J. C. G. NOTTROT

LEERBOEK DER NOMOGRAFIE



Lemb. Kebudaan. Ind.
Kon. Bat. Gen.
V-41.

...RDHOFF N.V. - GRONINGEN

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

BD 33-2315

V-41

LEERBOEK DER NOMOGRAFIE

DE CONSTRUCTIE VAN SCHAALNOMOGRAMMEN VOOR BETREKKINGEN MET DRIE VERANDERLIJKEN

DOOR

J. C. G. NOTTROT
KAPITEIN DER GENIE

MET 96 FIGUREN EN 128 OPGAVEN





P. NOORDHOFF (N.V.) — 1930 — GRONINGEN

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.
Tanggal : 20-6-2010
Nomor Induk : 143/PA-Museum/10
0010-36065960
0509113030
Museum Pusat
PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

VOORWOORD.

De Nomografie is een der jongste telgen der Toegepaste Wiskunde. Zij is nog in haar eersten groei, doch streeft een hulpwetenschap te worden voor alle gebieden van menschelijke kennis, in 't bijzonder voor de technische vakken en voor het baanbrekende onderzoekingswerk in de laboratoria. Haar taak is het, de — voor elk bijzonder geval — doelmatigste voorstellingswijze af te leiden voor elke daarvoor in aanmerking komende betrekking, hetzij deze in oorsprong theoretisch werd afgeleid, werd gemeten of grafisch werd opgeteekend (formules, tabellen of grafieken).

Voor het grafisch voorstellen van formules komen daartoe vooral in aanmerking de, voor het eerst in 1884, door Maurice d'Ocagne geconstrueerde schaalnomogrammen (nomogrammes à points alignés). Meestal geven deze de eenvoudigste voorstelling van de betrekking.

Het gebruik van schaalnomogrammen verdient daarom aanbeveling:

1°. Als er bij de toepassing van een betrekking geen tijd beschikbaar is, om die betrekking met behulp van de formule(s) te berekenen;
2°. Bij het controleeren van een met formules uitgevoerde berekening;
3°. Wanneer een formule in een onrustige omgeving (bij montage, in de fabriek, op een bouwwerk) moet worden toegepast;
4°. Wanneer eenzelfde betrekking herhaaldelijk wordt gebruikt;
5°. Wanneer fabrieksarbeiders, uitvoerders of lagere beambten een formule moeten gebruiken, ook al zou de berekening daarmede zeer eenvoudig wezen;
6°. Indien er verlangd wordt, dat de voorstelling van de betrekking, een snel overzicht over het verloop daarvan, toelaat.

Het is daarom gewenscht deze schaalnomogrammen, al naar het doel dat ermede beoogd wordt, op te nemen in:

a. technische leer- en handboeken, c.q. ter aanvulling van de voorstelling, van — reeds op andere wijze weergegeven — betrekkingen;

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

b. technische voorschriften voor het lagere personeel;
c. vademecums;
d. losbladige mappen, waarbij dus de gebruiker zelf de keuze en volgorde der daarin bijeen te voegen schaalnomogrammen kan bepalen.

In de ons omringende landen verschenen in het laatste decennium tal van werken over Nomografie. [1]) Ook ten onzent ontstond meer en meer de behoefte aan een Nederlandsch leerboek over dit onderwerp.

Ik hoop daarom met het schrijven van het vóór U liggende werk, er in geslaagd te zijn een leerboek samen te stellen, dat tevens een handboek zal kunnen wezen voor *de constructie van schaalnomogrammen voor betrekkingen met drie veranderlijken.*

Ik heb mij om verschillende redenen, tot dit — wel is waar zeer belangrijke — gedeelte van de Nomografie beperkt. [2]).

Door den oorspronkelijken opzet verschilt het werk in velerlei opzichten van de bekendste buitenlandsche werken over Nomografie (d'Ocagne, Soreau, Schwerdt, Werkmeister), o.a. vestig ik de aandacht op den systematischen opbouw van de taak der Nomografie en van de eenvoudigste grafische voorstellingswijzen; op het daarbij gegeven vergelijkende voorbeeld; op de verkorte logarithmische harp, de overzichtelijke indeeling van de functievergelijkingen en nomogramvormen; op de formules voor projectieve verbetering van nomogrammen en de projectieve constructie van het kegelsnede-nomogram. Voorts op de scheiding der veranderlijken in de algemeene functievergelijking van de 3e orde door toepassing van de *stelling van Menelaos*, en op de voorstelling van grensbetrekkingen, met het daarbij op uitvoerige wijze behandelde voorbeeld van d'Ocagne over het grondverzet bij den aanleg van wegen.

Menigmaal ontbraken Nederlandsche benamingen voor de ingevoerde begrippen en was het mijn taak nieuwe te scheppen. Ik hoop daarbij het juiste woord op de juiste plaats te hebben gebezigd.

Van den lezer wordt slechts de kennis der lagere Wiskunde

---

[1]) Zie het Literatuuroverzicht op bladz. 257.

[2]) De volgende onderwerpen blijven o.a. nog ter bespreking over: De grafische voorstelling van betrekkingen met onvolledige veranderlijken; de opsporing van empirische formules; het gebruik van coördinatenpapier; de constructie van nomogrammen voor betrekkingen met méér dan drie veranderlijken en de constructie van rekenlinialen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

en van de beginselen der Analytische Meetkunde geëischt, voor eenige hoofdstukken is voorts kennis van de Projectieve Meetkunde [1]) noodig.

De enkele gedeelten waar determinanten en differentiaal- en integraalrekening worden toegepast, kunnen — zonder dat dit stoort — desgewenscht overgeslagen worden.

Ik wil dit voorwoord besluiten met mijn hartelijken dank te betuigen aan de hoogleeraren van de Technische Hoogeschool, die mij met hun raad en belangstelling ter zijde stonden, in het bijzonder aan Professor Ir. D. Dresden, die mij den moed gaf de taak van het schrijven van dit werk te aanvaarden en aan Professor Dr. H. Bremekamp voor diens raadgevingen na inzage van het manuscript en zijn steun bij het verwezenlijken van deze uitgave.

Voor opmerkingen, welke tot verbetering van het werk kunnen bijdragen, houd ik mij aanbevolen; in het bijzonder zal ik prijs stellen op het vernemen van practische voorbeelden van betrekkingen der 4e, 5e of 6e orde.

Ten slotte breng ik dank aan den uitgever van het boek, voor de zorgen daaraan besteed, waardoor het, zeker in dit opzicht, een vergelijking met de beste buitenlandsche werken over Nomografie kan doorstaan.

Bilthoven, Augustus 1930 J. C. G. NOTTROT.

[1]) Zie hiervoor het „Beknopt leerboek der Projectieve Meetkunde" door Dr. Hk. de Vries. Uitgave P. Noordhoff—Groningen 1923.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

INHOUD.

Bladz.

DEEL I. **INLEIDING.** 1

Hoofdstuk 1. **Historische ontwikkeling.** 1

Descartes, Analytische Meetkunde; Gunther, rekenliniaal; Buache, hoogtelijnen; Poncelet, Projectieve Meetkunde; Steiner, Dualiteitsbeginsel; Lalanne, Anamorphose; Chasles, Maurice d'Ocagne, **Nomografie,** Soreau.

Hoofdstuk 2. **Taak en wezen der Nomografie.** . . 5

Voorstellingswijzen, Primaire — en Secundaire voorstellingswijzen, Overgangen tusschen de voorstellingswijzen; Volledige en onvolledige veranderlijken, Soortveranderlijken.

Hoofdstuk 3. **Elementen der grafische voorstellingswijzen.** 10

Bereik van een veranderlijke; Genummerd punt en genummerde lijn; Schaal en bundel.

Hoofdstuk 4. **De voorstelling van een betrekking tusschen twee veranderlijken.** 14

Waardenstel; Grondfiguur, Schalenstel en net; Raakkromme en snijkromme, Dubbelschaal.

Voorbeeld: $h = \frac{v^2}{2g}$.

Hoofdstuk 5. **De voorstelling van een betrekking tusschen drie veranderlijken.** 18

Bundel raakkrommen op een schalenstel; bundel snijkrommen op een net; drie schalen; drie bundels rechten.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

Voorbeeld: *Verlichting.* 18

Tabel I: *Overzicht der eenvoudigste grafische voorstellingswijzen* 19

Hoofdstuk 6. **Het schaalnomogram tegenover de andere grafische voorstellingswijzen.** 26

Het Formaat, De Constructie, De Afwerking, Tijd, Overzicht, De Aflezing, Het Gebruik, Conclusie.

DEEL II. **FUNCTIESCHALEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN.** 30

Hoofdstuk 7. **Veranderlijken, functies en functievergelijkingen.** 30

Absolute en relatieve bereik; Functie; Vergelijking of formule; Explicite en implicite functie; Vergelijking met gescheiden veranderlijken; Symmetrische betrekking; **Functievergelijking.**

Hoofdstuk 8. **Functieschalen.** 33

Oorsprong, Nulpunt, Kleinste en grootste functiewaarde, Functielengte of functiebereik; Keuze van den modulus

Voorbeeld: *Functieschaal voor* $\sqrt{z^3}$.

Gebruik van een interpolator.

Vergelijkende beschouwing van snijkromme en functieschaal.

Voorbeeld: *Gemiddeldegroei van jongens.* 36

Projectief verwante functieschalen, perspectieve ligging 39

Projectieve schaal 39

Macht-schalen 41

Logarithmische schaal 41

Bijzondere eigenschappen; Constructie; Logarithmische schaaleenheid; Logarithmische harp, Verkorte logarithmische harp.

Onderlinge vergelijking van enkele functieschalen 46

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

Hoofdstuk 9. **Dubbelschalen.** 49
Gebonden en vrije dubbelschalen. Constructie.
Voorbeelden: *7 dubbelschalen* 51

Hoofdstuk 10. **Indeeling van functievergelijkingen naar hunne Nomografische orde.** . . 55
Bijzondere of typische functievergelijkingen; **Scheiden van de veranderlijken**; Algemeene functievergelijking; Nomografische orde; Algemeene functievergelijking van een orde.
Tabel II: *Nomogramvormen en bijzondere en algemeene functievergelijkingen* . . . 56

Opgaven 1 tot en met 21 voor de constructie van dubbelschalen 59

DEEL III. **DE CONSTRUCTIE VAN SCHAALNOMOGRAMMEN VOOR BETREKKINGEN MET DRIE VERANDERLIJKEN.** 61

A.

Nomogrammen op een recht schalenstel. . . 61

Hoofdstuk 11. **Algemeene inleiding. Dualiteit van grafische voorstellingen.** 61
Indeeling van nomogramvormen; Dualiteit bij de grafische voorstelling van waarden, veranderlijken en betrekkingen.

Hoofdstuk 12. **Nomogrammen op een evenwijdig schalenstel.** 64
Type I: De derde schaal is een kromme schaal.
$f_1 g_3 + f_2 = f_3$ 64
Afleiding van de functievergelijking en de constructieformules; Constructie van $[z_3]$ door projectie; Verdere aanwijzingen voor de constructie.
Voorbeeld: *Tweede wet van Kepler. (Wet der perken)* 69

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

Type II. De derde schaal is een snijdende rechte schaal.

$$f_1 g_3 + f_2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 70$$

Functievergelijking; Constructieformules; Constructie van [z_3] door projectie; Verdere aanwijzingen voor de constructie.

Voorbeeld: *Samengesteldè interest* . . 73

Type III: De derde schaal is een evenwijdige rechte schaal.

$$f_1 + f_2 = f_3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 75$$

Functievergelijking; Constructieformules; Betrekking tusschen de drie moduli; Evenredigheidsteeken; Verdere aanwijzingen voor de constructie.

Voorbeeld: *Stroomsnelheid in kanalen.* . 78

Stelsel betrekkingen van Type III met twee gemeenschappelijke veranderlijken. Nomogrammen met meer dan drie evenwijdige schalen. 82

Afleiding van de constructieformules; Grafische bepaling van **m**; Verdere aanwijzingen voor de constructie.

Voorbeeld: *Berekening van cylindrische schroefveeren.* 85

Type Ia: De derde schaal ligt op een cirkelboog. 88

Afleiding van de contructieformules.

Voorbeeld: *Tijdsbepaling uit zonshoogte of schaduwlengte.* 90

Hoofdstuk 13. **Nomogrammen op een snijdend schalenstel.** 94

Type IV: De derde schaal is een kromme schaal $\frac{1}{f_1 g_3} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$. 94

Afleiding van de functievergelijking en de constructieformules; Constructie van [z_3] door projectie; Verdere aanwijzingen voor de constructie: 1°. [z_3] ligt tusschen [z_1] en [z_2], 2°. [z_3] is buitenschaal.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

Voorbeeld: *Vervanging van gewone, capacitieve en inductieve weerstanden, bij overgang van parallel- tot serieschakeling.* 97

Type V: De derde schaal is een snijdende schaal.

$$\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 101$$

Functievergelijking; Constructieformules; Betrekking tusschen de drie moduli en den hoek φ. Tweede nomogram met andere ligging van dezelfde schalen. Rechtstreeksche afleiding van de functievergelijking (V) met de stelling van Menelaos.

Voorbeeld: *Instellen zonder matglas.* . 103

Type VI: De derde schaal is een rechte schaal door den oorsprong O.

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 106$$

Functievergelijking; Constructieformules; Betrekking tusschen de drie moduli en den hoek φ.

1e Voorbeeld: *Moduli voor het nomogram met drie evenwijdige schalen.* 107

2e Voorbeeld: *Instellen zonder matglas* 108

Type IVa: De derde schaal ligt op een cirkelboog 109

Afleiding van de constructieformules.

Hoofdstuk 14. **Onderlinge herleiding van de behandelde functievergelijkingen.** 111

Tabel III. *Onderlinge herleiding van de bijzondere functievergelijkingen van de 3e orde.* 112

Voorbeeld: *Dikte van houten schotbalken.* 113

Hoofdstuk 15. **Verbetering van nomogrammen door projectieve vervorming van de schalen.** 114

Bewijs van de mogelijkheid van projectieve vervorming. Ruimtelijke perspectivische vervorming. Afleiding van de noodige formules.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

Tabel IV: *Verbetering van nomogrammen door projectieve vervorming van de schalen.* 119

Verlenging of verkorting der schaaldeelen bij projectieve vervorming. Projectieve verbetering van een nomogram op een evenwijdig schalenstel, wanneer een der evenwijdige schalen wél gunstig is, en dus zoo weinig mogelijk vervormd mag worden.

1e Voorbeeld: *Dikte van platen of balken van gewapend beton, bij in rekening gebracht eigen gewicht.* 123

2e Voorbeeld: *Bepaling der hoekcorrectie bij indirect gericht vuur.* 128

Projectief vervormde nomogrammen, waarbij de derde schaal op een cirkelboog ligt. 132

Afleiding van de constructieformules.

Voorbeeld: *Betrekking in den driehoek.* 133

Opgaven 22 tot en met 85 voor de constructie van nomogrammen van de 3e orde. 138

Nomogrammen met meer dan drie evenwijdige schalen. (Opgaven 79 tot en met 85) 146

Opgaven 86 tot en met 118 voor de constructie van nomogrammen van de 4_0^c orde. 147

Nomogrammen van de 4_0^c **orde** met cirkelboogvormige $[z_3]$. (Opgaven 100 tot en met 118) 150

B.

Nomogrammen op een gebogen schalenstel. 154

Hoofdstuk 16. **Algemeene inleiding.** 154

Gebruik van een recht hulpschalenstel; Indeeling van nomogramvormen.

Hoofdstuk 17. **Nomogrammen op een gebogen schalenstel met afzonderlijke dragers.** . . . 156

Type VII: De derde schaal is een kromme schaal.

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_2 - f_3}{g_2 - g_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 156$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

Afleiding van de functievergelijking; Constructieformules; Vereenvoudigde constructieformules; Snijdend hulpschalenstel.

Type VIII: De derde schaal is een rechte schaal.

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = f_3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 159$$

Functievergelijking; Constructieformules; Vereenvoudigde constructieformules; Herleiding tot een gunstiger vergelijking.

Hoofdstuk 18. **Nomogrammen op een gebogen schalenstel met een gemeenschappelijken drager van willekeurigen vorm.** 161

Type VII a: De derde schaal is een kromme schaal.

$$\frac{f_1 - f_2}{F(f_1) - F(f_2)} = \frac{f_2 - f_3}{F(f_2) - g_3}. \quad . \quad . \quad 161$$

Type VIII a: De derde schaal is een rechte schaal.

$$\frac{f_1 - f_2}{F(f_1) - F(f_2)} = f_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 161$$

Functievergelijkingen; Dubbelschaal $f_1 = f_2$ op den gemeenschappelijken drager; Goniometrische herleiding van type (III) tot type (VIII*a*); Constructieformules.

Voorbeeld: *Stroomsnelheid bij vrije uitstrooming door een rechthoekige opening* 163

Hoofdstuk 19. **Kegelsnede-nomogrammen. Type IX.**

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0. \quad . \quad . \quad 165$$

Functievergelijking. 165

Projectieve vorming van het kegelsnedenomogram 165

Afleiding van functievergelijking en constructieformules; Benoodigde gegevens; Symmetrie van de gegevens.

Cirkelnomogrammen. 171

Projectieve vorming van kegelsneden. . 173

Bijzondere voorstellingswijze met behulp van tangenslijnen; Bijzondere punten van een tangenslijn; Bijzondere combinaties van pun-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

ten; Vier verschillende gevallen voor de ligging van twee tangenslijnen ten opzichte van elkaar.
Voorbeeld: *Bepaling der afstandcorrectie bij direct gericht vuur* 177

Verplaatsing van den oorsprong. . . . 179
Voorbeeld: *Overgang van rechthoekige op trapeziumvormige doorsnede bij grondkeerende muren.* 180

Projectieve constructie van het kegelsnedenomogram met een evenwijdig hulpschalenstel 182
Cirkelnomogrammen 184
Voorbeeld: *Gemiddelde straal van een kanaal met taluds 1 : 1.* 184

Opgaven 119 tot en met 121 voor de constructie van nomogrammen van de 4e orde (kegelsnede-nomogrammen) 187

Opgaven 122 tot en met 128 voor de constructie van nomogrammen van de 5e orde, type VIIIa 188

Hoofdstuk 20. **Kegelsnede-nomogrammen met rechte $[z_3]$.** 189

Inleiding; Constructie van het kegelsnedenomogram met rechte $[z_3]$. Voordeelen van het kegelsnedenomogram met rechte $[z_3]$ ten opzichte van het nomogram met drie rechte schalen.
1e Voorbeeld: *Wanddikte van buizen, cylinders en ketels met inwendigen overdruk* 191
2e Voorbeeld: *Electrische trillingen* . . 193
3e Voorbeeld: *Parallelschakeling van weerstanden. Serieschakeling van capaciteiten. Lenzen-formule* 196

Nadere beschouwing van de projectieve eigenschappen van het kegelsnedenomogram met rechte $[z_3]$ 198
Bijzondere ligging van de rechte schaal. 198
Reciprokensom-drager, productdrager, somdrager; Regelmatige reciprokensomschaal,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

-productschaal en -somschaal; Bijzonder nomogram waarbij deze drie schalen geheel gelijk, en wel segmentair, zijn.

Voorbeeld: *Gemiddelden van a en b* . 202

Hoofdstuk 21. **Kubische nomogrammen.** 205

Theorie volgens Clark 205
Voorbeeld: $z_1z_2z_3 = 1$ 206

Andere methode voor de afleiding van constructieformules 207
Voorbeeld: *Verband tusschen toerental en omtreksnelheid* 209
Opmerking.
Voorbeeld: $x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -144$ 212

DEEL IV. **SCHEIDING DER VERANDERLIJKEN.** 214

Hoofdstuk 22. **Inleiding.** 214

Algemeene functievergelijking; Algemeene functievergelijking van een orde.

