpha>1-\sin^2\beta$ of $\sin^2\alpha+\sin^2\beta>1$.

Ib. *Als* $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<1$, *is* $\alpha+\beta<90°$ *en omgekeerd.*

Het bewijs verloopt geheel als het vorige.

Onmiddellijk is nu in te zien:

Ic. *Als* $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$, *is* $\alpha+\beta=90°$ *en omgekeerd.*

Vervolgens komt de stelling:

IIa. *Als* $\cos^2\alpha+\cos^2\beta>1$, *is* $\alpha+\beta<90°$ *en omgekeerd.*

Men kan deze stelling juist als I bewijzen, doch ook eenvoudig aldus:

Gegeven is: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta>1$, dus
$1-\sin^2\alpha+1-\sin^2\beta>1$, of
$\sin^2\alpha+\sin^2\beta<1$, waaruit volgens Ib. volgt:
$\alpha+\beta<90°$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Het omgekeerde kan even eenvoudig worden bewezen:
Gegeven is: $\alpha + \beta < 90°$: volgens Ib. is dan:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta < 1;\ \text{dus}\ 1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta < 1,\ \text{of}$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta > 1.$$

Verder heeft men:

IIb. *Als* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta < 1$, *is* $\alpha + \beta > 90°$ *en omgekeerd.*

Stelling IIb kan even eenvoudig uit Ia worden afgeleid als IIa uit Ib volgde. Het rechtstreeksche bewijs heeft echter nut wegens de waarschuwing tegen het maken van een vergissing in een gevolgtrekking.

Gegeven is: $\cos^2\alpha < 1 - \cos^2\beta$, dus $\cos^2\alpha < \sin^2\beta$, zoodat $\cos\alpha < \sin\beta$, of $\cos\alpha < \cos(90° - \beta)$. Nu moet het ongelijkteeken worden omgekeerd, dus:

$$\alpha > 90° - \beta \text{ of } \alpha + \beta > 90°.$$

Men zoeke zelf nu het bewijs van het omgekeerde.

IIc. *Als* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, *is* $\alpha + \beta = 90°$ *en omgekeerd.*

Dit bijzondere geval is terstond duidelijk.

Hierop laten wij volgen:

IIIa. *Als* $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1$, *is* $\alpha + \beta > 90°$ *en omgekeerd.*

Bewijs: Gegeven is: $\operatorname{tg}\alpha > \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}$ of $\operatorname{tg}\alpha > \cot\beta$, dus

$$\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}(90° - \beta);\ \text{dus}\ \alpha > 90° - \beta \text{ of } \alpha + \beta > 90°.$$

Bewijs van het omgekeerde:

$$\alpha + \beta > 90°,\ \text{dus}\ \alpha > 90° - \beta \text{ en}$$
$$\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}(90° - \beta),\ \text{of}\ \operatorname{tg}\alpha > \cot\beta,$$
$$\text{zoodat}\ \operatorname{tg}\alpha > \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\ \text{of}\ \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1.$$

IIIb. *Als* $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta < 1$, *is* $\alpha + \beta < 90°$ *en omgekeerd.*

De leerling zoeke dit bewijs nu zelf; eveneens dat van

IIIc. *Als* $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$, *is* $\alpha + \beta = 90°$ *en omgekeerd.*

Uit de vorige stellingen leidt men zeer gemakkelijk nog de volgende af, betreffende de verdere gon. functies:

IV. *Als* $\cot\alpha \cot\beta \gtreqless 1$, *is* $\alpha + \beta \gtreqless 90°$ *en omgekeerd.*

V. *Als* $\sec^2\alpha + \sec^2\beta \gtreqless \sec^2\alpha \sec^2\beta$, *is* $\alpha + \beta \gtreqless 90°$ *en omgekeerd.*

VI. *Als* $\operatorname{cosec}^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\beta \gtreqless \operatorname{cosec}^2\alpha \operatorname{cosec}^2\beta$, *is* $\alpha + \beta \gtreqless 90°$ *en omgekeerd.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Som- en verschilformules.

Na deze hulpstellingen zullen nu formules worden afgeleid voor:

bg sin $p \pm$ bg sin q; bg cos $p \pm$ bg cos q; bg tg $p \pm$ bg tg q.

a) Formule voor bg sin p + bg sin q.

Stel bg sin $p = \alpha$ en bg sin $q = \beta$; dus $p = \sin\alpha$ en $q = \sin\beta$.

Wij zullen twee hoeken (bogen) optellen, wier sinussen gegeven zijn (p en q); van deze som zal de sinus bepaald worden; daarvoor zal bg geplaatst worden en dan zal een formule zijn afgeleid van den vorm:

$$\text{bg sin } p + \text{bg sin } q = \text{bg sin } x.$$

Nu is

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2}.$$

Hieruit zou men nu kunnen afleiden:

$$\alpha + \beta = \text{bg sin}\{p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2}\}.$$

Maar bg sin $\{p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2}\}$ stelt altijd een *scherpen hoek* (boog) voor *en* $\alpha+\beta$ *kan*, al zijn α en β beide scherp, *òf scherp òf stomp zijn.*

In het eerste geval hebben wij:

a_1) bg sin p + bg sin q = bg sin $\{p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2}\}$;

in het tweede geval moeten wij schrijven:

a_2) bg sin p + bg sin q = 180° − bg sin $\{p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2}\}$.

Volgens de hulpstellingen Ia en Ib zal $\alpha+\beta \gtrless 90°$ zijn, als $\sin^2\alpha + \sin^2\beta \gtrless 1$, d. w. z. als $p^2 + q^2 \gtrless 1$ is.

De formule a_1 geldt dus, als $p^2 + q^2 < 1$ en a_2, als $p^2 + q^2 > 1$.

1e Voorbeeld. Gevraagd bg sin $^{12}/_{13}$ + bg sin $^4/_5$.

Opl. $p^2 + q^2 = {}^{144}/_{169} + {}^{16}/_{25}$, dus $p^2 + q^2 > 1$.

Dus bg sin $^{12}/_{13}$ + bg sin $^4/_5$ = 180° − bg sin $\{{}^{12}/_{13} \times {}^3/_5 + {}^4/_5 \times {}^5/_{13}\}$ =

= 180° − bg sin $^{56}/_{65}$.

2de Voorbeeld. Gevraagd bg sin $^3/_5$ + bg sin $^8/_{17}$.

Opl. $p^2 + q^2 = {}^9/_{25} + {}^{64}/_{289}$, dus $p^2 + q^2 < 1$.

Dus bg sin $^3/_5$ + bg sin $^8/_{17}$ = bg sin $({}^3/_5 \times {}^{15}/_{17} + {}^8/_{17} \times {}^4/_5)$ = bg sin $^{77}/_{85}$.

b) Formule voor bg sin p − bg sin q.

Stel weer bg sin $p = \alpha$ en bg sin $q = \beta$; dan is weer

$$p = \sin\alpha \text{ en } q = \sin\beta.$$

$$\text{Sin}(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2}.$$

Hieruit kan men afleiden:

$$\alpha - \beta = \text{bg sin}\{p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2}\} \text{ en dus:}$$

b) bg sin p − bg sin q = bg sin $\{p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2}.\}$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Volgens onze vooropstellingen zijn α en β scherpe hoeken en bovendien $\alpha > \beta$; dan volgt uit $p = \sin\alpha$ en $q = \sin\beta$ daarenboven, dat p en q beide positief zijn (tusschen 0 en + 1) en ten slotte $p > q$. Dan is echter ook $p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2}$ positief.

Immers $q^2 < p^2$, dus $1-q^2, > 1-p^2$ en $\sqrt{1-q^2} > \sqrt{1-p^2}$

$$\begin{array}{r} p > q \\ \times \\ \hline p\sqrt{1-q^2} > q\sqrt{1-p^2} \end{array}$$

en derhalve $p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2} > 0$.

De formule **b** is dus juist en geldt algemeen (onder alle gemaakte voorbehoud omtrent α, β enz.).

c) Formule voor bg cos p + bg cos q.

Stel nu $\text{bg cos}\, p = \alpha$ en $\text{bg cos}\, q = \beta$, zoodat

$$p = \cos\alpha \text{ en } q = \cos\beta.$$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = pq - \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}$.

Hieruit leiden wij af:

$$\alpha + \beta = \text{bg cos}\left\{pq - \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\right\} \text{ of}$$

c) bg cos p + bg cos q = bg cos $\left\{pq - \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\right\}$.

Ook deze formule is algemeen geldig.

Als nl. $\alpha + \beta < 90°$, is volgens IIa $\cos^2\alpha + \cos^2\beta > 1$ of $p^2 + q^2 > 1$ of $0 > 1 - (p^2 + q^2)$. Tel daarbij op:

$$\begin{array}{r} p^2q^2 = p^2q^2 \\ + \\ \hline p^2q^2 > 1 - (p^2+q^2) + p^2q^2 \text{ of} \\ p^2q^2 > (1-p^2)(1-q^2), \text{ zoodat:} \\ pq > \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}. \end{array}$$

In $\cos(\alpha+\beta) = pq - \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}$ is dus het tweede lid positief evenals het eerste.

Dus mag geconcludeerd worden:

$$\alpha + \beta = \text{bg cos}\left\{pq - \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\right\}.$$

Als daarentegen $\alpha + \beta > 90°$ is, zal volgens IIb $\cos^2\alpha + \cos^2\beta < 1$ en dus $p^2 + q^2 < 1$. Dan blijkt gemakkelijk, dat ook $pq - \sqrt{(1-p^2)(1-p^2)}$ *negatief* zal zijn, evenals $\cos(\alpha+\beta)$.

Wij mogen dan juist de gevolgtrekking maken:

$$\alpha + \beta = \text{bg cos}\left\{pq - \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\right\},$$

omdat wij hebben vooropgesteld, dat een neg. bg cos een hoek (boog) in het tweede kwadrant zou voorstellen.

3de Voorbeeld. Gevraagd $\text{bg cos}\,{}^{21}/_{29} + \text{bg cos}\,{}^{12}/_{13}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Opl. $\text{bg cos } {}^{21}/_{29} + \text{bg cos } {}^{12}/_{13} = \text{bg cos } ({}^{21}/_{29} \times {}^{12}/_{13} - {}^{20}/_{29} \cdot {}^{5}/_{13}) =$
$= \text{bg cos } {}^{152}/_{377}$.

4de Voorbeeld. Gevraagd $\text{bg cos } {}^{20}/_{29} + \text{bg cos } {}^{8}/_{17}$.

Opl. $\text{bg cos } {}^{20}/_{29} + \text{bg cos } {}^{8}/_{17} = \text{bg cos } ({}^{20}/_{29} \times {}^{8}/_{17} - {}^{21}/_{29} \times {}^{15}/_{17}) =$
$\text{bg cos } (-{}^{155}/_{493}) = 180° - \text{bg cos } {}^{155}/_{493}$.

Contrôle.

log 20 = 1,30103	log 8 = 0,90309	log 155 = 2,19033
log 29 = 1,46240	log 17 = 1,23045	log 493 = 2,69285
log cos = 9,83863 — 10	log cos = 9,67264 — 10	los cos = 9,49748 — 10

$\text{bg cos } {}^{20}/_{29} = 46°23'50''$ $\text{bg cos } {}^{3}/_{17} = 61°55'40''$ $\text{bg cos } {}^{155}/_{493} = 71°40'32''$.

Nu is $\text{bg cos } {}^{20}/_{29} + \text{bg cos } {}^{8}/_{17} = 108°19'30''$, terwijl
$180° - \text{bg cos } {}^{155}/_{493} = 108°19'28''$.

De overeenstemming is nauwkeurig genoeg; het verschil van 2″ in beide uitkomsten is toe te schrijven aan de interpolaties en aftrekkingen.

d) Formule voor bg cos p — bg cos q.

Zooals vroeger is vastgesteld, denken wij $0 \leqq p \leqq 1$; eveneens $0 \leqq q \leqq 1$ en bovendien $p < q$. Dan is de te herleiden vorm positief en weer tusschen 0 en 1 gelegen. Hij kan dus weer aan een bg cos gelijk zijn.

Stel weer $\text{bg cos } b = \alpha$ en $\text{bg cos } q = \beta$; weer is $p = \cos \alpha$ en $q = \cos \beta$.

$\text{Cos } (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = pq + \sqrt{(1 - p^2)(1 - q^2)}$.

Dus $\alpha - \beta = \text{bg cos } \{pq + \sqrt{(1 - p^2)(1 - q^2)}\}$ of

d) $\text{bg cos p} - \text{bg cos q} = \text{bg cos } \{\text{pq} + \sqrt{(1 - \text{p}^2)(1 - \text{q}^2)}\}$.

e) Formule voor bg tg p + bg tg q.

Laat nu $\text{bg tg p} = \alpha$ en $\text{bg tg } q = \beta$, dus $p = \text{tg } \alpha$ en $q = \text{tg } \beta$.

Nu is *(l)* . . . . . $\text{tg } (\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \, \text{tg} \beta} = \dfrac{p + q}{1 - pq}$.

Stel nu vooreerst $\alpha + \beta > 90°$.

Volgens IIIa is dan $\text{tg} \alpha \, \text{tg} \beta > 1$ en dus ook $pq > 1$.

Uit *(l)* kan dan *niet* afgeleid worden :

$$\alpha + \beta = \text{bg tg } \frac{p + q}{1 - pq},$$

want $\alpha + \beta$ is dan een stompe hoek, terwijl $\dfrac{p + q}{1 - pq}$ negatief is

en dus $\text{bg tg } \dfrac{p + q}{1 - pq} = \text{bg tg } \left(-\dfrac{p + q}{pq - 1}\right) = -\text{bg tg } \dfrac{p + q}{pq - 1}$.

Men heeft dan echter slechts te stellen :

(m) . . . . . $\alpha + \beta = 180° - \text{bg tg } \dfrac{p + q}{pq - 1}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dan is immers:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\left\{180^\circ-\operatorname{bg tg}\frac{p+q}{pq-1}\right\}=-\operatorname{tg}\left(\operatorname{bg tg}\frac{p+q}{pq-1}\right)=$$

$$=-\frac{p+q}{pq-1}=\frac{p+q}{1-pq}.$$

Wij hebben derhalve:

e_1) $\operatorname{bg tg} p+\operatorname{bg tg} q=180^\circ-\operatorname{bg tg}\frac{p+q}{pq-1}$, als $pq>1$.

Bij $pq<1$ heeft men gewoon:

e_2) $\operatorname{bg tg} p+\operatorname{bg tg} q=\operatorname{bg tg}\frac{p+q}{1-pq}$, als $pq<1$.

Voor $pq=1$ leveren beide formules in het 2de lid 90°.

5de Voorbeeld.

$$\operatorname{bg tg} 1+\operatorname{bg tg}\sqrt{3}=180^\circ-\operatorname{bg tg}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=180^\circ-\operatorname{bg tg}(2+\sqrt{3})=$$

$$=180^\circ-75^\circ=105^\circ.$$

De som der beide hoeken in het 1e lid is $45^\circ+60^\circ=105^\circ$.

6de Voorbeeld.

$$\operatorname{bg tg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{bg tg} 1=\operatorname{bg tg}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\operatorname{bg tg}\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=$$

$$=\operatorname{bg tg}(2+\sqrt{3})=75^\circ;$$

$$\text{ook } \operatorname{bg tg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{bg tg} 1=30^\circ+45^\circ=75^\circ.$$

Evenals voor bg cos p + bg cos q kan men ook voor bg sin p + bg sin q een enkele algemeen geldige uitdrukking vinden.

Hiertoe stellen wij in

$$\operatorname{bg cos} p+\operatorname{bg cos} q=\operatorname{bg cos}\{pq-\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\}$$

$$\operatorname{bg cos} p=90^\circ-\operatorname{bg sin} p;\ \operatorname{bg cos} q=90^\circ-\operatorname{bg sin} q.$$

Dan zal

$$180^\circ-\operatorname{bg sin} p-\operatorname{bg sin} q=90^\circ-\operatorname{bg sin}\{pq-\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\}$$

en derhalve

$\operatorname{bg sin} p+\operatorname{bg sin} q=90^\circ+\operatorname{bg sin}\{pq-\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\}$.

7de Voorbeeld.

$$\operatorname{bg sin}\tfrac{1}{2}+\operatorname{bg sin}\tfrac{1}{2}\sqrt{2}=90^\circ+\operatorname{bg sin}\{\tfrac{1}{4}\sqrt{2}-\sqrt{\tfrac{3}{4}\times\tfrac{1}{2}}\}=$$

$$=90^\circ+\operatorname{bg sin}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=90^\circ-\operatorname{bg sin}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=$$

$$90^\circ-15^\circ=75^\circ.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Het eerste lid is ook $= 75°$.

8e Voorbeeld.

$$\text{bg sin } \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \text{bg sin } \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 90° + \text{bg sin } \{\tfrac{1}{4}\sqrt{6} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} \times \tfrac{1}{4}\} =$$

$$= 90° + \text{bg sin } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 90° + 15° = 105°.$$

Ook het 1e lid is $= 105°$, nl. $45° + 60°$.

Hetzelfde kan geschieden voor bg tg p + bg tg q.

Immers, als $pq > 1$, is

$$\text{bg tg } p + \text{bg tg } q = 180° - \text{bg tg } \frac{p+q}{pq-1} =$$

$$= 180° - \left(90° - \text{bg cot } \frac{p+q}{pq-1}\right) = 90° + \text{bg cot } \frac{p+q}{pq-1} =$$

$$= 90° + \text{bg tg } \frac{pq-1}{p+q}.$$

En als $pq < 1$, is

$$\text{bg tg } p + \text{bg tg } q = \text{bg tg } \frac{p+q}{1-pq} = 90° - \text{bg cot } \frac{p+q}{1-pq} =$$

$$= 90° - \text{bg tg } \frac{1-pq}{p+q} = 90° + \text{bg tg } \frac{pq-1}{p+q}.$$

Wij hebben dus weer de algemeene formule:

$$\textbf{bg tg p + bg tg q} = 90° + \textbf{bg tg } \frac{\textbf{pq - 1}}{\textbf{p + q}}.$$

9de Voorbeeld.

$$\text{bg tg } \sqrt{5-2\sqrt{5}} + \text{bg tg } \sqrt{5+2\sqrt{5}} = 90° + \text{bg tg } \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} =$$

$$= 90° + \text{bg tg } \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}} = 90° + \text{bg tg } \frac{\sqrt{80-32\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}} =$$

$$= 90° + \text{bg tg } \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = 90° + 18° = 108°.$$

Het 1e lid is $= 36° + 72° = 108°$.

10de Voorbeeld.

$$\text{bg tg } (-1+\sqrt{2}) + \text{bg tg } 1 = 90° + \text{bg tg } \frac{-2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= 90° + \text{bg tg } (-\sqrt{2}+1) = 90° - \text{bg tg } (-1+\sqrt{2}) =$$

$$= 90° - 22°,5 = 67°,5.$$

Het 1e lid $= 22°,5 + 45° = 67°,5$.

Wij hebben dus *als belangrijk resultaat de volgende algemeen geldige formules gevonden:*

107a $$\textbf{bg sin p + bg sin q} = 90° + \textbf{bg sin } \{\textbf{pq} - \sqrt{(1-\textbf{p}^2)(1-\textbf{q}^2)}\};$$

108a $$\textbf{bg cos p + bg cos q} = \textbf{bg cos } \{\textbf{pq} - \sqrt{(1-\textbf{p}^2)(1-\textbf{q}^2)}\};$$

109a $$\textbf{bg tg p + bg tg q} = 90° + \textbf{bg tg } \frac{\textbf{pq}-1}{\textbf{p}+\textbf{q}};$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Hierbij kan men dan voegen:

107b $\mathbf{bg\ sin\ p - bg\ sin\ q = 90° - bg\ sin\ \{pq + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\}}$;

108b $\mathbf{bg\ cos\ p - bg\ cos\ q = bg\ cos\ \{pq + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\}}$;

109b $$\mathbf{bg\ tg\ p - bg\ tg\ q = 90° - bg\ tg\ \frac{pq+1}{p-q}}.$$

N.B. De formules voor bg tg p — bg tg q en voor bg sin p — bg sin q worden uit 2 van het vorige 3-tal gevonden door q te veranderen in $-q$.

Verder kan men nog de volgende formules aantoonen:

$$\text{bg cot } p + \text{bg cot } q = 90° + \text{bg cot } \frac{p+q}{1-pq} \text{ en}$$

$$\text{bg cot } p - \text{bg cot } q = 90° - \text{bg cot } \frac{q-p}{1+pq}.$$

Bewijs. bg tg p + bg tg q = 90° — bg cot p + 90° — bg tg q = 90° + bg cot $\frac{p+q}{pq-1}$ = 90° — bg cot $\frac{p+q}{1-pq}$.

Uit 180° — bg cot p — bg cot q = 90° — bg cot $\frac{p+q}{1-pq}$ volgt dan, bg cot p + bg cot q = 90° + bg cot $\frac{p+q}{1-pq}$.

De formule voor bg cot p — bg cot q kan onmiddellijk uit deze gevonden worden door q te vervangen door $-q$.

Opgaven.

§ 78. **1.** Bewijs: *a.* $\text{bg tg } \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \text{bg cos } \sqrt{1-a^2}$;

b. $\text{bg sin } \sqrt{\frac{x}{y}} = \text{bg tg } \sqrt{\frac{x}{y-x}}$;

c. $\text{bg sin } \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} = \text{bg cos } \sqrt{\frac{b-c}{a-c}} = \text{bg tg } \sqrt{\frac{a-b}{b-c}}$.

2. Bewijs: bg tg a + bg tg $\frac{1}{a}$ = 90°. Zijn er meer van die vergelijkingen te geven? Ook dat er uitkomt 180° of 270°?

3. Bewijs: bg sin a + bg cos a = 90°. Zijn er meer van die vergelijkingen?

4. Vul in: $\text{bg sin } \sqrt{\frac{x-a+b}{2b}} = \text{bg cos } \ldots = \text{bg tg } \ldots$

5. Gevraagd de cos van een hoek, die gegeven is door bg sin $^3/_5$; of korter: Bepaal cos (bg sin $^3/_5$).

6. Bereken, als de gegeven hoek steeds in het 1e kwadrant

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

ligt: *a.* sin (bg tg ½); *b.* cos (bg sin ¼); *c.* tg (bg cot 2). (N.B. Lees opgave *a.* aldus: vind den sinus van een hoek, als ge weet, dat de tangens gelijk is aan ½).

7. Bereken: *a.* $\sin\left(\text{bg tg}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; *b.* $\text{tg}\left(\text{bg sin}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
c. cot (bg sec 3).

8. Bewijs: *a.* $2\,\text{bg tg}\,{}^4/_3 = 90° + \text{bg tg}\,{}^7/_{24}$;
b. $3\,\text{bg tg}\,{}^4/_3 = 180° - \text{bg tg}\,{}^{44}/_{117}$.

9. Bewijs: *a.* $2\,\text{bg sin}\,a = \text{bg sin}\,(2a\sqrt{1-a^2})$ onder voorwaarde, dat $a < ½\sqrt{2}$;
b. $2\,\text{bg cos}\,a = \text{bg cos}\,(2a^2 - 1)$.

10. Bereken x in: *a.* $\text{bg sin}\,{}^9/_{41} + \text{bg sin}\,{}^3/_5 = \text{bg sin}\,x$;
b. $\text{bg cos}\,{}^{12}/_{13} + \text{bg cos}\,{}^{15}/_{17} = \text{bg cos}\,x$;
c. $\text{bg sin}\,p + \text{bg cos}\,q = \text{bg sin}\,x$;
d. $\text{bg cos}\,p + \text{bg sin}\,q = \text{bg cos}\,x$;
e. Bereken $\text{bg sin}\,{}^{12}/_{13} + \text{bg sin}\,{}^{40}/_{41}$;
f. eveneens $\text{bg tg}\,{}^{15}/_{17} + \text{bg tg}\,{}^{21}/_{29}$.

11. Bereken x in: $\text{bg tg}\,a - \text{bg cot}\,b = \text{bg tg}\,x$.
Ook in: $\text{bg tg}\,b - \text{bg cot}\,a = \text{bg tg}\,x$.

12. Onder welke voorwaarde is $\text{bg sin}\,\frac{x}{a} + \text{bg sin}\,\frac{y}{b} = 90°$?

13. Als $\text{bg sec}\,a + \text{bg sec}\,\frac{x}{a} = \text{bg sec}\,b + \text{bg sec}\,\frac{x}{b}$, dan is $x^2 = a^2b^2$. Bewijs.

14. Onder welke voorwaarde is $\text{bg tg}\,\frac{a}{b+c} + \text{bg tg}\,\frac{b}{a+c} = 45°$?

15. Vereenvoudig: $\text{bg tg}\,\frac{n}{1+6n^2} + \text{bg tg}\,\frac{n}{1+2n^2} + \text{bg tg}\,n$.

16. Bewijs: *a.* $\text{bg tg}\,{}^3/_5 + \text{bg sin}\,{}^3/_5 = \text{bg tg}\,{}^{27}/_{11}$;
b. $\text{bg sin}\,{}^3/_5 - \text{bg sin}\,{}^5/_{13} = \text{bg sin}\,{}^{16}/_{65}$;
c. $\text{bg sin}\,{}^5/_{13} + \text{bg tg}\,{}^7/_{24} = \text{bg cos}\,{}^{253}/_{325}$.

17. Bewijs: *a.* $\text{bg cot}\,{}^{119}/_{120} = 2\,\text{bg sin}\,{}^5/_{13}$;
b. $\text{bg cos}\,{}^{63}/_{65} + 2\,\text{bg tg}\,{}^1/_5 = \text{bg sin}\,{}^3/_5$;
c. $\text{bg tg}\,¼ + \text{bg tg}\,{}^2/_9 = ½\,\text{bg cos}\,{}^3/_5$;

18. Herleid: $2\,\text{bg cos}\,\frac{3}{\sqrt{13}} + \text{bg cot}\,\frac{16}{63} + ½\,\text{bg cos}\,{}^7/_{25}$.

19. Bewijs, dat
$$\text{bg tg}\,\frac{1}{1-2x+4x^2} + \text{bg tg}\,\frac{1}{1+2x+4x^2} = \text{bg tg}\,\frac{1}{2x^2}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

20. Bewijs: *a.* $\text{bg tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \text{bg tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \text{bg sin } x$;

b. $\text{bg sin}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-x)} + \text{bg cos}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+x)} = \text{bg cos } x$.

21. Herleid: *a.* $\text{bg tg}\frac{1}{2} + \text{bg tg}\frac{1}{3} - \text{bg sin}\frac{1}{\sqrt{5}} - \text{bg cot } 3$;

b. $\text{bg tg}(2+\sqrt{3}) - \text{bg tg}(2-\sqrt{3}) - \text{bg sec } 2$.

22. Bereken: $\text{bg tg}\,{}^1/_7 + 2(\text{bg tg}\,\tfrac{1}{2} + 2\text{bg tg}\,{}^1/_3)$.

23. Bereken x uit: *a.* $\text{bg sin}\frac{5}{x} + \text{bg sin}\frac{12}{x} = 90°\ (= \tfrac{1}{2}\pi)$;

b. $\text{bg sin } x + \text{bg sin } 2x = 60°\ (= {}^1/_3\pi)$;

c. $\text{bg cos}\frac{x}{a} - \text{bg cos}\frac{x}{b} = \text{bg cos}\frac{2b-a}{a}$.

24. Bereken x uit:

a. $\text{bg tg } x + 2\text{bg cot } x = 120°\ (= {}^2/_3\pi)$;

b. $\text{bg tg}\frac{x}{a} + \text{bg tg}\frac{x}{b} + \text{bg tg}\frac{x}{c} = 90°\ (= \tfrac{1}{2}\pi)$.

25. Welke waarden van x voldoen aan de verg.:

$$2\text{bg tg } x = \text{bg cos}\frac{1-a^2}{1+a^2} - \text{bg cos}\frac{1-b^2}{1+b^2}\ ?$$

26. Bereken $\cot(\text{bg cot}\,{}^3/_4 + \text{bg cot}\,{}^1/_7)$.

27. Bewijs: $2\text{bg tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,.\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}x\right) = \text{bg cos}\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$.

28. Als twee cirkels met stralen R en r elkaar uitwendig raken, dan is de hoek der beide uitwendige raaklijnen $2\text{bg sin}\frac{R-r}{R+r}$. Bewijs.