Hoofdstuk 23. **5e en 6e orde.**

Algemeene functievergelijking (a) . 215

Lineaire betrekkingen tusschen de twee functies van een of twee der veranderlijken. Gelijkluidende betrekkingen tusschen de twee functies van twee of drie veranderlijken.

Hoofdstuk 24. **4e orde.** 217

Algemeene functievergelijking (b) . . 217

Voorbeeld: *Overgang van rechthoekige op trapeziumvormige doorsnede bij grondkeerende muren* 218

Herleiding van een vergelijking type IX tot een nieuwe vergelijking van dat type; Directe methode van Soreau voor het afleiden van de functie $z_1 = \varphi(f_1)$; Voorbeeld.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

Algemeene functievergelijking (c) . . 220

Voorbeeld: *Herleiding van een vergelijking type VII tot type I of IV, wanneer in VII:*
$g_1 = a_1 f_1 + b_1$ *en* $g_2 = a_2 f_2 + b_2$ . . 222

Hoofdstuk 25. **3e orde.**

Algemeene functievergelijking (d) . . 224

1°. Scheiding van de veranderlijken met behulp van formules, verkregen door toepassing van de stelling van Menelaos 224

Tabel V: *Scheiding van de veranderlijken in* $B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0$,
waarin B_1, B_2 *en* $B_3 \neq 0$ 227

1e Voorbeeld: *Instellen zonder matglas* 228

2e Voorbeeld: *Herleiding van* $f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + (A f_3 + B) = 0$ *tot de typen II, III, V of VI* 230

3e Voorbeeld: *Herleiding van* $f_3 = \frac{a f_1 + b f_2}{c f_1 + d f_2}$ *tot type II* 231

2°. Scheiding van de veranderlijken met behulp van de algemeene functievergelijking (c) 232

Voorbeeld: *Instellen zonder matglas* . . 233

3°. Scheiding van de veranderlijken door differentieeren ten opzichte van f_1, f_2 en f_3 233

Voorbeeld: *Instellen zonder matglas* . . 235

DEEL V. **AANVULLENDE HOOFDSTUKKEN.** 237

Hoofdstuk 26. **Voorstelling van grensbetrekkingen door stop-, toegangs- en waarschuwingslijnen.** 237

Grensbetrekking; Stoplijn en toegangslijn; Waarschuwingslijn.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

1e Voorbeeld: *Berekening van ronde vurenhouten stutten* 239

2e Voorbeeld: *Grondverzet bij den aanleg van wegen* 241

Gebezigde notaties; Afleiding van de voor te stellen betrekkingen; Overzicht van de zes mogelijke gevallen, bepaling van de ligging der stop- en waarschuwingslijnen.

Hoofdstuk 27. **Nomogrammen met gebroken schalen.** 248

Scheidingswaarde; Gebroken schaal; Overzicht van nomogramvormen met één gebroken schaal op een evenwijdig schalenstel.

Voorbeeld: *Doorslaan van ijzeren constructies met brisante springstof* . . . 250

Hoofdstuk 28. **Benoodigde gegevens voor de constructie van een nomogram. Eenige opmerkingen en aanwijzingen.** 253

Benoodigde gegevens; Frequentiekromme; Normale en totale bereik; Verdeeling van voorkomende betrekkingen over de verschillende orden; Keuze der veranderlijken; Enkele aanwijzingen voor het teekenen van nomogrammen. Reproductie.

Literatuur 257

Gebruikte notaties en teekens 259

Grieksch alphabet 261

Systematisch overzicht van de voorbeelden en opgaven 262

Alphabetisch register 265

Logarithmische harp en verkorte logarithmische harp. (2de ex.) 272

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

DEEL I.

INLEIDING.

HOOFDSTUK 1.

Historische ontwikkeling.

§ 1. DESCARTES (1596—1650), de groote Fransche wijsgeer en wiskundige, vestigde zich, aangetrokken door de meerdere geestelijke vrijheid welke hij hier kon genieten, in 1629 in Holland en gaf er in 1637 te Leiden zijn *„Géométrie"* uit.

In dit werk paste hij, zij het op nog zeer verscholen wijze, bij de studie der klassieke kromme lijnen, algebraïsche begrippen en methoden toe en legde daarmede de grondslagen voor een nieuwe tak der wiskunde, de *Analytische Meetkunde.*

De kern daarvan is de vastlegging van de ligging van een punt in een vlak door de *„coördinaten"*, van een lijn in een vlak door de *„vergelijking van die lijn"*.

Van een ander standpunt bezien, kan gezegd worden dat Descartes (Lat. naam: Cartesius) aan de bestaande voorstellingswijzen voor een betrekking, *tabel en vergelijking*, een nieuwe, n.l. de *meetkundige voorstelling*, heeft toegevoegd. In het platte vlak beperkte hij zich echter nog tot betrekkingen tusschen twee veranderlijke grootheden, welke dus in het algemeen door een enkele kromme lijn werden voorgesteld.

§ 2. Eerder, in 1620 reeds, had de Engelschman GUNTHER, van Gresham's College te Oxford, de logarithmen van Napier (1614) en Briggs (1618) door een *logarithmische schaal* voorgesteld en daarmede zijn *rekenliniaal* ontworpen.

Nadat BUACHE in 1737 voor het eerst hoogte- en dieptelijnen had geteekend in zijn geografische kaarten en daarmede feitelijk den *bundel* krommen als grafische voorstelling had ingevoerd, werd deze geleidelijk ook op ander gebied toegepast.

§ 3. De eerste helft der volgende eeuw bracht een vernieuwing der meetkundige theorieën, welke voor de ontwikkeling der grafische voorstelling van groot belang zou blijken.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PONCELET (1788—1867) als genie-officier onder Napoleon den tocht naar Rusland medemakend, werd te Krasnoë gevangen genomen en getransporteerd naar Saratoff. Uitgeput en half ziek, slechts gehuld in de lompen van zijn uniform, moest hij, in de snerpende koude van den strengen winter 1812, te voet de lange dagmarschen volbrengen. In deze ellende klampte zijn geest zich vast aan wiskundige overpeinzingen, die hem voerden tot de beginselen der *„Projectieve Meetkunde"*, in 1822 neergelegd in zijn *„Traité des propriétés projectives des figures"*.

De Projectieve Meetkunde behandelt die eigenschappen van figuren, welke bij projectieve transformatie onveranderd blijven.

§ 4. Omstreeks denzelfden tijd werd het **Dualiteitsbeginsel** naar voren gebracht. Het eerst door GERGONNE in 1813 in de door hem opgerichte „Annales des Mathématiques"; ook MÖBIUS in zijn „Barycentrische Calcul" (1827) en PLÜCKER in de „Analytisch-Geometrische Entwickelungen" (1831) waren zich van het bestaan daarvan bewust, doch pas in de *„Systematische Entwickelung"* (1832) van STEINER is dat beginsel ten volle uitgebuit, waardoor het in de Projectieve Meetkunde de belangrijke plaats is gaan innemen, die het nog heden daarin vervult.

STEINER (1796—1863) was een arme boerenzoon uit het kanton Bern, die, hunkerend naar wetenschap, op 18-jarigen leeftijd van achter de koeien wegliep naar PESTALOZZI, die destijds in een school te Yverdon aan het meer van Neuchâtel zijn opvoedkundige idealen trachtte te verwezenlijken. Het vrije denken daar, bracht den, met een buitengewoon voorstellingsvermogen begaafden boerenjongen, tot een nieuwen opbouw van de Meetkunde, meer samenhangend met haar wezen dan de klassieke „Elementen" van Euclides en de analytische methoden van Descartes.

Twee jaar na het verschijnen van de „Systematische Entwickelung" werd aan de Berlijnsche hoogeschool voor Steiner een leerstoel opengesteld voor de Hoogere Meetkunde.

§ 5. De stellingen der Projectieve Meetkunde en het Dualiteitsbeginsel werden nog niet dadelijk voor de Nomografie benut.

Eerst werd nog de voorstelling van betrekkingen verbeterd door de toepassing der **Anamorphose,** — d.i. het strekken van den bundel krommen tot een bundel rechte lijnen —, door in plaats van de metrische coördinaten van Descartes, functies daarvan op het assenstelsel uit te zetten. Dit geschiedde in 1843 door LALANNE ter berekening van de vergravingen voor den aanleg van het eerste Fransche spoorwegnet. Hij teekende daartoe grafieken bestaande

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

uit een bundel rechten op een logarithmisch net; op een net dus, verkregen door de kruising van twee bundels, elk evenwijdig aan een der assen en de andere as snijdend volgens een logarithmische schaal. *(Logarithmische Anamorphose).*

§ 6. Het werk van den Franschen wiskundige CHASLES (1793—1880) bracht tenslotte MAURICE D'OCAGNE in 1884 tot de toepassing van de duale of reciproke transformatie en het gebruik van tangentieele coördinaten bij de voorstelling van betrekkingen. (1884. *„Coördonnées paralléles et axiales"*).

De naam **Nomografie** is van hem afkomstig als de aanduiding van de wetenschap, welke zich de studie van de grafische voorstelling van vergelijkingen met een willekeurig aantal veranderlijken ten doel stelt. Het overgroote deel van die studie wordt in zijn *„Traité de Nomografie"* (2me éd.-1921) gewijd aan de *„Nomogrammes à points alignés"*, de, voornamelijk uit schalen opgebouwde grafieken, waarin elke collineatie van schaalpunten een oplossing van de voorgestelde vergelijking geeft.

In het laatste decennium zijn meerdere werken op Nomografisch gebied verschenen. Wij verwijzen daarvoor naar het literatuuroverzicht, doch vestigen behalve op het bovengenoemde werk van d'Ocagne, in het bijzonder de aandacht op de *„Nomografie ou Traité des Abaques"* van R. SOREAU, dat als het beste werk over Nomografie kan worden beschouwd.

In ons land heeft IR. F. J. VAES zich veel moeite gegeven om voor het werk van d'Ocagne en voor de Nomografie in het algemeen belangstelling te wekken, terwijl in 1926 mijn vroegere leeraar J. W. N. LE HEUX het eerste Nederlandsche werkje over Nomografie heeft doen verschijnen. Als practische toepassing zijn de in 1920 door de Vereeniging van Waterstaatsingenieurs uitgegeven *„Grafieken voor hydraulische Berekeningen"* van den jonggestorven IR. J. M. STEEVENSZ van belang.

§ 7. In zijn bovengenoemd boek heeft Soreau ten opzichte van d'Ocagne de taak van de Nomografie verruimd; in de eerste plaats doelt hij niet op de voorstelling van vergelijkingen alleen, maar in 't algemeen op de voorstelling van betrekkingen tusschen veranderlijken; in de tweede plaats rekent hij ook het opsporen van formules voor empirisch gevonden betrekkingen tot de taak der Nomografie.

Hiermede gaat evenwel, bij gemis van een gemeenschappelijk logisch fundament, de eenheid van het behandelde min of meer verloren.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nog meer is dat het geval in die werken, welke *de grafische voorstelling in het algemeen* tot onderwerp hebben. Daarin wordt, behalve de grafische voorstelling van vergelijkingen, ook het grafisch weergeven behandeld van betrekkingen, welke gewoonlijk niet door een vergelijking wórden, of daardoor zelfs niet kúnnen worden voorgesteld.

Daar tóch de samenhang van die verschillende onderwerpen klaarblijkelijk door velen wordt gevoeld, zal in het volgende hoofdstuk getracht worden de grondslagen der Nomografie opnieuw op te bouwen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 2.

Taak en wezen der Nomografie.

§ 8. Het uit het Grieksch afgeleide woord *Nomografie*, beteekent letterlijk „beschrijving van wetten", hetgeen dus in wiskundigen of natuurwetenschappelijken zin wil zeggen:

„de voorstelling van betrekkingen tusschen veranderlijken."

Die voorstelling kan op eenige, naar hun aard zeer verschillende wijzen plaats hebben, n.l.:

a. **algebraïsch** door een of meer **formules;**
b. **rekenkundig** door een **tabel;**
c. **meetkundig** door een **grafiek;**
d. **taalkundig** door een woordelijke **omschrijving.**

Laatstgenoemde voorstellingswijze was, bij gebrek aan betere voorstellingsmiddelen — in de middeleeuwen, en ook later nog, — zeer gebruikelijk, doch is nu van weinig belang meer. Wij zullen haar daarom verder buiten beschouwing laten.

§ 9. Daar een betrekking niet anders dan uit een voorstelling er van, kan worden gekend, is voor elk verband tusschen veranderlijken steeds een bepaalde voorstellingswijze **primair.** Zoo is meestal de *formule of vergelijking* de primaire voorstelling voor theoretisch afgeleide betrekkingen, de *tabel* voor gemeten betrekkingen, de *grafiek* voor mechanisch opgeteekende betrekkingen.

Voor het verkrijgen van die primaire voorstelling, zorgt dus de wetenschap waartoe de betrekking behoort, zelf. **Daarentegen is het de taak der Nomografie, uit die primaire voorstelling de voor elk bijzonder geval gewenschte secundaire voorstellingswijze af te leiden.** Als primaire voorstelling moet daarbij ook beschouwd worden de empirische formule, die uit voor ons onbekende gegevens werd gevonden.

§ 10. Figuur **1** geeft een schematisch overzicht van de in de practijk meest voorkomende overgangen en hun aandeel in de Nomografie. (Dit laatste aangegeven door de dikte der pijlen).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

ad **a.** Voor de toepassing van technische en wetenschappelijke formules, worden daaruit rechtstreeks nauwkeurige grafieken geconstrueerd. Die grafieken kunnen bestaan uit bundels lijnen, waarbij van in den handel verkrijgbaar coördinatenpapier gebruik kan worden gemaakt, dan wel uit een combinatie van schalen. Zijn de laatste ten opzichte van elkander verschuifbaar, dan kan de grafiek uitgevoerd zijn in den vorm van een rekenliniaal.

ad **b.** Om een overzicht te verkrijgen over het verloop van een betrekking, welke gegeven is in den vorm van een tabel, worden

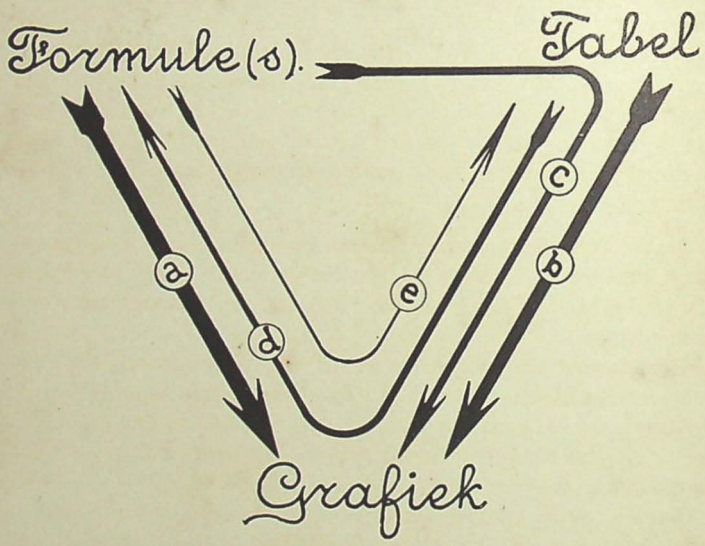


Fig. 1.

de waarden daarvan uitgezet op millimeter-, poolcoördinaten-, logarithmen- of ander coördinatenpapier, zóó, dat daarop een of meer krommen worden verkregen. Men noemt deze krommen wel *karakteristieken,* omdat zij den aard van de betrekking duidelijk doen uitkomen.

Soms kan ook op andere wijze een figuurlijke voorstelling van de betrekking worden geteekend.

ad **c.** Is het bij de grafische voorstelling van een formule, niet alleen om de toepassing, maar ook om een overzicht over het verloop van de betrekking te doen, of is het niet mogelijk rechtstreeks een grafiek af te leiden, dan zal eerst een tabel moeten worden vervaardigd en de berekende waarden in een grafiek worden uitgezet.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

ad **d.** De afleiding van empirische formules uit een tabel van gegevens, heeft meestal plaats, door te trachten het gegeven verband zoodanig in een grafiek vast te leggen, dat een voorstelling verkregen wordt, bestaande uit een rechte lijn of een bundel rechte lijnen op een of ander coördinatennet.

De aldus verkregen empirische formule kan het spoor aanwijzen voor de redeneering, welke moet worden gevolgd, om tot een theoretisch afgeleide formule te komen.

Soreau noemt het opsporen van empirische formules: *„La recherche des lois".*

ad **e.** Moet een tabel berekend worden uit een formule, dan zal, wanneer een niet al te groote nauwkeurigheid wordt vereischt, veelal gebruik gemaakt worden van een grafiek op coördinatenpapier, of van een rekenliniaal. Zoo zal bij voorbeeld een formule, samengesteld uit een product van machten, op eenvoudige wijze gewaardeerd kunnen worden met een grafische voorstelling op logarithmenpapier.

§ 11. Onvolledige veranderlijken. In de studie van de genoemde overgangen is in hoofdzaak alles besloten wat in de onderscheidene werken over Grafische voorstellingen en Nomografie wordt behandeld.

Echter moet de beteekenis van het begrip „veranderlijken" dan niet beperkt blijven tot die van de *continue reëele variabele* uit de wiskunde. Deze heeft de beteekenis van *„de veranderlijke grootheid, welke alle tusschen twee bepaalde grenzen gelegen reëele waarden, kan aannemen."*

Behalve deze variabele, welke een *veranderlijke naar het getal* is *(getalveranderlijke),* moeten dan onder het begrip „veranderlijke" nog eenige andere typen gerangschikt worden. Hiervan is de *„veranderlijke naar de soort"* het belangrijkste.

Soortveranderlijken zijn veranderlijken, die niet met verschillende waarden, doch met verschillende soorten in een betrekking optreden. Bij voorbeeld zijn de metaalsoorten: *zink, ijzer, koper,* enz. verschillende soorten van de soortveranderlijke: *metalen.* Andere voorbeelden zijn: brandstoffen (steenkolen, cokes, turf, enz.), staten (Nederland, Engeland, Duitschland, enz.), wegen (klinker-, steenslag-, betonwegen, enz.).

Tegenover de continue reëele variabele, welke ik ook **volledige veranderlijke** zal noemen, vat ik de andere typen, welke in zekeren zin niet als „vol" gerekend kunnen worden, te zamen onder den naam **onvolledige veranderlijken.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 12. Voornamelijk de volgende twee redenen rechtvaardigen de genoemde uitbreiding:

1°. In alle wetenschappen komen de onvolledige veranderlijken veelvuldig voor, voornamelijk in z.g. statistische betrekkingen.

2°. Er is geen scherpe afscheiding tusschen de continue reëele variabele en de soortveranderlijke, maar er bestaan verscheidene overgangstypen. Een aantal geleidelijk van de reëele variabele naar de soortveranderlijke in onvolledigheid toenemende veranderlijken zijn bijeen gebracht in de volgende reeks:

a. het aantal meters van een lengte is een grootheid, waaraan wij **alle reëele** positieve waarden kunnen toedenken (volledige veranderlijke);

b. het aantal inwoners van een stad, — arbeiders van een fabriek — leden van een gezin, enz. Deze grootheid kan alleen de **geheele** positieve waarden aannemen;

c. handelsmaten, als b.v. buiswijdten, draaddikten, enz., zijn grootheden, die slechts een **beperkt aantal** waarden kunnen hebben;

d. de jaren (b.v. 1930, 1931, enz.). Hierbij is geen sprake meer van waarden, maar van een reeks **nummers;**

e. de maanden, de dagen, e.d. De nummers zijn hier vervangen door **soortnamen;**

f. levensperioden (kind, jongeling, man, grijsaard), burgerlijken staat (ongehuwd, gehuwd, gesch. of wed.). In deze soorten is, evenals in het vorige geval, een natuurlijke volgorde naar den tijd;

g. ook van andere soortveranderlijken zijn de soorten dikwijls, naar de een of andere maatstaf, in volgorde te rangschikken. (b.v. hemelstreken, scheikundige elementen, kleuren, enz.).