29. Als $\alpha = \text{bg tg}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$, druk x dan uit in $\text{tg}\,\alpha$.

30. Bewijs, dat $x = (8k-1)\ 45° + \text{bg sin}\,(\tfrac{1}{2}c\sqrt{2})$ een wortel is van de vergelijking: $\sin x + \cos x = c$.

31. Bewijs, dat $x = 2\text{bg tg}\frac{1-a}{1+a}$ een wortel is van de verg.

$$\sin x + a\cos x = 1.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK XIII.

Goniometrische Vergelijkingen.

§ 79.

Definitie. Onder een goniometrische vergelijking verstaat men een vergelijking, waarin als onbekenden hoeken voorkomen, die bepaald moeten worden door gegeven goniometrische verhoudingen: b.v.

$a)\ 5\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$; $b)\ 2\operatorname{tg} x = 7\sin x$;

$c)\ \sin x + 2\cos x = \sec x$; $d)\ \begin{cases} \sin x + \sin y = a; \\ \sin x \sin y = b. \end{cases}$

In het algemeen voldoen aan een gon. vergelijking een oneindig aantal waarden: vindt men $\sin 3x = 0{,}76041$, dan is $3x = 49°30'$ of $180° - 49°30'$; men kan echter deze waarden vermeerderen of verminderen met $k \,.\, 360°$; de oplossing voor $3x$ is dus:

$$\begin{cases} 49°30' + k \,.\, 360°; \\ -\,49°30' + (2k+1)\,180° \end{cases}$$

en men heeft $x = \begin{cases} 16°30' + k \,.\, 120°; \\ -\,16°30' + (2k+1)\,60°. \end{cases}$

Heeft men dus één waarde gevonden, dan kan men er gemakkelijk de „periode" bijvoegen; deze hangt af van de gon. verPeriode. houding, die in het vraagstuk ten slotte wordt opgelost. Omdat dit voor leerlingen een kostelijke oefening is, is men gewoon steeds de periode er bij te eischen of z.g. **den algemeenen vorm** van het antwoord te vragen.

§ 80.

Methoden van oplossing. Omdat het mogelijk is elke gon. verhouding in een willekeurige andere om te zetten, is het steeds doenlijk, **de vergelijking te herleiden tot een andere, waarin slechts één verhouding optreedt;** men heeft dan met een gewone algebraïsche verg. te doen, die men oplost, zooals in de algebra geleerd wordt. Een paar voorbeelden lichten het gezegde het best toe:

Algemeene oplossing.

a) Los op: $2\sqrt{3}\cos^2 x = \sin x$.

Voor $\cos^2 x$ zet men $1 - \sin^2 x$; de verg. wordt dus:

$(1 - \sin^2 x)\, 2\sqrt{3} = \sin x$ of $\sin^2 x\,(2\sqrt{3}) + \sin x - 2\sqrt{3} = 0$;

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4\sqrt{3}} = \frac{-1 \pm 7}{4\sqrt{3}}$; $\sin x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin x_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$. De eerste oplossing geeft $x = 60° + k \cdot 360°$ en $120° + k \cdot 360°$, samen in één vorm $(4k + 1)\, 90° \pm 30°$; de tweede sinus zou een volstrekte waarde grooter dan 1 moeten hebben, zoodat deze oplossing vervalt.

b. Los op: $\cos 2x + \sin x = 1$.

Voor $\cos 2x$ zet men $1 - 2\sin^2 x$; waardoor de verg. overgaat in een gewone vierkantsvergelijking.

c. Los op: $\cot x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x$.

Druk $\cot x$, $\operatorname{tg} x$ en $\cos x$ alle drie uit in $\sin x$; de verg. gaat over in $\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \sin x + \sqrt{1-\sin^2 x}$; noemen we voor het gemak $\sin x = y$, dan hebben we de algebraïsche verg. $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = y + \sqrt{1-y^2}$.

$\frac{(1-y^2)-y^2}{y\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{1-y^2} + y$. Beide leden kunnen worden gedeeld door $\sqrt{1-y^2} + y$, zoodat zich de verg. laat ontbinden in:

$$\begin{cases} \sqrt{1-y^2} + y = 0; \\ \frac{\sqrt{1-y^2} - y}{y\sqrt{1-y^2}} = 1. \end{cases}$$

Deze moeten verder worden opgelost.

Bezwaren. **Tegen deze algemeene manier bestaat het groote bezwaar, dat er dikwijls wortelvormen optreden, die slechts door kwadrateering kunnen worden verdreven en waardoor bijna altijd wortels worden ingevoerd [1]).**

Waar geen wortelvormen optreden, is deze methode de beste; *in elk geval probeert men deze methode het eerst.* Mochten er wortels komen, dan maakt men veelvuldig gebruik van de volgende eigenschap:

Rationeel door $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x$. **Alle goniometrische verhoudingen van x zijn rationeel uit te drukken in $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x$.** Het bewijs is eenvoudig:

$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}$; $\sin x = 2\sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = 2\operatorname{tg} \frac{1}{2}x \cos^2 \frac{1}{2}x$,

[1]) Bovendien behoort men de wortels altijd tweewaardig te beschouwen; in c zou men evengoed voor $\cot x$ kunnen zetten: $-\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$; enz.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

maar $\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{\sec^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}$, dus $\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}$.

Verder is $\cos x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}$. Men heeft dus:

$$\mathbf{\sin x} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}; \qquad \mathbf{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{2\operatorname{tg} \frac{1}{2}x};$$

$$\mathbf{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}; \qquad \mathbf{\sec x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x};$$

$$\mathbf{\operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}; \qquad \mathbf{\cot x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{2\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}.$$

Voorbeeld *c* van de vorige blz. gaat dus over in:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{2\operatorname{tg} \frac{1}{2}x} - \frac{2\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x};$$

Zet men $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = z$, dan gaat de verg. over in:

$$\frac{1 - z^2}{2z} - \frac{2z}{1 - z^2} = \frac{2z + 1 - z^2}{1 + z^2} \text{ of } \frac{1 - 6z^2 + z^4}{2z(1 - z^2)} = \frac{1 + 2z - z^2}{1 + z^2};$$

deze verg. gaat over in het tweetal (gelijkwaardig met deze ééne)

$$1 + 2z - z^2 = 0 \text{ en } \frac{1 - 2z - z^2}{2z(1 - z^2)} = \frac{1}{1 + z^2}.$$

§ 81.

Verschillende typen.

Een eenvoudig type van gon. vergelijking is:
sin px = sin qx en soortgelijke: $\sin px = \cos qx$, $\operatorname{tg} px = \cot qx$; waarin p en q verschillend worden ondersteld.

De vergelijking drukt uit, dat twee hoeken px en qx denzelfden sinus hebben: dan zijn die hoeken (ongerekend de periode van 360°) òf gelijk òf samen 180°.

De oplossing is dus: $px = qx + k \cdot 360°$;

$$px + qx = 180° + k \cdot 360°;$$

zoodat men vindt $x = \frac{k \cdot 360°}{p - q}$ en $x = \frac{(2k + 1)\ 180°}{p + q}$.

De vergelijking **sin px = cos qx** wordt eerst omgezet in $\sin px = \sin (90° - qx)$, waardoor de oplossing teruggebracht wordt tot die van het gegeven type.

De verg. **tg px = cot qx** zet men om in $\operatorname{tg} px = \operatorname{tg} (90° - qx)$; de hoeken px en $90° - qx$ zijn dus (ongerekend de periode van

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$180°$) gelijk; de algemeene vorm van het antwoord wordt dus gevonden uit $px = 90° - qx + k \,.\, 180°$, zoodat deze is:

$$x = \frac{(2k+1)\,90°}{p+q}.$$

Even eenvoudig is de oplossing van vergelijkingen van den vorm:

1) $\sin(x+a)\cos(x+b) = c.$
2) $\cos(x+a)\cos(x+b) = c.$
3) $\sin(x+a)\sin(x+b) = c.$

Men ziet in 1) de uitwerking tot een product van $\sin(2x+a+b) + \sin(a-b) = 2c$; deze kan onmiddellijk worden opgelost:

$$\sin(2x+a+b) = 2c - \sin(a-b)\ ;$$
$$2x+a+b = \text{bg sin}\{2c - \sin(a-b)\} + k \,.\, 360° \text{ en}$$
$$2x+a+b = 180° - \text{bg sin}\{2c - \sin(a-b)\} + k \,.\, 360°, \text{ dus}$$
$$x = \tfrac{1}{2}[-a-b + \text{bg sin}\{2c - \sin(a-b)\}] + k \,.\, 180° \text{ en}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}[a+b + \text{bg sin}\{2c - \sin(a-b)\} + (2k+1)\,.\,90°].$$

Verg. 2) is blijkbaar de som van 2 cosinussen en verg. 3) het verschil.

Ook eenvoudig is de verg. van het type:

$$a\sin(x+\alpha) = b\sin(x+\beta).$$

Ontwikkeling van de gegeven functie geeft niet de eenvoudigste oplossing; men kan beter als volgt handelen. Zet eerst $\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin(x+\beta)} = \frac{b}{a}$; en pas dan toe een bekende eigenschap der evenredigheden:

$$\frac{\sin(x+\alpha) - \sin(x+\beta)}{\sin(x+\alpha) + \sin(x+\beta)} = \frac{b-a}{b+a}.$$

$$\frac{2\cos(x+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin(x+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{b-a}{b+a}, \text{ waaruit}$$

$$\cot(x+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta) = \frac{b-a}{b+a}\cot\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta);$$ deze verg. is van de gewone gedaante: $\cot\gamma = p$ en dus direct op te lossen.

We geven nog eenige volledig uitgewerkte voorbeelden:

1e Voorbeeld. Los op: $2\cos x\cos 3x + 1 = 0$.

Opl. $2\cos 3x\cos x + 1 = 0$. De eerste term is de som van twee cosinussen: $\cos 4x + \cos 2x + 1 = 0$. Cos $4x$ kan worden uitgedrukt in $\cos 2x$ als volgt: $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$. De verg.

gaat dus over in: $2\cos^2 2x + \cos 2x = 0$; deze lost zich op in het tweetal: $\begin{cases} \cos 2x = 0 ; \\ 2\cos 2x + 1 = 0. \end{cases}$

Uit de eerste volgt $2x = k \,.\, 360° \pm 90°$, uit de tweede $2x = (2k + 1)\, 180° \pm 60°$ of $k \,.\, 360° \pm 120°$.

De gevraagde hoeken zijn dus: $x = k \,.\, 180° \pm 45°$ en $x = (2k + 1)\, 90° \pm 30°$ of $k \,.\, 180° \pm 60°$.

2de Voorbeeld. Los op: $\cot^2 x - \mathrm{tg}^2 x = 2\,\mathrm{cosec}\, x \sec x$.

Opl. We drukken alle verhoudingen uit in $\sin x$ en $\cos x$ en vinden: $\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{2}{\sin x \cos x}$ of

$$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2}{\sin x \cos x}.$$

In den teller van het eerste lid zit de factor $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, dus houdt men over: $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \dfrac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ of

$\cos 2x = \sin 2x = \cos (90° - 2x)$; de hoeken $2x$ en $90° - 2x$ zijn, ongerekend de periode van 360°, gelijk of tegengesteld; dus $2x = 90° - 2x + k \,.\, 360°$ òf $2x + 90° - 2x = k \,.\, 360°$; men vindt dus alleen $x = 22\frac{1}{2}° + k \,.\, 90°$.

3de Voorbeeld. Los op: $4\,\mathrm{tg}\, x + 2 \cot x = 7$.

Opl. De vergelijking is: $4\mathrm{tg}^2 x + 2 - 7\mathrm{tg}\, x = 0$ of $4\mathrm{tg}^2 x - 7\mathrm{tg}\, x + 2 = 0$;

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{8} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8} = \frac{7 \pm 4{,}12311}{8};$$

$$\mathrm{tg}\, x_1 = 1{,}39039 \text{ en } \mathrm{tg}\, x_2 = 0{,}35961.$$

De tafel der gon. functies geeft: $\begin{cases} x_1 = 54°16'32'' + k \,.\, 180°; \\ x_2 = 19°46'45'' + k \,.\, 180°. \end{cases}$

4de Voorbeeld. Los op: $\sin(x + \alpha) + \sin(x + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$.

Opl. De verg. gaat direct over in:

$$2\sin\left(x + \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = 2\sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

of $\sin\left(x + \dfrac{\alpha + \beta}{2}\right) = \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

De beide hoeken aan weerszijden van het gelijkteeken zijn dus òf gelijk òf elkaars supplement, alweer ongerekend de periode:

$$x + \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} + k \,.\, 360°$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

òf $x + \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = (2k+1)\,180°$, waaruit $x = k\,.\,360° - \beta$

òf $x = (2k+1)\,180° - \alpha$.

5de Voorbeeld. Los op: $5\sin(x + 12°15') = 3\sin(x + 15°12')$.

Opl. $\frac{\sin(x+15°12')}{\sin(x+12°15')} = \frac{5}{3}$ en $\frac{\sin(x+15°12') + \sin(x+12°15')}{\sin(x+15°12') - \sin(x+12°15')} = 4$;

$$\frac{2\sin(x + 13°43'30'')\cos 1°28'30''}{2\cos(x + 13°43'30'')\sin 1°28'30''} = 4.$$

$$\operatorname{tg}(x + 13°43'30'') = 4\operatorname{tg} 1°28'30''.$$

	$1°28'30'' = 5310''$
$\log \operatorname{tg} 1°28'30'' = 8{,}41076 - 10$	$\log 5310 = 3{,}72509$
$\log 4 \quad = 0{,}60206$	$4{,}68567$
$9{,}01282 - 10$	$8{,}41076 - 10$

$$x + 13°43'30'' = 5°52'50'' + k\,.\,180°$$

$$x = k\,.\,180° - 7°50'40''.$$

Proef met de tafels der gon. verhoudingen; neem $k = 0$.

$$\sin(x + 12°15') = \sin 4°24'20'' = 0{,}07682.$$
$$\sin(x + 15°12') = \sin 7°21'20'' = 0{,}12803.$$

Het quotiënt is $\frac{0{,}07682}{0{,}12803} = 0{,}6$; dus is het volkomen in orde.

Opgaven.

§ 82.

Los de volgende vergelijkingen op; bij alle moet de algemeene vorm voor den gevraagden hoek worden opgegeven:

1. *a.* $2\cos x + 1 = 0$;
b. $\operatorname{tg} x + 1 = 0$;
c. $\sin x = \sqrt{3}\cos x$.

2. *a.* $2\sin x = 1$;
b. $2\sin^2 x = 1$;
c. $2\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.

3. *a.* $\cos x = \sqrt{3}\sin x$;
b. $\operatorname{tg}^2 x + \cot^2 x = 2^2/_3$;
c. $\sec^2 x = 1^2/_3$.

4. *a.* $\sin 4x - \sin 2x = \sin x$;
b. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(45° + x) = 2$;
c. $\sin 4x - \cos 3x = \sin 2x$.

5. *a.* $5\cos^2 x + \sin^2 x + 4\cos x = 0$;
b. $\sin^4 x = \cos^2 x(3 - \sin^2 x)$;
c. $\cos x + \operatorname{tg} x = \sec x$.

6. *a.* $\operatorname{tg}^2 x + 2\cot^2 x = 4$;
b. $4\cot x = 3\sec x \operatorname{cosec} x$;
c. $4\cos^2 x + 8\sin x = 6{,}9$.

7. *a.* $3\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x = 4$;
b. $-\,^1/_3\sqrt{3}\cos x + 3 = 3^1/_3\cos^2 x$;
c. $\sin 2x = 1{,}1\cos x$.

8. *a.* $\operatorname{tg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$;
b. $\sin 2x = \,^1/_3\operatorname{tg} x$;
c. $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

9. *a.* $\frac{1}{\text{tg}x-1}+\frac{1}{\text{tg}x+1}=\frac{\text{tg}x}{\text{tg}x-1}$;

b. $4\cos x - 5\sec x = 4\text{tg}\,x$;

c. $\cos 2x + \sin = 1x$.

10. *a.* $3+\cos 2x = 8\cos x$;

b. $9\sqrt{3}\cos^3 x = 0{,}95$;

c. $\text{tg}(45°+x)+\text{tg}(45°-x) = 2\text{tg}\,2x$.

11. *a.* $\text{cosec}\,x = \cot x + \sqrt{3}$;

b. $\cos(x+\alpha)-\cos(x-\alpha) = \sin 2\alpha$;

c. $\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0$.

12. *a.* $\sqrt{3}\text{tg}^2 x + 1 = (1+\sqrt{3})\text{tg}\,x$;

b. $4\cos 2x + 6{,}1\sin x = 5$;

c. $8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 1{,}052 = 0$.

13. *a.* $\cos 5x+\cos 3x+\cos x=0$;

b. $\sin(x+12°)+\sin(x-8°) = \sin 20°$;

c. $3\text{tg}^2 x + 4\sin^2 x = 2$.

14. *a.* $\sin x + \cos x = \sec x$;

b. $a\cos^2 x - b\sin^2 x = c\cos 2x - d$;

c. $\sin 7x - \sin x = \sin 3x$.

15. *a.* $\sin 3x = \cos 2x$;

b. $\cos 5x = \cos 3x$;

c. $\sin 5x = \sin 3x$.

16. *a.* $\cos 3x = \cos(4x - \frac{1}{4}\pi)$;

b. $\sin(x+\frac{1}{4}\pi) = \sin(2x+\frac{1}{12}\pi)$;

c. $\text{tg}^2 3x = \text{tg}^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)$.

17. *a.* $\text{tg}3x = \cot x$;

b. $\text{tg}^2 3x = \cot^2 x$;

c. $\text{tg}5x = \cot x$.

18. *a.* $\sin 7x + \sin 3x = \sin 5x + \sin x$;

b. $\sin 3x + \cos 3x = \sin x + \cos x$;

c. $\sin mx = \cos nx$.

19. *a.* $\cos x\cos 4x = \sin x\sin 6x$;

b. $\sin\frac{n+1}{2}x - \sin\frac{n-1}{2}x = \sin x$;

c. $\cos(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi)$.

20. *a.* $\sin(x+10°)\cos(x+20°) = 0{,}2725$;

b. $\cos(x+12°)\cos(x+32°) = 0{,}5704$;

c. $\sin(x-40°)\sin(x-60°) = 0{,}086$.

21. *a.* $\frac{\sin(x+25°)}{\sin(x+36°)} = \frac{15}{17}$;

b. $\frac{\sin(4x+25°)}{\cos(4x+36°)} = 1\frac{7}{12}$;

c. $\frac{\cos(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\pi)}{\cos(\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}\pi)} + \frac{1}{3} = 0$.

22. *a.* $\text{tg}(a+x)\,\text{tg}(a-x) = p$;

b. $(1+\text{tg}^2 x)\cos 3x = 2\text{tg}\,x$;

c. $\frac{\text{tg}(x+a)}{\text{tg}(x-a)} = p$.

§ 83.

De vergelijking a sinx + b cosx = c.

In verband met het gezegde in § 79 zullen we eerst beide gon. verhoudingen gelijknamig maken; de verg. wordt dan bijv. $a\sin x \pm b\sqrt{1-\sin^2 x} = c$. We brengen den term $a\sin x$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

naar het tweede lid over en kwadrateeren beide leden; de verg. gaat over in: $b^2(1-\sin^2 x) = c^2 - 2ac\sin x + a^2\sin^2 x$ of

Eerste manier.

$$(a^2+b^2)\sin^2 x - 2ac\sin x + c^2 - b^2 = 0.$$

Uit deze verg. kan men $\sin x$ oplossen op de bekende wijze; men krijgt: $\sin x = \dfrac{ac \pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}$.

Bestaanbaar. Opdat deze waarden bestaanbaar zijn, is noodig, dat $a^2+b^2 \geqslant c^2$; opdat ze bruikbaar zijn, moeten ze gelegen zijn tusschen -1 en $+1$, want de sinus beweegt zich tusschen deze grenzen met -1 als minimum en $+1$ als maximum. De vergelijking ontstond uit: $b^2(1-\sin^2 x) = (c - a\sin x)^2$, waarvan het tweede lid voor alle waarden van a, c en $\sin x$ positief is, dus ook het 1e lid; **Bruikbaar.** dus is $1 - \sin^2 x$ positief, bijgevolg $1 > \sin^2 x$ (het geval $c = a\sin x$ geeft precies $1 = \sin^2 x$). Een ander bewijs is: De functie $(a^2+b^2)\sin^2 x - 2ac\sin x + c^2 - b^2$ wordt voor $\sin x = -1$ $(a+c)^2$ en voor $\sin x = +1$ wordt zij $(a-c)^2$; beide zijn positief; daar de verg. $f(x) = 0$ twee bestaanbare wortels heeft, liggen deze tusschen -1 en $+1$.

Aldus geeft de voorwaarde voor bestaanbaarheid tevens de voorwaarde voor bruikbaarheid en hebben we ons slechts te bemoeien met $a^2+b^2 \geqslant c^2$.

Men vindt nu $\sin x_1 = \dfrac{ac + b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}$;

$$\sin x_2 = \frac{ac - b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

De hoeken x_1 en x_2 zijn met de tafels gemakkelijk te berekenen; als $\sin x_1$ positief is, geeft de tafel een hoek x_1 tusschen $0°$ en $90°$ en het supplement $180° - x_1$; beide kunnen worden vermeerderd met de periode. Voor x_2 vindt men iets dergelijks.

Omdat $f(0) = c^2 - b^2$, zal men een negatieven en een positieven hoek vinden, als $c^2 < b^2$; twee met gelijk teeken, als $c^2 > b^2$. In elk geval, als x_1 en x_2 voorstellen de hoeken met volstrekte waarde kleiner dan $90°$, vindt men:

$$x_1 + k\,.\,360°\,;\ 180° - x_1 + k\,.\,360°.$$
$$x_2 + k\,.\,360°\,;\ 180° - x_2 + k\,.\,360°.$$

Omdat er gekwadrateerd is, zullen we niet enkel de wortels hebben van de gegeven vergelijking, maar ook van de verg. $a\sin x - b\cos x = c$. *Het is echter niet noodig door substitutie de gevonden waarden te onderzoeken.* Ongerekend de periode,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

zegt men: als x_1 voldoet, dan heeft $180° - x_1$ wel denzelfden sinus maar tegengestelden cosinus; dus zal $180° - x_1$ voldoen aan $a\sin x - b\cos x = c$; evenzoo met x_2. Er blijven dus twee reeksen over.

Vanzelf spreekt, dat elke methode van oplossen, waarbij de kwadrateering vermeden wordt, de voorkeur verdient. Reeds is in § 80 gewezen op de omzetting in tg $\frac{1}{2}x$; de vergelijking gaat over in: $a\frac{2\text{tg }\frac{1}{2}x}{1+\text{tg}^2\frac{1}{2}x} + b\frac{1-\text{tg}^2\frac{1}{2}x}{1+\text{tg}^2\frac{1}{2}x} = c$ of

Tweede manier.

$$2a\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}x + b(1-\text{tg}^2\tfrac{1}{2}x) = c(1+\text{tg}^2\tfrac{1}{2}x)$$

$$(b+c)\,\text{tg}^2\tfrac{1}{2}x - 2a\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}x + c - b = 0$$

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c},$$

met dezelfde voorwaarde voor bestaanbaarheid: $a^2+b^2 \geqslant c^2$; omdat de tangens elke pos. en neg. waarde kan hebben, treedt hier geen voorwaarde van bruikbaarheid op: een bewijs, dat bij de 1e manier de bruikbaarheid in de bestaanbaarheid opgesloten moest zijn. — De hoeken, door de formule gegeven, kunnen weer eenvoudig met de tafels worden bepaald: men zal één neg. en één pos. waarde krijgen, als $\frac{c-b}{c+b} < 0$ of $\frac{c^2-b^2}{(c+b)^2} < 0$, dus als $c^2 < b^2$; twee met gelijk teeken, als $c^2 > b^2$. Men krijgt $\frac{1}{2}x_1 + k\,.\,180°$ en $\frac{1}{2}x_2 + k\,.\,180°$, dus voor de heele hoeken $x_1 + k\,.\,360°$ en $x_2 + k\,.\,360°$.

Derde manier.

Hoewel de eerste methode het meest voor de hand ligt, de tweede na een korte aanwijzing best te gebruiken is, hebben beide toch nog een groot bezwaar, als het op de werkelijke becijfering aankomt: de uitkomsten kunnen, als a, b en c wat veel cijfers tellen, slecht met logarithmen worden uitgecijferd. De derde methode komt hieraan tegemoet; ze is echter vrij kunstmatig en moet dus „geleerd" worden.

Deel beide leden door a:

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}. \quad \text{Stel nu } \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \mathbf{tg}\,\alpha;$$

$$\sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x = \frac{c}{a}$$

Hulphoek.

$$\sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

$$\sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Uit deze vergelijking, waarvan het tweede lid geheel bekend is, kan nu $x + \alpha$ worden berekend ; vindt men daarvoor b.v. β, dan heeft men

$$x_1 + \alpha = \beta + k \,.\, 360° \,; \quad x_2 + \alpha = 180° - \beta + k \,.\, 360° \,;$$
$$x_1 = -\alpha + \beta + k \,.\, 360° \,; \quad x_2 = -\alpha - \beta + (2k + 1)\, 180°.$$

Ook hier moeten we de beide voorwaarden weer nagaan: voor de bestaanbaarheid geeft de vergelijking geen eisch, want α kan steeds worden bepaald, zoodat $\frac{c}{a} \cos \alpha$ steeds een reëele waarde vertegenwoordigt. Voor de bruikbaarheid is echter noodig, dat $-1 \leqslant \frac{c}{a} \cos \alpha \leqslant 1$ of samengevat $\frac{c^2}{a^2} \cos^2 \alpha \leqslant 1$; omdat $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, is $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$ en $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\sec^2 \alpha} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$; dus moet: $\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2} \leqslant 1$ of $c^2 \leqslant a^2 + b^2$, hetgeen met de gevonden voorwaarde bij de 1e en 2de manier overeenkomt.

Bijzondere oplossingen.

De beide vierkantsvergelijkingen, die werden opgelost bij de 1e en 2de manier, geven direct aan, welke speciale gevallen er kunnen optreden ; de oplossing zullen we echter anders inrichten:

1. $\mathbf{a = b}$. De verg. is : $\sin x + \cos x = c'$, waarbij c' aangeeft $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$; omdat de tangens van den hulphoek $\frac{b}{a} = 1$ is, is deze $45°$ en geeft de vermenigvuldiging met $\cos 45°$ direct den gewenschten vorm :

$$\sin x \cos 45° + \cos x \sin 45° = c' \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ dus}$$
$$\sin (x + 45°) = c' \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

waaruit ;
$$\begin{cases} x_1 = -45° + \operatorname{bg} \sin \left(\frac{c'}{2}\sqrt{2}\right) + k \,.\, 360°; \\ x_2 = -45° - \operatorname{bg} \sin \left(\frac{c'}{2}\sqrt{2}\right) + (2k + 1)\, 180°. \end{cases}$$

2. $\mathbf{a = -b}$. De verg. is: $\sin x - \cos x = c'$; voor deze kan direct worden gezet: $\sin x \cos 45° - \cos x \sin 45° = c' \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $\sin (x - 45°) = c' \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{2}$, waaruit voor $x - 45°$ en dus voor x weer twee reeksen waarden worden gevonden.

3. $\mathbf{b = c}$. De verg. is na deeling door c van den vorm:

$$a' \sin x + \cos x = 1$$

of $a' \,.\, 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = 2 \sin^2 \frac{1}{2}x$.

Deze verg. lost zich op in het tweetal: $\begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = 0; \\ a' \cos \frac{1}{2}x = \sin \frac{1}{2}x. \end{cases}$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Uit de eerste volgt: $x = k \,.\, 360°$; uit de tweede:

$$x = 2\text{bg tg } a' + k \,.\, 360°.$$

4. $\mathbf{b = -c}$. De verg. wordt: $a'\sin x - \cos x = 1$ of

$$2a'\sin \tfrac{1}{2}x\cos \tfrac{1}{2}x = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}x,$$

welke overgaat in het tweetal, samen gelijkwaardig met deze eene:

$$\begin{cases} \cos \tfrac{1}{2}x = 0; \\ a'\sin \tfrac{1}{2}x = \cos \tfrac{1}{2}x, \end{cases}$$

welke zich heel eenvoudig laten oplossen.

5. $\mathbf{a = c}$. De verg. wordt: $\sin x + b'\cos x = 1$

$$b'\cos x = 1 - \sin x$$

$$b'(\cos^2 \tfrac{1}{2}x - \sin^2 \tfrac{1}{2}x) = (\cos \tfrac{1}{2}x - \sin \tfrac{1}{2}x)^2.$$

Deze wordt vervangen door $\begin{cases} \cos \tfrac{1}{2}x - \sin \tfrac{1}{2}x = 0; \\ b'(\cos \tfrac{1}{2}x + \sin \tfrac{1}{2}x) = \cos \tfrac{1}{2}x - \sin \tfrac{1}{2}x. \end{cases}$

Uit de eerste volgt: $\tfrac{1}{2}x = 45° + k \,.\, 180°$ en $x = 90° + k \,.\, 360°$.

De tweede wordt omgezet in: $\sin \tfrac{1}{2}x(1 + b') = \cos \tfrac{1}{2}x(1 - b')$,

waaruit: $\text{tg } \tfrac{1}{2}x = \dfrac{1 - b'}{1 + b'}$.

6. $\mathbf{a = -c}$. De verg. wordt: $\sin x + b'\cos x = -1$

$$\text{of } 1 + \sin x + b'\cos x = 0.$$

$$(\cos \tfrac{1}{2}x + \sin \tfrac{1}{2}x)^2 + b'(\cos^2 \tfrac{1}{2}x - \sin^2 \tfrac{1}{2}x) = 0.$$

Gelijkwaardig met deze is het tweetal $\begin{cases} \cos \tfrac{1}{2}x + \sin \tfrac{1}{2}x = 0; \\ (\cos \tfrac{1}{2}x + \sin \tfrac{1}{2}x) + b'(\cos \tfrac{1}{2}x - \sin \tfrac{1}{2}x) = 0. \end{cases}$

De eerste geeft: $\tfrac{1}{2}x = -45° + k \,.\, 180°$ en $x = -90° + k \,.\, 360°$.

De tweede: $(1 - b')\sin \tfrac{1}{2}x + (1 + b')\cos \tfrac{1}{2}x = 0$

of $\text{tg } \tfrac{1}{2}x = \dfrac{b' + 1}{b' - 1}$, zoodat voor x ook nog wordt gevonden de reeks waarden: $x = 2\text{bg tg } \dfrac{b' + 1}{b' - 1} + k \,.\, 360°$.

7. $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$. De verg. wordt nu:

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Omdat $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2$ gelijk is aan 1, kan men den eersten vorm gelijk stellen aan den sinus van een hulphoek, den tweeden aan den cosinus van denzelfden hoek; wij krijgen dus:

$$\sin x \sin \alpha + \cos x \cos \alpha = 1;$$

$$\cos (x - \alpha) = 1 = \cos (k \,.\, 360°).$$

Waaruit: $x = a + k \,.\, 360°$; de beide reeksen waarden vallen hier samen; dit blijkt ook duidelijk uit het nul zijn van den discriminant van de vierkantsvergelijkingen bij de 1e en 2de manier.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

In deze bijzondere oplossingen treedt eenige keeren tg ½x op; dat zij ons een vingerwijzing om dezelfde resultaten te krijgen uit de vierkantsvergelijking in tg ½x op blz. 163. Dit wordt aan den lezer overgelaten.

§ 84. We zullen nog eenige voorbeelden uitwerken, maar alle volgens de derde methode.

1e Voorbeeld: *4 sinx + 5 cosx = 6,1.*

Opl. Deel beide leden door 4; $\sin x + {}^5/_4 \cos x = \frac{6,1}{4}$.

Stel ${}^5/_4 = \operatorname{tg} \varphi$, dan krijgt men: $\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{6,1}{4}$

$$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{6,1}{4} \cos \varphi$$

$$\sin (x + \varphi) = \frac{6,1}{4} \cos \varphi = \frac{6,1}{\sqrt{41}}.$$

Uit $\operatorname{tg} \varphi = 1,25$ geeft de rechtstreeksche tafel: $\varphi = 51°20'25''$

$$\log 6,1 = 0,78533$$
$$\log \sqrt{41} = 0,80639$$
$$\log \sin (x + \varphi) = 9,97894 - 10$$

scherpe hoek $x + \varphi = 72°18'$.

De verg. geeft $\begin{cases} x + \varphi = 72°18' + k \,.\, 360° ; \\ x + \varphi = 107°42' + k \,.\, 360°. \end{cases}$

Voor de gevraagde hoeken vindt men dus:

$$x = 20°57'35'' + k \,.\, 360° ;$$
$$x = 56°21'35'' + k \,.\, 360°.$$

Proef met de tafel der gon. verhoudingen.

$$\sin 20°57'35'' = 0,35771 \quad \times 4 \quad 1,43084$$
$$\cos 20°57'35'' = 0,93383 \quad \times 5 \quad 4,66915$$
$$\times \quad 6,09999.$$

2de Voorbeeld: *Los op: 89425 cos x + 25616 sin x = 92800.*

Opl. Deel beide leden door 25616 en stel $\frac{89425}{25616} = \operatorname{tg} \varphi$.

$$\operatorname{tg} \varphi \cos x + \sin x = \frac{92800}{25616}$$
$$\times \cos \varphi$$
$$\sin \varphi \cos x + \sin x \cos \varphi = \frac{92800}{25616} \cos \varphi$$
$$\sin (x + \varphi) = \frac{92800}{25616} \cos \varphi.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$\log 89425 = 4{,}95146$
$\log 25616 = 4{,}40851$
$\log \operatorname{tg} \varphi = 0{,}54295$
$\varphi = 74°0'56''$

$\log 92800 = 4{,}96755$
$\log \cos \varphi = 0{,}43993 - 1$
$\operatorname{co}\log 25616 = 0{,}59149 - 5$
$\log \sin (x + \varphi) = 9{,}99897 - 10$
Scherpe hoek $x + \varphi = 86°3'$.

$\begin{cases} x + \varphi = 86°3' + k \,.\, 360°; \\ x + \varphi = 93°57' + k \,.\, 360°. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 12°2'4'' + k \,.\, 360°; \\ x = 19°56'4'' + k \,.\, 360°. \end{cases}$

Proef met de tafel der gon. verhoudingen.

$\cos 12°2'4'' = 0{,}97803$

89425
782424
88023
3912
196
49
87460
5341
92801

$\sin 12°2'4'' = 0{,}20850$

25616
41700
10425
1251
21
12
5341

; de proef geeft duidelijk aan, dat de eerste reeks waarden goed is.

$\cos 19°56'4'' = 0{,}94008$

89425
752064
84607
3760
188
47
84067
8734
92801

$\sin 19°56'4'' = 0{,}34095$

25616
68190
17048
2046
34
20
8734

; uit deze proef blijkt, dat ook de tweede reeks waarden goed is.

3de Voorbeeld: $8 \sin x + 7 \cos x + 6 = 0$.

Opl. Deel weer door 8 en stel $^7/_8 = 0{,}875$ gelijk aan tg φ; met de tafel der gon. verhoudingen vindt men $\varphi = 41°11'9'',4$, ($9''$ wordt verkregen door $^8/_{51} \times 60''$; voor cos φ vindt men dus $0{,}75261 - {}^8/_{51} \times 20 = 0{,}75258$).

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x + 0{,}75 = 0$$

$$\sin (x + \varphi) = -0{,}75 \cos \varphi = -0{,}56443^5 \qquad \cos \varphi$$

Oplossing met tafel der gon. verhoudingen.

$$\begin{cases} x + \varphi = -\ 34°21'46'' + k \,.\, 360°; \\ x + \varphi = -145°38'14'' + k \,.\, 360°. \end{cases}$$

Men vindt dus: $\begin{cases} x = -\ 75°32'55'' + k \,.\, 360°; \\ x = -186°49'23'' + k \,.\, 360°. \end{cases}$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De positieve hoeken, kleiner dan 360°, die aan de gegeven verg. voldoen, zijn dus 284°27′5″ en 173°10′37″.

Proef: $\sin 284°27'5'' = -\cos 14°27'5'' = -0{,}96836$

$\times\ 8 = -7{,}74688$

$\cos 284°27'5'' = \sin 14°27'5'' = 0{,}24956$

$\times\ 7 = 1{,}74692$

6

$0{,}00004$

de eerste waarde is dus in orde; de tweede zal dan ook goed zijn.

4de Voorbeeld: $(1 - \sqrt{3})\ \sin x + (1 + \sqrt{3})\ \cos x = \sec x.$

1e Opl. Vermenigvuldig beide leden met $2\cos x$, dan komt er:

$$(1 - \sqrt{3})\ \sin 2x + (1 + \sqrt{3})\ 2\cos^2 x = 2$$
$$(1 - \sqrt{3})\ \sin 2x + (1 + \sqrt{3})\ (1 + \cos 2x) = 2$$
$$(1 - \sqrt{3})\ \sin 2x + (1 + \sqrt{3})\ \cos 2x = 1 - \sqrt{3}$$
$$\sin 2x + \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \cos 2x = 1$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 60°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 60°} = \operatorname{tg}(45° + 60°) = \operatorname{tg} 105° = -\operatorname{tg} 75°.$$

De vergelijking is dus:

$$\sin 2x - \operatorname{tg} 75° \cos 2x = 1$$
$$\cos 75°$$

$$\sin 2x \cos 75° - \cos 2x \sin 75° = \cos 75° = \sin 15°.$$

$\sin(2x - 75°) = \sin 15°$, waaruit: $\begin{cases} 2x - 75° = 15° + k \cdot 360°; \\ 2x - 75° + 15° = 180° + k \cdot 360°. \end{cases}$

Men vindt dus: $\begin{cases} x = 45° + k \cdot 180°; \\ x = 120° + k \cdot 180°. \end{cases}$

2de Opl. Vermenigvuldig beide leden met $\sec x$:

$$(1 - \sqrt{3})\ \operatorname{tg} x + (1 + \sqrt{3}) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$
$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$
$$(\operatorname{tg} x - 1)\ (\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0.$$

Deze verg. laat zich splitsen in:

$\operatorname{tg} x = 1$ met $x = 45° + k \cdot 180°$;

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ met $x = 120° + k \cdot 180°$.

5de Voorbeeld:

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x = 6{,}35.$$

Opl. $$\sin x + \cos x + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 6{,}35.$$

$$\sin x + \cos x + \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = 6{,}35.$$

Stel $\sin x + \cos x = y$, dan is $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x = y^2$ en dus $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$. De vergelijking wordt

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

dus $y + \frac{2(1+y)}{y^2-1} = 6{,}35$ of $y + \frac{2}{y-1} = 6{,}35$ of $y^2 - y + 2 = 6{,}35y - 6{,}35$ of $y^2 - 7{,}35y + 8{,}35 = 0$.

$$y = 3{,}675 \pm \sqrt{13{,}505625 - 8{,}35} = 3{,}675 \pm 2{,}270600.$$

Omdat $\sin x + \cos x$ nooit $3{,}675 + 2{,}2706$ kan zijn, moet het pos. teeken vervallen.

We hebben dus verder op te lossen de verg.:

$$\sin x + \cos x = 1{,}404400.$$

$$\sin x \cos 45° + \cos x \sin 45° = 0{,}702200\ \sqrt{2}$$

$$\log \sin (x + 45°) = 0{,}99697^5 - 1$$

$$\begin{cases} x + 45° = 83°14'45'' + k \,.\, 360° \\ x + 45° = 96°45'15'' + k \,.\, 360°. \end{cases}$$

Men vindt: $\begin{cases} x = 38°14'45'' + k \,.\, 360°; \\ x = 51°45'15'' + k \,.\, 360°. \end{cases}$

Dat deze hoeken elkaars complement zijn, blijkt direct uit het opgegeven vraagstuk, omdat alle functies en de bijbehoorende co-functies daarin optreden. We hebben *de proef* dus slechts voor de eerste te maken.

$\sin 38°14'45'' = 0{,}61903^5$
$\cos 38°14'45'' = 0{,}78536^5$
$\operatorname{tg} 38°14'45'' = 0{,}78822$
$\cot 38°14'45'' = 1{,}26868$
$\operatorname{cosec} 38°14'45'' = 1{,}61541$
$\sec 38°14'45'' = 1{,}27299$
$6{,}35000$

Hier is de rechtstreeksche tafel toegepast en gebruik gemaakt van de formules:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \alpha + \cot {}^1\!/_2 \alpha}{2} \text{ en}$$

$$\sec \alpha = \frac{(\operatorname{tg} 45° - {}^1\!/_2 \alpha) + \cot (45° - {}^1\!/_2 \alpha)}{2}.$$

§ 85.

Vergelijkingen, die tot $a\sin x + b\cos x = c$ worden herleid. We kunnen het hoofdstuk over de oplossing van $a \sin x + b \cos x = c$ niet besluiten, zonder nog eenige typen van vraagstukken te geven, die bij de bewerking terecht komen op dit bekende geval.

I. $a\operatorname{tg} x + b\cot x = c$.

Natuurlijk kan deze direct worden omgezet in een vierkantsvergelijking. Dat is echter nu niet onze bedoeling. Men schrijft: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$; $\cot x$ wordt door een analoge herleiding $\frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x}$. Het vraagstuk gaat dus over in:

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$$a\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}+b\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}=c \text{ of}$$

$$\sin 2x+\left(\frac{a-b}{c}\right)\cos 2x=\frac{a+b}{c}.$$

Stel dus $\frac{a-b}{c}=\operatorname{tg}\varphi$ en vermenigvuldig beide leden met cos φ; de verg. gaat nu over in:

$$\sin(2x+\varphi)=\frac{a+b}{c}\cos\varphi, \text{ waaruit:}$$

$$2x=-\varphi+\operatorname{bg}\sin\left[\frac{a+b}{c}\cos\varphi\right]+k\,.\,360°;$$

$$2x=-\varphi-\operatorname{bg}\sin\left[\frac{a+b}{c}\cos\varphi\right]+(2k+1)\,.\,360°.$$

N.B. Tracht af te leiden de voorwaarde voor bestaanbaarheid:

$$c^2\geqslant 4ab.$$

II.. $\sin x\sin(x-a)=a\cos^2 x$.

Voor het eerste lid kan geschreven worden:

$\frac{1}{2}\{\cos\alpha-\cos(2x-\alpha)\}$; voor het tweede: $a\frac{1+\cos 2x}{2}$.

De gegeven vergelijking gaat dus over in:

$$\cos\alpha-(\cos 2x\cos\alpha+\sin 2x\sin\alpha)=a(1+\cos 2x)$$

$$\text{of } \sin 2x\,.\,\sin\alpha+(a+\cos\alpha)\cos 2x=\cos\alpha-a.$$

Deze is van den bekenden vorm; zie ook I en V.

III. $\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin x}+\frac{\cos x}{\sin(\alpha-x)}=1$.

$$2\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)+2\sin x\cos x=2\sin x\sin(\alpha-x);$$

$$\cos 2x-\cos 2\alpha+\sin 2x=\cos(\alpha-2x)-\cos\alpha.$$

Voor het tweede lid kan men nog zetten:
$\cos\alpha\cos 2x+\sin\alpha\sin 2x-\cos\alpha$; de verg. wordt nu van het bekende type:

$\sin 2x(1-\sin\alpha)+\cos 2x(1-\cos\alpha)=\cos 2\alpha-\cos\alpha$, zoodat de oplossing verder eenvoudig is en in algemeenen vorm kan worden opgeschreven; zie I en V.

IV. $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d$.

Omdat $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, komen we er toe om den eersten en derden term ook in verband te brengen met een gon. verhouding van $2x$; $\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$; dus kan de verg. direct overgaan in:

$$a\frac{1-\cos 2x}{2}+\tfrac{1}{2}b\sin 2x+c\frac{1+\cos 2x}{2}=d$$

$$\text{of } b\sin 2x+\cos 2x\,(c-a)=2d-a-c.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Deze vergelijking kan op de gewone wijze worden uitgewerkt; zie I en V.

Men kan ook zetten: $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}$, dus $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ en $\cos x = \frac{1}{\sec x}$, dus $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

De verg. gaat dan over in:

$$\frac{a\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{b\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{c}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = d$$

of $(a - d)\ \operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c - d = 0$.

Voor de discussie is deze vorm wel zoo gemakkelijk als de eerste.

V. $\operatorname{tg}(x + \alpha) + \operatorname{tg}(x - \alpha) = b$.

$$\frac{\sin(x + \alpha)}{\cos(x + \alpha)} + \frac{\sin(x - \alpha)}{\cos(x - \alpha)} = b$$

$\sin(x+\alpha)\cos(x-\alpha) + \sin(x-\alpha)\cos(x+\alpha) = b\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)$.

Het eerste lid is $\sin[(x + \alpha) + (x - \alpha)]$; het tweede $\frac{1}{2}b(\cos 2x + \cos 2\alpha)$. De verg. is $2\sin 2x = b\cos 2x + b\cos 2\alpha$.

$\sin 2x - \frac{1}{2}b\cos 2x = \frac{1}{2}b\cos 2\alpha$. Stel $\frac{1}{2}b = \operatorname{tg}\varphi$.

$\cos\varphi$.

$\sin 2x\cos\varphi - \cos 2x\sin\varphi = \frac{1}{2}b\cos 2\alpha\cos\varphi$

$$\sin(2x - \varphi) = \frac{1}{2}b\cos 2\alpha\cos\varphi$$

$$\begin{cases} 2x - \varphi = \operatorname{bg}\sin(\frac{1}{2}b\cos 2\alpha\cos\varphi) + k \cdot 360^\circ; \\ 2x - \varphi = -\operatorname{bg}\sin(\frac{1}{2}b\cos 2\alpha\cos\varphi) + 180^\circ + k \cdot 360^\circ. \end{cases}$$

De algemeene waarden zijn dus:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{bg}\sin(\frac{1}{2}b\cos 2\alpha\cos\varphi) + k \cdot 180^\circ; \\ x = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{bg}\sin(\frac{1}{2}b\cos 2\alpha\cos\varphi) + (2k + 1)\,90^\circ. \end{cases}$$

Opgaven.

§ 86. **1.** $5\operatorname{tg} x + \sec x = 5$; voor 5 ook te nemen a.

2. $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ (= a)$.

3. $\cot x - \operatorname{cosec} 2x = 3{,}35\ (= a)$.

4. $\sec x - \cot x = \operatorname{cosec} x - \operatorname{tg} x$.

5. $\cos 3x + \sin 3x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ (= a)$.

6. $\cos 4x + \sqrt{3} \cdot \sin 4x = 2$.

7. $\sqrt{3} \cdot \cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2}$.

8. **a)** $7\sin x + 3\cos x = 6$; **c)** $7\sin x - 3\cos x = 1{,}23$;

b) $7\sin x - 3\cos x = 6$; **d)** $7\sin x + 3\cos x = -1{,}23$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

9. Volgens de drie methoden op te lossen :
$$5\sin x - \cos x = 0{,}072.$$
10. Door invoering van een hulphoek op te lossen (3de methode) :
$$30145\sin x + 10001\cos x = 9999.$$
11. Eveneens : $\sin x \operatorname{tg} \alpha + \cos x \cos \alpha = 1$,
als $\alpha = 19°47'58''$.
12. Ook : $\sin 3x \sin \alpha + \cos 3x \cot \alpha = 1{,}8014$,
als $\alpha = 26°44'37''$.
13. $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x = 13{,}92$.
14. $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x = 2\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$.
15. Op twee manieren op te lossen :
$$7\operatorname{tg} x - 6\cot x = 1{,}45.$$
16. Welke positieve hoeken, kleiner dan 360°, voldoen aan de vergelijking : $\operatorname{tg} 4x \cos \alpha - \cot 4x \sin \alpha = 0{,}56$, als $\alpha = 15°3'30''$?
17. Bereken x uit de vergelijking :
$$\sin x \sin (x - 36°) = 1{,}1 \cos^2 x.$$
18. Ook uit : $\sin x \sin (x - 40°40'40'') = \cos^2 x \cot 1°42'$.
19. $$\frac{\sin (22\frac{1}{2}° + x)}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin (22\frac{1}{2}° - x)} = 1.$$
20. $$\frac{\sin (12°14' + 3x)}{\sin 3x} + \frac{\cos 3x}{\sin (12°14' - 3x)} = 1{,}5.$$
21. $2\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 10\cos^2 x = 7{,}92$.
22. $\sin^2 x \sin \alpha + \sin x \cos x + \cos^2 x \cos \alpha = 0$, als $\alpha = 193°14'12''$.
23. $\operatorname{tg} (x + \alpha) + \operatorname{tg} (x - \alpha) = 0{,}5614$, als $\alpha = 19°2'36''$.
24. $\operatorname{tg} (2x + \alpha) + \operatorname{tg} (2x - \alpha) = \cos \beta$, als $\alpha = 271°15'10''$ en $\beta = 67°10'$.

Los nog de volgende vergelijkingen op :

25. $\sin x + 4\sin^2 x - 2\sin^3 x = 2(\cos 2x - \cos 4x)$.
26. $\operatorname{tg} (45° + x) - \operatorname{tg} (45° - x) = 2\cot x$.
27. $$\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \cot x} + 4 - 4\cos^2 x - \frac{7}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sec^2 x + 3\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$
28. $$\cos x - \frac{\sin 4x}{4\sin x} + \tfrac{1}{2}\operatorname{cosec} x = \frac{\tfrac{1}{2}\operatorname{cosec} x}{\operatorname{tg} (45° + \tfrac{1}{2}x) \operatorname{tg} (45° - \tfrac{1}{2}x) + \operatorname{tg}^2 2x}$$
29. $\sin x + \sin 5x = \sqrt{3} \cdot \cos 2x$.
30. $3\sin x + 4 = 4(\sin x - \cos x)^2 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$.
31. $\cos x (1 - 2\cos^2 x) = 1 + \cos 4x + 2\cos 2x$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

32. $2\sin^2 x - \sin x = \cos 4x - 2\cos 2x + 1.$

33. $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\operatorname{cosec} x} + \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sec x} = \dfrac{1}{\cos x}.$

34. $8\sin^2 x + 3\operatorname{tg}^2 x = 14\operatorname{tg} x - 3.$

35. $\sin 3x = 2 - \cos 2x - 4\sin^3 x.$

36. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0.$

37. $\dfrac{(1-\operatorname{tg} x)^2}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{3+3\cos 2x}{\cot x}.$

38. $\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1-\cos 2x} = \dfrac{\operatorname{tg} x + \cot x}{\operatorname{tg} x - \cot x}\cot(90^\circ + x).$

39. $\operatorname{tg} x + \cot x - 2\sin 2x = 3.$

40. $\dfrac{5(1-\operatorname{tg}^2 x)}{11\operatorname{tg} x} = 1 - 2\sin^2 x.$

41. $2\sin 2x + 6\cos^2 x = 5.$

42. $\cot(45^\circ + x) = (1 + \operatorname{tg} x)(2\cos^2 \tfrac{1}{2}x - 1).$

43. $4 + \dfrac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 3x)}} = \cos^3 x - 4\cos^2 x(1 - \operatorname{tg}^2 x).$

44. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$

45. $8\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}x) = 3(1 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}x).$

46. $\left(\sin x \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\sec x}\right)\sqrt{3} = \dfrac{2\sin 2x}{1+\cos 2x}.$

47. $\dfrac{\sin x}{\cos 50^\circ} - \dfrac{\cos x}{\sin 50^\circ} = 2$ (zonder log.tafel).

48. $\sin^3 x - \cos^3 x = (1 - \operatorname{tg} x)(\sin x - \sin^3 x - 2\sin^2 2x \cos x).$

49. $2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 4 = 0.$

50. $(1 - \operatorname{tg}^2 x)(\operatorname{tg} x + \cot 2x) = -\tfrac{3}{4}\sec^2 x.$

51. $\dfrac{3\cos \frac{1}{2}x}{\cos x} = \dfrac{8\sin \frac{1}{2}x}{\sin x}.$

52. $3\sin x + 5\cos x = 1.$

53. $\cot x + 2\cos x \cot x + \dfrac{\cos 3x}{\sin x} = \operatorname{cosec} x.$

54. $\sin 3x = 2 - \cos 2x - 4\sin^3 x.$

55. $\operatorname{tg} x + \cot x = 4\cos 2x.$

56. $8\sin x \cos x - 3\operatorname{tg} x - 3\cot x = 2.$

57. $\sin 5x + \cos x = \cos 5x + \sin x.$

58. $\sin x + \operatorname{tg} x + \sec x = \cos x + \cot x + \operatorname{cosec} x.$

59. $2 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{3(\sin x + \cos x)^2 + \cos 2x - 3}{2\cos^2 x} + 3\operatorname{tg} x.$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

60. $\sin^4 x + \cos^4 x = {}^2/_3$. (Bedenk: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

61. $\sin^6 x + \cos^6 x = {}^1/_4$.

62. **a)** $\sin p + \sin(p + x) + \sin(p + 2x) = 0$;

b) $\cos p + \cos(p + x) + \cos(p + 2x) = 0$;

c) $\sin p + \sin(p + x) + \sin(p + 2x) + \ldots\ldots + \sin(p + \overline{n - 1}\, x) = 0$;

d) $\cos p + \cos(p + x) + \cos(p + 2x) + \ldots\ldots + \cos(p + \overline{n - 1}\, x) = 0$.

(Noem het 1e lid van *c*) S en maak $2\sin {}^1/_2 x \,.\, S$; schrijf dan elk der termen als het verschil van twee cos. Noem het 1e lid van *d*) S en maak $2\sin {}^1/_2 x \,.\, S$; schrijf dan elk der termen als het verschil van twee sinussen).

63. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x + \sin 11x = 0$.

64. $\cos x + \cos 4x + \cos 7x + \cos 10x + \cos 13x + \cos 16x = 0$.

Discussieer de volgende vergelijkingen; d.w.z. ga na, voor welke waarden der gegeven letters de wortels bestaanbaar zijn, bruikbaar zijn en als hieraan voldaan is, hoeveel er zijn.

65. $\mathrm{tg}^2 x + \cos^2 x = a$.

66. $\cos x = a \,\mathrm{tg}\, x$.

67. $\sin x + \cos x + \sin 2x = a$.

68. $\dfrac{a}{\sin x} + \dfrac{a}{\cos x} = b$.

69. $\sin x \sin 3x = a$.

70. $\cos 3x = a\cos^3 x$.

71. $\sin x + \cos x + \mathrm{tg}\, x + \cot x + \sec x + \mathrm{cosec}\, x = a$.

§ 87.

Twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Hetgeen gezegd is in § 80 over de algemeene oplossing van één onbekende, geldt ook hier: Is het n.l. mogelijk de gon. verhoudingen uit te drukken in één daarvan, dan wordt het stelsel vergelijkingen daardoor omgezet in gewone algebraïsche vergelijkingen. Zoo zal men b.v. $\begin{cases} a\,\mathrm{tg}\, x + b\,\mathrm{tg}\, y = c \\ a'\cot x + b'\cot y = c' \end{cases}$ door te stellen $\mathrm{tg}\, x = p$ en $\mathrm{tg}\, y = q$ kunnen omzetten in: $\begin{cases} ap + bq = c \\ \dfrac{a'}{p} + \dfrac{b'}{q} = c'. \end{cases}$ Dit stelsel vergelijkingen wordt opgelost, zooals

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

dat in de algebra geleerd wordt. Ook kan men steeds invoeren tg ½x en tg ½y, want hierin kunnen alle andere gon. verhoudingen rationeel worden uitgedrukt. Deze oplossing heeft het groote nadeel, dat dikwijls vergelijkingen van hoogeren graad moeten worden opgelost.

Evenals in de vorige paragrafen zullen we hier slechts een paar bekende typen behandelen, zonder daarmee te willen zeggen, dat men na deze behandeling alle voorkomende vraagstukken kan oplossen:

1. $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \ldots\ldots (1) \\ \sin x + \sin y = b \ldots\ldots (2) \end{cases}$

Opl. De beide vergelijkingen kunnen worden geschreven als volgt:

$$\begin{cases} 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots\ldots (3) \\ 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = b \ldots\ldots (4) \end{cases}$$

Deeling van de overeenkomstige leden geeft:

$\cot\frac{x+y}{2} = \frac{a}{b}$; hieruit kan $\frac{x+y}{2}$ worden berekend; substitutie van $\cos\frac{x+y}{2}$ in verg. (3) geeft de waarde van $\cos\frac{x-y}{2}$ en dus $\frac{x-y}{2}$; substitutie van $\sin\frac{x+y}{2}$ geeft in (4) dezelfde waarde.