Uit het voorgaande blijkt dat een veranderlijke kan optreden als een **waarde,** een **nummer** of een **soort.** Ter gemeenschappelijke aanduiding kunnen wij spreken van de **data** van een veranderlijke.

§ 13. In dit boek zal de voorstelling van betrekkingen met onvolledige veranderlijken niet uitvoerig behandeld worden. In de af te beelden betrekkingen zullen wel eens een enkele maal onvolledige veranderlijken voorkomen, zonder dat daar in 't bijzonder op behoeft te worden gelet.

Een enkel voorbeeld volge evenwel nog ter toelichting.

1°. De formule voor het totaal aantal stuks **S** van een lang-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

werpige pyramidale stapel met **x** stuks langs de korte basis en **n** stuks langs den bovenkam, is

$$S = \frac{x(x+1)(2x+3n-2)}{6}.$$

Hierin zijn **x, n** en **S** allen onvolledig veranderlijken, want zij kunnen alleen geheele waarden aannemen.

2°. In een tabel van den uitvoer van verschillende producten voor een reeks jaren, is dus een betrekking voorgesteld tusschen het jaar (nummer), de soort van het product (soortveranderlijke) en de uitgevoerde hoeveelheid (volledige veranderlijke).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 3.

Elementen der grafische voorstellingswijzen.

§ 14. Voor elke betrekking is het mogelijk meerdere grafieken, in een groote verscheidenheid van vormen, te construeeren.

Stellen wij echter de voorwaarde, dat zoowel constructie als gebruik, zoo eenvoudig mogelijk moeten wezen, dan is het niet moeilijk te bepalen, op welke wijze de meest geschikte grafische voorstellingen verkregen zullen worden.

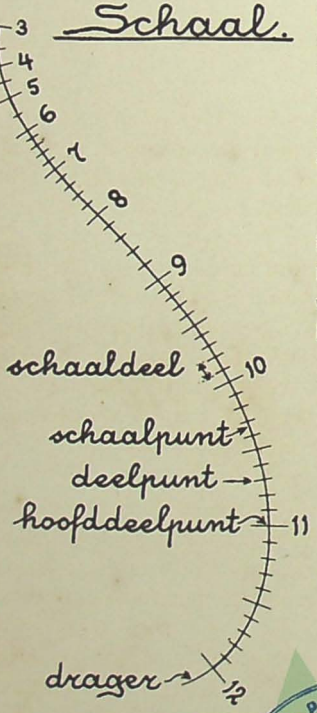


Fig. 2.

Voor de voorstelling van een betrekking tusschen veranderlijken is in de eerste plaats een voorstelling van die veranderlijken zelf noodig.

Notaties: Als symbool voor een veranderlijke bezigen wij in het algemeen de letter z, zijn er meerdere veranderlijken, dan kan zij voorzien worden van een index, b.v. z_1, z_2, enz. Wij spreken dan van de 1e veranderlijke, de 2e veranderlijke, enz. Ook kan voor de aanduiding de letter gebruikt worden, met welke de veranderlijke in een formule voorkomt.

Het *bereik* van een volledige veranderlijke bestaat uit een oneindig aantal waarden.

Bepalen wij ons tot de afbeelding in een plat vlak, dan kan elke waarde worden voorgesteld:

a. door een *genummerd punt*;

b. door een *genummerde lijn*.

DEP: PENDIDIKAN
PERPUSTAKAAN
PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

d.w.z. dat aan het punt of de lijn de betreffende waarde als nummer toegedacht wordt.

De voorstelling der waarden door genummerde punten, voert, voor de voorstelling van de veranderlijke, practisch tot een **schaal** (figuur 2), de voorstelling door genummerde lijnen levert aldus een **bundel** (figuur 3).

§ 15. Bij de **schaal** (figuur 2), die recht of gebogen kan zijn, hebben wij een aaneensluitende reeks punten, die dus te zamen een rechte of gebogen lijn vormen.

Bij elk punt behoort een waarde, een aantal ronde waarden wordt door een kort deelstreepje aangeduid, bij eenige daarvan wordt de waarde zelf bijgeschreven.

Notaties: Een schaal voor een veranderlijke wordt aangeduid door de veranderlijke, geschreven tusschen twee *rechte* haken, bij voorbeeld $[z_1]$.

Benamingen: Elk punt van een schaal heet *schaalpunt;* elk door een deelstreepje aangeduid schaalpunt heet *deelpunt,* elk deelpunt waarbij de waarde is bijgeschreven heet *hoofddeelpunt.* De gebogen of rechte lijn wordt *drager* genoemd, de gedeelten tusschen twee deelstreepjes heeten *schaaldeelen.*

Het aantal hoofddeelpunten moet zoodanig zijn, dat met een enkele oogopslag te zien is, welke waarde aan een willekeurig deelpunt moet worden toegekend. Om te bepalen, welke waarde bij een willekeurig schaalpunt, of omgekeerd, welk schaalpunt bij een willekeurige waarde behoort, moeten wij z.g. **interpoleeren.** Wanneer de opvolgende schaaldeelen niet zichtbaar in lengte verschillen, mag die interpolatie eenvoudig naar evenredigheid geschieden.

§ 16. Het meest bekende voorbeeld van een schaal is de gewone centimeterverdeeling op een rechte liniaal of meetlat.

Wij noemen dit een **metrische schaal** en rekenen haar steeds van nul af te beginnen. Het met nul genummerde schaalpunt heet daarom de **oorsprong.**

Zijn alle deelen van een schaal even lang, dan noemen wij deze een **regelmatige schaal.** De metrische schaal is hiervan dus een bijzonder geval.

Zijn de opvolgende schaaldeelen verschillend van grootte, dan is de schaal **onregelmatig.**

Alle schalen, die niet metrisch zijn, heeten **functieschalen.** Hoewel dus in het algemeen ook de regelmatige schaal daartoe behoort,

PERPUSTAKAAN NASIONAL INDONESIA
PERPUSTAKAAN NASIONAL RI

hebben wij, met de benaming functieschalen, voornamelijk onregelmatige schalen op het oog. In figuur **17** zijn eenige functieschalen afgebeeld. Op de constructie van functieschalen komen wij nog uitvoerig terug.

§ **17.** Een **bundel** (figuur **3**) is dus een reeks rechte of kromme lijnen, bij elk waarvan een waarde behoort. Slechts een aantal ronde

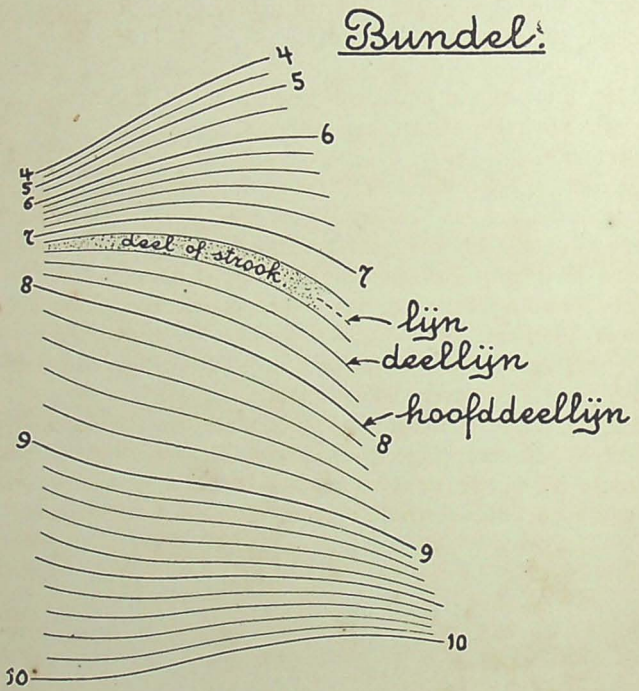


Fig. 3.

waarden worden door een geteekende lijn voorgesteld, aan de tusschengelegen waarden, moet zoowel een lijn, als een nummer toegedacht worden.

Van de lijnen zijn er slechts enkele, waarbij de waarde is bijgeschreven. De voornaamste daarvan worden bovendien door grootere dikte meer onder de aandacht gebracht.

Notaties: Een bundel voor een veranderlijke wordt aangeduid, door de veranderlijke te schrijven tusschen twee *gebogen* haken, bij voorbeeld (z_1).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Benamingen: Met *lijnen* worden ook de niet in werkelijkheid getrokken lijnen van den bundel bedoeld. Een werkelijk getrokken lijn heet *deellijn*. Elke deellijn waarbij de waarde is bijgeschreven heet *hoofddeellijn*. De oppervlakken tusschen twee deellijnen heeten *deelen* of *strooken*.

Het aantal genummerde lijnen moet weer zoodanig zijn, dat met één oogopslag te zien is, welke waarde aan een willekeurige deellijn moet worden toegekend. Interpolatie mag, wanneer ter plaatse de breedte der opvolgende strooken niet zichtbaar verschilt, naar evenredigheid plaats hebben.

§ 18. Bestaat een bundel uit kromme lijnen, dan spreken wij van een **bundel krommen,** zijn alle lijnen recht, dan is het een **stralenbundel.**

Gaan die rechten allen door één punt (*toppunt* of *pool* geheeten), dan is de bundel een **waaier.** Wij noemen deze een *regelmatige waaier,* wanneer hij zoo door een transversaal kan worden gesneden, dat daarop een regelmatige schaal wordt afgeteekend, — en een *cirkelwaaier,* wanneer de naast elkander gelegen sectoren gelijke tophoeken bezitten.

Ligt het gemeenschappelijke punt in het oneindige, dan gaat de waaier over in een **evenwijdigen bundel.**

Een lijn, welke loodrecht staat op de lijnen van een evenwijdigen bundel, snijdt deze volgens een schaal. Naar gelang die schaal metrisch, regelmatig, dan wel een functieschaal is, heet de evenwijdige bundel ook **metrisch, regelmatig** of een **functiebundel.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 4.

De voorstelling van een betrekking tusschen twee veranderlijken.

§ 19. Bestaat er tusschen twee veranderlijken een betrekking, dan behoort bij elke waarde van de ééne, een waarde van de andere veranderlijke. (We nemen hier het eenvoudigste geval van één-waardige functies aan).

Zulk een combinatie van waarden noemen wij in 't algemeen een **waardenstel.**

Voor het in beeld brengen van de betrekking is een **grondfiguur** noodig. Het eenvoudigste wordt deze gevormd op een van de twee volgende wijzen:

a. door twee naast elkander geplaatste schalen, te zamen een **schalenstel** vormend.

b. door twee elkander snijdende bundels, welke te zamen een **net** vormen.

De koppeling van twee waarden tot een waardenstel, wordt dan op een *schalenstel* voorgesteld door de *rechte verbindingslijn* van de twee schaalpunten, op een *net* door het *snijpunt* van de twee lijnen voor de bedoelde waarden.

§ 20. De betrekking, d.w.z. het oneindig aantal waardenstellen, wordt ten slotte weergegeven:

a. op het *schalenstel,* door een oneindig aantal rechten. In het algemeen omhullen deze een kromme (figuur 5). Practisch bestaat dus de voorstelling uit een schalenstel met een z.g. **raakkromme** (Duitsch: Gleitkurve, zie Schwerdt). De aflezing heeft plaats door een rechte afleeslijn rakend aan de kromme te leggen;

b. op het *net,* door een oneindig aantal snijpunten, te zamen in het algemeen een kromme vormend, welke hier **snijkromme** genoemd zou kunnen worden. (figuur 4).

Het is niet mijn bedoeling het bovenstaande, voor zoover dit de voorstelling van betrekkingen tusschen twee veranderlijken betreft, nader uit te werken.

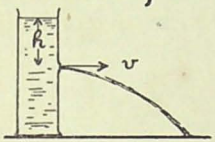
PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad \text{of} \quad v = \sqrt{2gh}$$

waarin g = versnelling door de zwaartekracht; tusschen 44° en 53° breedte is $g = 9{,}81$ meter per sec^2.

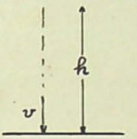
De betrekking geldt voor:

Uitstrooming van vloeistof.



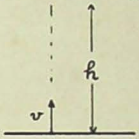
v = theor. stroom-snelheid in m/sec.
h = drukhoogte in m.

Vrije val in 't luchtledige.



h = valhoogte in m.
v = eindsnelheid in m. per sec.

Verticale worp in 't luchtledige.



v = beginsnelheid in m. per sec.
h = stijghoogte in m.

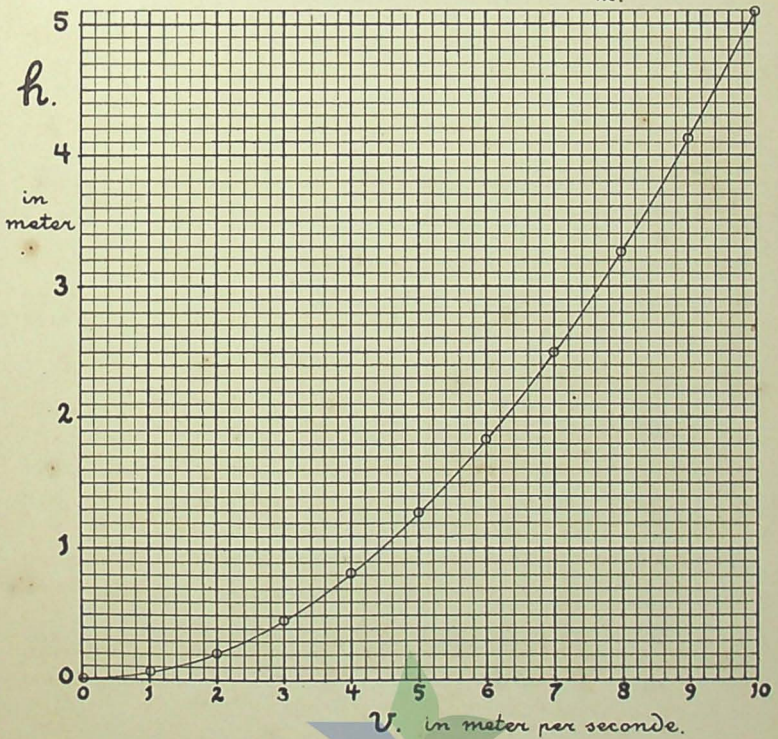


Fig. 4.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Ter toelichting van het zooeven behandelde, zijn in de figuren 4 en 5 voorbeelden van de twee voorstellingswijzen gegeven. De in figuur 4 met een klein cirkeltje aangeduide waardenstellen, zijn in figuur 5 met stippellijnen aangegeven.

Een net, als in figuur 4, hetwelk uit twee regelmatige evenwijdige bundels is opgebouwd, heet een *regelmatig net*. Het uit twee evenwijdige rechte regelmatige schalen gevormde schalenstel van figuur 5 noemen wij een *regelmatig evenwijdig schalenstel*.

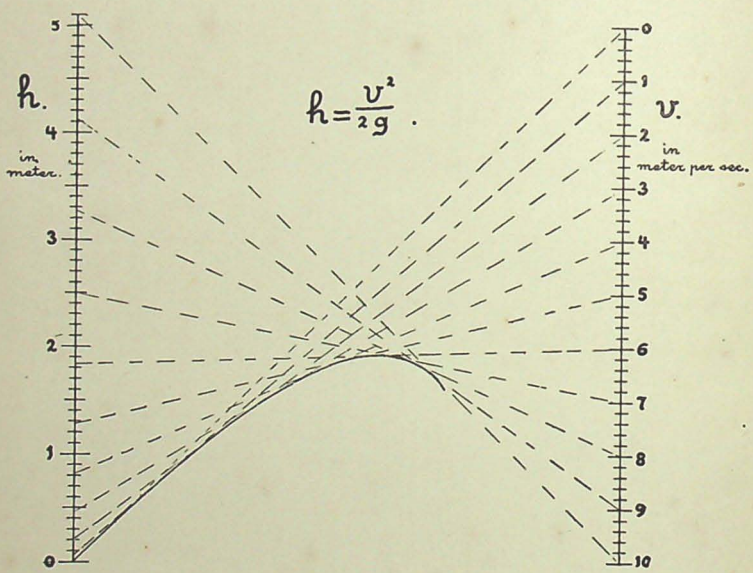


Fig. 5.

§ 21. Wanneer het schalenstel en het net, niet uit regelmatige schalen en bundels, maar respectievelijk uit functieschalen en functiebundels worden opgebouwd, dan is het mogelijk deze zóó te kiezen, dat *de raakkromme overgaat in een enkel punt* en *de snijkromme gestrekt wordt tot een rechte lijn*. Voorbeelden daarvan zullen wij later ontmoeten.

Notaties: Een schalenstel voor een stel van twee veranderlijken, wordt aangeduid, door die veranderlijken samen te schrijven tusschen twee *rechte* haken, bijvoorbeeld $[z_1, z_2]$, een net op dezelfde wijze, doch met gebogen haken, dus bijvoorbeeld (z_1, z_2).

Bij de voorstelling door een enkel punt op een schalenstel, kunnen wij echter ook, met dit punt als projectiecentrum, de ééne schaal op

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

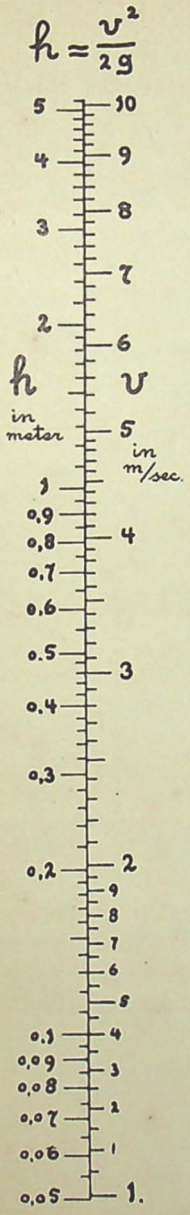


Fig. 6.

de andere projecteeren. De bijeenbehoorende waarden van elk waardenstel vallen nu juist op elkaar. De twee schalen komen dan met hun verdeelingen onderscheidenlijk links en rechts van den gemeenschappelijken drager.

Deze voorstellingswijze van een betrekking tusschen twee veranderlijken heet **dubbelschaal** (figuur 6).

De constructie van dubbelschalen zal bij de behandeling der functieschalen nog nader worden besproken.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 5.

De voorstelling van een betrekking tusschen d r i e veranderlijken.

§ 22. Een betrekking tusschen drie veranderlijken kan gesplitst worden in een oneindig aantal betrekkingen tusschen twee veranderlijken. Daartoe wordt de derde veranderlijke met oneindig kleine trapjes doorloopen van haar begin- tot haar eindwaarde. Op elk trapje is er dus een — telkens gewijzigde — betrekking tusschen de twee overige veranderlijken.

Wij zagen in het voorgaande hoofdstuk, dat een betrekking tusschen twee veranderlijken op een *schalenstel* kan worden voorgesteld door een **raakkromme,** òf, — bij keuze van toepasselijke functieschalen —, door een **punt**; evenzoo op een *net,* door een **snijkromme,** óf, — op een geëigend functienet —, door een **rechte lijn.**

Daaruit volgt, dat een betrekking tusschen drie veranderlijken in het algemeen zal kunnen worden voorgesteld:

1°. door een *bundel raakkrommen op een regelmatig schalenstel;*
2°. door een *bundel snijkrommen op een regelmatig net;*
3°. door een *schaal op een functieschalenstel,* dus door **drie schalen;**
4°. door een *bundel rechten op een functienet,* dus door **drie bundels rechten.**

De grafische voorstelling van een betrekking wordt, behalve **grafiek,** ook **nomogram** genoemd. De grafieken ad 3° heeten **schaalnomogrammen** (Fransch: Nomogrammes à points alignés; Duitsch: Fluchtlinientafeln), die ad 2° en 4° **bundelnomogrammen.**

In tabel **I** is de afleiding der besproken grafische voorstellingswijzen in een overzicht samengevat.

§ 23. **Voorbeeld.** *Verlichting* (figuren **7, 8, 9** en **10**).

Ter onderlinge vergelijking van deze vier voorstellingswijzen, is in de figuren **7** tot en met **10** afgebeeld de betrekking:

$$L = \frac{100 \sin \alpha}{r^2}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

TABEL I.

Overzicht der eenvoudigste grafische voorstellingswijzen.

Een :	, wordt voorgesteld door een:				
waarde	**genummerd punt**		**genummerde lijn**		
waardenstel	**rechte lijn** (door de 2 punten)		**snijpunt** (van de 2 lijnen)		
veranderlijke	**schaal** (Fig. 2)		**bundel** (Fig. 3)		
stel van 2 veranderlijken	grondfiguur				
	schalenstel		**net**		
	regelmatig schalenstel	toepasselijk functie-schalenstel	regelmatig net	toepasselijk functienet	
betrekking tusschen 2 veranderlijken	**raak-kromme** (Fig. 5)	**punt**	**snij-kromme** (Fig. 4)	**rechte lijn**	**dubbelschaal** (Fig. 6)
betrekking tusschen 3 veranderlijken	**bundel raak-krommen** (Fig. 7)	**schaal** (Fig. 9) (dus 3 schalen)	**bundel snij-krommen** (Fig. 8)	**bundel rechten** (Fig. 10) (dus 3 bundels rechten)	

, voor het bepalen van de sterkte der verlichting, wanneer

r = de afstand in meters van de lichtbron tot de plaats waar wij de sterkte van de verlichting willen bepalen;

α = de invalshoek van het licht;

L = de sterkte van de verlichting in Lux per 100 kaars lichtsterkte van de lamp.

Stel verder:

s = de horizontale schaduwlengte van 1 meter hoogte, dan is

$$s = \text{cotg. } \alpha$$

§ 24. De eerstgenoemde betrekking is in fig. **7** afgebeeld op een regelmatig $[r, \alpha]$. Van de omstandigheid, dat de drager $[\alpha]$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

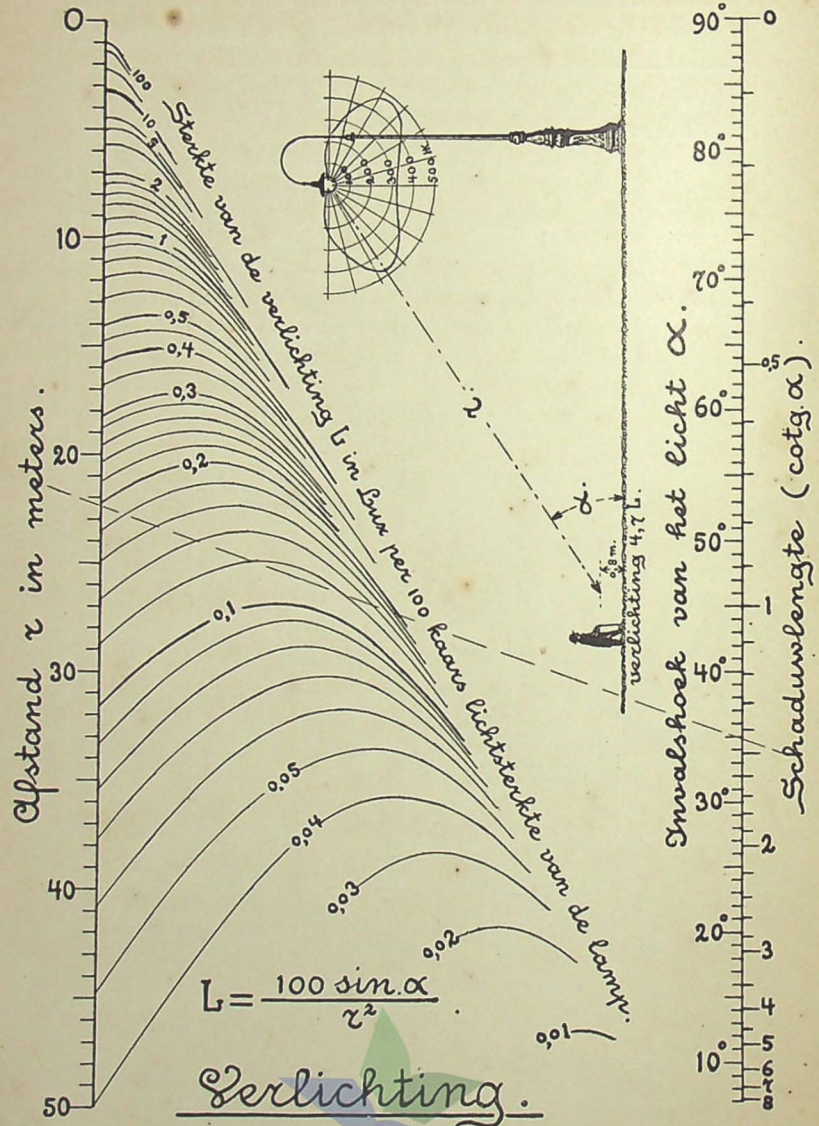


Fig. 7.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

twee vrije kanten heeft, is gebruik gemaakt voor het vormen van een dubbelschaal voor de tweede betrekking, namelijk door tegenover α een functieschaal voor **s** te teekenen.

De veranderlijke **L** wordt op $[r, \alpha]$ voorgesteld door een bundel raakkrommen.

Toepassing van de grafiek:

Gevraagd wordt te bepalen, welke verlichting een straatlantaarn geeft, op een punt 0,8 m. boven een gedeelte van het straatoppervlak, dat op 22,4 m. van de lantaarn verwijderd is. De lichtsterkte van de lamp in die richting is 470 H.K. De invalshoek van het licht op het bedoelde punt is 34°50′, deze hoek kan bepaald worden door de lengte te meten van de schaduw van een stok, welke loodrecht op het straatoppervlak geplaatst wordt. De schaduw zal in het gegeven geval 1,44 $\times$ de lengte van den stok zijn. Wij leggen nu door de twee schaalpunten $\mathbf{r} = 22{,}4$ en $\alpha = 34°50'$ (of $\mathbf{s} = 1{,}44$) een rechte *afleeslijn*. Daartoe kunnen wij gebruik maken van een der kanten van een liniaal, een strakke draad, een scherp omgevouwen papier, of, wat het meest geschikt is, een op helder celluloid ingekraste rechte lijn.

Daar de afleeslijn in ons geval niet aan een der geteekende krommen raakt, moeten wij interpoleeren. Wij moeten ons dus de ligging indenken van een tot den bundel behoorende lijn, welke aan de afleeslijn raakt. Dit is de lijn voor een waarde van ongeveer 0,114.

De sterkte van de verlichting is dus 4,7 $\times$ 0,114 = 0,53 Lux.

Wanneer het bedoelde punt midden tusschen twee van deze lantaarns ligt, is de totale verlichting ruim 1 Lux. Voor een matig drukke straat is dit voldoende.

§ 25. In figuur 8 vormen de regelmatige bundels (r) en (α) een regelmatig net (r, α), waarop **L** wordt voorgesteld door een bundel (snij-)krommen.

Aan de bovenzijde is een schaal geteekend voor **s**, welke schaal gebruikt kan worden in combinatie met den bundel (α).

Het zelfde waardenstel als zooeven, n.l.

$$r = 22{,}4$$
$$\alpha = 34°50', \qquad s = 1{,}44$$
$$L = 0.114,$$

is hier door het middelpunt van een klein cirkeltje aangeduid.

§ 26. In figuur 9 is de betrekking tusschen **r**, α en **L** afgebeeld op een functieschalenstel $[r, \alpha]$. $[r]$ is een z.g. *logarithmische*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

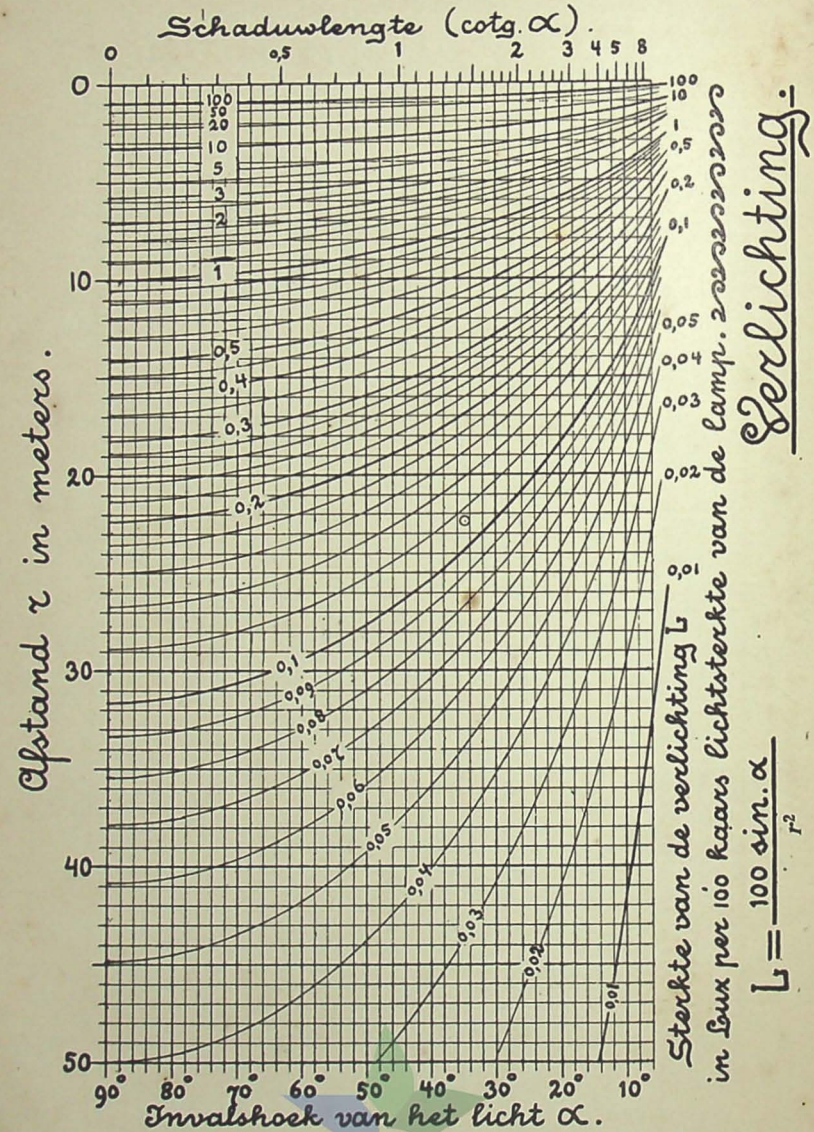


Fig. 8.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

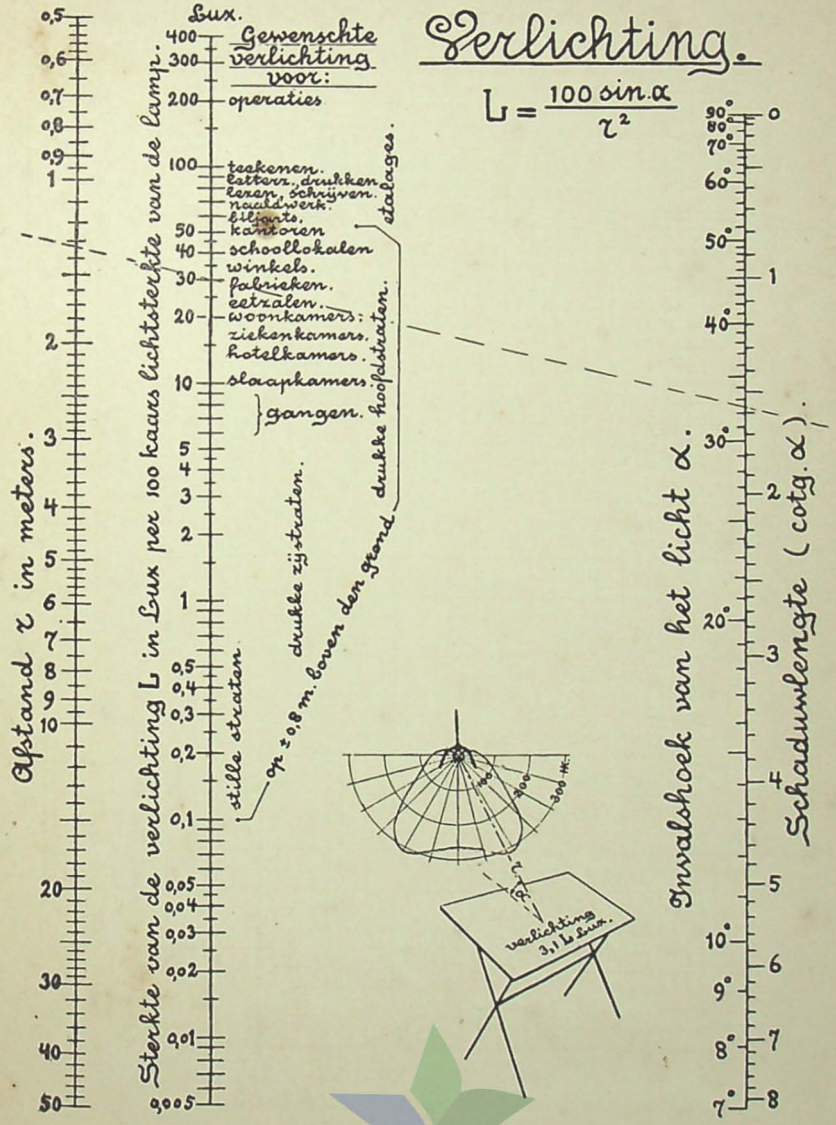
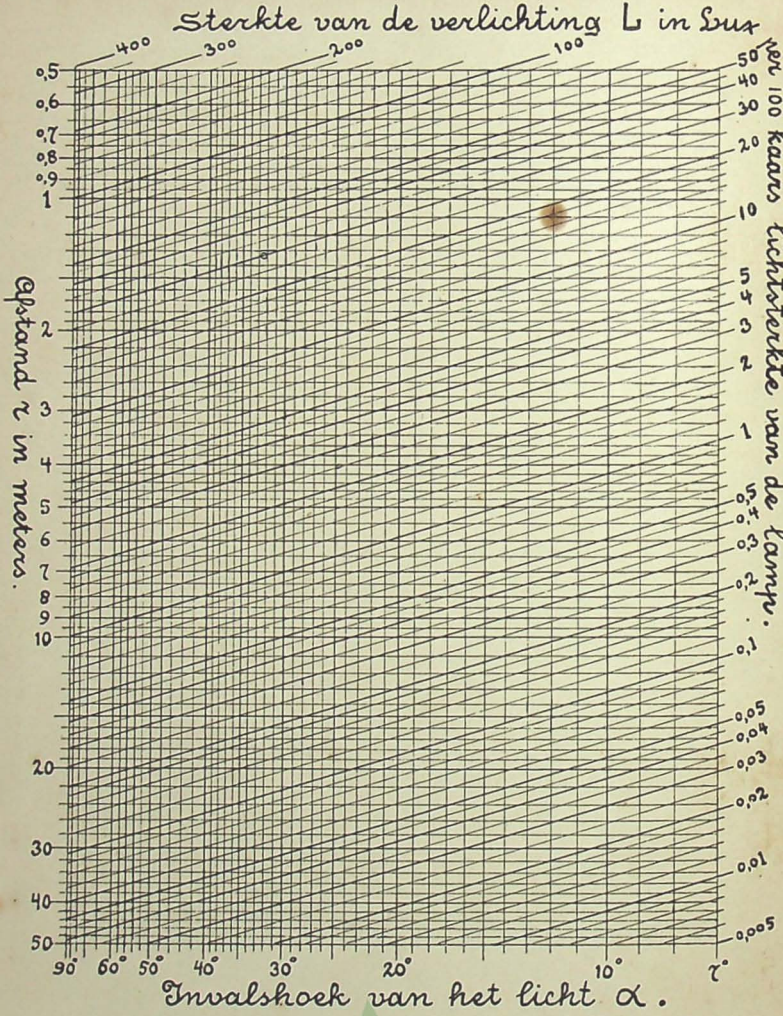


Fig. 9.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA



Verlichting. $L = \frac{100 \sin. \alpha}{r^2}$

Fig. 10.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

schaal, [α] een log.sinusschaal; op het door deze twee schalen gevormde schalenstel wordt **L** eveneens door een schaal voorgesteld, en wel, evenals **r**, door een logarithmische schaal.

Tegenover α is weer een functieschaal voor **s** geteekend, te zamen vormen deze schalen weer een dubbelschaal voor s = cotg. α.

Ook van [L] is op deze wijze gebruik gemaakt. Aan de andere zijde der schaal zijn hier verschillende verlichtingsgevallen opgesomd (een *soort*veranderlijke). Deze dubbelschaal geeft dus het verband tusschen verschillende verlichtingsobjecten en de vereischte verlichting.

Toepassing van het nomogram:

Op een teekentafel valt het licht onder een hoek van 32°25′ (schaduwlengte 1,57). De afstand tot de lamp, welke in die richting een lichtsterkte heeft van 310 H.K., is 1,33 m. De afleeslijn door **r** = 1,33 en α = 32°25′ snijdt [L] bij **L** = ruim 30.

De verlichting is dus ongeveer 94 Lux. Zooals de middelste dubbelschaal aangeeft, is dit voor een teekentafel voldoende.

§ 27. Ten slotte geeft figuur **10** de voorstelling door drie bundels rechten weer. Die voor **r** en **L** zijn weer logarithmisch, (α) is een log.sinusbundel. Er is hierbij geen plaats voor het opnemen van nevenbetrekkingen als tusschen invalshoek en schaduwlengte en tusschen verlichtingssterkte en verlichtingsobjecten. Hetzelfde waardenstel als in § 26, n.l.

$$r = 1{,}33$$
$$\alpha = 32°25'$$
$$L = 30,$$

is hier door het middelpunt van een klein cirkeltje aangeduid.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 6.

Het schaalnomogram tegenover de andere grafische voorstellingswijzen.

§ 28. Ter vergemakkelijking van het overzicht is in figuur **11** een grafiek geteekend voor de onderlinge vergelijking der vier grafische voorstellingswijzen [1]). Hierbij is getracht een zoo objectief mogelijke waardeering te geven.

De vier voorstellingswijzen zullen wij verder aanduiden met de, — ook in de grafiek bijgeschreven-, nummers en afkorting: **1, 2, sch.** en **4.**

2 is tegenwoordig nog de bekendste en met **4** de gangbaarste voorstellingswijze. De laatste, tot voor kort weinig gebezigd, wordt, voornamelijk bij toepassing van logarithmische bundels, meer en meer gebruikt.