Voor elke waarde van a en b vindt men een waarde voor $\frac{x+y}{2}$; maar verder wordt voor de bruikbaarheid volgens (3) vereischt, dat $\cos^2\frac{x-y}{2} \leqslant 1$, dus $\frac{a^2}{4\cos^2\frac{x+y}{2}} \leqslant 1$; daar $\cot\frac{x+y}{2} = \frac{a}{b}$ is $\cos\frac{x+y}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. De gevraagde voorwaarde is dus: $\frac{a^2(a^2+b^2)}{4a^2} \leqslant 1$ of $a^2+b^2 \leqslant 4$.

2. $\begin{cases} x + y = a \ldots\ldots (1) \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{p}{q} \ldots\ldots (2) \end{cases}$

Opl. Uit (2) volgt: $\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{p-q}{p+q}$,

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(x+y)\ \sin\frac{1}{2}(x-y)}{2\sin\frac{1}{2}(x+y)\ \cos\frac{1}{2}(x-y)} = \frac{p-q}{p+q},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{p-q}{p+q};\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x+y) = \frac{p-q}{p+q}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Uit deze laatste verg. vindt men $x - y$; de som is ook bekend; het vraagstuk is hiermee dus opgelost.

3. $\begin{cases} \mathbf{x - y = a} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1) \\ \mathbf{\cos x \cos y = b} \ . \ . \ . \ . \ (2) \end{cases}$

Het product van twee cosinussen kan geschreven worden als een som; de tweede vergelijking gaat dus over in:
$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2b$, zoodat $\cos(x+y) = 2b - \cos a$.

De voorwaarde van bruikbaarheid is $(2b - \cos a)^2 \leqslant 1$; als hieraan voldaan is, dan vindt men voor $x+y$ twee hoeken, die elkaars tegengestelde zijn (te vermeerderen met de periode).

$x + y = \alpha + k \,.\, 360°$ en $x + y = -\alpha + k \,.\, 360°$
$x - y = a$ $x - y = a$

$x = \frac{\alpha + a}{2} + k \,.\, 180°$; $x = \frac{+a - \alpha}{2} + k \,.\, 180°$;

$y = \frac{\alpha - a}{2} + k \,.\, 180°$; $y = \frac{-a - \alpha}{2} + k \,.\, 180°$.

Opgaven.

§ 88.

1. $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1{,}75; \\ \sin x + \sin y = 0{,}82. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \cos x - \cos y = 0{,}406; \\ \sin x - \sin y = -0{,}446. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0{,}51567; \\ \sin x - \sin y = 0{,}04512. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \cos x - \cos y + 0{,}48369 = 0; \\ \sin x + \sin y = 1{,}32893. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y = 92°; \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - y = 90°30'; \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y = 70°; \\ \sin x \cos y = 0{,}557. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - y = 60°; \\ \cos x \sin y = 0{,}06. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \cos x \cos y = {}^7/_8; \\ x + y = 40°. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}1; \\ x - y = 10°. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sin x = \sqrt{2} \,.\, \sin y; \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \,.\, \operatorname{tg} y. \end{cases}$

(Eindex. Gymn. 1914).

12. $\begin{cases} \sin x = \cot y; \\ \cos y = \operatorname{tg} x. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sin \frac{1}{2}(x+y)\cos \frac{1}{2}(x-y) = \frac{3}{4}; \\ \cos \frac{1}{2}(x+y)\sin \frac{1}{2}(x-y) = \frac{1}{4}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \sin(x+y) = \cos(x-y); \\ \operatorname{tg}(2x+3y) = \cot(3x-6y). \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1); \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1). \end{cases}$

(Eindex. Gymn. 1914).

16. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0{,}56; \\ x + y = 20°20'20''. \end{cases}$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

17. Verdeel een hoek van 76°24′ in twee deelen, waarvan de secanten zich verhouden als 2 : 5.

(Eindex. Gymn. 1914).

18. Als $\frac{\cos x}{\cos y} = mn$ en $\frac{\sin x}{\sin y} = m$, bewijs dan, dat

$$y = \text{bg tg} \sqrt{\frac{1 - m^2n^2}{m^2 - 1}}.$$

19. Bereken x, y en z uit:

$$\begin{cases} \text{tg}\,(x + y + z) = \sqrt{3}; \\ \text{tg}\,(x - y + z) = 1; \\ \text{tg}\,(x + y - z) = {}^1/_3\sqrt{3}. \end{cases}$$

§ 89. Goniometrische Oplossing van de Vierkants-Vergelijking.

Deze oplossing is met voordeel te gebruiken, als de coëfficienten geen eenvoudige getallen zijn.

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

N.B. A wordt altijd > 0 ondersteld.

I. $B^2 - 4AC > 0$. I^A . $C > 0$.

$$x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC} = -\frac{B}{2A}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4AC}{B^2}}\right).$$

Uit $B^2 - 4AC > 0$ volgt $\frac{4AC}{B^2} < 1$, dus mag $\frac{4AC}{B^2} = \sin^2\varphi$ gesteld worden.

Dan is $x = -\frac{B}{2A}(1 \pm \sqrt{1 - \sin^2\varphi}) = -\frac{B}{2A}(1 \pm \cos\varphi)$,

waaruit volgt:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{B}{A}\cos^2 {}^1/_2\,\varphi; \\ x_2 &= -\frac{B}{A}\sin^2 {}^1/_2\,\varphi. \end{aligned}\right\} \varphi \text{ is bepaald door : } \sin\varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B}.$$

I. $B^2 - 4AC > 0$. I^B . $C < 0$.

Stel nu $-\frac{4AC}{B^2} = \text{tg}^2\psi$. Dan wordt

$$x = -\frac{B}{2A}(1 \pm \sqrt{1 + \text{tg}^2\psi}) = -\frac{B}{2A}(1 \pm \sec\psi), \text{ zoodat}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{B}{2A} \times \frac{1 - \cos\psi}{\cos\psi} = \frac{B\sin^2 {}^1/_2\,\psi}{A\cos\psi}; \\ x_2 &= -\frac{B}{2A} \times \frac{1 + \cos\psi}{\cos\psi} = -\frac{B\cos^2 {}^1/_2\,\psi}{A\cos\psi}. \end{aligned}\right\} \text{tg}\,\psi = \frac{2\sqrt{-AC}}{B}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

II. $B^2 - 4AC < 0$; dus $\frac{B^2}{4\ AC} < 1$. Nu is:

$$x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC} = -\frac{B}{2A} \pm \frac{i\sqrt{AC}}{A}\sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}.$$

Stel dan: $\frac{B^2}{4AC} = \sin^2\varphi$; $\sin\varphi = \frac{B}{2\sqrt{AC}}$. Dan is:

$$x_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm \frac{i\sqrt{AC}}{A}\cos\varphi = -\frac{B}{2A} \pm i\frac{B}{2A\sin\varphi}\cos\varphi =$$

$$= -\frac{B}{2A} \pm i\frac{B}{2A}\cot\varphi = -\frac{B}{2A}(1 \pm i\cot\varphi).$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK XIV.

Goniometrische lijnen. Grafieken.

§ 90.

Gon. cirkel. Gon. lijnen. In de hoofdstukken IV en V hebben we reeds de waarden berekend van de gon. verhoudingen van verscheidene hoeken. Daaruit konden we ons echter geen duidelijk beeld vormen van het verloop als de hoeken stijgen van 0° tot 360°. Daarvoor is eerstens noodig, dat de verhoudingen direct met elkaar vergelijkbaar zijn; dit kan men verkrijgen door tot tweeden term van de verhouding 1 te nemen. Omdat de hoeken van 0° tot 360° loopen, is men gewoon een cirkel te teekenen met straal 1, die door een horizontale middellijn X_-X_+ en een verticale middellijn Y_-Y_+ in vier kwadranten wordt verdeeld; verder trekt men een raaklijn aan den rechterkant evenwijdig met Y_-Y_+ en een bovenraaklijn evenwijdig met X_-X_+.

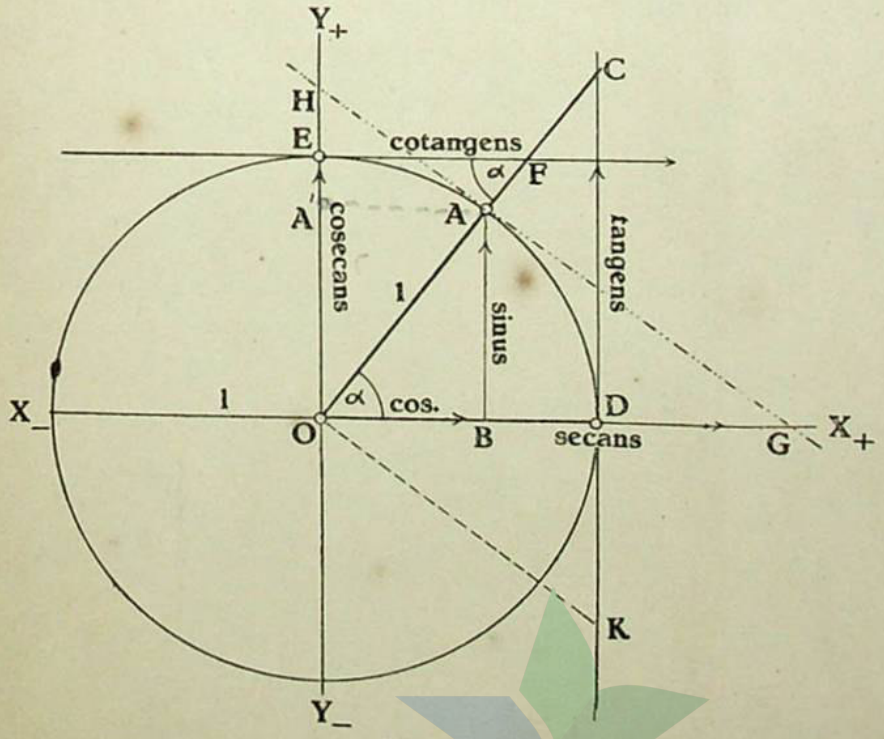


Fig. 58.

(Een stippellijn te trekken // BO van A naar A').

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Deze cirkel draagt den naam van *goniometrischen cirkel.* Van alle hoeken laat men het vaste been samenvallen met OX_+, terwijl het veranderlijke been den cirkel in A snijdt; voor $\angle \alpha$ heeft men nu $\sin \alpha = \frac{BA}{OA} = \frac{BA}{1} = BA$. Omdat de assen X_-X_+ en Y_-Y_+ de vaste lijnen in den gon. cirkel zijn, rekent men den sinus van B tot A; verder is $\cos \alpha = \frac{OB}{1} = OB$, deze lijn te rekenen in de richting OX_+. Voor $tg\ \alpha$ heeft men $\frac{BA}{OB}$; omdat $\triangle OAB \sim \triangle OCD$, heeft men ook $tg\ \alpha = \frac{DC}{OD} = DC$. Ook $\cot \alpha = \frac{OB}{BA}$ moet worden omgezet in een verhouding met noemer 1; omdat $\angle EOD = 90°$, is $\cot \alpha = tg \angle AOE = \frac{EF}{EO} = EF$; $\sec \alpha$ is $\frac{OA}{OB}$; we moeten deze verhouding weer herleiden tot een andere, waarvan de noemer 1 is; bedenken we, dat $\cos \alpha . \sec \alpha = 1 = r^2$, dan komen we er vanzelf toe de raaklijn AG in A te trekken. In $\triangle GAO$ blijkt nu terstond: $\sec \alpha = OG : OA = OG$; in $\triangle HAO$ ziet men: $\operatorname{cosec} \alpha = \sec \angle HOA = OH : OA = OH$. Omdat $OB . OG = OA^2 = 1$, ziet men $\cos \alpha \sec \alpha = 1$; evenzoo is $OA' . OH = OA^2 = 1$, dus $\sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 1$.[1]) De gon. verhoudingen zijn in den gon. cirkel blijkbaar alle voorgesteld door rechten.

Men noemt de eerste termen der gon. verhoudingen, waarvan de tweede 1 is, goniometrische lijnen.

We weten, dat de gon. verhoudingen van hoeken in het 1e kwadrant als pos. worden beschouwd; dus moeten we ook de gon. lijnen (fig. 58) BA, OB, DC, EF, OG en OH positief nemen.

De definities der gon. lijnen en haar teekens vindt men in het volgende; ze hebben betrekking op den goniometrischen cirkel.

I. *De* **sinus** *is de loodlijn uit A op de horizontale middellijn; hij wordt gemeten vanaf die middellijn, en positief gerekend, als hij loopt in de richting OY_+; negatief in de richting OY_-.*

II. *De* **cosinus** *is de projectie van OA op de horizontale*

[1]) We hebben de gon. lijnen sec. en cosec. een andere plaats gegeven, dan tot heden gebruikelijk is; we hebben dat gedaan, om vooral de product-definities te illustreeren; dat is voor de grafieken van groot belang; omdat EF = DK, ziet men ook direct $tg\ \alpha . \cot \alpha = 1$. De kwadraatbetrekkingen kunnen hieruit evengoed gelezen worden: $OB^2 + BA^2 = 1$ of $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $1 + DC^2 = OC^2 = OG^2$ of $1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$; $1 + AH^2 = OH^2$, omdat AH = EF; dus $1 + \cot^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$; ook zijn de regels voor de teekens meer natuurlijk.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

middellijn; hij wordt gemeten van O uit en pos. gerekend in de richting OX_+, negatief in de richting OX_-.

III. *De* **tangens** *is het stuk van de rechtsche raaklijn vanaf het raakpunt tot het snijpunt met het veranderlijke been (het verlengde van het veranderlijke been); hij is positief, als de meting in de richting OY_+ geschiedt, negatief in de richting OY_-.*

IV. *De* **cotangens** *wordt gemeten op de bovenraaklijn vanaf het raakpunt tot het snijpunt met OA of het verlengde daarvan; hij is positief, als de meting geschiedt in de richting OX_+, negatief in de richting OX_-.*

V. *De* **secans** *wordt gemeten op de hor. middellijn vanaf O tot het snijpunt met de raaklijn in A; hij wordt pos. gerekend in de richting OX_+, negatief in de richting OX_-.*

VI. *De* **cosecans** *wordt gemeten op de verticale middellijn vanaf O tot het snijpunt met de raaklijn in A; hij wordt pos. gerekend in de richting OY_+, negatief in de richting OY_-.*

§ 91.

Alle kwadranten. Met deze definities kan men in den gon. cirkel direct de goniometrische lijnen van de hoeken in de andere kwadranten aanwijzen; we geven alleen de figuren en ter vergelijking ook nog een hoek in het 1e kwadrant.

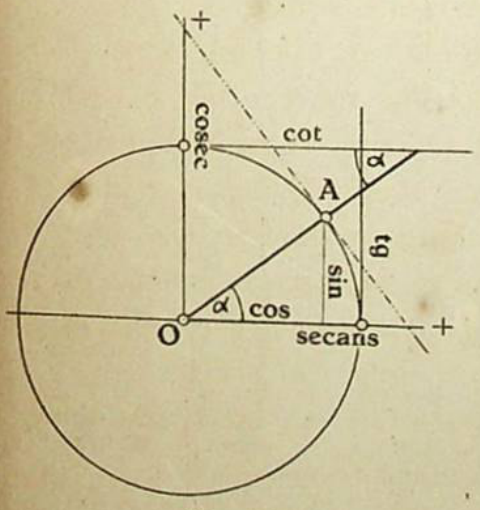


Fig. 59.

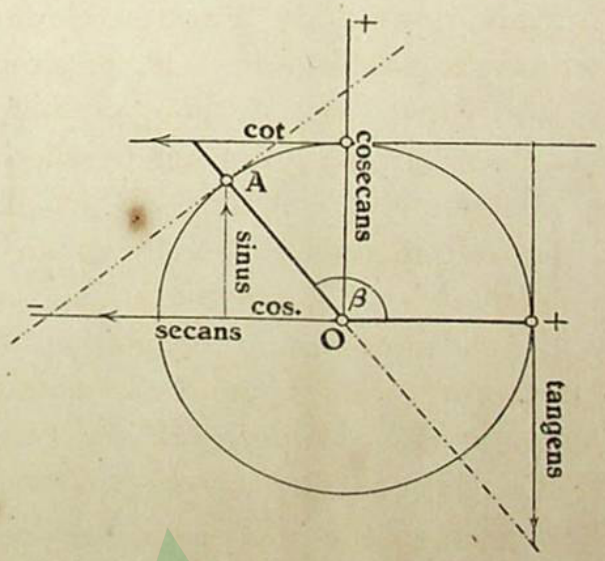


Fig. 60.

Sinus en cosinus.

We kunnen nu overgaan tot de bespreking van het verloop der goniometrische lijnen. We duiden de verschillende standen

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van het veranderlijke been aan door indices en noemen b.v. $\angle A_0OA_1 = \angle \alpha_1$, $\angle A_0OA_5 = \alpha_5$, $\sin \alpha_1 = s_1$, $\sin \alpha_2 = s_2$ enz.;

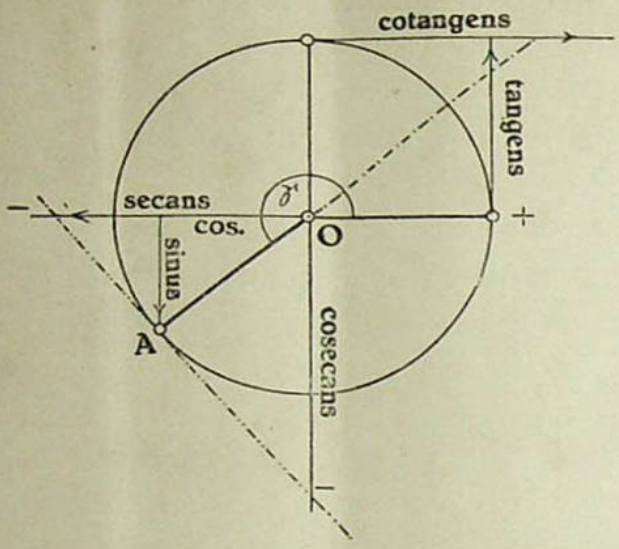


Fig. 61.

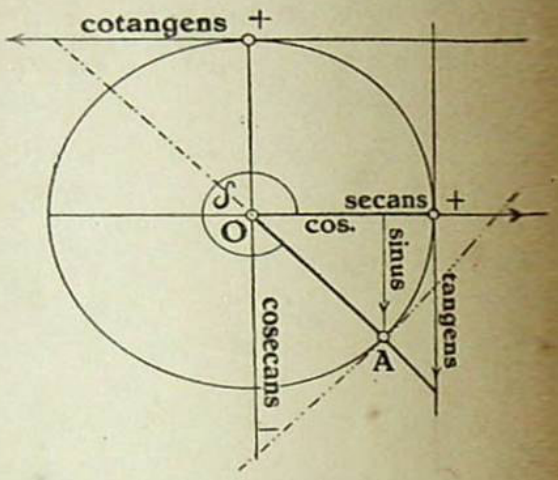


Fig. 62.

doorloopt het veranderlijke been het 1e kwadrant, dan groeit de sinus voortdurend aan om voor 90° zijn maximum 1 te bereiken; in het tweede kwadrant blijft de sinus positief, maar neemt af

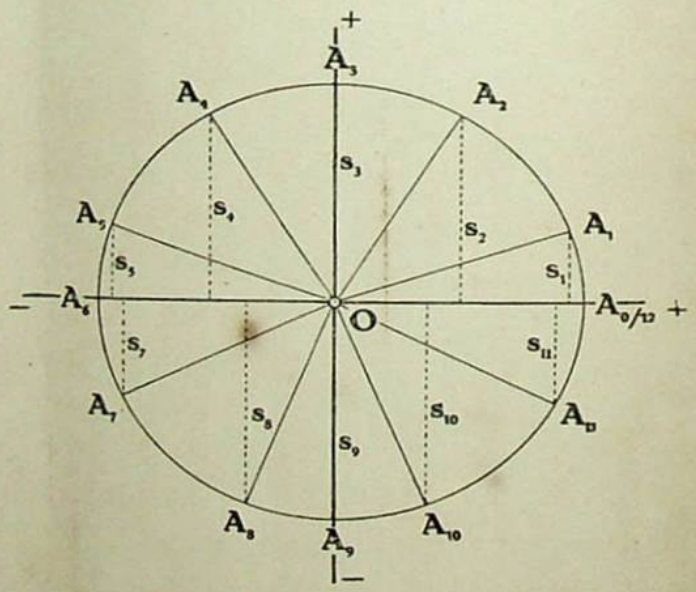


Fig. 63.

tot hij voor 180° nul wordt; omdat verder de sinus in de richting OX_ wordt gerekend, is de sinus van alle hoeken in het 3de en 4de kwadrant negatief; de waarde daalt voor 270° tot —1; deze rijst weer tot hij nul wordt voor 360° (of 0°).

Op dezelfde figuur zien we gemakkelijk het volgende verloop

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van den cosinus: Hij is 1 voor 0°, daalt tot 0 voor 90°, wordt, voor hoeken in het tweede kwadrant negatief met steeds grooter wordende volstrekte waarde, wordt — 1 voor 180°; in het derde kwadrant wordt de cosinus gemeten in de richting OX_, maar de volstrekte waarde neemt af tot 0 voor 270°; de cos van hoeken in het 4de kwadrant is positief en groeit aan van 0 tot 1. We leeren dus:

1) *De sinus en de cosinus zijn steeds begrepen tusschen — 1 en 1.*

2) *De sinus wordt nul voor elk veelvoud van 180° of wel een even veelvoud van 90°.*

3) *De cosinus wordt nul voor elk oneven veelvoud van 90°.*

Tangens en cotangens.

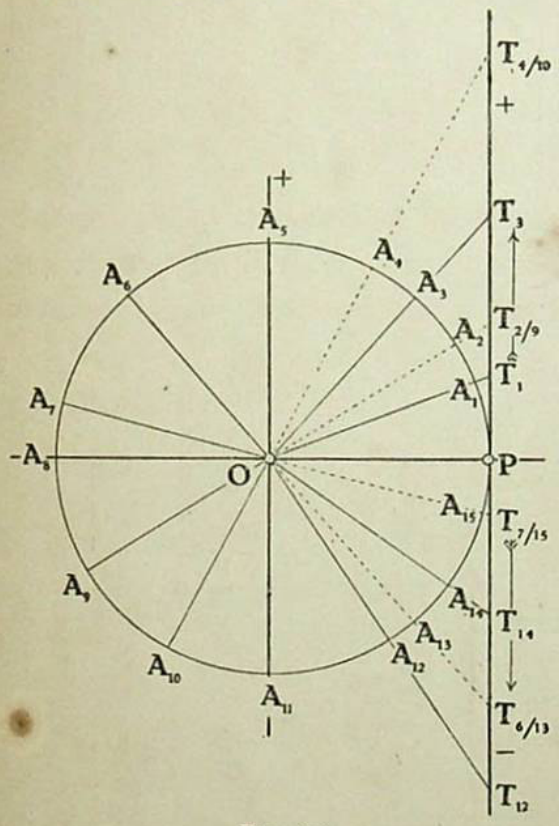


Fig. 64.

In den goniometrischen cirkel O bepaalt men weer eenige hoeken POA_1 enz. en hunne tangenten; het spreekt van zelf, dat bij vergrooting van den hoek α de tangens, die van P af wordt gerekend, steeds aangroeit; het snijpunt van OA_5 met de raaklijn is zelfs oneindig ver weg; de tangens doorloopt alle waarden van 0 tot ∞, als de hoek loopt van 0 tot 90°; als het been OA_5 nog even verder wentelt, komt het snijpunt onder P in de richting OY_; bij verdere draaiing nadert het snijpunt T steeds meer het raakpunt P; de tangens neemt in volstrekte waarde af tot de hoek 180° wordt; dan is hij weer nul. Omdat de tangens van $180° + \alpha$ gelijk is aan dien van α, herhaalt zich het verloop in het 1e en 2de kwadrant voor hoeken in het 3de en 4de kwadrant. Voor den cotangens heeft men in het kort het volgende:

Voor 0° is hij oneindig groot; hij neemt af van ∞ tot 0 bij 90°; wordt nu negatief en neemt in volstrekte waarde steeds toe tot negatief oneindig bij 180°. De hoeken $180° + \alpha$ hebben

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

denzelfden cotangens als α, zoodat het verloop van 180° tot 360° congruent is met het verloop van 0° tot 180°. We vinden dus:

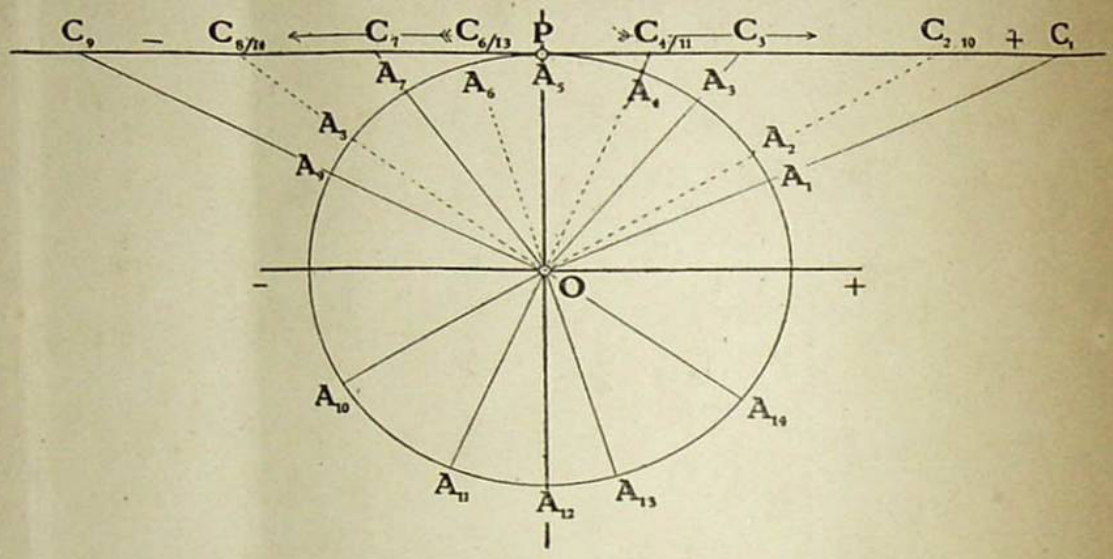


Fig. 65.

1) *De tangens en de cotangens veranderen steeds in denzelfden zin; de tangens groeit steeds aan, de cotangens neemt steeds af. Dit stemt overeen met het feit, dat ze elkaars omgekeerden zijn.*

2) *Als de eene nul is, is de andere oneindig groot; beide kunnen alle waarden doorloopen van* $-\infty$ *tot* $+\infty$; *de tangens is nul voor een even aantal malen 90°, de cotangens voor een oneven aantal.*

Secans en cosecans.