Voor het gebruiken van **1** is in het algemeen geen reden. Het **schaalnomogram** daarentegen verdient, zooals wij hierna zullen aantoonen, in velerlei opzicht de voorkeur boven de andere voorstellingswijzen.

§ 29. Het Formaat.

De onderlinge vergelijking voorgesteld in figuur **11**, is gebaseerd op de veronderstelling, dat voor alle vier voorstellingswijzen het beschikbare teekenvak gelijk van vorm en grootte is.

Bij schaalnomogrammen kan, met het oog op de lengte van de afleeslijn, de schaallengte hoogstens een 30 cm. bedragen, terwijl de grootte van bundelnomogrammen slechts begrensd wordt door den eisch dat zij gemakkelijk hanteerbaar moeten zijn.

De constructie.

De constructie van het schaalnomogram eischt weinig reken- en teekenwerk, **4** vergt reeds meer berekening, terwijl bij **1** en **2** de

[1]) De in figuur **11** voorgestelde betrekking is een betrekking tusschen twee soortveranderlijken (grafieksoorten en punten van vergelijking) en een onvolledige getalveranderlijke. De laatste wordt voorgesteld door een „zwart-wit" schaal, waarbij geldt: „hoe witter, hoe gunstiger".

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Onderlinge vergelijking van de vier eenvoudigste grafische voorstellingswijzen voor een betrekking met drie veranderlijken.

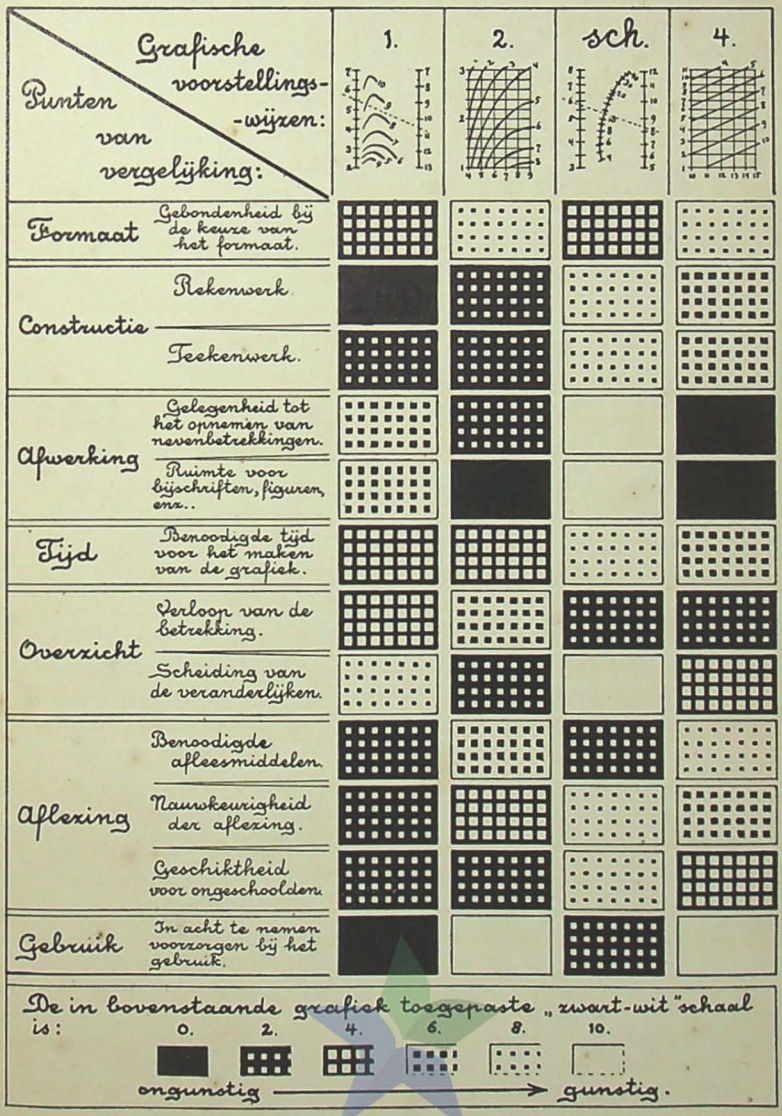


Fig. 11.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

ligging van een groot aantal punten berekend moet worden en het teekenen van de krommen door deze punten lastig en tijdroovend is.

De afwerking.

Een groot voordeel van het schaalnomogram is de gelegenheid welke het biedt voor het opnemen van nevenbetrekkingen, hetzij door toepassing van dubbelschalen, hetzij door op hetzelfde schalenstel meerdere betrekkingen tusschen drie veranderlijken voor te stellen.

Bundelnomogrammen zijn daar minder geschikt voor.

Het schaalnomogram laat bovendien nog een overvloed van ruimte vrij voor het plaatsen van bijschriften, figuren, enz.

Tijd.

Uit ervaring is mij gebleken, dat *gemiddeld* voor het berekenen, teekenen en afwerken noodig is:

voor grafieken volgens	**1**	14 uur
„ „ „	**2**	12 „
„ „ „	**sch**	4 „
„ „ „	**4**	8 „

Een schaalnomogram wordt dus ongeveer drie maal zoo vlug vervaardigd als een grafiek bestaande uit een bundel krommen op een regelmatig net.

Overzicht.

Het verloop van de betrekking is bij **2** nog het meest overzichtelijk, hoewel wij ons daar toch niet te veel van moeten voorstellen.

Ontegenzeggelijk is dat verloop echter bij het gebruik van functieschalen en functiebundels, — ook wegens gebrek aan routine —, lastiger te overzien. Daarentegen is de scheiding der veranderlijken bij het schaalnomogram volmaakt, bij **1** goed, bij **4** en vooral bij **2** slecht te noemen.

De aflezing.

Tegenover **2** en **4** hebben het schaalnomogram en **1** het nadeel, dat het voor de aflezing noodig is een rechte lijn over de grafiek te leggen. In de meeste gevallen echter, is, zonder gebruikmaking van een aanwijsstift, de aflezing op **2** en **4** evenmin mogelijk.

Interpolatie en aflezing kunnen bij het schaalnomogram gemakkelijk en zeer nauwkeurig geschieden.

Doór de volmaakte scheiding der veranderlijken kan ieder niet wiskundig geschoold persoon, iedere arbeider, de schaalnomo-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

grammen gebruiken. Met de andere soorten grafieken is dat, — de ervaring heeft dat geleerd —, niet mogelijk.

Het gebruik.

Er is ten slotte tegen het schaalnomogram nog één bezwaar. Het is namelijk niet geoorloofd de schaalnomogrammen te vouwen of te kreuken, daar dit een onnauwkeurige aflezing zou veroorzaken. Ze zijn dus in het bijzonder in boeken op hun plaats, terwijl losse schaalnomogrammen op niet te dun papier moeten worden geteekend of gereproduceerd.

Soms wordt tegen het schaalnomogram aangevoerd, dat ook krimpen van het papier een ontoelaatbare vervorming kan geven. Wanneer het papier bij het krimpen vlak blijft, behoeft daarvoor geen vrees te bestaan, daar een schaalnomogram elke vervorming waarbij rechte lijnen recht blijven, mag ondergaan.

Trouwens, ook bij **4** zou dat bezwaar gelden, daar hierbij voor het teekenen meestal gebruik wordt gemaakt van z.g. **coördinatenpapier,** dat is papier waarop een of ander functienet is gedrukt. Wanneer dat net door krimpen ongelijkmatig zou vervormen, zou de 3e bundel niet uit rechten, maar uit krommen moeten bestaan.

§ 30. Conclusie. Bij een beschouwing van figuur **11** blijkt, dat het schaalnomogram, bij de onderlinge vergelijking der voorstellingswijzen, op acht van de twaalf punten van vergelijking het gunstigst naar voren treedt.

Opgeteld verhoudt zich de waardeering in de vier kolommen als 40 : 48 : 80 : 60.

Daar de punten van vergelijking geen gelijke mate van belangrijkheid bezitten en de waardeering slechts globaal kon zijn, heeft de genoemde verhouding niet anders dan betrekkelijke waarde.

Uit de voorafgaande beschouwingen is echter duidelijk gebleken dat het schaalnomogram in vele opzichten boven de andere voorstellingswijzen te verkiezen is.

Wegens de beperking die ik mij heb opgelegd, zal daarom alleen de constructie van die voorstellingswijze hier behandeld worden. In de volgende hoofdstukken zal dus een volledige uiteenzetting worden gegeven van de wijze, waarop schaalnomogrammen voor betrekkingen tusschen drie veranderlijken moeten worden berekend en geconstrueerd.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

DEEL II.

FUNCTIESCHALEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN.

HOOFDSTUK 7.

Veranderlijken, functies en functievergelijkingen.

§ 31. De reeks waarden, welke een veranderlijke kan aannemen, noemen wij het *bereik* van die veranderlijke.

Onder het *absolute bereik* verstaan wij dan het *verschil* tusschen de grootste en kleinste waarde van de veranderlijke, onder het *relatieve bereik* het *quotient* van die grenswaarden.

Bestaat er tusschen twee of meer veranderlijken een betrekking, zoodanig, dat uit de gegeven waarden van op één na alle veranderlijken, de waarde van de overblijvende veranderlijke kan worden bepaald, dan noemt men deze laatste een **functie** van de overige veranderlijken.

Een functie van $\mathbf{z}$ wordt voorgesteld door $f(z)$, in de Nomografie korter door een enkele letter, bij voorkeur door f, g, F of G; ook worden de letters, E, H, K, φ ψ, ξ, ζ, Φ en Ψ gebezigd.

Functies van $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, enz. worden voorgesteld door f_1, f_2, enz. of door g_1, g_2, enz. enz. Een functie van $\mathbf{z}_1$ én $\mathbf{z}_2$ wordt aangeduid door f_{12}, g_{12}, enz.

§ 32. Wordt een functie of veranderlijke gelijkgesteld aan een andere functie of veranderlijke, of aan een bepaalde waarde, dan ontstaat een **vergelijking** of **formule.** Staat eenerzijds van het gelijkteeken een der veranderlijken, anderzijds een functie van de overige veranderlijke(n), dan zeggen wij dat die vergelijking de eerstgenoemde veranderlijke **explicite** als functie van de overige voorstelt.

Zijn twee functies aan elkaar gelijk gesteld, of komen aan één kant van het gelijkteeken eenige veranderlijken te zamen in een functie voor, dan zegt men dat de vergelijking die veranderlijken **implicite** als functies van elkander voorstelt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Wanneer in een vergelijking, welke een betrekking tusschen *twee* veranderlijken voorstelt, aan beide zijden van het gelijkteeken slechts een der veranderlijken of een functie daarvan voorkomt, dan noemen wij dat een **vergelijking met gescheiden veranderlijken.** Voor een betrekking met twee veranderlijken is dus de explicite wijze van voorstelling hiervan een bijzonder geval.

§ 33. Een betrekking tusschen twee veranderlijken kan dus als vergelijking worden aangeduid:

explicite ten opzichte van z_2, door $z_2 = f_1$,

implicite, door $F_{12} = 0$,

met gescheiden veranderlijken, door $f_1 = f_2$.

De letters F, G, φ en ψ worden bij voorkeur dán gebezigd, wanneer de functie op een of andere wijze gebonden is aan bepaalde waarden of aan bepaalde andere functies. Twee functies van geheel denzelfden vorm, doch alleen verschillend in de veranderlijken, welke onderscheidenlijk z_1 en z_2 zijn, worden b.v. aangeduid met F_1 en F_2.

Kan uit een vergelijking

$$z_1 = F_2$$

worden afgeleid

$$z_2 = F_1$$

, dan noemen wij die betrekking **symmetrisch** ten opzichte van de beide veranderlijken.

Zoo is b.v. de betrekking tusschen sinus en cosinus van eenzelfden hoek symmetrisch, want als

$$\sin \varphi = z_1$$
$$\cos \varphi = z_2$$

is

$$z_1 = \sqrt{1 - z_2^2} \qquad \text{en} \qquad z_2 = \sqrt{1 - z_1^2}.$$

§ 34. Bij de constructie van schaalnomogrammen is het noodig de gegeven vergelijking zoodanig te herleiden, dat de veranderlijken in den nieuwen vorm op een bepaalde wijze verbonden, of beter gezegd, gescheiden zijn. Hoe dat verband moet wezen wordt aangegeven door een zoogenaamde **functievergelijking.**

Zulk een functievergelijking is bijvoorbeeld

$$f_1 g_3 + f_2 = f_3$$

, aangevende, dat de eerste term moet bestaan uit het product van een functie van de eerste en een functie van de derde veranderlijke; de tweede term een functie moet zijn van de tweede veranderlijke en het tweede lid weer een functie moet zijn van de derde verander-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

lijke. De twee functies van de derde veranderlijke, g_3 en f_3, mogen in 't algemeen niet lineair verwant zijn. Welke veranderlijke in de voor te stellen betrekking aangeduid wordt als 1e veranderlijke, enz., is veelal onverschillig.

Een vergelijking, welke op die wijze in den vorm van een of andere functievergelijking geschreven is, noemen wij weer een **vergelijking met gescheiden veranderlijken.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 8.

Functieschalen.

§ 35. Een functieschaal kan beschouwd worden als een dubbelschaal, waarvan een der schalen is weggelaten. Die weggelaten schaal is de metrische schaal, welke, in den vorm van een maatlatje, bij de constructie werd gebezigd.

De veranderlijke, welke door de metrische schaal wordt voorgesteld, duiden wij aan door **x** of **y**, zoo noodig ook wel door **p**, **q**, **r**, **u** of **v**.

Deze letters duiden bijgevolg ook de afstand in centimeters aan, gemeten van den oorsprong tot het betreffende schaalpunt.

Een functieschaal stelt dus een betrekking voor, als bij voorbeeld

$$f = 4z^2 + 7$$

Over 't algemeen wordt alleen het laatste lid genoemd; wij spreken dus van een functieschaal (voor) $4z^2 + 7$.

Behalve $[z]$ wordt ook de notatie $[f]$ voor zulk een schaal gebezigd.

De **oorsprong** van een functieschaal is het schaalpunt waarvoor $f = 0$; het **nulpunt** is het schaalpunt waarvoor $z = 0$.

De waarde van **z**, waarvoor **f** minimum is, wordt aangeduid door de grieksche letter α, die, waarvoor **f** maximum is, door de grieksche letter ω. De waarden $f(\alpha)$ en $f(\omega)$ worden **kleinste en grootste functiewaarde genoemd.** Het is natuurlijk de bedoeling dat α en ω binnen het bereik van **z** liggen, gewoonlijk zijn het de grenswaarden van dat bereik.

Het verschil van de grootste en kleinste functiewaarde heet **functielengte** of **functiebereik** en wordt aangeduid door de letter **k.** Dus:

$$f(\omega) - f(\alpha) = k \qquad (1)$$

De functielengte is steeds positief.

§ 36. Wanneer voor een bepaalde functie een schaal moet worden geconstrueerd, dan mogen wij, binnen zekere grenzen, meestal zelf de lengte van de schaal kiezen.

Om de gewenschte lengte te verkrijgen, voeren wij een z.g.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

modulus in. Deze is een lengte, in c.m. gemeten, en wordt aangeduid door de grieksche letter μ.

Voor het construeeren van de functieschaal wordt dan de formule

$$x = \mu f \qquad (2)$$

gebruikt.

De grootte van μ wordt als volgt bepaald. Noemen wij de schaallengte, — in c.m gemeten —, welke, in verband met het beschikbare papier-oppervlak of met de verlangde nauwkeurigheid, ongeveer gewenscht is, **L**, dan berekenen wij den modulus uit

$$\mu \approx \frac{L}{k}\ ^{1}) \qquad (3)$$

Voor μ nemen wij dan de naastbijgelegen ronde waarde.

§ 37. Voorbeeld. Een schaal te construeeren, lang ongeveer 12 cm., voor $\sqrt{z^3}$ tusschen $z = 2$ en $z = 9$. (zie figuur **12**).

Constructie: Dus is hier $\alpha = 2$, $\omega = 9$ en $L = 12$. Bijgevolg:

$$k = 9^{3/2} - 2^{3/2} \approx 24{,}2$$

en dus

$$\mu \approx \frac{12}{24{,}2}, \text{ stel} = 0{,}5.$$

De ligging der schaalpunten wordt dus berekend uit

$$x = 0{,}5 \cdot \sqrt{z^3}.$$

Wij voeren de berekening eerst uit voor de geheele waarden van z. Wanneer deze hoofddeelpunten geteekend zijn, hebben wij een overzicht van de schaal en kunnen uitmaken hoeveel tusschendeelpunten gewenscht zijn. Dat aantal zal tusschen elke twee hoofddeelpunten bij voorkeur 2, 5 10 of 20 moeten bedragen.

In ons geval nemen wij er 10.

Wij berekenen en teekenen dan eerst nog de deelpunten voor de waarden 2,5; 3,5; 4,5; enz.

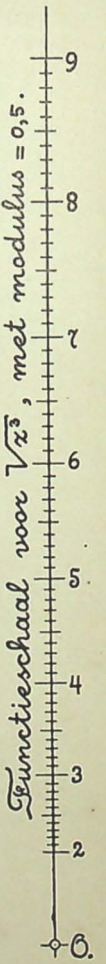


Fig. 12.

Wanneer de opvolgende schaaldeelen nu niet te veel in lengte verschillen, dan behoeven de verdere deelpunten niet meer te worden berekend, maar kunnen deze ook grafisch worden bepaald.

---

[1]) Voor „(is) ongeveer gelijk aan" zullen wij het teeken $\approx$ gebruiken.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Daartoe wordt op zeer doorschijnend papier een waaier geteekend in den vorm van figuur **13.** Daarvoor worden op een rechte hulplijn drie gelijke stukken uitgezet, waarvan het middelste weer in een aantal gelijke deelen (in ons geval 5) wordt verdeeld. Uit een punt P, ongeveer tegenover het midden gelegen, worden stralen getrokken naar de deelpunten.

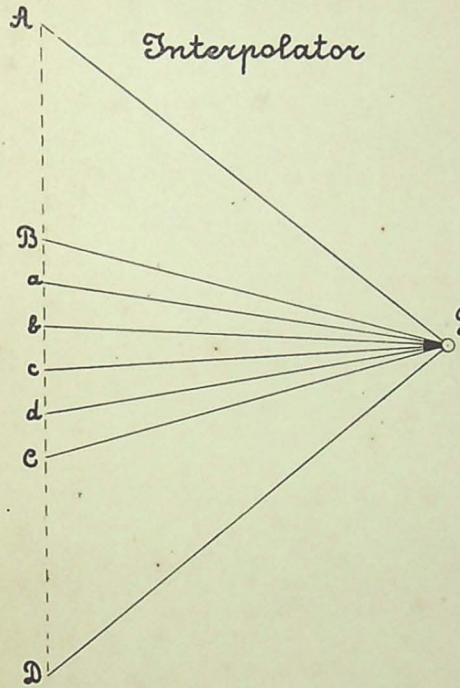


Fig. 13.

Deze **interpolator** wordt zoodanig op de schaal gelegd dat de hoofdstralen PA, PB, PC en PD door vier opeenvolgende deelpunten gaan (figuur **14**). Geheel nauwkeurig zal dat over 't algemeen niet kunnen plaats hebben, alsdan moet er voor gezorgd worden, dat de beide binnenste hoofdstralen zuiver op de deelpunten vallen en de afwijking van de twee buitenste stralen tegengesteld, en, wat de grootte betreft, zooveel mogelijk in verhouding tot de lengte van de schaaldeelen is.

Door nu de snijpunten met de andere stralen door te prikken, verkrijgen wij op het middelste schaaldeel een onderverdeeling in 5 deelen.

De aldus gemaakte schaalverdeeling verschilt practisch niet van een geheel door berekening verkregen verdeeling.

Om ook de uiterste deelen van de schaal op deze wijze van de onderverdeeling te kunnen voorzien, is het noodig, hetzij om de juist buiten de grenzen gelegen hoofddeelpunten te bepalen, hetzij om de ligging van enkele der gezochte onderverdeelingen te berekenen, waarna de overige weer met behulp van den interpolator kunnen worden bepaald.

Wanneer de oorsprong buiten het teekenpapier valt, moeten, in

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

plaats van de afstanden tot dien oorsprong, de afstanden tot een ander punt van de schaal berekend worden en deze van dat punt af worden uitgezet.

Wordt voor dat punt het schaalpunt α gekozen en stellen wij een

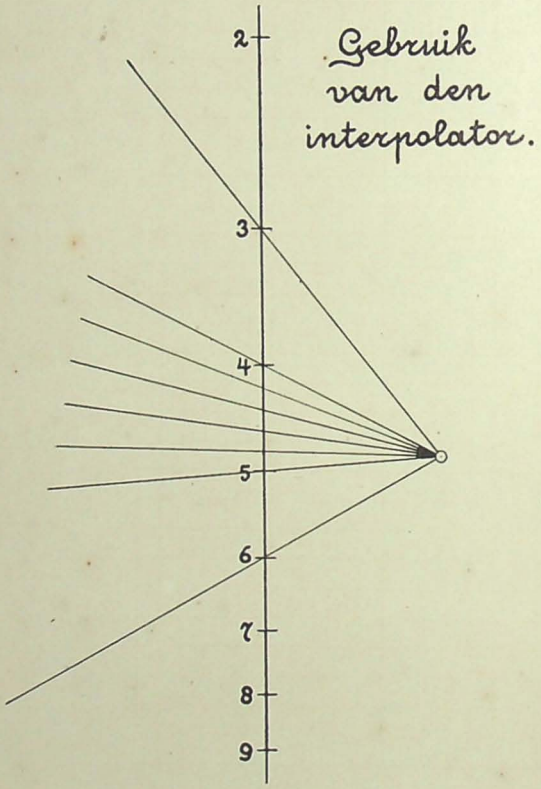


Fig. 14.

willekeurige waarde van z, binnen het bereik, voor door de griekse letter η, dan worden de uit te zetten afstanden berekend uit

$$x = \mu \{f(\eta) - f(\alpha)\} \qquad (4)$$

§ 38. Vergelijkende beschouwing van snijkromme en functieschaal.

In figuur **15** is, zoowel door een snijkromme op een regelmatig net, als door een dubbelschaal, de betrekking voorgesteld, welke

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Gemiddelde groei van jongens

voorgesteld door een snijkromme en een functieschaal.

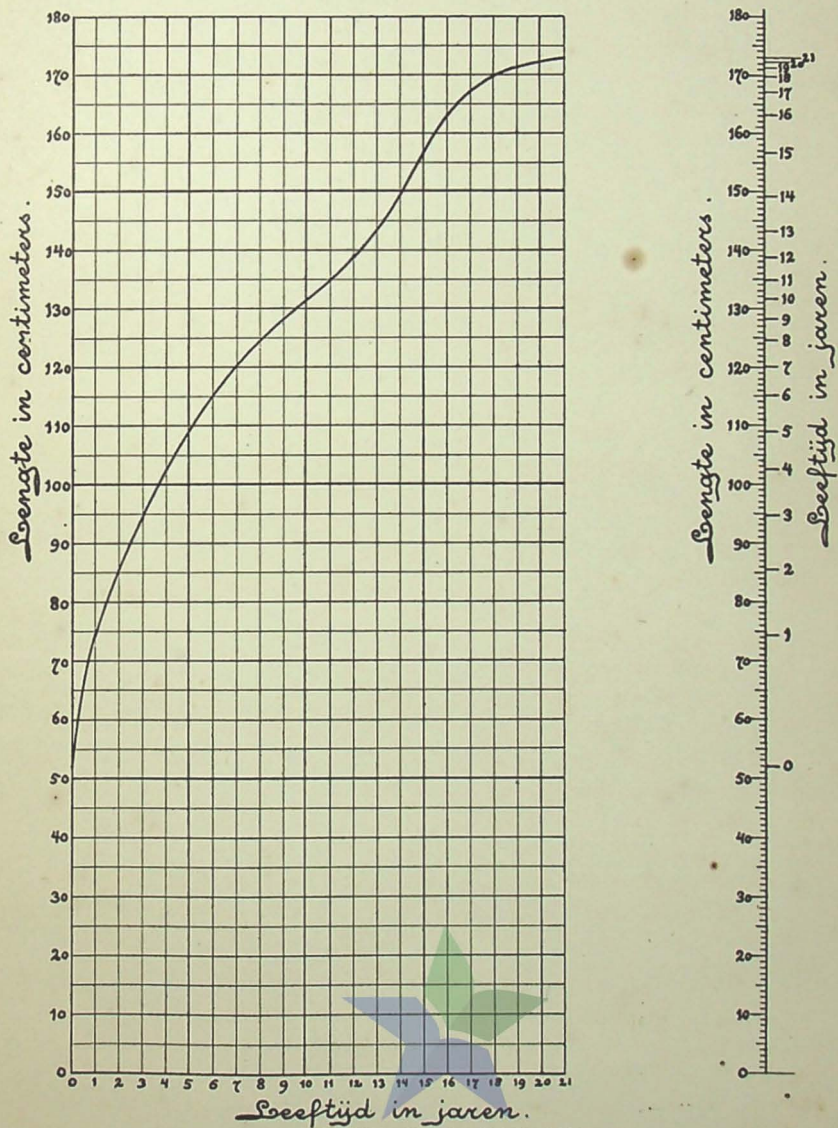


Fig. 15.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

bestaat tusschen den leeftijd en de gemiddelde lengte van den mannelijken mensch. [1])

Nemen wij aan, dat wij deze betrekking rechtstreeks konden nagaan uit den groei van een „model"-mensch, en wel, door van de geboorte tot den volwassen leeftijd, elk jaar (en c. q. elke maand) diens lengte door een streep op een muur aan te duiden, dan zouden wij op die wijze een *functieschaal* verkregen hebben, welke de *primaire voorstelling* van de betrekking zou zijn.

Plaatst men naast die streepjes een meetlat, dan ontstaat een dubbelschaal, waarvan wij een afbeelding zien in figuur **15** rechts.

De voorstelling door een functieschaal is in dit geval dus de meest voor de hand liggende. Het verloop van de betrekking wordt door haar minstens even duidelijk weergegeven als door de snijkromme, waarmede wij echter door menigvuldiger toepassing meer vertrouwd zijn geraakt.

Uit de functieschaal is met één oogopslag te zien, hoe de groei van de geboorte tot 8 à 9 jarigen leeftijd afneemt, daarna weer toeneemt tot het 14e à 15e levensjaar en ten slotte weer geringer wordt, tot, op ongeveer 21-jarigen leeftijd, de volwassen lengte wordt bereikt.

Snellere groei wordt bij de functieschaal door grootere schaaldeelen, bij de snijkromme door stijlere helling weergegeven.

Wat de aflezing betreft, raad ik aan met beide voorstellingswijzen eenige waardenstellen te bepalen.

Dan zal men bemerken hoe omslachtig die aflezing bij de snijkromme toch eigenlijk is. Laten wij bv. zoeken, welke lengte normaal is voor een leeftijd van 8 jaar en 4 maanden. Wij bewandelen dan met onzen blik den volgenden weg:

Zoek onderaan de getallen 8 en 9, volg de strook daartusschen naar boven, interpoleer op $^1/_3$ (4 maanden) van de strookbreedte, bepaal het snijpunt van die denkbeeldige lijn met de kromme, bepaal de ligging van dat punt in de horizontale strook, volg deze strook naar links, zie hoe de ligging is van deze strook ten opzichte van de getallen 120 en 130, bedenk dan weer welke ligging het snijpunt had in de horizontale strook en interpoleer om de gezochte waarde, ongeveer 126, te verkrijgen.

---

[1]) Hierbij is het gemiddelde genomen van onderzoekingen in verschillende Noord-Europeesche landen. O.a. is gebruik gemaakt van de gegevens in de studie van *Georg Krogh-Jansen*. „Der Unterschied im männlichen und weiblichen Entwicklungstempo und seine Bedeutung für die moderne Koëdukationsfrage". Archiv für die Gesamte Psychologie XLV. Band.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

§ 39. Projectief verwante functieschalen.

Zij in figuur **16** OA een functieschaal voor de functie f, met modulus μ. O is de oorsprong.

Wij projecteeren deze schaal uit P op een willekeurig gelegen drager O'A' en trekken de hulplijnen PV en PV' evenwijdig aan de twee dragers.

Nu is voor elk willekeurig schaalpunt X:

$$\triangle PVX \sim \triangle X'V'P$$

en dus is

$$VX \,.\, V'X' = PV \,.\, PV' = \text{constant.}$$

Stel dit constante product $= c$ en de afstanden $OV = a$ en $O'V' = b$.

O' is den willekeurig aangenomen oorsprong van de schaal O'A'.

OX is gelijk aan μf.

Stel O'X' gelijk aan de functie F.

Dan is dus

$$(\mu f - a)(F - b) = c$$

of

$$\mu fF - \mu bf - aF + (ab - c) = 0.$$

Met invoering van nieuwe coëfficienten is dus in 't algemeen:

$$\alpha fF + \beta f + \gamma F + \delta = 0 \qquad (5)$$

; hetgeen een z.g. **bilineaire betrekking** tusschen de functies f en F is.

De schalen $[f]$ en $[F]$ worden ten opzichte van elkaar **projectief** genoemd. Deze verwantschap wordt aangeduid met het teeken $\overline{\wedge}$.

De ligging van de twee schalen als in figuur **16**, dus zoo, dat alle verbindingslijnen van gelijkgenummerde schaalpunten *concurrent* zijn, d.w.z. allen door één gemeenschappelijk punt, — de pool of het toppunt —, gaan, heet **perspectief**.

Deze ligging wordt steeds verkregen, wanneer wij twee gelijkgenummerde schaalpunten van de onderling projectieve schalen tot samenvalling brengen.

De perspectieve ligging van twee of meer onderling projectieve schalen wordt aangeduid door het teeken $\wedge$.

Bij het ontwerpen van schaalnomogrammen wordt van de beschreven projectieve wijze van constructie van schalen menigmaal gebruik gemaakt.

§ 40. Projectieve schaal.

Is f een lineaire functie en dus [f] regelmatig, dan wordt de daaruit door projectie verkregen schaal (waarbij natuurlijk de twee-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

schalen niet evenwijdig mogen zijn), een **projectieve schaal** genoemd.

Met gebruikmaking van andere coëfficienten blijkt uit (5), dat de projectieve schaal de functie voorstelt:

$$F = \frac{Az + B}{Cz + D} \qquad (6)$$

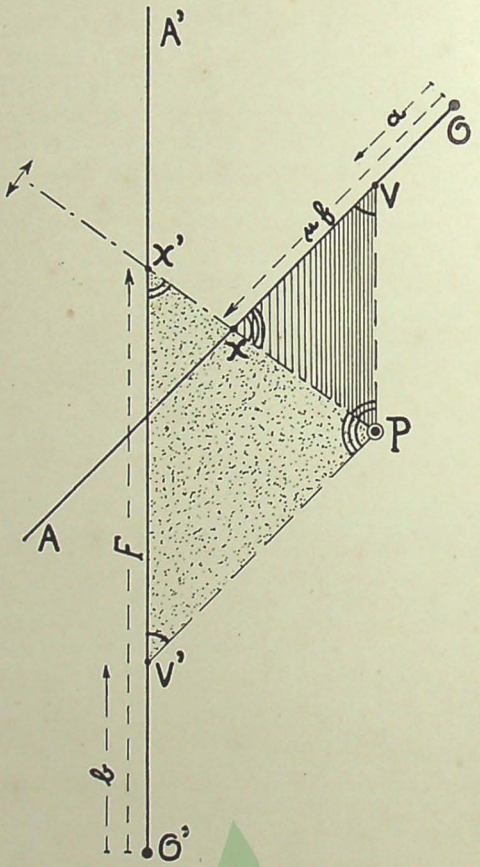


Fig. 16.

Projectief is o.a., de, bij electrische weerstandsmeting met de brug van Wheatstone, gebezigde schaal langs den meetdraad. De verhouding van de twee lengten, waarin het contact den meetdraad ver-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

deelt, is de veranderlijke. Met den oorsprong aan een der draadeinden is dus de functie van de schaal:

$$F = \frac{Az}{z+1} \qquad (7)$$

, waarin A de geheele lengte van den draad is. Deze schaal heet **segmentaire schaal** (figuur **17**).

Projectief is eveneens de **reciproke schaal** (figuur **17**). Deze stelt een functie voor

$$F = \frac{1}{z} \qquad (8)$$

Bij een reciproke schaal ligt het nulpunt ($z = 0$) in het oneindige.

Wanneer een verdeeling ten opzichte van den oorsprong verschoven, of in haar geheel vergroot of verkleind wordt, blijft toch haar karakter ongewijzigd. In den vervolge zal steeds de eenvoudigste formule worden gegeven, het is echter geoorloofd deze lineair te veranderen, b.v. de formule (8) tot $F = \frac{a}{z} + b$.

§ 41. Macht-schalen.

Onder macht-schalen verstaan wij de schalen voor functies

$$F = z^n \qquad (9)$$

waarin **n** elke reëele waarde mag hebben.

Voor $n = 1$ wordt de schaal *regelmatig*, voor $n = -1$ *reciproke* (figuur **17**).

Andere veel toegepaste machtschalen zijn de **kwadratische schaal,** als $n = 2$ en de **omgekeerd-kwadratische schaal** als $n = -2$, verder de schalen voor $\sqrt{z}$ en $\frac{1}{\sqrt{z}}$, dus voor $n = \frac{1}{2}$ en $n = -\frac{1}{2}$. Van de laatstgenoemde vier schalen geeft figuur **17** eveneens voorbeelden.

§ 42. Logarithmische schaal.

Volgens den grondslag van het Neperiaansche logarithmenstelsel is voor limiet $n = 0$.

$$ln\, z = \frac{z^n - 1}{n} \qquad (10)$$

De **logarithmische schaal** voor de functie

$$F = \log z \qquad (11)$$

, kan dus als een macht-schaal beschouwd worden, waarbij de

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

machtsfunctie symbolisch kan worden voorgesteld door z^0 (figuur **17**).

Deze schaal neemt in de Nomografie een zeer bevoorrechte plaats in, hetgeen zij te danken heeft aan de volgende bijzondere eigenschappen:

1°. *Gelijke verhoudingen worden door gelijke schaallengten weergegeven.*

voor $z = k\eta$ is $F = \log \eta + \log k$

„ $z = \eta$ is $F = \log \eta$

Dus is: $F(k\eta) - F(\eta) = \log k$

Is k constant, dan is dus ook de schaallengte tusschen de schaalpunten $z = \eta$ en $z = k\eta$ constant.

Deze eigenschap maakt dat een logarithmische schaal altijd dadelijk te herkennen is. Zoo is er bv. een gelijken afstand tusschen de schaalpunten voor 2 en 3, 4 en 6, 10 en 15, of 5 en 7,5; omdat

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{15}{10} = \frac{7{,}5}{5}.$$

Op verschillende deelen van de schaal geeft deze eigenschap aanleiding tot een, — afgezien van de nummering —, geheel gelijke verdeeling.

Zeer opvallend is dat voor de gedeelten, waarvoor de verhouding k gelijk is aan 10. (zie figuur **17**).

2°. *De relatieve nauwkeurigheid van aflezing is over de geheele lengte van de logarithmische schaal constant.*

Dit is een gevolg van de onder 1° genoemde eigenschap. Wordt b.v. een ter hoogte van $z = 1000$ gelegen waarde afgelezen tot in eenheden nauwkeurig, dan zal een waarde in de nabijheid van $z = 10$ tot op $^1/_{100}$ eenheid kunnen worden afgelezen.

Dus voor beide aflezingen is er dan een relatieve nauwkeurigheid van 1 $^0/_{00}$.

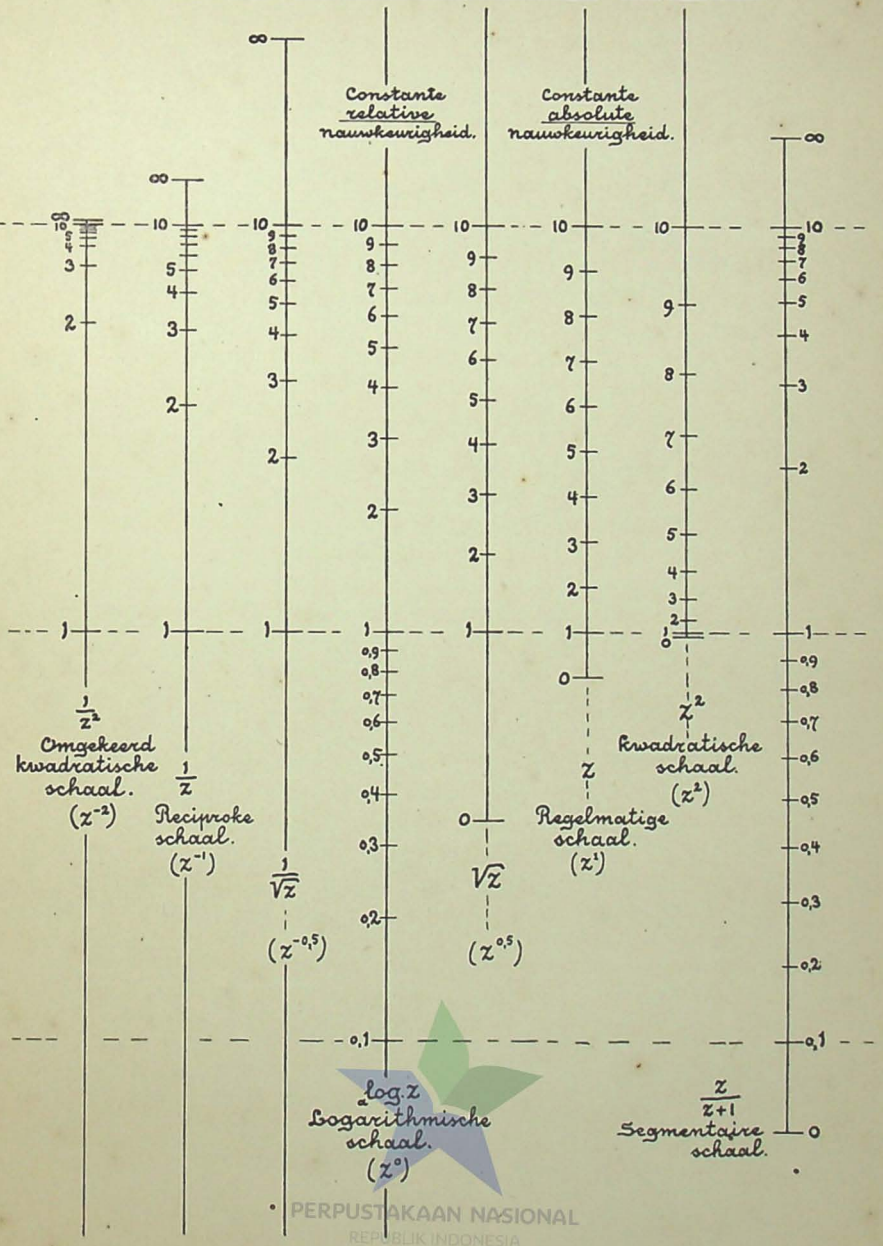
De gewone *regelmatige schaal* heeft over haar geheele lengte een *constante absolute afleesnauwkeurigheid*. D.w.z. dat men b.v. bij 1000 en bij 10 beiden tot op $^1/_{10}$ eenheid nauwkeurig kan aflezen.