Omdat de secans wordt gemeten op de lijn OX_+ of OX_-, van af O tot het snijpunt met de raaklijn in A, zal eerstens sec $0° = 1$ zijn en zal de secans aangroeien bij het wentelen van het veranderlijke been tot den loodrechten stand van 1 tot ∞. De cosecans wordt gemeten op OY en deze zal dus juist voor 0° ∞ zijn en dalen van ∞ tot 1 bij 90°. Wentelt het been verder door het 2de kwadrant, dan komt de secans op OX_- te liggen, terwijl de cosecans op OY_+ blijft; de secans stijgt van $-\infty$ tot -1, de cosecans stijgt van 1 tot ∞. Voor hoeken in het derde kwadrant heeft men een daling van den secans van -1 tot $-\infty$, een rijzing van den cosecans van $-\infty$ tot -1. In het 4de kwadrant is de secans positief en doorloopt alle waarden van ∞ tot 1; de cosecans is negatief, want het snijpunt met de raaklijn in A_5 b.v. ligt op OY_-; terwijl de waarde loopt van -1 tot $-\infty$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

We leeren het volgende:

1) *Secans en cosecans zijn nooit begrepen tusschen — 1 en + 1;*

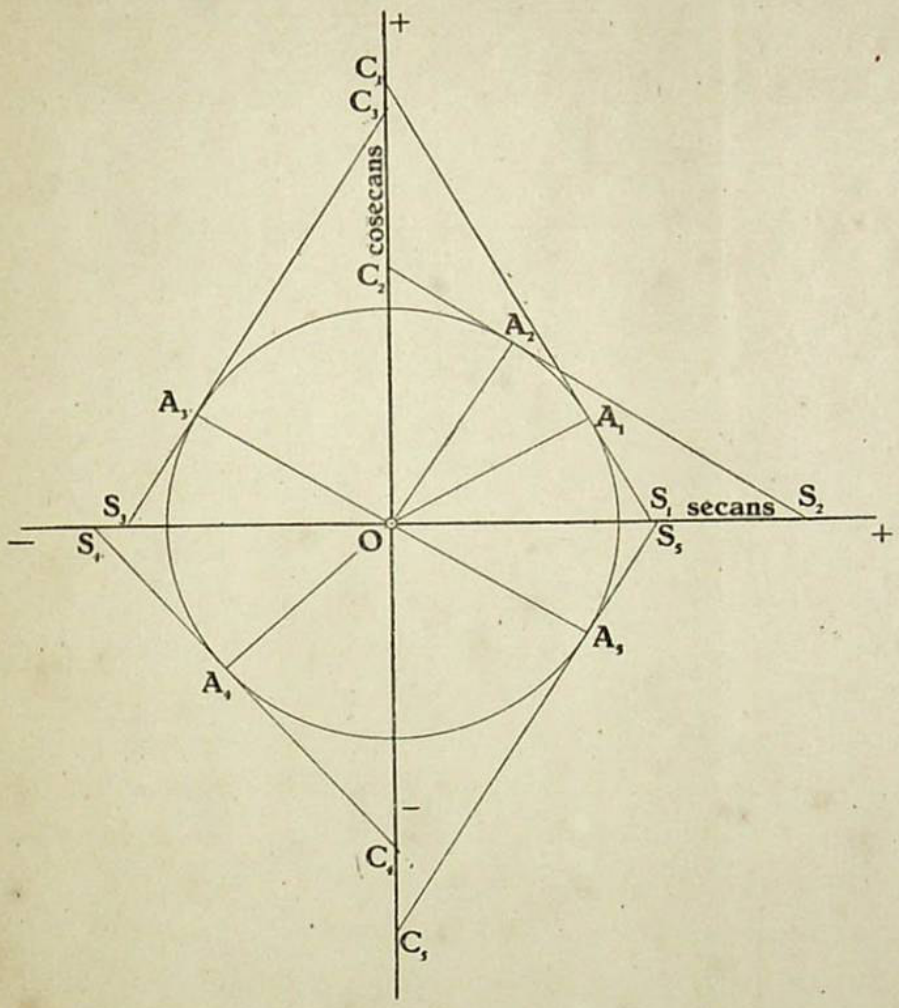


Fig. 66.

2) *De cosecans is oneindig voor een even aantal malen 90°. De secans voor een oneven aantal.*

3) *De secans heeft hetzelfde teeken als de cosinus, de cosecans als de sinus.*

Hoewel het voorgaande met een goniometrischen cirkel er bij best is na te gaan, heeft men een betere manier bedacht om het verloop van de gon. lijnen voor te stellen: men zet n.l. de waarden voor hoeken, die in zekere orde opklimmen, naast elkaar als loodlijnen op een horizontale rechte uit: zie fig. 67. Verder trekt men om het oog tegemoet te komen een kromme lijn zoo goed mogelijk over de uiteinden dier loodlijnen. *Deze kromme lijn heet de graphische voorstelling van de goniometrische functie.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Voor we deze goed teekenen, moeten we echter nagaan het

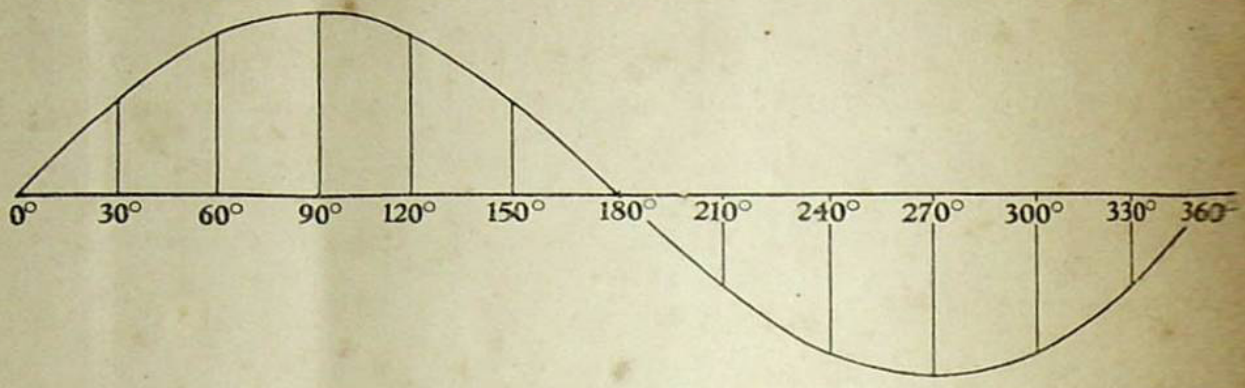


Fig. 67.

verband tusschen de hor. lijn AB en de lengten der loodlijnen.

§ 92.

Radialen. In een cirkel O trekt men den straal OA; dezen denkt men op den cirkel van A af uitgezet; men krijgt dan AB=BC=CD=DE = EF = FG = *r*. (Men kan het vrij goed *uitvoeren* met een buigzame stalen liniaal.)

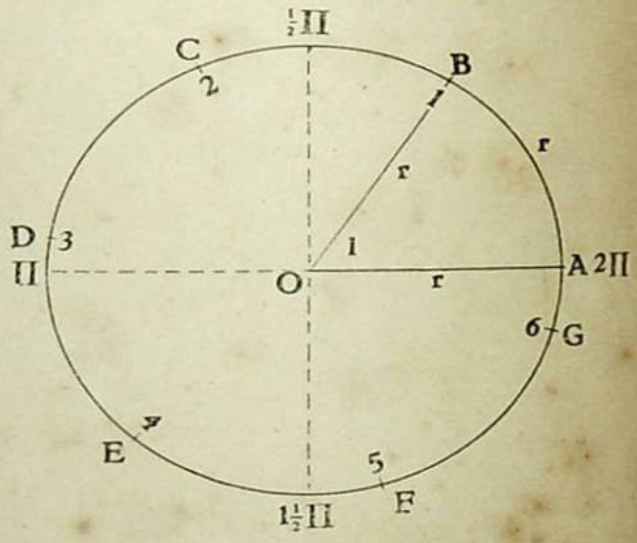


Fig. 68.

Verbindt men nu B met O, *dan vormen OA en OB een hoek, wiens boog AB gelijk is aan den straal*; *deze hoek heet* **straalhoek** *of* **radiaal**; AB heet straalboog. Omdat de cirkelomtrek $2\pi r$ is en deze gemeten wordt met bogen, elk gelijk aan r, zoo gaat deze 2π-maal op den geheelen omtrek; hieruit volgt onmiddellijk, dat één radiaal $\frac{360}{2\pi}$ graden telt of $\frac{180^\circ}{\pi} =$ 57°,2957795 = 57°17′45″.

360° =	2π radialen	120° =	$^2/_3\pi$ radialen
180° =	π „	60° =	$^1/_3\pi$ „
90° =	$\frac{1}{2}\pi$ „	30° =	$^1/_6\pi$ „
45° =	$\frac{1}{4}\pi$ „	67½° =	$^3/_8\pi$ „

Nu is men gewoon den naam van de hoekmaat „radiaal" of straalhoek bij het noemen van een hoek steeds weg te laten;

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

men spreekt dus bv. van sin $\frac{\pi}{3}$ en bedoelt daarmee sin $\frac{\pi}{3}$ radialen = sin 60°. Men spreekt van cos 1, cos 2 enz.; verder zal men in alle formules, die we tot nu toe hadden, steeds 90° vervangen door $\frac{\pi}{2}$, 180° door π, k . 360° door $2k\pi$. Hoeken, die elkaars supplement zijn, zijn samen π; die elkaars complement zijn bedragen samen $\frac{\pi}{2}$.

Opgaven.

1. Druk in graden uit: *a*) $\frac{3}{4}\pi$; *b*) 4π; *c*) $2\frac{1}{2}\pi$; *d*) $\frac{5}{6}\pi$.

2. Bereken: *a*) $\sin\frac{5}{4}\pi + \cos\frac{5}{4}\pi$; *b*) $\sin\frac{\pi}{4} + \cos 1\frac{3}{4}\pi$.

3. De grootte van een hoek wordt uitgedrukt door $(2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$; druk den hoek uit in veelvouden van 45°. Bereken de sinussen der hoeken, die men krijgt door k opv. te nemen = 0, 1, 2, 3, 4 en 5.

4. Bepaal alle gon. verhoudingen van $\frac{13}{6}\pi$.

5. Bereken *a*) tg $\frac{3\pi}{4}$; *b*) cot $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; *c*) sec $\left(-\frac{19}{6}\pi\right)$.

6. Vind in radialen uitgedrukt een algemeenen vorm voor de hoeken, waarvan de sinus ½ is. Ook, waarvan de cos gelijk is aan $-\frac{1}{2}$.

7. Vul in: $2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}\,\text{tg}\,1\frac{1}{4}\pi - \cos\frac{\pi}{6} = \cos\ldots.$

8. A is een hoek, gelegen tusschen $(8n-1)\frac{\pi}{4}$ en $(8n-3)\frac{\pi}{4}$. Is sin A + cos A positief of negatief?

9. Bepaal de kleinste positieve waarde van x, die voldoet aan de verg. $\cos x = \sin\left\{(4n+3)\frac{\pi}{2} + \alpha\right\}$.

§ 93.

Graphische voorstellingen. De straal van een cirkel wordt gemeten met eenige lengtemaat; waar nu de omtrek gemeten wordt met den straal als eenheid, zoo kan men zeggen, dat ook de hoeken

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

worden gemeten met een lengtemaat; neemt men als straal zekere eenheid van lengte aan, dan kan men verschillende bogen voorstellen door aantallen radialen. Wil men zich nu een voorstelling maken van het verloop van de goniometrische functies bij aangroeiing van het argument, dan kan men de hoeken uitzetten op een rechte OX en loodrecht naar boven of beneden de bijbehoorende waarden van de goniometrische functie. Zie fig. 69.

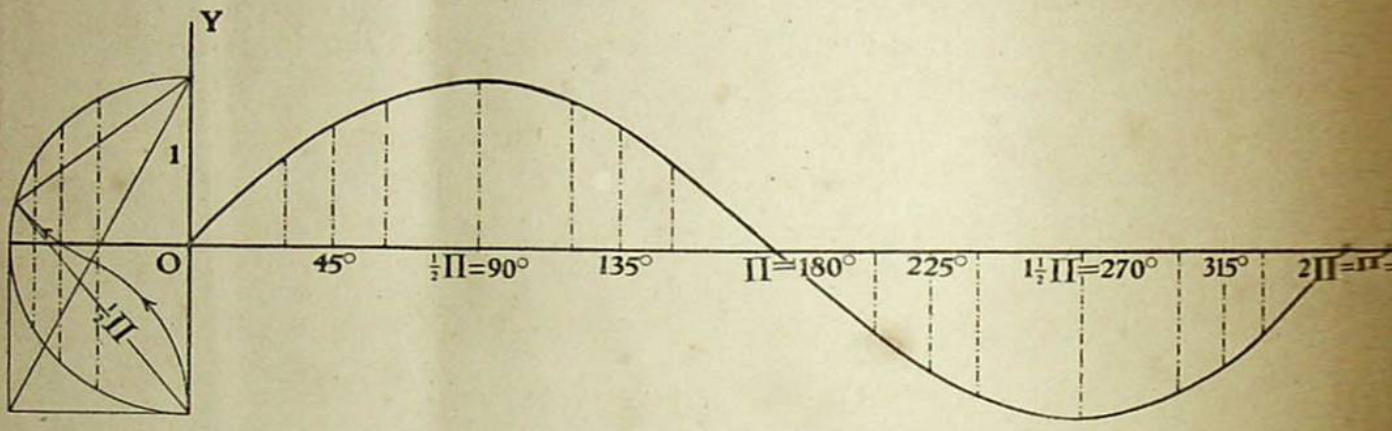


Fig. 69.

Van O tot 2π is de omtrek van een cirkel met een straal 1; dezen omtrek kan men gemakkelijk met voldoende nauwkeurigheid vinden door de volgende zeer eenvoudige constructie: Verdeel AB in de uiterste en middelste reden; cirkel AC om als AC'.

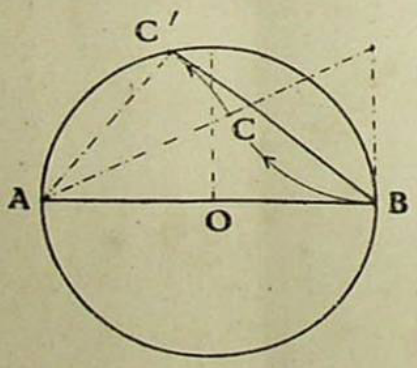


Fig. 70.

Neem verder de supplementaire koorde BC': Als OB = 1 is, is AB = 2 en $AC = \sqrt{5} - 1$, dus

$BC' = \sqrt{4-(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{2\sqrt{5}-2} = 1{,}572$

terwijl $\frac{1}{2}\pi = 1{,}571$.

Men heeft dus op OX vier keer BC' af te zetten. Nu kan men om gemakkelijker op te zoeken bij de deelpunten de overeenkomstige aantallen graden plaatsen en de getallen uit de lijst der goniometrische verhoudingen als loodlijnen uitzetten. Van deze loodlijnen teekent men alleen de eindpunten; over deze trekt men een lijn; het is de graphische voorstelling (grafiek) van de gon. verhouding voor waarden van x, loopende van 0 tot 2π of van 0° tot 360°. Natuurlijk kan de lijn worden voortgezet zoowel naar links als naar rechts.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Op bovenomschreven manier zijn de grafieken geteekend van $\sin x$, $\cos x$ enz. op de figuren 71—75.

Nadat met behulp van een voldoend aantal bijzondere waarden het verloop der functie in beeld gebracht is, kan men voor tusschengelegen waarden van het argument benaderde waarden uit de grafiek aflezen.

Enkele toelichtingen.

I. De Sinus.

Bij 30° vindt men op de verticale schaalverdeeling 0,5; dit beteekent nu: $\sin 30° = 0{,}5$.

Bij 45° vindt men ruim 0,7, dat moet ook zoo zijn, want:

$$\sin 45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707.$$

Zoo wordt bij 240° gevonden:

$$\sin 240° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = -0{,}86.$$

Kiest men nu als willekeurig argument 70°, dan vindt men gemakkelijk:

$$\sin 70° = 0{,}94.$$

De grafiek geeft met één oogopslag een duidelijk beeld van de symmetrie van den sinus ten opzichte van 90° en van 270°; eveneens van het feit, dat $\sin(\alpha + 180°) = -\sin\alpha$, enz.

II. De Cosinus.

Door de cosinus-lijn te vergelijken met de sinus-lijn ziet men onmiddellijk, dat de eerste langs de tweede valt, *als men haar 90° naar rechts verschuift.* In het algemeen wordt door dat feit de formule in beeld gebracht:

$$\cos\alpha = \sin(90° + \alpha).$$

III. Tangens en Cotangens.

De tangens- en de cotangens-lijn zijn geen doorloopende lijnen. Zij bestaan beide uit verschillende *takken*: de tangens van $90° - \delta$ is zeer groot; die van $90° + \delta$ negatief met zeer groote volstrekte waarde. De lijnen kunnen door verschuiving *niet* tot bedekking gebracht worden. Wordt de cotangens-lijn 90° naar rechts verschoven, dan blijkt echter de cot. voor alle hoeken *precies tegengesteld* te worden aan den tangens.

Hierdoor wordt de formule voorgesteld:

$$\cot\alpha = -\operatorname{tg}(90° + \alpha).$$

VI. Secans en Cosecans.

Ook deze beide functies worden voorgesteld door kromme lijnen, die in takken uiteenvallen. Hier blijkt de secanslijn die

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

van den cosecans wel weer te bedekken, als zij 90° naar rechts verschoven wordt. Door deze eigenschap der figuur wordt de formule $\sec \alpha = \text{cosec}\,(90° + \alpha)$ graphisch voorgesteld.

Met behulp van onze graphische voorstellingen kunnen wij met één oogopslag de volgende eigenschappen „zien".

A. Sinus en Cosinus liggen altijd tusschen $+1$ en -1.

B. Tangens en Cotangens kunnen alle positieve en negatieve waarden (tusschen $+\infty$ en $-\infty$) verkrijgen.

C. Secans en Cosecans zijn altijd $+1$ of grooter dan $+1$ of -1 of kleiner dan -1. (De volstrekte waarde is dus altijd $\geqslant 1$).

D. De Sinus neemt toe van 0° tot 90°; neemt af van 90° tot 270°; neemt weer toe van 270° tot 360°.

E. De Cosinus neemt af van 0° tot 180°; groeit aan van 180° tot 360°.

F. De tangens *neemt altijd toe*, als het argument aangroeit, maar springt bij 90° en 270° van $+\infty$ naar $-\infty$.

G. De cotangens *neemt altijd af*, als de hoek aangroeit, maar springt bij 180° en 360° over van $-\infty$ naar $+\infty$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

AANHANGSEL.

Goniometrie en Complexe Grootheden.

§ 94. Formule van De Moivre:

110. $$(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx.$$

Voor geheele positieve waarden van n wordt deze formule eenvoudig bewezen:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + i \times 2 \sin x \cos x =$$
$$\cos 2x + i \sin 2x.$$
$$(\cos x + i \sin x)^3 = (\cos 2x + i \sin 2x)(\cos x + i \sin x) =$$
$$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x +$$
$$+ i (\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x)$$
$$= \cos 3x + i \sin 3x.$$

Op deze wijze voortgaande kan men de formule voor steeds hoogere waarden van den exponent aantoonen.

De waarde van x in de formule is geheel willekeurig en kan dus ook negatief genomen worden. Als men x vervangt door $-x$, vindt men: $(\cos x - i \sin x)^n = \cos nx - i \sin nx$.

§ 95. Elk complex getal $a + b\,i$ kan worden voorgesteld door:

$$R (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Hiertoe behoeft slechts genomen te worden:

$$R \cos \varphi = a \text{ en } R \sin \varphi = b.$$

Dan blijkt terstond: $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ter bepaling van φ heeft men dan:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ dus } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Het kwadrant van φ volgt uit de teekens van a en b.

R wordt dan de *modulus* van het complexe getal $a + b\,i$ genoemd; φ is het *argument* of de *amplitude*.

Door deze voorstelling der complexe getallen in verband te brengen met het z.g. Neperiaansche grondtal e kan men reeksen afleiden voor de goniometrische functies.

Nu is $$e = \lim_{n = \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Volgens het binomium van Newton is:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \times \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2} \times \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \times \frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1.\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1.2} + \frac{1.\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1.2.3} + \ldots$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bij de limiet $n = \infty$ wordt nu

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots.$$

Verder kan e^z worden ontwikkeld:

$$e^z = \lim_{n=\infty} . \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^z = \lim_{n=\infty} . \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nz}. \text{ Nu is:}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nz} = 1 + \frac{nz}{1} \times \frac{1}{n} + \frac{nz\,(nz-1)}{1.2} \times \frac{1}{n^2} + \frac{nz\,(nz-1)\,(nz-2)}{1.2.3}$$

$$\times \frac{1}{n^3} + \ldots = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z\left(z-\frac{1}{n}\right)}{1.2} + \frac{z\left(z-\frac{1}{n}\right)\left(z-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3} + \ldots.$$

Bij de limiet $n = \infty$ wordt:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots.$$

§ 96. Wanneer men deze formule nu laat gelden voor eene zuiver-imaginaire waarde van den exponent, bijv. voor ix, dan heeft men:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{ix^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{ix^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.\ldots.6} + \ldots..\right) +$$

$$+ i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.\ldots.5} - \ldots..\right).$$

Zal het nu voor e^{ix} afgeleide complexe getal voorgesteld worden door R $(\cos x + i \sin x)$, dan blijkt gemakkelijk, dat R = 1 moet zijn. Men behoeft daartoe slechts $x = 0$ te stellen. Dan wordt $e^{ix} = e^0 = 1$; R $(\cos x + i \sin x)$ wordt dan = R, dus moet R = 1.

Wanneer twee complexe getallen gelijk zijn, moeten afzonderlijk de reëele en de zuiver-imaginaire termen gelijk zijn. Hieruit volgt dan:

111. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \ldots\ldots\ldots;$$

112. $$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \ldots\ldots\ldots \text{ enz.}$$

Uit deze reeksen zijn de functies sin x en cos x berekend; x moet daarbij in *radialen* worden uitgedrukt.

Door deeling kan men uit bovenstaande formules weer afleiden:

113. $$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \ldots\ldots\ldots \text{ enz.}$$

Dezelfde formules kunnen ook langs andere wegen worden gevonden.

REPRODUCTIE NEN NASIONAAL

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

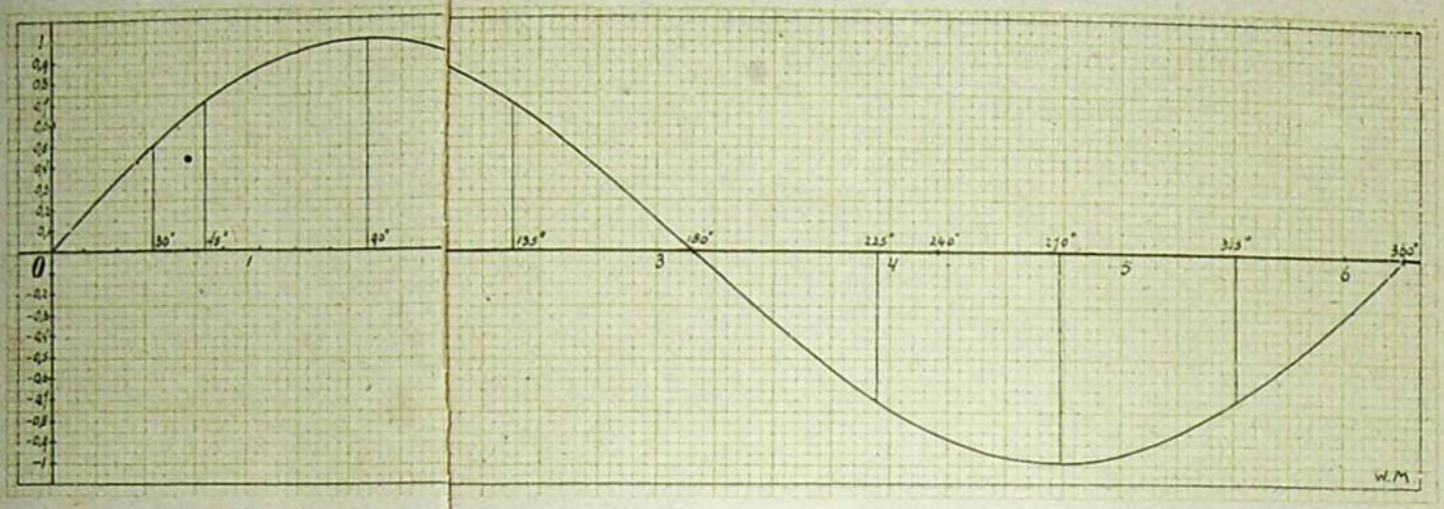


Fig. 75. raphische voorstelling van de Sinus-functie tusschen 0° en 360° (0 en 2π).

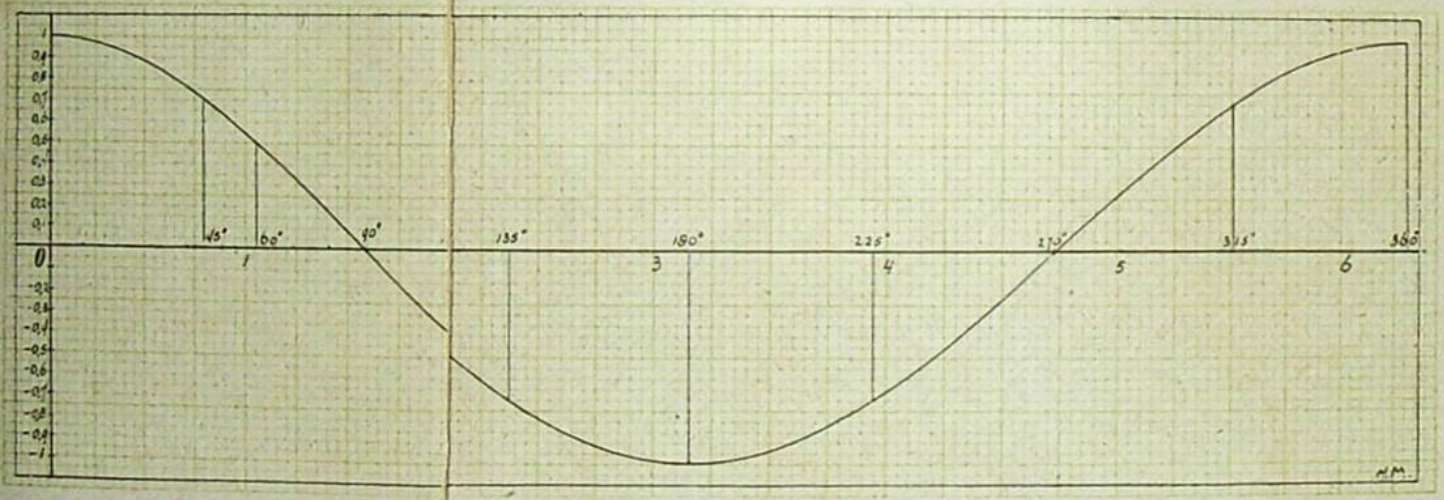
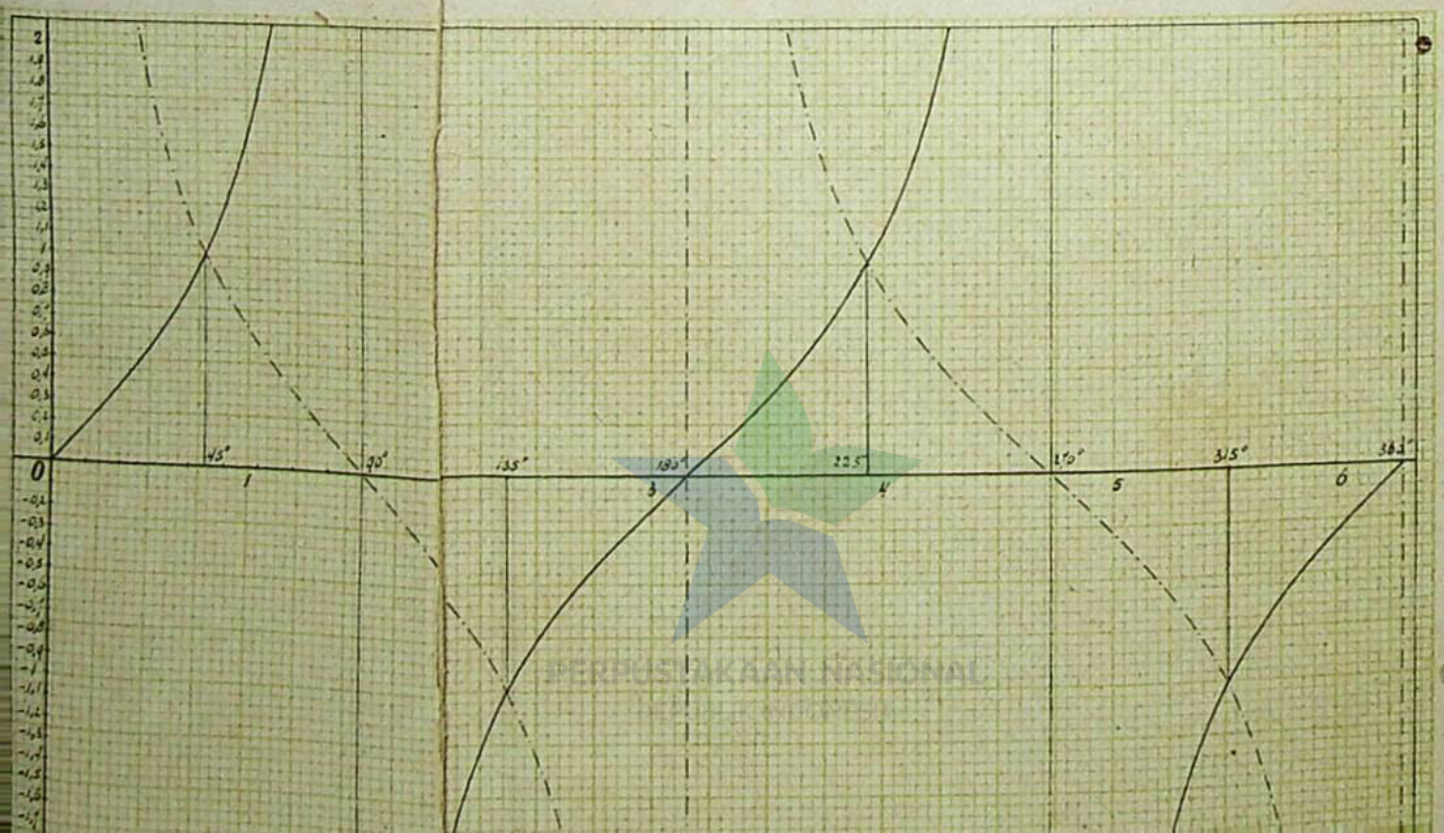


Fig. 76. e Cosinus tusschen 0° en 360°. (0 en 2π).