De regelmatige schaal heeft daarom het bezwaar, dat voor de kleinere waarden de aflezing dikwijls niet met voldoende nauwkeurigheid kan plaats hebben.

Wanneer een *groot relatief bereik* moet worden voorgesteld, *verdient dus de logarithmische schaal de voorkeur* boven de regelmatige.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Enkele Functieschalen.



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Fig. 17.

3°. In de techniek worden zeer veel formules gebruikt, waarin het eerste lid het gedurig product is van machten der veranderlijken. B.v.

$$az_1^m z_2^n = z_3$$

Nemen wij de logarithmen, dan is

$$(m \log z_1 + \log a) + n \log z_2 = \log z_3$$

en wij verkrijgen dus een functievergelijking van het type

$$f_1 + f_2 = f_3$$

, welke door een eenvoudig nomogram, bestaande uit drie evenwijdige logarithmische schalen, is voor te stellen.

§ 43. Constructie van logarithmische schalen.

Hebben wij van een logarithmische schaal eenmaal een gedeelte voor een verhouding 10 geteekend, dan behoeven wij dit stuk slechts een of meermalen, geheel of gedeeltelijk, te herhalen, om de schaal voor het geheele bereik van z te verkrijgen.

Een logarithmische schaal van 1—10, 10—100, enz. noemen wij daarom een **logarithmische schaaleenheid.** Een andere naam daarvoor is **Manteb,** door Dr. P. SCHREIBER afgeleid van „Mantissebereich". Als verkorte aanduiding daarvan zullen wij de hoofdletter **M** bezigen, zoo noodig voorzien van de indices der veranderlijken.

Op rekenlinialen komen logarithmische schaaleenheden voor van 7.5; 10; 12,5; 15; 20 en 25 cm. Ook zijn er driekantige schaalstokken met verschillende logarithmische schaaleenheden. Deze worden o.a. vervaardigd door A. W. FABER te *Stein* bij *Neurenberg,* DENNERT en PAPE te *Altona* en door TAVERNIER-GRAVET te *Parijs.*

Wanneer μ tusschen zekere grenzen naar verkiezing kan worden aangenomen, verdient het zeker de voorkeur, een dezer waarden van rekenliniaal of schaalstok voor de schaaleenheid te bezigen.

Bij het vervaardigen van nomogrammen zal het echter dikwijls voorkomen, dat een logarithmische verdeeling met een andere, willekeurige, schaaleenheid moet worden geteekend.

Soms is het dan mogelijk een dergelijke schaal, met behulp van projectie, uit een reeds op het teekenvel aanwezige logarithmische schaal te verkrijgen.

Zoo niet, dan maken wij gebruik van een **logarithmische harp.** In figuur **18** is, op doorschijnend papier, zulk een harp (of waaier) gedrukt voor schaaleenheden van 2 tot 16 cm., in figuur **19** een **verkorte logarithmische harp** voor schaaleenheden van 16 tot 40 cm. [1])

De vereischte schaal kan daarmede geteekend worden:

[1]) Van beide harpen bevindt zich een tweede exemplaar achterin het boek.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Logarithmische harp.

voor schaaleenheden van 2 tot 16 centimeter.

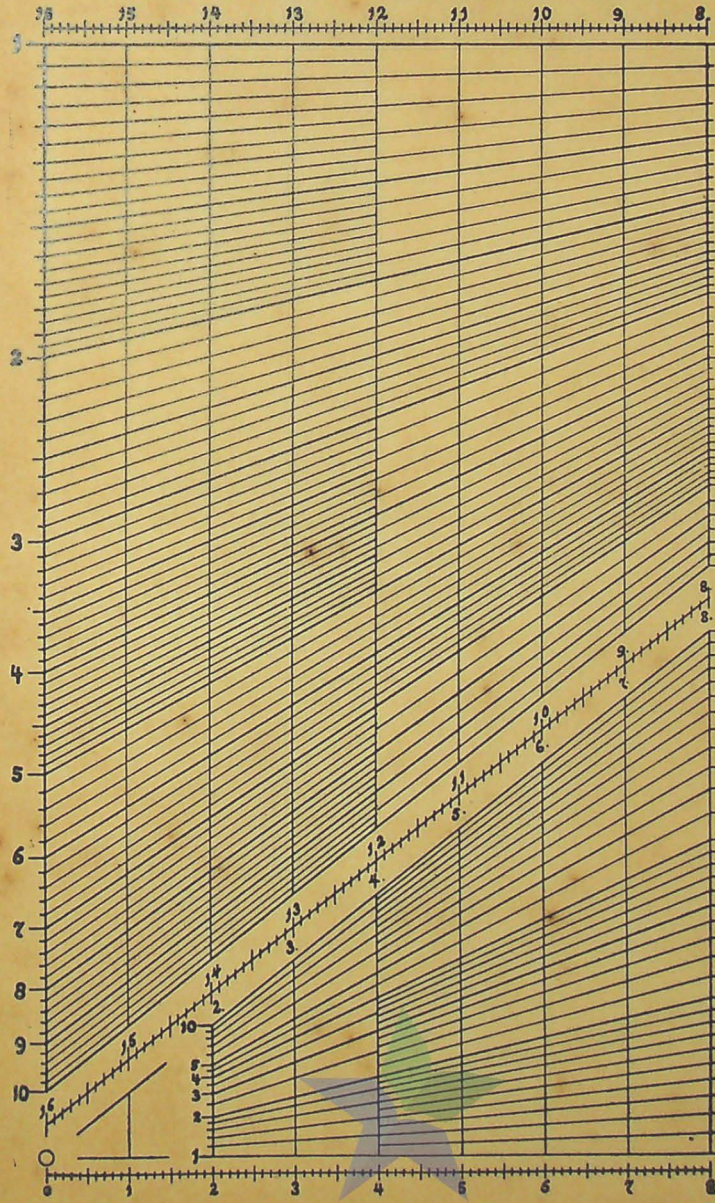


Fig. 18

Waarschuwing: Rekening houden met mogelijk gekrompen zijn van dit papier !!

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1°. door de harp ter juister plaatse op de teekening te leggen en de schaal door te prikken.

2°. door de harp, op de plaats van de over te nemen schaaleenheid, scherp om te vouwen en de verdeeling langs de vouw op de teekening over te nemen.

Het spreekt van zelf, dat de over te nemen schaaleenheid evenwijdig moet zijn aan de basis van de harp.

Voor het teekenen van de grootere schaaleenheden, n.l. die van 16 tot 40 c.m., wordt de verkorte logarithmische harp van figuur **19** gebezigd. Deze heeft slechts een schaallengte van 20 tot 50, dus voor een verhouding $2^1/_2$. De overige schaalstukken, n.l. die van 10 tot 20 en van 50 tot 100, zijn daarmede echter eveneens te verkrijgen.

§ 44. Onderlinge vergelijking van enkele functieschalen.

In figuur **17** zien wij enkele voorbeelden van de besproken functieschalen bijeen. Om deze te kunnen vergelijken zijn de moduli zoo gekozen, dat bij allen het bereik van 1 tot 10 op dezelfde schaallengte wordt voorgesteld. [1])

Verder is van links naar rechts de exponent opklimmend, links van de logarithmische schaal is hij negatief, rechts daarvan positief. Geheel rechts is een *segmentaire schaal* afgebeeld.

Naar de logarithmische schaal toe, zien wij, links het oneindige genummerde schaalpunt, rechts het nulpunt, steeds verder af liggen.

Op de logarithmische schaal en links daarvan, ligt het nulpunt in het oneindige; op de logarithmische schaal en rechts daarvan, ligt het oneindig genummerde punt in het oneindige.

Om te kunnen nagaan of een functieschaal geschikt is voor de voorstelling van een bepaalde veranderlijke, moeten wij weten welke waarde daarvan, naar schatting het meest wordt gebezigd. Wij

[1]) Hiertoe werd gebruikt de constructieformule

$$x = \frac{z^n - 1}{10^n - 1} \qquad (12)$$

Deze is lineair verwant met (9).

Voor z^n kan bij ontwikkeling in een reeks geschreven worden:

$$z^n = 1 + n\,ln\,z + \frac{n^2}{2!}\,ln^2 z + \ldots\ldots$$

Voor limiet $n = 0$ kunnen wij volstaan met de eerste twee termen van de reeks, formule (12) gaat dan over in

$$x = \frac{n\,ln\,z}{n\,ln\,10} = \frac{ln\,z}{m} = {}_{10}\log z \qquad (13)$$

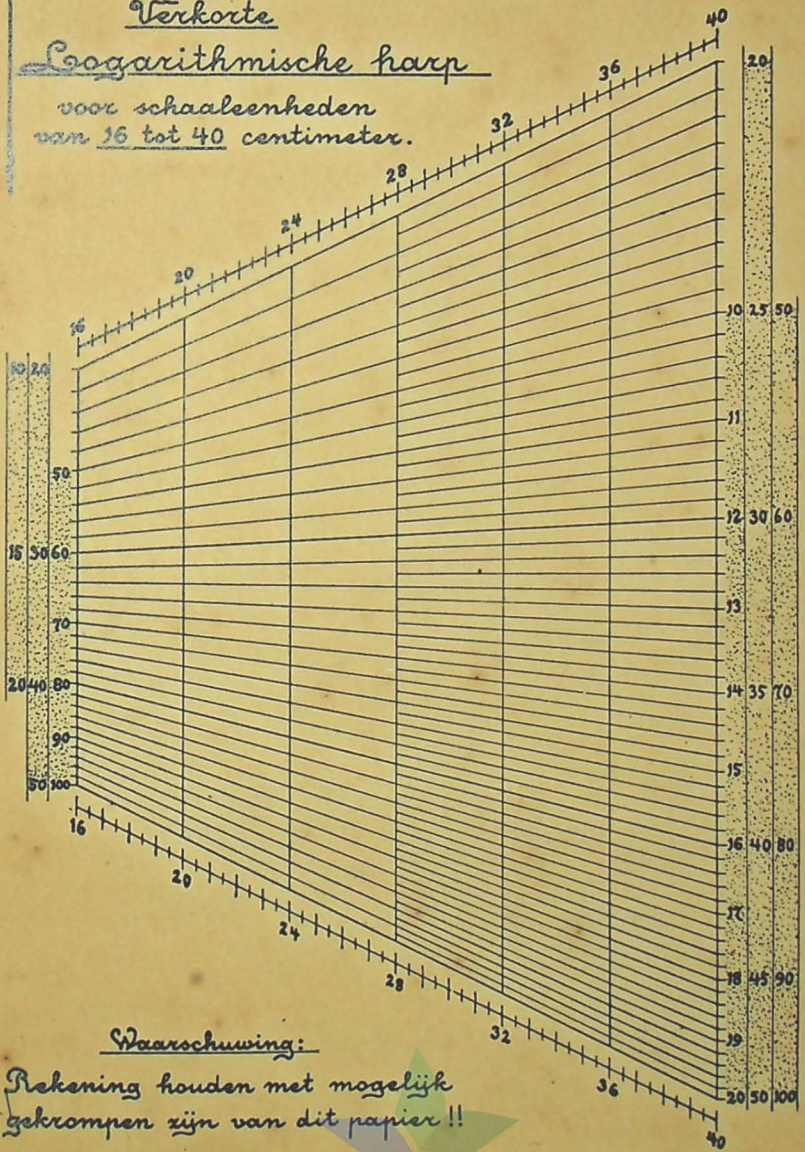
waarin $m = ln\ 10 = 2,30259\ldots$.

Onverschillig welke waarde n heeft, is dus steeds voor $z = 1$, $x = 0$ en voor $z = 10$, $x = 1$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Verkorte Logarithmische harp

voor schaaleenheden van 16 tot 40 centimeter.



Waarschuwing:

Rekening houden met mogelijk gekrompen zijn van dit papier !!

Fig. 19.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

duiden die waarde aan met de grieksche letter ν (nu). Deze is dan de *gewenschte middenwaarde* van de schaal. Bijgevolg moet

$$f(\nu) \approx \frac{f(a) + f(\omega)}{2} \tag{14}$$

Bij een regelmatige schaal, moet dus

$$\nu \approx \frac{a + \omega}{2} \tag{15}$$

bij een logarithmische schaal,

$$\nu \approx \sqrt{a\omega} \tag{16}$$

en bij een reciproke schaal,

$$\nu \approx \frac{2\,a\omega}{a + \omega} \text{ [1)}} \tag{17}$$

, enz.

Omvat het bereik van een veranderlijke de waarden van een eindig getal tot oneindig toe, dan zal meestal een projectieve schaal gewenscht zijn. Komt $z = 0$ niet in dat bereik voor, dan is ook een macht-schaal met een kleine negatieve exponent mogelijk.

---

[1]) Deze drie waarden zijn onderscheidenlijk het rekenkundig, meetkundig en harmonisch gemiddelde van a en ω. Zie ook het in figuur 84 afgebeelde nomogram.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 9.

Dubbelschalen.

§ 45. In hoofdstuk 4 is de dubbelschaal reeds in het kort, in haar verband tot andere voorstellingswijzen, besproken. Wij kunnen ons dus nu bepalen tot het bespreken van de constructie.

Een betrekking tusschen twee veranderlijken kan door een onbeperkt aantal verschillende dubbelschalen worden voorgesteld, daar bij een willekeurige functieschaal voor een der veranderlijken, steeds een bijpassende voor de andere kan worden geconstrueerd.

Hieraan dankt de dubbelschaal haar geschiktheid, om, — bij een door een schalennomogram voorgestelde betrekking tusschen drie veranderlijken —, nevenbetrekkingen van die veranderlijken voor te stellen.

Wij spreken in dat geval van een **gebonden dubbelschaal,** omdat de tweede functieschaal zich dan moet aanpassen aan een reeds aanwezige functieschaal. In tegenstelling daarmede spreken wij van een **vrije dubbelschaal,** wanneer men in de keuze van een der beide functieschalen geheel vrij is.

§ 46. **Constructie van vrije dubbelschalen.**

a. *Wanneer de betrekking gegeven is als een vergelijking met gescheiden veranderlijken* $\mathbf{f_1 = f_2}$.

In het meerendeel van de in de practijk voorkomende formules met twee veranderlijken, zijn deze gemakkelijk te scheiden. Dit is meestal op verschillende wijzen mogelijk, zoodat wij een vorm kunnen kiezen, welke zoo gunstig mogelijke functieschalen geeft en waarbij dus het waardenstel v_1, v_2, ongeveer in het midden ligt.

Die functieschalen worden dan geconstrueerd met de formules

$$\left.\begin{aligned} x &= \mu f_1 \\ x &= \mu f_2 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

, waarbij de modulus μ op de vroeger beschreven wijze uit de beschikbare schaallengte **L** en het functiebereik **k** wordt bepaald.

Voorbeeld.

Wij komen nogmaals terug op de betrekking

$$v = \sqrt{2gh},$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

, welke in figuur **4** door een snijkromme, in figuur **5** door een raakkromme en in figuur **6** door een dubbelschaal is voorgesteld.

Deze betrekking is o.a. op de volgende wijzen met gescheiden veranderlijken te schrijven; de twee schalen $[v]$ en $[h]$ zijn daarbij telkens anders.

	$[v]$	$[h]$
$v = \sqrt{2gh}$	regelmatig	$\sqrt{h}$
$\frac{v^2}{2g} = h$	kwadratisch	regelmatig
$2 \log v = \log h + \log 2g$	logarithmisch	logarithmisch
$\frac{v^2}{v^2 + 2g} = \frac{h}{h + 1}$	$\frac{v^2}{v^2 + 2g}$	segmentair
enz.		

Voor de 4 schalen $[v]$ is v achtereenvolgens ongeveer 5,5; 7; 3,2 en 3,6. Daar voor de stroomsnelheid **v** de meest gebruikte waarde omstreeks 2 à 3 meter per seconde is en de constructie van logarithmische schalen gemakkelijker is dan van andere functieschalen, is voor figuur **6** uitgegaan van den vorm:

$$2 \log v = \log h + \log 2g$$

en zijn ter weerszijden op den drager uitgezet de schalen

$$x = 2\mu \log v$$

en $x = \mu \log h + \mu \log 2g$.

Daar $x = 0$ voor $v = 1$, ligt bij dit schaalpunt de oorsprong van de dubbelschaal.

Andere voorbeelden.

Een zevental dubbelschalen is in figuur **20** bijeen geteekend, onder meer, om door het samenvoegen op één bladzijde te laten zien, dat deze voorstellingswijze weinig ruimte noodig heeft en toch een nauwkeurige aflezing toelaat.

Van links naar rechts stellen deze dubbelschalen de volgende betrekkingen voor:

1°. Herleiding van centimeters tot engelsche duimen (inches): $z_1 = 2{,}53995\ z_2$.

2°. Verband tusschen de hoeveelheid arbeidsvermogen uitgedrukt in Kilowatt (K) en in Paardekrachten (P): $K = 0{,}736\ P$.

3°. Omzetting van temperaturen gemeten in graden Celsius en in graden Fahrenheit: $t_F = 1{,}8\, t_C + 32$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

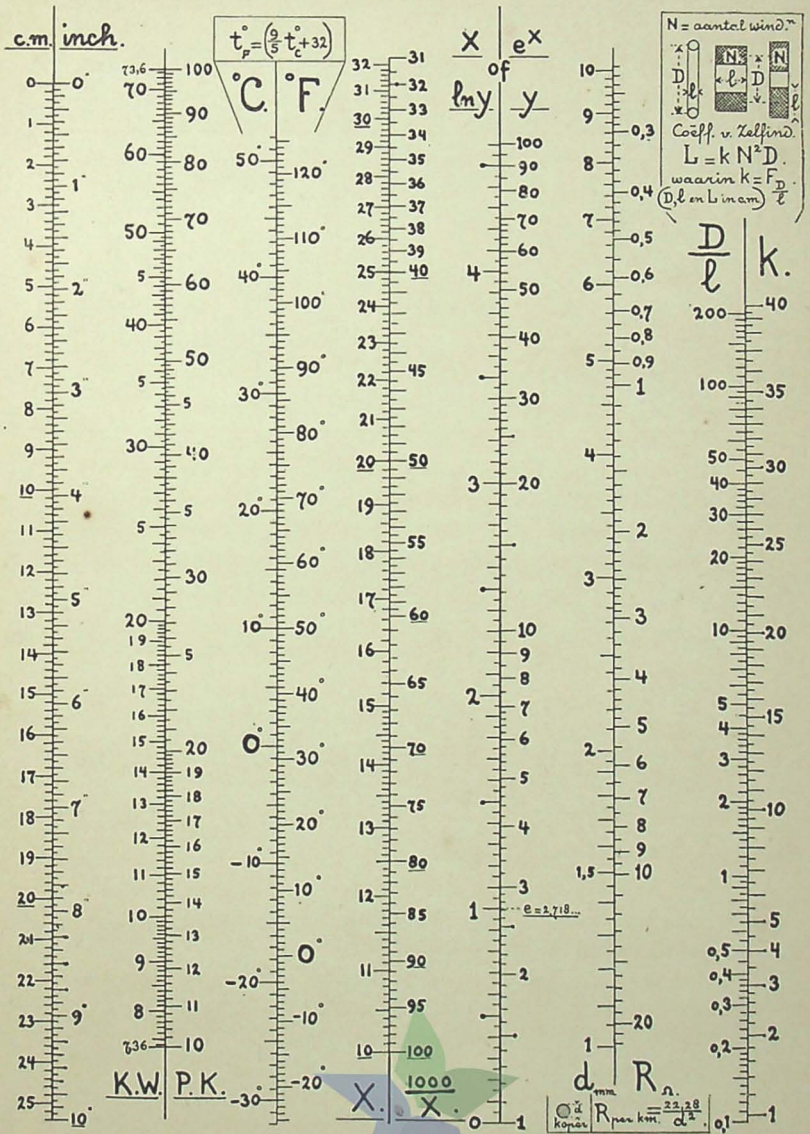


Fig. 20.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

4°. Berekening van reciproke waarden

$$z_2 = \frac{z_1}{1000}.$$

Deze betrekking is symmetrisch (zie § 33). Een dubbelschaal welke een symmetrische betrekking voorstelt, behoeft slechts een bereik te omvatten eenerzijds gaande tot een waardenstel $z_1 = z_2$. In ons geval dus tot $z = \sqrt{1000} \approx 31{,}62$.