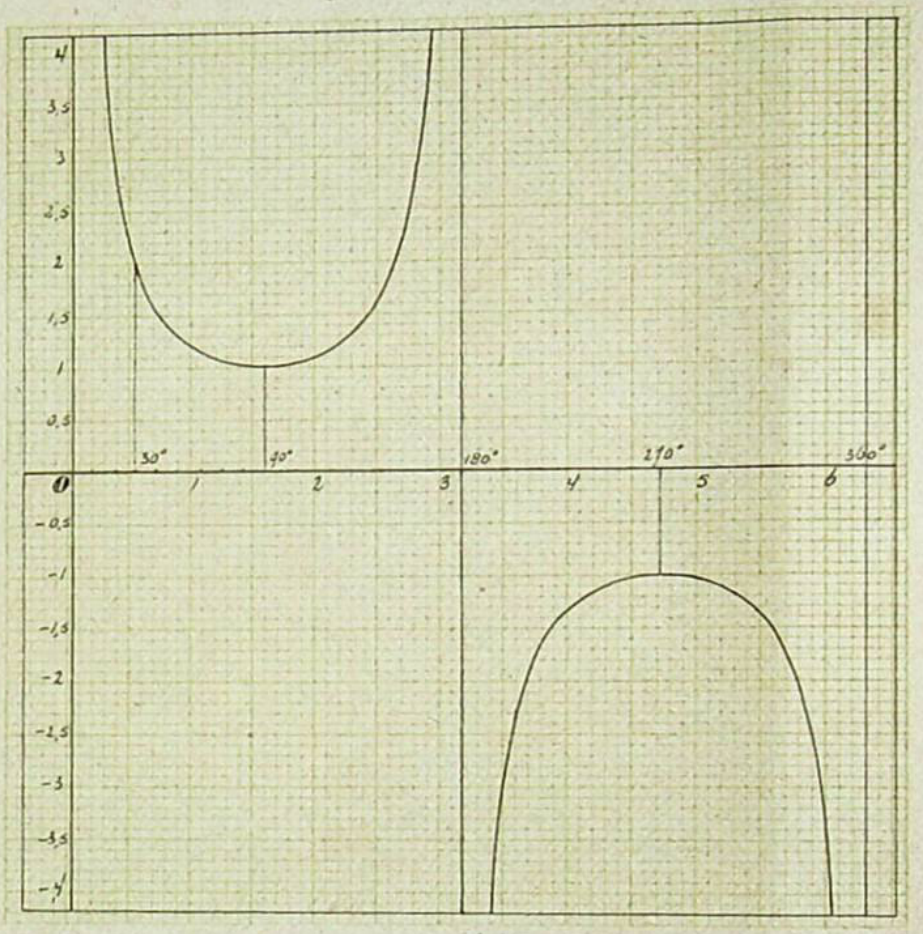
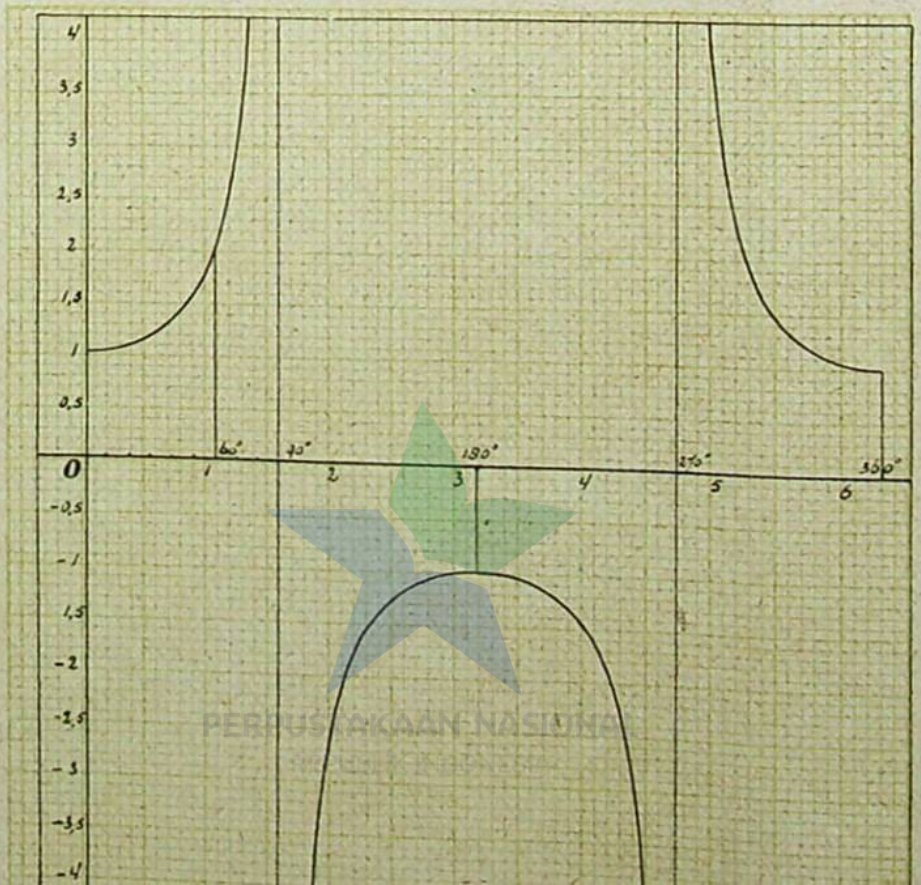


Fig. 79. Graphische voorstelling van den Cosecans tusschen 0° en 360°. (0 en 2π).



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

VRAAGSTUKKEN.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Staatsexamen tot toelating aan de Universiteit.

§ 97. **1.** Los x op uit: $\dfrac{\sin x}{\cos(x+60°)} + \dfrac{\sin x}{\cos(x-60°)} = -\sin 2x.$

2. Van een trapezium ABCD is $\angle A = 80°3'20''$, $\angle D = 50°31'21''$, de grondlijn $AD = 6$ en de hoogte $= 2$. Hoe groot is de straal van den cirkel, die evengroot is als het trapezium?

3. Bewijs, dat in een willekeurigen vlakken driehoek

$$\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C = \frac{r}{4R}.$$

4. Zij O het middelpunt van den ingeschreven cirkel van een driehoek. $\angle A = 72°24'$, $OB = 13{,}401$, $OC = 10{,}813$. Bepaal de hoeken B en C.

5. Los op: $\dfrac{8\operatorname{tg} x\,(1-2\sin^2 x)}{(2-\sec^2 x)\sec x} = \dfrac{3\sqrt{1+\cos 2x}}{\operatorname{cosec} x\sqrt{1-\cos 2x}}.$

6. Van een vlakken driehoek zijn gegeven: het oppervlak O, de straal van den ingeschreven cirkel r en $\angle A$. Druk den straal van den omgeschreven cirkel in deze gegevens uit.

7. Los x op uit: $\operatorname{tg}(45°-x) = (1-\operatorname{tg} x)(2\cos^2\tfrac{1}{2}x - 1)$.

8. Van een vlakken $\triangle$ ABC zijn gegeven: $a = 26$, $c = 22$, de mediaan uit $A = 13{,}416$. Bereken $\angle B$.

9. Los x op uit:

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = (\sin 2x + \sin 3x)\sec 2x \sec 3x.$$

10. De som van de pijlen der segmenten, die een driehoek ABC van zijn omgeschreven cirkel afsnijdt, is

$$2R(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C).$$ Bewijs.

11. Bewijs, dat in een willekeurigen vlakken driehoek

$$(a^2 - b^2)\sin C = c^2 \sin(A - B).$$

12. Van een vlakken driehoek is gegeven: $a = 59{,}54$, $b - c = 50{,}78$, $B - C = 112°36'42''$. Bereken het oppervlak van dien driehoek.

13. Bereken de waarden van x, die voldoen aan:

$$\sin x \sin 4x + 2\sin^2 2x \cos x = 2\cos x \cos 2x \sin 3x\,(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x).$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

14. De zwaartelijn $CO = m$ in $\triangle$ ABC maakt met de zijden AC en BC opv. hoeken α en β. Uit het zwaartepunt Z zijn de loodlijnen ZD en ZE neergelaten op de zijden BC en AC van den driehoek. Druk het oppervlak van vierhoek CDZE uit in de gegevens m, α en β.

15. Los x op uit: $(\cos x + 5\sin x)\sec 3x = 1 + 5\,\mathrm{tg}\,3x$.

16. Zij M het middelpunt van den omgeschreven cirkel en H het hoogtepunt van $\triangle$ ABC. Druk den afstand H tot zijde BC uit in de zijde a en de hoeken B en C en bewijs, dat, als MH // BC is:

$$2\cos A = \cos(B - C).$$

17. Bepaal alle waarden van x, die voldoen aan:

$$\frac{4\sin 2x \sin^2(45° - x)}{\sin^2 x} + 4 = \frac{1 - 4\sin 2x}{\cos 2x - 1}.$$

18. Uit een punt P buiten een cirkel zijn de raaklijnen PA en PB aan den cirkel getrokken. Uit het raakpunt A is de lijn getrokken door het midden C van den kleinsten boog AB. Deze snijdt de raaklijn PB in een punt D, zoodat $PD = \frac{3}{5}PB$ is. Bereken den hoek, dien de raaklijnen met elkaar maken.

19. Gegeven: $\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y = a$; $\sin(x + y) = b$.
Gevraagd: $\cos(x - y)$ uit te drukken in a en b.

20. De opstaande zijden van een driehoek zijn a en b; de lijn, die den buitenhoek van den tophoek C middendoor deelt, van den top tot het snijpunt met het verlengde der basis, is p $(a < b)$.
Bewijs, dat

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{p(a - b)}{2ab}.$$

21. Gegeven: $x + y + z = 90°$.
Bewijs de formule:

$$\cos x + \cos y + \cos z = 4\cos\left(45° - \frac{x}{2}\right)\cos\left(45° - \frac{y}{2}\right) \times$$
$$\times \cos\left(45° - \frac{z}{2}\right).$$

22. Los x op uit:

$$4\,\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\,x - 2 = 0.$$

23. Van een vlakken driehoek ABC is bekend: AB = 12, CB = 8 en de buitenbisectrix van $\angle$ B, gemeten tot het verlengde van AC, 32. Bereken $\angle$ B.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

24. Los x en y op uit:

$$\sin x \times \operatorname{tg} y = \frac{1}{2}\sqrt{6}; \quad \sin y \times \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

25. In een gelijkbeenigen driehoek is de hoogtelijn uit den top de helft van de zwaartelijn uit een der hoekpunten aan de basis. Bepaal de hoeken van den driehoek.

26. Druk $\operatorname{tg}(x+y)$ uit in a en b, als $a = \cos x \cos y$ en $b = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$.

27. Van $\triangle$ ABC is gegeven: $\angle C = 60°$, de zwaartelijn CD = 100, terwijl de omliggende zijden zich verhouden als 2 : 3. Bereken een der opstaande zijden.

28. Als CD de zwaartelijn voorstelt, uit C naar de overliggende zijde AB getrokken, vraagt men tg CDA uit te drukken in A, B en C (uitdrukking geschikt voor logarithmische berekening).

29. Ontbind in de eenvoudigste factoren:

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c.$$

30. De zijden van een driehoek zijn: 2, $2\sqrt{3} - 2$ en $3\sqrt{2} - \sqrt{6}$. Bepaal de hoeken, bij voorkeur zonder de logarithmentafel te gebruiken.

31. Op de basis BC van $\triangle$ ABC is een punt D gekozen, zoodanig, dat $BD = \frac{1}{2}$ DC. Bereken de hoeken B en C, als $\angle BAD = 30°$ en $\angle DAC = 40°$ is.

32. In $\triangle$ ABC wordt de hoogtelijn op de basis door de beide andere hoogtelijnen middendoor gedeeld. Bereken de hoeken van dezen driehoek, als het verschil der basishoeken 25° bedraagt.

33. Als $a^2 = b^2 + bc$, dan is $\angle A = 2 \times \angle B$.
Bewijs dit.

34. Los op: $\frac{3}{8}(1 - \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{tg} x (1 - 2\sin^2 x)$.

35. In een gelijkbeenigen driehoek ligt het hoogtepunt op het midden tusschen het zwaartepunt en den top. Bepaal de hoeken van den driehoek.

36. In een gelijkbeenigen driehoek is de afstand van het hoogtepunt tot den top tweemaal zoo groot als de afstand van dit punt tot de uiteinden der basis. Bereken de hoeken.

37. Van een driehoek is gegeven: $\angle C = 63° 12' 28''$ en de verhouding van de stralen der aangeschreven cirkels aan de zijden, die $\angle C$ insluiten, als 3 : 4. Bepaal de hoeken A en B.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

38. De omtrek van $\triangle$ ABC is 45 cM, $\angle C = 85°$ en de straal van den omgeschreven cirkel is 10 cM. Bereken een der andere hoeken van den driehoek.

39. Los x op uit:

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} 30° (\cos x - \sin x) = \sqrt{2}.$$

40. In $\triangle$ ABC heeft men de bisectrix AD getrokken en door D lijnen evenwijdig met AB en AC. Druk het oppervlak van den vierhoek, die zoodoende ontstaat, uit in opp. $\triangle$ ABC en in de hoeken A, B en C.

Eindexamens Gymnasia.

§ 98. **1.** Los x op uit:

$$\frac{(1+\sqrt{5})\sin 2x}{2\cos^2 x} = \sin x \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}} + \frac{1}{\sec x}.$$

2. De zijden van een driehoek zijn a, b en c, de hoeken A, B en C. Men construeert een driehoek met de zijden:

$$p = a\sqrt{\cot A},\ q = b\sqrt{\cot B},\ r = c\sqrt{\cot C}.$$

Als P, Q en R de hoeken van den nieuwen driehoek zijn, is

$$\cos P \cos Q \cos R = \cos A \cos B \cos C.$$

Bewijs dat.

3. Bepaal de waarden van x, gelegen tusschen 0° en 360°, welke voldoen aan de vergelijking:

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \frac{4\sec 2x}{1+\cot^2 x}.$$

4. Bereken den straal van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC, als gegeven is: $\angle C = 29°$, AC = 2,345 cM, BC = 3,572 cM.

5. Welke waarden beneden 360° voldoen voor x aan:

$$\sin 3x + \sin 2x + \sin x = \cos 3x - \cos x?$$

6. Van een driehoek zijn gegeven:

$a = 25{,}315$ M, $b = 20{,}25$ M en hoek C $= 36°32'13''$.

Bereken de lengte van de bisectrix van hoek C.

7. Druk den straal van den ingeschreven cirkel van een driehoek uit in den straal van den omgeschreven cirkel en de hoeken.

8. Van driehoek ABC is hoek B $= 60°25'23''$, $a-b = 2{,}632$ en $c = 15{,}947$.

Bereken de onbekende elementen van den driehoek.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

9. Van een vlakken driehoek ABC is:

$$\angle A = 72°8'6'', \angle B = 53°42''.$$

Een rechte lijn, door C getrokken, verdeelt de overstaande zijde in twee stukken AD en DB, die tot elkaar staan als 3 tot 5. Bereken de deelen, waarin die lijn $\angle C$ van den driehoek verdeelt.

10. Indien de hoeken A, B en C van driehoek ABC voldoen aan de betrekking: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$, is driehoek ABC rechthoekig. Bewijs dit.

11. Van een driehoek zijn gegeven: twee hoeken A en B en de straal r van den ingeschreven cirkel. Men vraagt het oppervlak van den driehoek te berekenen. $r = 5$ M, $A = 35°$, $B = 105°$.

12. Gegeven: $A + B + C = 90°$; te bewijzen:

$$\sin A + \sin B + \cos C = 4\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \sin (45° - \tfrac{1}{2}C).$$

13. Van een vlakken $\triangle$ is de omtrek 45, $\angle C = 85°$ en de straal des omgeschreven cirkels is 10. Bereken c, A en B.

14. Bewijs, zonder behulp van logarithmen:

$$\frac{\operatorname{tg}^3 105° + \operatorname{tg}^3 15°}{\operatorname{tg}^3 120°} = 10.$$

15. Welke waarden voor x voldoen aan:

$$\cos x - 2\cos^3 x = 1 + 2\cos 2x + \cos 4x?$$

16. Hoe berekent men de hoeken van een driehoek, als de drie hoogtelijnen p, q en r gegeven zijn?

17. Bepaal de waarden van x, die voldoen aan:

$$\frac{3(1 - \operatorname{tg} x)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{5(1 + \cos 2x)}{\cot x}.$$

18. Van een parallelogram ABCD zijn de zijden $AB = 14$ en $BC = 15$, terwijl de diagonaal $AC = 13$ is. Bepaal den hoek, dien de diagonalen met elkaar maken.

19. Van $\triangle$ ABC is gegeven: $a = 225$, $b = 140$, $\angle A = 2 \angle B$. Bereken de onbekende elementen.

20. Los op: $\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$.

21. Verdeel een hoek van 60° in 2 deelen, wier sinussen zich verhouden als 2 : 3.

22. Van $\triangle$ ABC is gegeven, dat

$$a^2(1 + \cos A) = 2bc\sin^2 A.$$

Bewijs: $\angle B = \angle C$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

23. Welke waarden van x voldoen aan de vergelijking:

$$\sin 3x - \sin x + \operatorname{tg} 45° = 2\cos^2 x.$$

24. Van een driehoek ABC zijn gegeven:

$\angle A = 60°20'40''$, $\angle B = 59°39'20''$. Oppervlak $= 100$.

Gevraagd: zijde c.

25. Bereken x uit de vergelijking:

$$\operatorname{bg}\operatorname{tg} x = \operatorname{bg}\operatorname{tg}{}^1/_6 + \operatorname{bg}\operatorname{tg}{}^9/_{20} + \operatorname{bg}\operatorname{tg}{}^3/_2.$$

26. Van $\triangle$ ABC is gegeven:

$a = 1{,}37$ dM, $\angle B = 46°24'$ en $\angle C = 25°54'$.

De ingeschreven cirkel raakt de zijden AB en AC in D en E. Bereken DE.

27. Beschrijft men op de zijde AB van een scherphoekigen driehoek ABC den driehoek $ABC^1 \cong \triangle ABC (AC^1 = AC)$, dan is de afstand van C^1 tot het snijpunt der hoogtelijnen van $\triangle$ ABC gelijk aan $2R \cos (A - B)$.

Bewijs dat.

28. Los x op uit:

$$2 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{6\sin 2x + \cos 2x}{2\cos^2 x}.$$

(Alle waarden $< 360°$ te vermelden.)

29. Van uit den top T van den vuurtoren VT, die 100 Meter hoog is, ziet men twee schepen A en B onder een hoek ATB van $36°52'10''$. Als de hoek $VTA = 75°31'21''$ en de hoek $VTB = 78°27'47''$, hoe ver zijn dan beide schepen van elkaar verwijderd?

(Afmetingen der schepen te verwaarloozen.)

30. Van een vlakken driehoek is de basis $= 12$, de hoogte $= 5$ en de tophoek $= 70°$.

Bereken de beide hoeken aan de basis.

31. Verdeel 90° in twee deelen zoo, dat de secans van het eene deel gelijk is aan den tangens van het andere deel.

32. Uit P ziet iemand twee torens A en B onder een hoek van $42°10'$. Gaat hij 300 M in de richting van A, dan ziet hij ze onder een hoek van $47°12'$; gaat hij uit P weder 300 M in de richting van B, dan is die hoek $46°35'$. Hoe ver zijn de torens van elkaar verwijderd?

33. Bereken, zonder van een log tafel gebruik te maken:

$$\cos\left(\operatorname{bg}\operatorname{tg}\frac{1}{2} - \operatorname{bg}\sin\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Eventueel voorkomende wortelvormen in de uitkomst mogen blijven staan.

34. Van een vlakken △ ABC is $a = 6{,}3$ M, $c = 4{,}8$ M en de straal van den omgeschreven cirkel $= 5{,}9$ M. Men trekt de middelloodlijn van AC, tot BC in D gesneden wordt en men verbindt dan D met A.

Bereken het oppervlak van △ ABD.

35. Bepaal de positieve waarden van $x < 360°$, die voldoen aan:

$$\cot(45° - x) = (1 + \operatorname{tg} x)(2\cos^2 \tfrac{1}{2}x - 1).$$

36. Op het verlengde van een middellijn van een cirkel ligt een punt P zóó, dat zijn afstand tot den cirkel het 4e deel van den straal is. Uit P trekt men een snijlijn, die door den cirkel verdeeld wordt in de verhouding 1 : 2; het kortste stuk grenst aan P. Bepaal den hoek, dien de snijlijn maakt met de middellijn door P.

37. Los op: $1 - \cos^2 x + \cos^4 x - \cos^6 x + \ldots\ldots = {}^2/_3$.

38. Aan den ingeschreven cirkel van △ ABC trekt men een raaklijn DE (D op AC en E op BC) zóódanig, dat $\angle$ CED $= 2 \angle$ A.

Gevraagd: *a*) een formule voor DE;

b) berekening van DE, als $c = 9{,}4284$, $\angle$ A $= 38°12'46''$ en $\angle$ B $= 60°$.

De volgende vraagstukken zijn alle van 1920:

39. A, B en C zijn de hoeken van een driehoek. Gegeven is: $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$. Bewijs, dat een der hoeken van dien driehoek 60° is.

40. Los x op uit:

$$\sin^4 2x + \cos^4 2x + 10 \sin^2 2x \cos^2 2x + \sin 4x = 2.$$

41. Van een rechthoekigen driehoek is de hypotenusa 12 en de bisectrix van een der scherpe hoeken 10. Bereken dezen hoek.

42. Bewijs, dat een driehoek gelijkbeenig is, als:

$$c \sin A = b \sin 2C.$$

43. Los x op uit:

$$10(\sin x + \cos x)^2 = 3(\operatorname{tg} x + \cot x) + 4 \sin 2x + 15.$$

44. Van een vlakken driehoek is eene zijde 14 c.M., de som der beide andere 28 c.M. en de straal van den om-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

geschreven cirkel 9 c.M. Bereken de onbekende elementen van dien driehoek.

45. Bepaal de waarden van x, die voldoen aan:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0.$$

46. Een vlakke driehoek is rechthoekig in C, als

$$\frac{\text{cosec A} + \text{cosec B}}{\sec A + \sec B} = \cot A \cot B \sin C.$$

Bewijs dit.

47. Bereken x uit:

$$\sin x \sec (x + 60°) + \sin x \sec (x - 60°) + \sin 2x = 0.$$

48. Los op:

$$4 \text{ tg } 2x - 3 \sec 2x - 3 = \frac{2}{2\cos^2 x - 1}.$$

49. Verdeel een hoek van 60° in 2 deelen, welker tangenten zich verhouden als 2 : 3.

50. Van driehoek ABC is $A = 67°22'50''$ en $B = 75°45'$, terwijl $h_a + h_b = 24{,}6$. Bereken de zijde c.

51. Van een boldriehoek ABC is $a = 100°$, $b = 40°$ en $\angle C = \angle A - \angle B$. Bereken $\angle C$.

52. Welke positieve waarden van x kleiner dan 360° voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} = 4 \sin^2 \left(45° - \frac{x}{2}\right) - 1.$$

53. Van $\triangle$ ABC is M het middelpunt en R de straal van den omgeschreven cirkel. R_a, R_b en R_c zijn de stralen der omgeschreven cirkels van $\triangle$ MBC, $\triangle$ MAC en $\triangle$ MAB. Bewijs, dat:

$$R_a \times R_b \times R_c = \frac{R^3}{-2(1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)}.$$

54. In $\triangle$ ABC is AD een zwaartelijn; $\angle$ BAD $= \alpha$, $\angle$ CAD $= \beta$. Bewijs de betrekking:

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \text{tg } \tfrac{1}{2}(B - C) \cdot \text{tg}^2 \tfrac{1}{2} A.$$

55. Van driehoek ABC is gegeven: $\angle \beta = 67° 22'$, $\angle \gamma = 42° 46'$, en de straal van den aangeschreven cirkel, die de zijde BC raakt, is 7,245 meter.

Bereken BC.

56. Los x op uit:

PERPUSTAKAAN NASIONAL

$$5 \sin x + 2 \cos x = 4 \sin^2 (45° - \frac{x}{2}).$$

57. Van een vlakken driehoek is

$$a = 7,\ b + c = 10 \text{ en } A = 2B.$$

Bereken de onbekende elementen.

58. Bereken de waarden van x tusschen $0°$ en $360°$, die voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{\cos x (\sin x + \cos x)}{\text{cotg}\,(45° - x)} = \frac{1 - \text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} + 2 \sin^2 (45° - x).$$

59. Indien omtrent de zijden a, b en c van $\triangle$ ABC gegeven is: $2a = b + c$,

vraagt men te bewijzen, dat tusschen de hoeken B en C de betrekking bestaat:

$$\text{cotg}\,\tfrac{1}{2} B = 3.\ \text{tg}\,\tfrac{1}{2} C.$$

60. Van $\triangle$ ABC is gegeven:

zijde $a = 12{,}3$; hoogtelijn $h_a = 15{,}8$; $\cos \frac{1}{2} B = 0{,}8$.

Gevraagd wordt te berekenen zijde b en hoek A.

61. In een vlakken driehoek ABC is

$$\sin \frac{1}{2} A = \frac{1}{\sqrt{26}};\qquad \cos 2B = -\frac{7}{25}.$$

Bereken zonder van de logarithmentafel gebruik te maken den sinus van $\angle$ C.

62. In een vlakken driehoek ABC met tophoek $C = 100°$ is CD zoo getrokken, dat $\angle ACD = 48°$, $\angle BCD = 52°$ is. $AD = 25$. $BD = 30$. Hoe groot is CD?

63. Los x op uit:

$$\cos^2 2x - 1 = 2 \cos^2 x (1 - 3 \sin x).$$

64. In $\triangle$ ABC is de zwaartelijn CD getrokken. Als $AC = 4{,}508$, $CD = 5{,}137$ en $BC = 6{,}319$, vraagt men hoek ACB te berekenen.

65. Bewijs de betrekking:

$$\frac{2 (1 + \sin a)}{1 - \cos a} = (1 + \text{cotg}\,\frac{a}{2})^2.$$

Toets daarna haar juistheid voor de waarden $a = 0°$ en $a = 270°$.

66. Van driehoek ABC zijn gegeven: zijde a, het verschil der beide andere zijden $b - c$, en $\angle BAC\ (= \alpha)$. Men vraagt aan te geven, hoe de twee onbekende hoeken van $\triangle$ ABC berekend

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

kunnen worden en vervolgens de berekening uit te voeren met de gegevens : $a = 23{,}5$; $b - c = 4{,}3$; $\alpha = 42° 40'$.

67. Los de volgende vergelijkingen op :

$$4 \sin \tfrac{1}{2}x \operatorname{tang} x = 3\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x}.$$

68. Uit 2 punten A en B op 1.80 M. boven den beganen grond ziet men gelijktijdig een vliegmachine V. Als de hoeken VBA en VAB respectievelijk 53° 7′ 50″ en 90° zijn en de lijn VA met 't horizontale vlak een hoek van 14° 28′ 39″ maakt, hoe hoog is dan de vliegmachine boven den grond, als de afstand van A naar B 300 M bedraagt ?

69. Bereken x uit : $\operatorname{bg} \cos \frac{12}{13} + \operatorname{bg} \cos \frac{15}{17} = \operatorname{bg} \cos x$.

70. Van een vlakken driehoek is gegeven : $a - b = 4$; $c = 31$; straal R van den omgeschreven cirkel = 17.

Bereken de elementen van dien driehoek.

71. Welke waarden van x voldoen aan :

$$\frac{4 \operatorname{cosec} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \cot 2x - \cot x ?$$

72. Van driehoek ABC is gegeven : de tophoek B = 35°, de hoogtelijn uit B = 14,2 en de bisectrice van ∠ B = 21,3. Bepaal de hoeken van den driehoek en den straal van den omgeschreven cirkel.

73. Bepaal de waarden van x, die voldoen aan :

$$\frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} + \frac{4 \operatorname{cosec} 2x}{\operatorname{tg} 2x (\cot x - \operatorname{tg} x)} = \sec x \operatorname{cosec} x.$$

74. Van een vlakken driehoek zijn gegeven : $a = 12{,}6$, $c = 16{,}2$ en de zwaartelijn uit B = 10,3.

Gevraagd wordt ∠ B.

75. Men vraagt zonder gebruikmaking van een logarithmentafel de hoeken van een driehoek te berekenen, als gegeven is :

$$\sin C - \cos C = 1 - 2 \sin C \cos C;$$
$$\operatorname{tg} A = -\cot B.$$

76. In den gelijkbeenigen △ ABC is de tophoek C = 52° 26′ 40″, de zijde AC = 17,86 cM.

Bereken het oppervlak van △ AMI, als M het middelpunt van den omgeschreven en I dat van den ingeschreven cirkel is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Eindexamens H.B.S. met Vijfjarigen cursus.

§ 99.

1901. 1. Los x op uit de vergelijking:

$$\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}+\frac{5}{2\cos 2x}-\frac{1}{4}\cos 2x=\frac{1}{4}\times\frac{1+3\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}.$$

2. Als d de lijn is, die hoek C van een driehoek ABC middendoor deelt, bewijs dan:

$$d=\frac{2\times\text{oppervlak }\triangle\text{ ABC}}{c\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}.$$

3. Van vierhoek ABCD, die in een cirkel is beschreven, zijn gegeven: zijde AB = 12,631 M; zijde BC = 9,584 M; zijde CD = 5,281 M; diagonaal AC = 15,753 M. Bereken diagonaal BD.

1902. 4. Welke waarden van x voldoen aan de vergelijking:

$$2(\mathrm{tang}\,x-1)\cos 45^\circ+\sqrt{(\mathrm{tang}^2 x+\frac{4\mathrm{tang}\,x}{\sin 2x}+1)}=0.$$

5. Leid den cosinusregel der trigonometrie af, daarna de formules voor de berekening der halve hoeken des driehoeks en bewijs dat:

$$\mathrm{I}=s(s-a)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{A},$$

waarin I de grootte van het oppervlak, s de halve som der zijden, a de lengte van eene zijde en A de grootte van den hoek over die zijde voorstelt.

6. Op de helling van een berg staat een toren. Gaat men van den voet van dien toren langs een hellend pad naar beneden over een afstand van 100 meter, dan ziet men de hoogte van den toren onder een hoek van 46°10′; gaat men langs het verlengde van dat rechte pad in dezelfde richting 175 meter verder, dan ziet men de hoogte van den toren onder een hoek van 25°35′. Hoe hoog is de toren?

1903. 7. Bereken alle waarden van x, tusschen 0° en 360°, die voldoen aan de vergelijking:

$$\sin(90^\circ+2x)=-\frac{\sin 324^\circ 17'50''\times\mathrm{tg}\,208^\circ 23'52''\times\mathrm{cosec}\,117^\circ 12'25''}{\cos 195^\circ 16'36''}.$$

8. Bereken x uit de vergelijking:

$$\frac{\sin(x+60^\circ)+\cos(x-60^\circ)}{\cos x}=\mathrm{tg}^2 x-1.$$

9. Uit de uiteinden A en B eener basis voor afstandsmeting, lang 850 meters, meet men gelijktijdig de hoeken BAP =

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$96°40'50''$ en $ABP = 33°6'12''$, als P een punt voorstelt, dat in beweging is. Na 5 minuten meet men weer gelijktijdig de hoeken $BAQ = 40°52'15''$ en $ABQ = 122°45'32''$, als Q de plaats is, waar het bewegende punt zich op dat oogenblik bevindt. Verondersteld wordt, dat het punt P eene eenparige beweging heeft.

Men vraagt de snelheid van het punt P te berekenen, evenals den hoek, dien de richting, waarin het punt P zich beweegt, maakt met de loodlijn op de basis AB.

1904. **10.** De waarden van x te vinden, die voldoen aan de vergelijking:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

11. Van een driehoek ABC zijn de hoeken A, B en C, de zijden over die hoeken a, b en c. Bewijs, dat de driehoek gelijkhoekig is, als:

$$\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2 \text{ en } \sin A \sin B = \tfrac{3}{4} \text{ is.}$$

12. De basis van een driehoek is 14,781 meter, het verschil der opstaande zijden 2,834 meter en de kleinste hoek aan de basis $25°11'20''$.

Bereken de opstaande zijden en de oppervlakte van den driehoek.

1905. **13.** Bereken x uit de vergelijking:

$$(2 + 3\cos 2x) \sin 3x - \sin 3x = 0.$$

14. Toon aan:

$$\left\{\frac{\sin(270° - a)\,\mathrm{tg}(90° + a)}{\cos(a - 180°)\cot(360° - a)} - \frac{\mathrm{tg}(-a)}{\cot(180° + a)}\right\} \times \left\{\frac{\mathrm{tg}(225° - a)}{\cot(225° + a)} + \frac{\sin(a + 180°)}{\sec(90° - a)}\right\} = 1.$$

15. Van een trapezium ABCD is de oppervlakte 800,13 vierkante meter, de langste evenwijdige zijde $AD = 41{,}56$ meter, de diagonaal $AC = 40{,}98$ meter en de hoek $DAC = 36°11'19''$.

Bereken de opstaande zijde AB.

1906. **16.** De waarden van x te vinden uit de vergelijking:

$$2\sin^3 x - \sin x = \cos 4x - 2\cos 2x + 1.$$

17. Bereken alle waarden van x tusschen $0°$ en $360°$, die voldoen aan de vergelijking:

$$\mathrm{tg}(90° + 3x) = \frac{\cos 312°38'50'' \times \mathrm{tg}\,236°15'40'' \times \sec 110°56'10''}{\sin 218°12'4''}.$$

18. Van driehoek ABC zijn gegeven: de basis $AB = 24{,}326$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

meter, de zijde AC = 20,562 meter en hoek A = 42°18′22″.

Men vraagt den straal te berekenen van den cirkel, die de zijde AB in B raakt en door het hoekpunt C gaat.

1907. **19.** Bereken x uit de vergelijking:

$$\text{tg } 2x - \text{tg } x = \frac{4\sec 2x}{1 + \cot^2 x}.$$

20. Te bewijzen, dat driehoek ABC rechthoekig is, als gegeven is:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\cot \frac{1}{2}C \times \cos \frac{1}{2}(A - B)} = \frac{\sec A \times \sec B}{\sec A + \sec B}.$$

21. Van een vierhoek ABCD zijn gegeven: de zijden AB = 19,35; BC = 41,27; CD = 46,04; DA = 37,20 en hoek CAB = 57°38′. Wordt gevraagd te berekenen hoek ADB.

1908. **22.** Los x op uit: $(1 + 5^{\frac{1}{2}} . \sin x), \text{cosec } 2x + 2\cot 2x = 8\text{tg } x$.

23. Bereken tg ½ × ½ × 30°, dat is tg 7°30′ zonder gebruik te maken van een logarithmentafel. Als de verkregen uitkomst tot de eenvoudigste gedaante herleid is, toets dan die uitkomst door het opzoeken der logarithmen, dus met behulp van een logarithmentafel.

24. In een halven cirkel is een vierhoek ABCD beschreven. Bereken het oppervlak van den vierhoek, als gegeven is: de middellijn AB = 24,56, BC = 10,68 en CD = 8,72.

1909. **25.** Bereken alle waarden van x, tusschen 0° en 360°, die voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{\text{tg } (270° - x)}{\sec (270° + x)} + \frac{\cot (270° - x)}{\text{cosec } (270° - x)} = \tfrac{1}{2} \text{tg } (315° - x).$$

26. Van driehoek ABC zijn gegeven: $\angle A = 64°32′8″$, zijde AB = 10,736 meter en de straal van den omgeschreven cirkel R = 8,542 meter. Gevraagd wordt de grootte van het oppervlak van dien driehoek.

27. Van driehoek ABC zijn de elementen bekend. Uit een punt P in het vlak van dien driehoek meet men de hoeken α en β, waaronder men, uit dat punt, de zijden AB en BC ziet. Men vraagt den afstand te bepalen van P tot de hoekpunten van den driehoek (vraagstuk van Snellius).

1910. **28.** Om den driehoek ABC, waarvan $\angle C = 29°$, zijde AC = 2,345 centimeter en zijde BC = 3,572 centimeter is, wordt een cirkel beschreven.

Bereken den straal van dien cirkel en het oppervlak van het

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

segment, dat begrensd wordt door de koorde AB en den kleinsten boog, door die koorde onderspannen.

29. Van een driehoek ABC zijn gegeven:

$$a + b = 39{,}189 \text{ centimeter;}$$
$$c = 23{,}37 \quad ,,$$
$$\text{en } A - B = 21°6'42'',$$

als a, b en c de zijden en A, B en C de hoeken voorstellen. Bereken den straal van den ingeschreven cirkel.

30. Los x op uit de vergelijking:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{\cos x - \cos 3x}{6}$$

en bepaal welke waarden, kleiner dan 360°, aan de vergelijking voldoen.

1911. 31. Van een vierhoek ABCD, om een cirkel beschreven, is gegeven:

$$AB = 156,\ BC = 109,\ CD = 163 \text{ en } \angle B = 107°6'51''.$$

Bereken hoek D, den inhoud van den vierhoek en den straal van den ingeschreven cirkel.

32. Als in driehoek ABC, A, B en C de hoeken en a, b en c de overstaande zijden voorstellen en:

$$\frac{\sin(90° + A)}{\text{tang}(270° + A)} \times \frac{\text{cotg}(180° - A)}{\cos(360° - A)} + \frac{\cos(90° - A)}{\text{cotg}(90° + A)} \times$$
$$\times \frac{1}{\sec(360° - A)} = \frac{\text{tang}(225° + B)}{\text{cotg}(225° - B)} \times \frac{\cos B}{\text{cosec } B \times \text{cotg } B},$$

dan is zijde a = zijde b. Bewijs dit.

33. Bepaal de waarden van x, die liggen tusschen 0° en 360° en die voldoen aan de vergelijking:

$$\text{tang}(3x - 60°) = \frac{\sin 215°13' \times \sec(-15°18'2'')}{\text{tang } 405°20'' \times \text{cosec } 156°54'56'''}.$$

1912. 34. Van een vierhoek ABCD, in een cirkel beschreven, zijn gegeven: zijde BC = 60, zijde CD = 52, zijde DA = 39 en diagonaal DB = 56 cM.

Bereken de hoeken, de onbekende zijde en de tweede diagonaal van dezen koordenvierhoek.

35. Gevraagd wordt, zonder gebruik te maken van de tafels der logarithmen van de gewone getallen en van die der goniometrische logarithmen, de grootte te bepalen van tg $(a + b)$, als gegeven zijn: tg $(90° + \frac{1}{2}a) = -\frac{2}{3}$ en sin $(270° + 2b) = -\frac{7}{25}$, terwijl men weet, dat de grootte van $a + b$ ligt tusschen 0° en 180°.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

36. Bepaal alle waarden van x, die voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{\cos x\,(\sin x + \cos x)}{\cot(45° - x)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 2\sin^2(45° - x)$$

en geef aan, welke dier waarden gelegen zijn tusschen 0° en 360°.

1913. **37.** Bepaal alle waarden van 0° tot 360°, welke voldoen aan:

$$4\cos(270° - \tfrac{1}{2}x) = \frac{\sec(180° + x)\operatorname{tg}(2x - 45°)\operatorname{tg}600°}{2\sin(90° + \tfrac{1}{2}x)\cot(2x + 225°)}.$$

38. In een kwartcirkel AMB trekt men 2 stralen MC en MD zoodanig, dat $\angle AMC = \alpha$ en $\angle CMD = \beta$. Men trekt nu de stralen AB, AC, CD en DB. Druk het oppervlak van vierhoek ACDB uit in den straal R en in α en β door middel van een formule, die geschikt is voor berekening met logarithmen. Daarna voere men de berekening uit met de volgende gegevens: R = 10 cM; koorde AC = 5 cM; koorde CD = 8 cM.

39. Van $\triangle$ ABC zijn gegeven: $\angle C = 75°34'20''$, de binnenbisectrice van $\angle C$ is 12,063 cM en de buitenbisectrice van $\angle C$ is 35,785 cM. Gevraagd: de zijde c te berekenen.

91 1914. **40.** De hoeken, kleiner dan 360°, te bepalen, die voldoen aan:

$$\cos 3x + \cos x + \sin 3x + \sin x = \cos(45° - 2x)\sec x.$$

41. In den scherphoekigen driehoek ABC laat men de hoogtelijn AD neer op BC. De bisectrice van $\angle$ ABC snijdt AD in E. Bereken, *zonder gebruik van eene tafel*, de lengte van DE.

$$\text{Gegeven is } \begin{cases} \sec \angle ABC = {}^5/_3. \\ \sin \angle BAC = {}^{56}/_{65}. \\ AD = 12 \text{ cM}. \end{cases}$$

42. Van $\triangle$ ABC is gegeven:

AB = 16,239 M, AC = 9,917 M en $\angle A = 53°28'44''$.

Zij M het middelpunt van den omgeschreven cirkel en O het middelpunt van den ingeschreven cirkel van $\triangle$ ABC, bereken dan het oppervlak van $\triangle$ BMO.

1915. **43.** Bepaal de waarden van 0° tot 360°, die voldoen aan de vergelijking:

$$(1 + \operatorname{tg}60°)\sin x + (1 - \operatorname{tg}60°)\cos x = \sec x.$$

44. Als voor de hoeken van driehoek ABC geldt:

$$\sec B(\sin A - \operatorname{tg} C) = \sec C(\operatorname{tg} B - \sin A),$$

dan is die driehoek rechthoekig. Bewijs dit.

45. Van een koordenvierhoek, waarvan A, B, C en D de op elkaar volgende hoekpunten zijn, is gegeven:

AD = CD; $\angle$ B is scherp; de straal R van den omgeschreven cirkel is 5 cM. De diagonalen AC en BD snijden elkaar in S. AS = 2,3 cM; CS = 5,7 cM.

Gevraagd: de lengte van BC.

1916. **46.** Bepaal de waarden van $x < 360°$ uit:

$\cos(45° + 2x) + \sin(45° + 2x) = 2\cos 4x + \sin 2x \times \sqrt{2}$.

47. Van een koordenvierhoek ABCD zijn de zijden AB, BC, CD en DA resp. gelijk aan a, b, c en d;

bewijs, dat

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$

Leid hieruit formules af, welke geschikt zijn om $\cos \frac{1}{2} A$, $\sin \frac{1}{2} A$ en $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$ logarithmisch te berekenen, als a, b, c en d gegeven zijn, daarbij invoerende $S = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

Druk ten slotte het oppervlak van den koordenvierhoek in a, b, c en d uit.

48. In driehoek ABC is een cirkel beschreven; de verbindingslijnen der raakpunten vormen een nieuwen driehoek. Bereken den straal van dien cirkel en de oppervlakte van laatstgenoemden driehoek, als gegeven is:

$\angle A = 55°14'46''$; AC = 16,43; AB = 18,12.

1917. **49.** Van de scherpe hoeken a en b is gegeven:

$\operatorname{tg}(45° + a) = 2\frac{3}{7}$ en $\sec(360° - \frac{1}{2} b) = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Bereken zonder gebruik te maken van een logarithmentafel de waarde van $\sin(a + 2b)$ en ook van $\cos(2a + b)$.

50. Van een trapezium ABCD, waarin een cirkel kan beschreven worden, is gegeven:

het been AD = 25,361; het been BC = 31,947; het verschil van de hoeken A en B aan de langste evenwijdige zijde = 18°37'50". Bereken het oppervlak van dat trapezium.

1918. **51.** Als in een driehoek ABC de sinussen der hoeken A, B en C in deze volgorde een rekenkundige reeks vormen, dan is

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} \times \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

Bewijs dit.

52. Van een parallelogram is een der diagonalen 8 cM. Deze diagonaal maakt hoeken van 30° en 45° met de zijden. Bereken:

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

a. zonder log. tafel de oppervlakte van dit parallelogram;
b. met behulp van een log. tafel de hoeken, welke de andere diagonaal met de zijden maakt.

1919. **53.** A, B en C zijn de hoeken van een driehoek.
Bewijs, dat deze driehoek gelijkbeenig is, als

$$\text{cotg } 2A + \frac{\cos C}{2\sin A \cos B} = 0.$$

54. In een koordenvierhoek ABCD is de zijde AB = 8, de zijde AD = 7 en de diagonaal BD = 9 cM. De diagonaal AC verdeelt ∠ BAD in de hoeken BAC en DAC, wier sinussen zich in de genoemde volgorde verhouden als 6 : 5.
Bereken de zijde BC.

1920. **55.** Van driehoek ABC is gegeven:

$$\frac{4a \cos \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}(A+B)}{a+b} = \frac{\sin A}{\cos \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

Bewijs, dat deze driehoek rechthoekig is.

56. Om een driehoek ABC, waarvan ∠ A = 105°46′30″, AB = 7,2 dM en AC = 6,1 dM is, is een cirkel beschreven. Uit C laat men op de overstaande zijde AB de hoogtelijn CE neer, die den cirkel in F snijdt.
Gevraagd wordt de lengte van de koorde AF.
Indien men een willekeurig punt A′ van den cirkelomtrek met de punten B en C verbindt en uit C weer de hoogtelijn CE′ op de overstaande zijde A′B neerlaat, die den cirkel in F′ snijdt, wat weet ge dan van de lengte der koorde A′F′?

Acte Wiskunde L. O. [1])

§ 100.

1908. **1.** Van △ ABC is gegeven sin ½A = 0,6 en cos 2B = 0,8. Bereken (zonder tafel) tg C.

2. Bereken de waarden voor x en y, die voldoen aan de vergelijkingen:

$$3\sin x + 5\sin y = 0 \text{ en } 2\text{tg } x + 5\text{tg } y = 0.$$

3. Van een △ ABC zijn gegeven: de straal des ingeschreven cirkels = 5,27; ∠ A = 70°14′12″ en de lijn, die B met het raakpunt op de zijde AC verbindt = 16,3. Bereken de andere hoeken des driehoeks.

[1]) De oplossingen van deze vraagstukken vindt men in:
H. G. A. Verkaart Gids Wiskunde L. O.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1909. 4. In $\triangle$ ABC deelt AD $\angle$ A middendoor. Indien verder gegeven is:

$$\frac{\text{Opp. } \triangle \text{ ACD}}{\text{Opp. } \triangle \text{ ABD}} = \text{cotg } \tfrac{1}{2}C \times \cos \tfrac{1}{2}B + \sin \tfrac{1}{2}B - 1,$$

vraagt men te bewijzen, dat de driehoek gelijkbeenig is.

5. Bepaal alle waarden van x, die voldoen aan de vergelijking:

$$\sin 5x - \sin x + \cos x - \cos 3x =$$
$$= \text{tg}\,(22\tfrac{1}{2}^\circ - \tfrac{1}{2}x) \times (\sqrt{2} + \sin x + \cos x).$$

6. Van $\triangle$ ABC zijn gegeven: de zijde BC = 9,15, de straal van den ingeschreven cirkel = 2,3, de straal van den aangeschreven cirkel aan de zijde BC = 7,5. Men vraagt de hoeken van den driehoek te berekenen.

1910. 7. Welke waarden van x voldoen aan:

$$\text{tg}\,(270^\circ - x) = \frac{\text{cotg } 306^\circ 7'25''.\ \text{cosec } 108^\circ 25'17''.\ \text{cotg } 185^\circ 17'28''}{\cos 157^\circ 10'36''.\ \sec 265^\circ 17'48''}?$$

8. Wanneer men de zijden AB, BC en CA van een gelijkzijdigen driehoek ABC draait resp. om de punten A, B en C, alle in denzelfden zin en over een zelfden hoek α kleiner dan 30°, dan zullen zij — verlengd — een nieuwen driehoek $A_1B_1C_1$ vormen. Wordt de draaiing in tegengestelden zin uitgevoerd, over denzelfden hoek α, dan ontstaat een driehoek $A_2B_2C_2$. Men vraagt α zóó te bepalen, dat de omtrek van $\triangle$ $A_1B_1C_1$ gelijk is aan tweemaal den omtrek van $\triangle$ $A_2B_2C_2$.

9. Hoe groot is de hoek, dien een beschrijvende lijn van een rechten cirkelvormigen kegel maakt met de as, als het totale oppervlak van den kegel gelijk is aan het oppervlak van een bol, welke de hoogte van den kegel tot middellijn heeft?

(Den gevraagden hoek als onbekende in te voeren).

1911. 10. Bepaal φ uit: $\text{tg}\,\varphi = \dfrac{\sin a + \sin b}{\sec a + \sec b}$,

als $a = 125^\circ 3'45''$, $b = 137^\circ 26'37''$.

11. Bepaal de waarden van x tusschen 0° en 360°, welke voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\cos x} = \frac{1 + \sin 4x + \cos 4x}{\cos 2x}.$$

12. De loodlijnen, welke men in den top C van een scherphoekigen $\triangle$ ABC opricht op de zijden AC en BC, snijden de verlengde basis AB respectievelijk in de punten D en E.

Indien gegeven is DE = 2AB, bewijs dan $\cos A \cos B = \cos C$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1912. **13.** Bereken de waarden van x, tusschen 0° en 360°, die voldoen aan: $\sec 3x = -\frac{\operatorname{cosec} a \operatorname{tg} b}{\cos(c-d)}$,
als $a = 255°35'43''$; $b = 138°14'27''$; $c = 24°17'36''$; $d = 83°22'48''$.

14. De rechte, gaande door het hoekpunt C en door het middelpunt M van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC, snijdt AB in D. Indien CD door p en de straal van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC door R voorgesteld wordt, dan vraagt men:

1°. te bewijzen: $\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B = \frac{2R-p}{p}$;

2°. de hoeken A en B te berekenen, zoo

$$R = 3,\ p = 5,\ \angle C = 60°.$$

15. Bereken de waarden van x, die voldoen aan de vergelijking: $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} 4x + \operatorname{cosec} 4x = \operatorname{cosec} 2x$.

1913. **16.** Los x en y op uit de vergelijkingen:

$$x\cos(a+y) = \sin p,\ x\cos(b+y) = \cos q,$$

als $x > 0$, $0 < y < 360°$, $a = 295°15'32''$, $b = 210°27'18''$, $p = 315°0'45''$ en $q = 165°12'25''$.

17. Een kegel, welks beschrijvende lijn een hoek x maakt met de as, raakt een bol aan volgens een kleinen cirkel. Gevraagd wordt x zóó te bepalen, dat de inhoud van den kegel, die het vlak van den raakcirkel tot grondvlak heeft, m maal zoo groot is als die van het kleinste segment, dat dit vlak van den bol afsnijdt.

18. Uit een punt P van den cirkelomtrek ziet men de diagonalen van het omgeschreven vierkant onder de hoeken a en b. Leid eene betrekking af tusschen $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$ en den tangens van den hoek, dien de straal naar het punt P maakt met een der diagonalen van het vierkant.

1914. **19.** Herleid zooveel mogelijk het tweede lid van de vergelijking:

$$\operatorname{tg} x = \sec(180° + a) + \operatorname{cosec}(a - 270°)\sin(90° + b) +$$
$$- \operatorname{cotg}(90° + c)\sin(b + 180°);$$

maak het voor logarithmische berekening geschikt en bepaal daarna x, als

$$a = 310°54'12'',\ b = 156°26'36'',\ c = 108°45'42''.$$

20. Van een driehoek zijn de basis en de hoogtelijn op de basis gegeven, terwijl de eene basishoek het dubbele is van den anderen. Bereken de hoeken aan de basis en de deelen, waarin de hoogtelijn de basis verdeelt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

21. Van het viervlak OABC staan de ribben OA, OB en OC loodrecht op elkaar. De hoeken van driehoek ABC zijn gegeven. Men vraagt de standhoeken op de ribben AB, AC en BC in de gegevens uit te drukken.

(Na-examen voorgemob.) **22.** Van driehoek ABC zijn de stralen van de in- en aangeschreven cirkels achtereenvolgens r, r_a, r_b, en r_c. Als $r + r_a + r_b = r_c$, tot welke soort behoort dan die driehoek?

23. Los x en y op uit het stelsel vgl.:

$$\cos x + \cos y = {}^1/_6, \quad \cos 3x + \cos 3y = -{}^4/_{27}.$$

24. Van een recht driezijdig prisma ABCDEF is het grondvlak ABC rechthoekig in C. De diagonaal AE van het zijvlak ABED kruist de ribbe CF onder een gegeven hoek Q, terwijl AE met het vlak FEBC een tweemaal zoo grooten hoek maakt als met het vlak ACFD. Bepaal dezen hoek.

(In de algemeene uitkomst $AB = 3a$ en $AE = 4a$ nemen).

1915. **25.** Bepaal x uit de vergelijking:

$$\text{bg tg } 3\tfrac{1}{2} - \text{bg ctg } x = \text{bg cosec } {}^1/_3 \sqrt{13}.$$

26. Gegeven zijn van een driehoek ABC de hoeken A en B. Gevraagd wordt de deelen te bepalen, waarin hoek C wordt verdeeld door de lijn, die het hoekpunt C verbindt met het punt, waarin de ingeschreven cirkel van den driehoek de zijde AB raakt.

De verkregen einduitkomst moet voor logarithmische berekening geschikt worden gemaakt.

In de algemeene uitkomst neme men

$$\angle A = 68°25'48'' \text{ en } \angle B = 57°42'27''.$$

27. Van den vierhoek ABCD is

$AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 7$, $DA = 8$ en $\angle A + \angle C = 130°$.

Gevraagd wordt de hoeken van den vierhoek te berekenen.

1916. **28.** Van een regelmatige vierzijdige piramide is de tophoek van een opstaand zijvlak $a°$. De standhoek op een opstaande ribbe is $b°$.

Bewijs de betrekking: $\cos b + \text{tg}^2 \frac{1}{2} a = o$.

Hieruit den standhoek van een regelmatig achtvlak te berekenen.

29. Bewijs, dat $\triangle$ ABC gelijkbeenig is, als

$$\text{tg}^2 A + \text{tg}^2 B = (\text{tg } A + \text{tg } B) \text{ tg } \tfrac{1}{2} (A + B).$$

30. Los uit de volgende vergelijking x op:

$$\frac{\text{tg}^2 a - \text{tg}^2 x}{1 - \text{tg}^2 a \text{ tg}^2 x} = \frac{1 - 2 \cos 2a}{1 + 2 \cos 2a}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

1917. **31.** In een viervlak kruisen de overstaande ribben elkaar loodrecht. Bewijs dat $h(\cot a + \cot b + \cot c) =$

$$2R(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos A \cos C)$$

a, b en c zijn de standhoeken op de ribben van het zijvlak ABC,

A, B en C zijn de hoeken van $\triangle$ ABC,

h is de hoogte op ABC,

R is de straal van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC.

32. Van vierhoek ABCD is $AB = a$, $BC = b$ en $CD = c$. Bewijs de betrekking: $a \sin A - b \sin (A + B) - c \sin D = 0$.

Als $a = 10$, $b = 8$, $c = 6$, $\angle B = 60°$, $\angle D = 36°$, bereken dan met behulp van deze betrekking $\angle A$.

33. Van $\triangle$ ABC is gegeven $\angle A$. De bisectrix van $\angle B$ snijdt AC in D. Als nu $BI = p$ en $DI = t$, geef dan een betrekking tusschen B, p, t en A.

Leid uit deze betrekking een meetkundige constructie af en construeer den driehoek.

Bespreek de mogelijkheid der constructie.

(I is het middelpunt van den ingeschreven cirkel van $\triangle$ ABC).