5°. Neperiaansche logarithmen van de getallen 1 tot 100 en — omgekeerd — machten van **e** (= 2,718 . . . .) van 0 tot 4,6.

6°. Weerstand van een koperen geleiding van **d** mm. dikte over 1 km lengte

$$R = \frac{22{,}28}{d^2}.$$

De weerstand wordt uitgedrukt in Ω (Ohm). Voor 10 × kleinere (grootere) waarden van *d* wordt R 100 × grooter (kleiner).

Toepassing van deze dubbelschaal:

Een kabel met een kern van 6 koperdraden van 0,4 mm. dikte heeft dus een weerstand van $^1/_6 \times 139 \approx 23{,}3$ Ω per km.

7°. Zie het voorbeeld aan het einde dezer paragraaf.

b. *Wanneer de betrekking gegeven is als een tabel, een grafiek of een vergelijking, waarvan de veranderlijken niet gescheiden kunnen worden.*

In al deze gevallen moeten wij, c.q. met behulp van een grafiek, een tabel afleiden, welke voor één der veranderlijken een uitgebreide reeks van regelmatig opklimmende ronde waarden geeft.

Een **voorbeeld** van een vergelijking, waarvan de veranderlijken niet gescheiden kunnen worden is b.v.

$$a^n = a + n$$

Stellen wij $a^n = z_1$

en $a + n = z_2$

, en geven deze vergelijkingen weer op een z.g. enkel logarithmisch net, waarvoor $x = n$

$y = \log a$

, dan verkrijgen wij daarop een bundel rechten (z_1) en een bundel krommen (z_2). Verbinden wij daarna alle punten waarvoor $z_1 = z_2$ door een kromme, dan is deze de voorstelling van de betrekking tusschen **a** en **n**. Lezen wij nu voor opklimmende ronde waarden van **n** de bijbehoorende waarden van **a** af, dan verkrijgen wij de tabel, welke noodig is voor het vervaardigen van een dubbelschaal.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Deze wordt aldus vervaardigd, dat voor de veranderlijke, welke **niet** door een reeks opklimmende ronde waarden wordt voorgesteld, een functieschaal wordt uitgekozen.

De keuze zal meestal gaan tusschen een regelmatige en een logarithmische schaal, wegens de gemakkelijke constructie van beiden. Is het relatieve bereik van de beide veranderlijken groot, dan zal de logarithmische schaal wel de voorkeur verdienen.

De deelstrepen voor de ronde waarden van de tweede veranderlijke, worden daarna op hunne plaatsen tegenover de gereed zijnde functieschaal geteekend. Is de verdeeling van deze tweede schaal nu nog onvoldoende, dan kunnen de verdere deelpunten met behulp van een interpolator worden bepaald.

Voorbeeld.

De meest rechtsche dubbelschaal van figuur **20** dient voor het bepalen van de zelfinductie van spoelen. De beteekenis van **N**, **l** en **D** is in de figuur boven de dubbelschaal verklaard. De zelfinductie is

$$L = kN^2D,$$

in welke formule **k** een coëfficient is, afhankelijk van $\frac{D}{l}$.

De betrekking tusschen **k** en $\frac{D}{l}$ is door CURSEY uit metingen bepaald. Uit de tabel van gemeten waarden heeft hij een grafische voorstelling afgeleid, bestaande uit een kromme op een regelmatig net.

In figuur **20** is voor $\frac{D}{l}$ een logarithmische schaal gekozen, omdat het bereik tamelijk groot is en overal een gelijke relatieve nauwkeurigheid gewenscht is.

Uit de grafiek van CURSEY zijn daarna voor ronde waarden van **k** de bijbehoorende waarden van $\frac{D}{l}$ bepaald. Uit deze tabel werd aan de andere zijde van den drager de schaal voor **k** verkregen.

Toepassing van de dubbelschaal.

Bereken de zelfinductie van een spoel met 200 windingen, een binnenmiddellijn van 4 c.m., een buitenmiddellijn van 9 c.m. en een breedte van 1,8 c.m.

Dus: $N = 200$ $D = 6,5$ $l = 1,8$

$$\frac{D}{l} = 3,61 \quad \text{dus} \quad k = 13,8,$$

bijgevolg

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$L = 13{,}8 \times 200^2 \times 6{,}5 =$$

$= 3{,}59 \times 10^6$ c.m. (electr. magn.) = 0,00359 heury = 3590 microheury (μH).

§ 47. Constructie van gebonden dubbelschalen.

a. *Wanneer de betrekking gegeven is als een vergelijking met gescheiden veranderlijken* $f_1 = f_2$.

Een der functieschalen heeft nu reeds vooraf een bepaalden vorm [1]). Stel b.v. dat deze geconstrueerd is met de constructieformule $x = \mu g_1$.

Dan zal dus $f_1 = f_2$ herleid moeten worden tot een vergelijking $g_1 = g_2$, waarna $[z_2]$ geconstrueerd kan worden met de formule

$$x = \mu g_2.$$

Voorbeeld.

In figuur **9** moest voor de voorstelling van de betrekking

$$L = \frac{100 \sin \alpha}{r^2}$$

een functieschaal voor α geconstrueerd worden met de formule

$$x = -\mu \log \sin \alpha.$$

Met gebruikmaking van deze functieschaal willen wij voorstellen de betrekking $\operatorname{cotg} \alpha = s$.

Hiertoe herleiden wij deze vergelijking tot

$$-\log \sin \alpha = \tfrac{1}{2} \log (s^2 + 1),$$

zoodat de functieschaal $[s]$ geconstrueerd kan worden met de formule $x = \tfrac{1}{2}\mu \log (s^2 + 1)$.

b. *Wanneer de betrekking gegeven is als een tabel, enz.*

De constructie geschiedt als voor de vrije dubbelschaal is beschreven, met deze beperking, dat nu de schaal voor een der veranderlijken reeds aanwezig is. Bij het bepalen van de reeks waardenstellen moeten dus voor de **andere** veranderlijke de ronde waarden worden genomen.

Op deze wijze heeft ook de constructie plaats van een dubbelschaal, waarbij gebruik moet worden gemaakt van een reeds aanwezige functieschaal op een gebogen drager.

N.B. Aan het einde van Deel II volgt een aantal opgaven voor de constructie van dubbelschalen.

---

[1]) Wij veronderstellen dat de drager recht is; is dat niet het geval, dan wordt de methode volgens **b** gebezigd.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 10.

Indeeling van functievergelijkingen naar hunne Nomografische orde.

§ 48. Wij onderscheiden in de Nomografie twee groepen functievergelijkingen.

a. Uitgaande van de verschillende vormen, welke het schaalnomogram kan hebben, en de constructie daarvan, geraken wij tot eenige **bijzondere of typische functievergelijkingen,** welker karakter bepaald is door twee voorwaarden:

1°. dat zij den uitgangsvorm moeten wezen voor de constructie van het nomogram;

2°. dat zij daarbij zóó eenvoudig moeten zijn, dat men hen gemakkelijk kan onthouden.

b. Het herleiden van een of andere, door een nomogram voor te stellen vergelijking, tot den vorm van een der bijzondere functievergelijkingen (het z.g. *scheiden van de veranderlijken* der gegeven vergelijking), heeft plaats door na te gaan onder welke z.g. **algemeene functievergelijking** die gegeven vergelijking valt. Zulk een algemeene functievergelijking moet:

1°. een zoo groot mogelijke, doch bij voorkeur toch een bepaalde groep van vergelijkingen omvatten, hetzij door een zeer eenvoudigen vorm, hetzij door het bezit van een groot aantal door letters aangegeven, d.w.z. *vrije* coëfficienten.

2°. op eenvoudige wijze herleidbaar zijn tot een der bijzondere functievergelijkingen onder **a** genoemd.

§ 49. De bijzondere en algemeene functievergelijkingen met drie veranderlijken zijn door SOREAU ingedeeld naar hunne **Nomografische orde.**

Wij kunnen dit het best toelichten aan een voorbeeld.

De (bijzondere) functievergelijking voor het z.g. kegelsnedenomogram

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0$$

, behoort tot de **4e orde,** omdat er **4** verschillende functies in voorkomen, n.l. f_1, f_2, f_3 en g_3.

Is in die vergelijking echter $g_3 = af_3 + b$, dan is ze slechts

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nomogramvormen en bijzondere en

type:	bijzondere functievergelijking	nomogr. orde	eenvoud. nom. vorm
II	$f_1 g_3 + f_2 = 0$	3e orde	
III	$f_1 + f_2 = f_3$		
V	$\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$		
VI	$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$		
I	$f_1 g_3 + f_2 = f_3$	4^{e}_{0} orde	
IV	$\frac{1}{f_1 g_3} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$		
IX	$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0$	4e orde	
VIII	$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = f_3$	5e orde	
VII	$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_2 - f_3}{g_2 - g_3}$	6e orde	

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

algemeene functievergelijkingen.

andere vormen	algemeene functievergelijkingen
2 schalen op een kegelsnede + 1 rechte schaal en 3 schalen op een kubische kromme.	*algemeene functievergelijking van de 3e orde:* $Af_1f_2f_3 + B_1f_2f_3 + B_2f_3f_1 + B_3f_1f_2 + C_1f_1 + C_2f_2 + C_3f_3 + D = 0$ (d)
bijzonder geval: de kromme schaal ligt op een cirkelboog (typen I*a* en IV*a*).	*1e algemeene functievergelijking van de 4e orde:* $\Phi_{12}\xi_3 + \Psi_{12} = \varsigma_3$ waarin: $\Phi_{12} = \frac{a_0f_1f_2 + a_1f_1 + a_2f_2 + a_3}{c_0f_1f_2 + c_1f_1 + c_2f_2 + c_3}$ en $\Psi_{12} = \frac{b_0f_1f_2 + b_1f_1 + b_2f_2 + b_3}{c_0f_1f_2 + c_1f_1 + c_2f_2 + c_3}$ (b) *2e algemeene functievergelijking van de 4e orde:* $f_1f_2F_3 + f_1G_3 + f_2H_3 + K_3 = 0$ waarin: $\alpha F_3 + \beta G_3 + \gamma H_3 + K_3 = 0$ (c)
bijzonder geval: de 2 kromme schalen liggen op een gemeensch. drager.	$\Phi_{12}g_3 + \Psi_{12} = f_3$ (a)
bijzonder geval: 2 of 3 kromme schalen liggen op een gemeensch. drager.	

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

schijnbaar van de 4e orde, in werkelijkheid echter van de 3e orde, omdat er, na substitutie van die lineaire betrekking, nog maar 3 verschillende functies in voorkomen.

Evenzoo is de functievergelijking

$$f_1G_3 + f_2H_3 = F_3$$

niet van de 5e, maar van de 4e orde, daar bij deeling van de termen, b.v. door H_3, deze functievergelijking overgaat in het type

$$f_1g_3 + f_2 = f_3$$

Elke functievergelijking is dus minstens van de 3e orde; de bijzondere functievergelijkingen bedoeld onder **a** zijn van de 3e, 4e, 5e of 6e orde.

Een betrekking welke herleid kan worden tot den vorm van een der bijzondere functievergelijkingen van de 3e orde, is ook volgens elk der andere bijzondere functievergelijkingen van die orde te schrijven.

Voor de 4e orde geldt hetzelfde slechts voor de bijzondere functievergelijkingen I en IV. Daar zij te zamen een bijzonder geval zijn van de algemeene functievergelijking van die orde (zie Deel IV), wordt hun orde aangeduid als de $\mathbf{4}_0^e$ orde.

Wanneer een algemeene functievergelijking als bedoeld onder **b**, alle door een schaalnomogram voor te stellen vergelijkingen van een orde omvat, dan wordt zij de **algemeene functievergelijking van die orde** genoemd.

De te behandelen bijzondere en algemeene functievergelijkingen (voor de laatste zie Deel IV) zijn samengevoegd in tabel II op blz. 56 en 57.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opgaven 1 t/m. 21 voor de constructie van dubbelschalen.

1. Oppervlakte van een cirkelvormige doorsnede, $O = {}^1/_4\pi d^2$.

2. Dubbelschaal $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ voor de betrekking $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

3. Dubbelschaal $\log x$, $\ln x$ voor de betrekking
$$\log x = 0{,}4343 \ln x.$$

4. Dubbelschaal voor $x = \sqrt{y}$.

5. Dubbelschaal: Engelsche mijlen, km.
(1 Eng. mijl = 1,524 km.)

6. Dubbelschaal: Liters per sec., m^3 per uur.
(1 L. per sec. = 3,6 m^3 per uur).

7. Dubbelschaal: Engelsche ponden, kg.
(1 Eng. pond = 0,4536 kg.)

8. Globale betrekking tusschen winddruk en windsnelheid.
$K = 0{,}12\ v^2$. (K in kg/m^2, v in m/sec.)

9. De straal **R** (in m.) van het gezichtsveld, van een vliegtuig op **h** m. hoogte, is ongeveer
$$R = 12000\sqrt{0{,}1\ h}.$$
(Le Heux).

10. Betrekking tusschen het aantal ampèrewindingen per cm. en de sterkte van de magnetisatie in Gauss bij dynamoblik (zie voor de tabellarische of grafische voorstelling van deze betrekking een of ander leerboek over de constructie van electrische machines).

11. Als $\lambda = \frac{b}{a}$ de verhouding is van kleine tot groote as van een ellips, en **e** is de excentriciteit, — dat is de verhouding van den afstand der brandpunten tot de lengte van de groote as van de ellips —, dan is $e = \sqrt{(1 - \lambda^2)}$

12. Dubbelschaal H.P., P.K., als 1 H.P. (horsepower) = 1,0139 P.K.

13. Het aantal gramcalorieën, noodig voor het verwarmen van 1 cm^3. droge lucht van t° C. tot 100° C., is
$$c = \frac{84{,}63\ (100 - t)}{273 + t}$$
(Grosse).

14. Bij gemiddelde temperatuur (ongeveer 10° C.) en een barometerstand van 760 mm. kwikdruk op het aardoppervlak, is het

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

verband tusschen de stijghoogte **H** in km. en de luchtdruk **B** in mm. kwikdruk, voor een bereik van B van 760 tot 400, globaal

$$H = 19\ (2{,}88 - \log B).$$

15. Dubbelschaal voor de betrekking tusschen leeftijd en sterftekans. (Naar een sterftetafel.)

16. Dubbelschaal voor $A_h = B_{max}^{1,6}$, waarin $\mathbf{A}_h$ evenredig is met het hysteresisverlies per cm^3 en per periode, en $\mathbf{B}_{max}$ de maximum inductie is.

17. Is **t** de tijd in sec., waarin een auto of ander voertuig 1 km. aflegt, dan is de snelheid van dat voertuig $n = \frac{3600}{t}$ km. per uur.

18. De sterkte der koppeling van twee inductief gekoppelde ketens, is volgens ZENNECK

$$k = \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2}$$

, waarin γ de verhouding der twee golflengten is. Het voor γ aan te nemen bereik is 1,001 tot 2.

19. Wet van STEFAN-BOLTZMANN:

$$S = 5{,}75\left(\frac{T}{1000}\right)^4,$$

waarin **S** de energie is in Watt per sec., uitgestraald door 1 cm^2. van een zwart lichaam met een absolute temperatuur **T.**

20. De antennefactor α wordt afgeleid uit de verhouding **n** van de lengte van het horizontale gedeelte van L-antennes, of de helft van die lengte bij T-antennes, tót de hoogte der antenne; met behulp van de formule

$$\alpha = 0{,}637\ (1 + n) \sin \frac{90°}{1 + n}$$

21. De kimduiking **k** in boogminuten, is, rekening houdende met een gemiddelde straalbuiging, te berekenen uit de ooghoogte **h** in meters, met de formule

$$k = 1{,}79 \sqrt{h}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

DEEL III.

DE CONSTRUCTIE VAN SCHAALNOMOGRAMMEN VOOR BETREKKINGEN MET DRIE VERANDERLIJKEN.

A.

NOMOGRAMMEN OP EEN RECHT SCHALENSTEL.

HOOFDSTUK 11.

Algemeene inleiding. Dualiteit van grafische voorstellingen.

§ 50. Zooals wij in hoofdstuk 5 zagen, is het *schaalnomogram* een grafische voorstelling, waarbij als grondfiguur een *schalenstel* wordt gebezigd. In Deel III A bepalen wij ons tot het geval, dat dit schalenstel uit *rechte* schalen bestaat. Er zijn daarbij twee mogelijkheden, n.l.:

1°. de twee rechte schalen zijn evenwijdig;

2°. de twee rechte schalen snijden elkander.

Wij onderscheiden bijgevolg:

ad 1°. *Nomogrammen op een evenwijdig schalenstel;*

ad 2°. *Nomogrammen op een snijdend schalenstel.*

$[z_1]$ en $[z_2]$ vormen steeds de schalen van het schalenstel, de dragers daarvan worden ook wel **assen** genoemd. Bij het evenwijdig schalenstel is er op elk der assen een oorsprong (O_1 en O_2), bij het snijdend schalenstel is het snijpunt de gemeenschappelijke oorsprong O.

De lijn O_1O_2 bij het evenwijdig schalenstel heet **oorspronglijn,** de lengte O_1O_2, in c.m. gemeten, wordt aangeduid met de grieksche letter δ.

De derde schaal, $[z_3]$, kan krom of recht en op verschillende wijzen ten opzichte van $[z_1, z_2]$ gelegen zijn. In verband daarmede onderscheiden wij de volgende nomogramvormen, zoowel bij een evenwijdig als bij een snijdend schalenstel:

a. het algemeene geval, d.w.z. $[z_3]$ is krom.

b. $[z_3]$ is recht en $/\!/$, c.q. concurrent met $[z_1,z_2]$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

c. $[z_3]$ is recht en snijdt $[z_1, z_2]$.

d. $[z_3]$ is een kegelsnede, welke tot een cirkel kan worden vervormd.

§ 51. Dualiteit van grafische voorstellingen.

Er bestaat tusschen de schaalnomogrammen en de uit bundels *rechten* samengestelde grafieken een zekere omkeerbaarheid, **dualiteit** genoemd, welke in de omschrijving van eigenschappen, bewijzen of constructies, door het vervangen van een gering aantal meetkundige termen, tot uitdrukking kan worden gebracht.

De bedoelde meetkundige termen zijn in de eerste plaats de begrippen

punt	en	*rechte lijn*
verbinden	en	*snijden*

, die ten grondslag liggen aan de gekozen voorstellingswijzen voor een „waarde" en een „waardenstel".

Daar bij een **rechte schaal** alle *genummerde punten* tot een *rechte lijn verbonden* zijn, staat dualistisch daartegenover de **waaier,