1918. **34.** Als $p \sin (x + a) + t \sin (x + b) = A \sin (x + y)$ voor alle waarden van x, druk dan A en y uit in p, t, a en b.

35. Gegeven:

viervlak ABCD; $\triangle$ ABC = $\triangle$ BCD, $\triangle$ ADC = $\triangle$ ABD,

de hoek tusschen ABC en ADC is a, die

„ ABC en ABD is b, „

„ BCD en ADC is c, „

„ BCD en ABD is d.

Bewijs nu: $\cos a + \cos b = \cos c + \cos d$.

36. Van $\triangle$ ABC is de zijde $BC = 82{,}92$,

$\angle ABC = 73° 10' 24''$, $\angle ACB = 51° 37' 20''$.

Bereken de lengte van de lijn, die het middelpunt van den omgeschreven cirkel verbindt met het middelpunt van den aangeschreven cirkel, rakend aan de zijde BC.

1919. **37.** De tangenten der hoeken van $\triangle$ ABC vormen een rekenkundige reeks. ($\angle$ A is de grootste, $\angle$ C is de kleinste hoek). De hoogtelijn uit A staat tot die uit C als $\sqrt{5} : 3$. Bereken de hoeken van $\triangle$ ABC.

38. Van hoek φ ligt 't hoekpunt in vlak V, het eene been van $\angle \varphi$ maakt een $\angle \alpha$, het andere been maakt een $\angle \beta$ met

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

V. Leid een formule af voor de grootte x der projectie van $\angle \varphi$ op V, en maak deze geschikt voor logarithmische berekening.

N.B. De beenen van $\angle \varphi$ liggen aan denzelfden kant van V.

39. In een omwentelingskegel is een bol beschreven. Druk de verhouding der inhouden van bol en kegel uit in den halven tophoek α van den kegel. Voor welke waarde van α is die verhouding zoo groot mogelijk?

1920. 40. Los x en y op uit:

$x + y = 2a$ en $\cos x + \cos y + \cos a = \sin x + \sin y + \sin a$.

41. Van vierhoek ABCD is gegeven: zijde AB = 2 cM, zijde AD = 6 cM, $\angle$ A = 120°, $\angle$ C = 30°. De diagonaal AC wordt door de diagonaal DB in twee stukken AE en EC verdeeld, welke zich verhouden als 3 : 5. Bereken de hoeken B en D.

42. In en om een bol met straal R zijn twee gelijkvormige rechte cirkelvormige kegels beschreven. Het ronde oppervlak van het grootste der beide bolsegmenten, waarin de bol verdeeld wordt door het grondvlak van den kleinsten kegel, is middelevenredig tusschen de ronde oppervlakken van beide kegels. Bereken den tophoek van beide kegels.

Algemeene herhaling.

1. Bewijs: $\sec a + \operatorname{cosec} a \operatorname{tg}^3 a (1 + \operatorname{cosec}^2 a) = 2 \sec^3 a$.

§101. 2. Herleid: $\cos(A + B - C) + \cos(A - B + C) + \cos(-A + B + C) + \cos(A + B + C)$.

3. Bewijs: a) $\dfrac{\sin a + \sin 2a}{1 + \cos a + \cos 2a} = \operatorname{tg} a$;

b) $2\dfrac{1 + \sin a}{1 + \cos a} = (1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a)^2$.

4. Bewijs de gelijkheden:

a) $\dfrac{\cos na - \cos(n+2)a}{\sin(n+2)a - \sin na} = \operatorname{tg}(n+1)a$;

b) $2\dfrac{\cot(n-2)a \cot na + 1}{\cot(n-2)a - \cot na} = \cot a - \operatorname{tg} a$.

5. In een driehoek heeft men:

a) $R(\sin A + \sin B + \sin C) = s$;

b) $4R^2(\cos A + \cos B \cos C) = bc$. Bewijs beide.

6. Als O het middelpunt is van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC en AO ontmoet BC in D, dan is DO cos (B — C) = AO cos A. Bewijs.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

7. In een cirkelsector met hoek α is een cirkel beschreven, die de beide stralen en den boog raakt. Bereken α, als de koorde driemaal de straal van den ingeschreven cirkel is.

8. Voor welk kwadrant is $2\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{1 - \sin A} + \sqrt{1+\sin A}$?
In welk heeft men $2\cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{1 - \sin A} - \sqrt{1+\sin A}$?
en in welk kwadrant $2\cos \tfrac{1}{2}A = -\sqrt{1 - \sin A} - \sqrt{1+\sin A}$?

9. Bewijs, dat voor de hoeken van $\triangle$ ABC geldt:

a) $\dfrac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B$;

b) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4\cos A \cos B \cos C + 1 = 0$.

10. Bereken x uit de vergelijking:

$$\frac{7{,}8261 \sin 131°14'20'' \operatorname{cosec} 112°3'40''}{x^2} + \operatorname{tg} 308° = 0.$$

11. Bereken de scherpe hoeken van een rechthoekigen driehoek, waarvan de rechthoekszijden zijn 1 M en 2 cM; hetzelfde, als de schuine zijde en kortste rechthoekszijde zijn 1 M en 2 cM.

12. Bereken den tangens van $\operatorname{bgtg} {}^1/_5 + \operatorname{bgtg} {}^2/_3$.

13. Bereken de onbekende elementen van een driehoek, waarvan gegeven zijn: $a = 2597{,}88$, $b = 3084{,}33$ en $\angle A = 56°12'45''$.
Bereken ook de oppervlakte en den straal van den ingeschreven cirkel.

14. Bewijs de gelijkheden:

a) $1 + \operatorname{tg}^6 a = \sec^4 a (\sec^2 a - 3 \sin^2 a)$;

b) $1 + \cos^4 a \operatorname{cosec}^2 a + \sin^4 a \sec^2 \alpha = \cot^2 a + \operatorname{tg}^2 a$;

c) $\dfrac{1 - \sin a \cos a}{\cos a (\sec a - \operatorname{cosec} a)} \times \dfrac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\sin^3 a + \cos^3 a} = \sin a$.

15. Bewijs, dat men in $\triangle$ ABC de volgende betrekkingen heeft:
$a\cos^2 \tfrac{1}{2}B + b\cos^2 \tfrac{1}{2}A = b\cos^2 \tfrac{1}{2}C + c\cos^2 \tfrac{1}{2}B = c\cos^2 \tfrac{1}{2}A + a\cos^2 \tfrac{1}{2}C$.

16. Als $\sin (A - B) = {}^1/_6$ en $3\operatorname{tg} A = 5\operatorname{tg} B$, bereken dan $\sin (A+B)$.

17. Hoeveel is $a\cos \left(\operatorname{bg} \sin \dfrac{b}{a}\right)$?

18. Een schip stoomt precies N.W.; er komen twee eilanden in zicht, het eene in het W.N.W., het andere in het Noorden; na 16 KM gevaren te hebben, ligt het eerste in het Z.W., het tweede in het N.O. Bereken den afstand der eilanden.

19. Bewijs: *a)* $\operatorname{bgtg} 2 + \operatorname{bgtg} 3 = {}^3/_4 \pi$;
b) $\operatorname{bgtg} {}^1/_3 - \operatorname{bgtg} {}^1/_4 = \operatorname{bgtg} {}^1/_{13}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

20. Bereken $\cos^2 18° + \cos^2 54°$ zonder de logarithmentafel te gebruiken.

21. Welke waarden van x voldoen aan de vergelijking:

$$12\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x = 1\ ?$$

22. Gegeven is van $\triangle$ ABC het oppervlak $= 80$, $\angle A = 52°18'10''$, $\angle B = 58°23'30''$. Eene rechte lijn snijdt de zijde AC in punt D, de zijde CB in punt E, en het verlengde van de basis AB in punt F. Deze rechte lijn verdeelt $\triangle$ ABC in twee even groote deelen, terwijl $\angle BFE = 22°12'$. Bereken de lijnen CD en CE.

23. Bereken alle waarden van x tusschen 0° en 360°, die voldoen aan de vergelijking: $\cot x = \dfrac{120{,}55 \cos 130°5'12''}{73{,}22 \sec 70°20'30'' \operatorname{tg}^2 218°}$.

24. Voor de hoeken van een driehoek ABC geldt:

$$\frac{\cos A \cos C + \cos B}{\cos B \cos C + \cos A} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

25. In een kustplaats A loopt het strand W.Z.W.—O.N.O; een schip vaart de haven van A uit pal naar het N.; na 3000 M te hebben gevaren, ziet men een punt B op de kust in het Z.Z.O.; bereken den afstand AB.

26. Vind x in: bg tg $\frac{1}{2}$ + bg tg $\frac{1}{4}$ — bg tg $\frac{11}{27}$ = bg tg$x$.

27. Bereken x en y uit:

$$\operatorname{Sec} x : \sec y = 2 : 7 \text{ en } x + y = 106°15'34''.$$

28. Bewijs. **a.** $\sin 2a + \sin 4a + \sin 6a - \sin 12a = 4\sin 3a \sin 4a \sin 5a$;

b. $\dfrac{\cot a + \cot 4a}{\cot 2a + \cot 3a} = 1 + \frac{1}{2}\sec 2a$;

c. $\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a$.

29. De straal van den ingeschreven cirkel van den voetpuntsdriehoek van $\triangle$ ABC verhoudt zich tot dien van $\triangle$ ABC als $\cos A \cos B \cos C$ tot $2\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C$. Bewijs.

30. Los op de vergelijkingen:

a. $\sin x + \cos 2x = 1$;

b. $2\cos x = 3 + 2\sec x$;

c. $\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = (1 - 2\sin x)^2$.

31. Bereken de verhoudingen van de cosinussen der hoeken van een driehoek, als de sinussen zich verhouden als 13 : 14 : 15.

32. Bereken: bg cot $\sqrt{3}$ — bg cot $(2 + \sqrt{3})$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

33. Van den vlakken vierhoek ABCD zijn de overstaande hoeken A en C elk = 90°. Verder is B = 54°12′18″, AB = 17,32 en BC = 20,084. Bereken BD.

34. De hoeken van een driehoek voldoen aan de betrekking: $\frac{\cos C - \cos B}{\sin B - \sin C} = \cot \frac{1}{2}A$. Bewijs.

35. De zijden van een driehoek zijn: AB = 10500 M, BC = 12159 M en CA = 12291 M; uit P binnen den driehoek ziet men AB onder een hoek van 121°10′ en BC onder een hoek van 100°32′. Bereken de afstanden PA, PB en PC.

36. Bereken: bg sin $\frac{4}{5}$ + 2bg tg $\frac{1}{3}$.

37. Bewijs: $\sin \frac{3}{16}\pi + \sin \frac{7}{16}\pi + \sin \frac{11}{16}\pi + \sin \frac{15}{16}\pi = 4\cos \frac{1}{4}\pi \cos \frac{1}{8}\pi \cos \frac{1}{16}\pi$.

38. Los op: **a.** $11\cos x + 6\sin^2 x = 10$;

b. $\operatorname{tg}(45° + x) = 1 + \operatorname{tg} x$;

c. $\sin 2x + \sin \frac{1}{6}\pi = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$.

39. Bereken de waarde van x uit:

a) $\operatorname{bg\,tg} \sqrt{x+1} = 2\operatorname{bg\,tg} \frac{1}{\sqrt{x+1}}$;

b) $\operatorname{bg\,cot} x + \operatorname{bg\,cot}(x-1) = \frac{1}{4}\pi$.

40. In een driehoek, waarin $2a = b + c$, heeft men: $\operatorname{tg} \frac{1}{2}B \operatorname{tg} \frac{1}{2}C = \frac{1}{3}$. Bewijs.

41. De stukken, waarin de basis van een vlakken driehoek verdeeld wordt door de bisectrice van den tophoek, zijn 10,66 en 12,22; het verschil der basishoeken bedraagt 6°55′6″. Bereken het oppervlak.

42. Bepaal beide factoren, als gegeven is het product $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x = -\frac{2}{5}$.

43. Los op de vergelijking: $m\operatorname{tg}^4 x - 2(m-1)\operatorname{tg}^2 x + m - 2 = 0$ en bespreek vooral de uitkomst omtrent bestaanbaarheid.

44. Een driehoek heeft tot hoeken A, B en C; een andere 90° − ½A, 90° − ½B, 90° − ½C, terwijl de zijden over de eerstgenoemde hoeken (A en 90° − ½A) gelijk zijn.

Bewijs, dat de verhouding der oppervlakken is:

$$2\sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C : \sin \tfrac{1}{2}A.$$

45. Bewijs: $8\sin^4 a = \cos 4a - 4\cos 2a + 3$ en bereken dan:

$$\sin^4 a + \sin^4 2a + \sin^4 3a + \sin^4 4a.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

46. Bereken x uit de vergelijking:

$$\frac{41{,}256\,\mathrm{tg}\,200°20'20''}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{\sin 80°}}{(0{,}7533)^{-2}}.$$

47. Bewijs, dat

$$\mathrm{bg\,tg}\,\frac{x\cos a}{1 - x\sin a} - \mathrm{bg\,tg}\,\frac{x - \sin a}{\cos a} = a.$$

48. Als $2\cos a = x + \frac{1}{x}$, dan is $2\cos^3 a = x^3 + \frac{1}{x^3}$. Bewijs.

49. Los op door invoering van een hulphoek:

$\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,x + \sec\beta\cot x = 14$, als $\alpha = 71°34'$ en $\beta = 78°27'47''$.

50. Van een trapezium zijn gegeven de diagonalen 33 cM en 57 cM; de oppervlakte is 732 cM en de langste evenwijdige zijde is 61 cM. Bereken de drie andere zijden en de hoeken aan de basis.

51. Druk de waarde van $\sin(\alpha + \beta)$ uit in m en n, als $\cos\alpha - \cos\beta = m$ en $\sin\alpha - \sin\beta = n$.

52. Bereken x uit:

$$\frac{37{,}298\,\sin^3 101°20'12''}{\sqrt[3]{x}} = \frac{101{,}78\,\cos^{11/2}320°14'}{(0{,}0092)^{1/3}\,\mathrm{tg}^{1/3}\,145°}.$$

53. Bereken x uit: $\mathrm{bg\,tg}\,x + \mathrm{bg\,tg}\,2x = \mathrm{bg\,tg}\,{}^3/_5\sqrt{3}$.

Geg. is: $2x^2 < 1$.

54. Welke hoeken tusschen 0° en 360° voldoen aan de vergelijking:

$\mathrm{tg}^3 x\cot 109°14' = 129{,}62\sin 107°19'40''\,\mathrm{cosec}\,119°12'12''$?

55. Van vierhoek ABCD zijn gegeven: AB = 300 M; $\angle$ BAD = 58°32', $\angle$ CAD = 37°19', $\angle$ ABD = 53°40' en $\angle$ DBC = 45°. Bereken de zijde CD.

56. E is het midden van de hoogtelijn AD van $\triangle$ ABC en F is het midden van BC. Bewijs, dat $\cot\angle EFC = \cot B - \cot C$.

57. In een plaats A ziet men een heuvel in het O.N.O. onder een hoek van 11°15'. In een plaats B, precies Noordelijk van A, ziet men den heuvel in het Oosten; bereken onder welken hoek.

58. In elken driehoek is $\frac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B} = \frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$. Bewijs.

59. Los op: **a)** $\sin x\,\mathrm{tg}\,x + 2\cos x = m$;

b) $\sin 3x = m\sin x$.

Denk vooral aan de discussie.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

60. In een koordenvierhoek is $\text{tg } \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$. Bewijs.

61. Hoe „lost men een ingeschreven vierhoek op", als gegeven zijn:

($AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ en $DA = d$)

a. de zijden a, b en c en hoek B;

b. drie zijden en de hoek der diagonalen;

c. twee overstaande zijden en de diagonalen.

62. Bereken de gon. verhoudingen van:

$$1)\ \frac{\pi}{8};\ 2)\ \frac{\pi}{16};\ 3)\ \frac{\pi}{15};\ 4)\ \frac{4\pi}{15}.$$

63. Bewijs: $\text{bgtg } \frac{1}{2p-1} - \text{bgtg } \frac{1}{2p+1} = \text{bgtg } \frac{1}{2p^2}$.

64. Ontbind in factoren:

a) $\sin a + \sin 3a + \sin 9a - \sin 5a$;

b) $\sin^2 a (\sin b - \sin c) + \sin^2 b (\sin c - \sin a) + \sin^2 c (\sin a - \sin b)$.

65. Door invoering van een hulphoek te berekenen:

$x = \sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$, als $\alpha = 63°14'20''$ en $\beta = 109°11'40''$.

66. Een onderzeeër ligt W.Z.W. van een haven op 16 KM afstand; een stoomschip verlaat de haven en stuurt Z.O.; het schip loopt 13 KM per uur. Twee uur na het vertrek wordt het door den onderzeeër getorpedeerd. Welke snelheid had deze, als men rekent, dat hij in een rechte lijn vaart?

67. De vergelijking $x^3 - 2x + 1 = 0$ heeft voor wortel $\sqrt{2} \cdot \sin 45°$; bereken de beide andere wortels, ook in sinussen uitgedrukt.

68. Staande op een horizontaal vlak, zie ik een heuvel precies in het N. onder een hoek α; ga ik a M oostwaarts, dan zie ik den heuvel onder een hoek β. Bewijs, dat de hoogte van den heuvel is:

$$\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta)}}.$$

69. Bewijs, dat men voor alle waarden van x heeft:

a. $\sin x + \sin(x + {}^2/_3\pi) + \sin(x + {}^4/_3\pi) = 0$;

b. $\cos x + \cos(x + {}^2/_3\pi) + \cos(x + {}^4/_3\pi) = 0$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

70. Bereken: **a.** $(\cos 3a + 3\cos a)^{2/3} + (3\sin a - \sin 3a)^{2/3}$;

b. $\dfrac{\sin 3a + \cos 3a}{\cos a - \sin a} - 2\sin 2a.$

71. Bereken de waarden voor x, die voldoen aan de verg.:

$$\operatorname{tg}(271°12' - 4x) = \frac{\sin 1830° \cot 2^1/_3\pi \operatorname{tg}(-405°) \cot(-615°)}{\cot 1130° \operatorname{cosec} 1872° \operatorname{tg} 350° \sec 1^5/_8\pi}.$$

72. Als M, M_a, M_b en M_c de middelpunten zijn van de in- en aangeschreven cirkels van een driehoek, dan is $AM = r\operatorname{cosec} \frac{1}{2}A$; $AM_a = r_a \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A$; $M_aM = a \sec \frac{1}{2}A$ en $M_bM_c = a \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A$. Bewijs.

73. Bereken: $\operatorname{bgtg} \dfrac{2(n+1)}{n(n+2)} + 2 \operatorname{bgtg}(n+1)$, als n pos. is.

74. Een der hoeken van een ruit, die beschreven is om een cirkel met straal 48, is 40°34′35″; bereken de oppervlakte van die ruit.

75. Van een driehoek zijn gegeven a, b en $\angle$ A, terwijl twee driehoeken aan het gegeven voldoen; bereken de som van de oppervlakken der beide driehoeken.

76. Bereken: **a.** $\sin x + \sin\left(x + \dfrac{360°}{n}\right) + \sin\left(x + \dfrac{720°}{n}\right) + \ldots + \sin\left(x + \dfrac{(n-1)\,360°}{n}\right)$;

b. $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{360°}{n}\right) + \cos\left(x + \dfrac{720°}{n}\right) + \ldots + \cos\left(x + \dfrac{(n-1)\,360°}{n}\right)$.

77. Uit twee punten A en B op het horizontale vlak ziet men een rots opv. onder hoeken bg tg $\frac{3}{4}$ en bg tg $^5/_{12}$; als de richtingen uit A en B naar de rots een hoek van 30° met elkaar maken en de afstand AB 240 M is, bereken dan de hoogte.

78. De hoeken x_1 en x_2 voldoen aan de vergelijking: $a\sin x + b\cos x = c$. Bewijs, dat $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \dfrac{a}{b}$.

79. Bereken de waarden van x, die voldoen aan de vergelijking: $b\cot 4x = a + \sqrt{a^2 + b^2}$, als $a = 41423{,}9$ en $b = 37627{,}5$.

80. Bewijs meetkundig den tangensregel.

($a > b$; cirkel met C als middelpunt a om op b en op het verlengde van AC; men kan ook de hoeken $\frac{1}{2}(A-B)$ en $\frac{1}{2}(A+B)$ in de figuur vinden).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

81. Om een zevenhoek in een cirkel te beschrijven, zet men wel 7 maal af de halve zijde van den ingeschreven regelmatigen driehoek. Welke fout maakt men?

82. Welke betrekking moet er tusschen m en n bestaan, opdat

$$\operatorname{tg} x - \sin x = m \text{ en } \operatorname{tg} x + \sin x = n?$$

83. Los op de vergelijkingen:

a. $\sec x \operatorname{cosec} x - \cot x = 2 - \sqrt{3}$;

b. $\sin 2x + \sin x = \cos 2x + \cos x$.

84. Als men de vergelijking $a\sin x + b\cos x = c$ oplost als vierkantsverg. in sin x of in cos x, kan men vinden:

a. $\sin x_1 + \sin x_2$; *b.* $\sin x_1 \sin x_2$; *c.* $\cos x_1 + \cos x_2$; *d.* $\cos x_1 \cos x_2$. Als men ze oplost als v.k.v. in tg $\frac{1}{2}x$, dan vindt men *e.* tg $\frac{1}{2}x_1 +$ tg $\frac{1}{2}x_2$ en *f.* tg $\frac{1}{2}x_1$ tg $\frac{1}{2}x_2$.

85. Bereken: $\sin 2a + \sin 5a + \sin 8a + \ldots\ldots + \sin(3n-1)a$, als $a = 34°12'19''$ en $n = 17$.

86. In een driehoek heeft men $a^4 + b^4 = c^4$. Bewijs, dat in dezen driehoek $\cot A + \cot B + \cot 2C = 0$.

87. Bereken de oppervlakte van de Noordelijke gematigde luchtstreek; keerkring 23°27'22" N.B.; omtrek van de aarde 40070 KM.

88. De zijden van een driehoek vormen een rekenkundige reeks, terwijl de grootste hoek gelijk is aan driemaal den kleinsten. Bereken den kleinsten hoek.

89. Los goniometrisch op de vergelijking:

$$142{,}96\,x^2 - 6709\,x - 9043{,}2 = 0.$$

90. Het punt P verdeelt de zijde AB van een $\triangle$ ABC zóó, dat AP : PB $= m : n$. Noemen we de hoeken ACP, PCB en CPB opv. α_1, α_2 en α_3, dan hebben we $(m + n)\cot\alpha_3 = m\cot\alpha_1 - n\cot\alpha_2$. Bewijs.

91. Geef de goniometrische oplossing van de vergelijkingen:

a. $1{,}0051x^2 + 4253{,}7x - 3692{,}5 = 0$;

b. $1{,}0069x^2 - 35{,}2931x + 190{,}464 = 0$.

92. Op drie manieren op te lossen:
$(2m-1)\cos x + (m+2)\sin x = 2m + 1$ en bij alle drie een volledige discussie uitwerken omtrent bestaanbaarheid en bruikbaarheid der wortels.

93. De tangenten der hoeken van een driehoek verhouden zich als $m : n : p$; hoe verhouden zich de zijden? De berekening uit te voeren voor $m : n : p = 11 : 14 : 18$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

94. Los op de vergelijkingen:

a. $\cos x + 5\sin x\cos x + \sin x = -1$;

b. $3\frac{\sin \frac{1}{2}(a-x)}{\sec \frac{1}{2}(a+x)} + \frac{\sin \frac{1}{2}(a+3x)}{\sec \frac{1}{2}(a-3x)} = 0.$

95. Bereken de hoeken tusschen 0° en 180°, die voldoen aan de vergelijking: $x = \frac{1}{2}$ bg tg $\frac{a\sin\beta - b\sin\alpha}{a\sin\beta + b\sin\alpha}$, als $a = 4627{,}55$, $b = 3944{,}68$, $\alpha = 51°57'44''$ en $\beta = 63°18'27''$.

96. Bewijs, dat $\operatorname{cosec}\alpha = \cot\frac{1}{2}\alpha - \cot\alpha$; bepaal daarna de de som van n termen van de reeks:

$$\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a} + \frac{1}{\sin 8a} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^{n-1}a}.$$

97. Bereken: $\cos 2a - \cos 4a + \cos 6a - \cos 8a + \ldots - \cos 40a$, als $a = 149°4'10''$.

98. Van een driehoek zijn gegeven: de basis 16,25 cM, de oppervlakte 205,41 cM², terwijl de hoeken een rekenkundige reeks vormen. Bereken de overige elementen.

99. Los op: $\frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x} = b$; denk vooral aan de discussie omtrent bestaanbaarheid en bruikbaarheid der wortels.

100. Onderzoek voor welke waarden van a de volgende verg. oplossingen toelaat:

$$\sin^2 x + 2\cos x(\sin x - \cos x) = a.$$

Vind de wortels voor $a = 0{,}45$. (Zie § 85, V).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Lembaga Kebudajaan Indonesia
Bataviaasch Genootschap

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

34°

Min.	log sin	D. 100″	log tg	D.C. 100″	log cot	log cos	D. 100″		
0	9,74756		9,82899		10,17101	9,91857		60	
		32		45			13		47
1	9,74775		9,82926		10,17074	9,91849		59	10 4.7
		32		45			15		20 9.4
2	9,74794		9,82953		10,17047	9,91840		58	30 14.1
		30		45			13		40 18.8
3	9,74812		9,82980		10,17020	9,91832		57	50 23.5
		32		47			15		60 28.2
4	9,74831		9,83008		10,16992	9,91823		56	70 32.9
		32		45			13		80 37.6
5	9,74850		9,83035		10,16965	9,91815		55	90 42.3
		30		45			15		45
6	9,74868		9,83062		10,16938	9,91806		54	10 4.5
		32		45			13		20 9.0
7	9,74887		9,83089		10,16911	9,91798		53	30 13.5
		32		47			15		40 18.0
8	9,74906		9,83117		10,16883	9,91789		52	50 22.5
		30		45			13		60 27.0
9	9,74924		9,83144		10,16856	9,91781		51	70 31.5
		32		45			15		80 36.0
10	9,74943		9,83171		10,16829	9,91772		50	90 40.5
		30		45			15		32
11	9,74961		9,83198		10,16802	9,91763		49	10 3.2
		32		45			13		20 6.4
12	9,74980		9,83225		10,16775	9,91755		48	30 9.6
		32		45			15		40 12.8
13	9,74999		9,83252		10,16748	9,91746		47	50 16.0
		30		47			13		60 19.2
14	9,75017		9,83280		10,16720	9,91738		46	70 22.4
		32		45			15		80 25.6
15	9,75036		9,83307		10,16693	9,91729		45	90 28.8
		30		45			15		30
16	9,75054		9,83334		10,16666	9,91720		44	10 3.0
		32		45			13		20 6.0
17	9,75073		9,83361		10,16639	9,91712		43	30 9.0
		30		45			15		40 12.0
18	9,75091		9,83388		10,16612	9,91703		42	50 15.0
		32		45			13		60 18.0
19	9,75110		9,83415		10,16585	9,91695		41	70 21.0
		30		45			15		80 24.0
20	9,75128		9,83442		10,16558	9,91686		40	90 27.0
		32		47			15		15
21	9,75147		9,83470		10,16530	9,91677		39	10 1.5
		30		45			13		20 3.0
22	9,75165		9,83497		10,16503	9,91669		38	30 4.5
		32		45			15		40 6.0
23	9,75184		9,83524		10,16476	9,91660		37	50 7.5
		30		45			15		60 9.0
24	9,75202		9,83551		10,16449	9,91651		36	70 10.5
		32		45			13		80 12.0
25	9,75221		9,83578		10,16422	9,91643		35	90 13.5
		30		45			15		13
26	9,75239		9,83605		10,16395	9,91634		34	10 1.3
		32		45			15		20 2.6
27	9,75258		9,83632		10,16368	9,91625		33	30 3.9
		30		45			13		40 5.2
28	9,75276		9,83659		10,16341	9,91617		32	50 6.5
		30		45			15		60 7.8
29	9,75294		9,83686		10,16314	9,91608		31	70 9.1
		32		45			15		80 10.4
30	9,75313		9,83713		10,16287	9,91599		30	90 11.7
	log cos	D. 100″	log cot	D.C. 100″	log tg	log sin	D. 100″	Min.	

55°

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUST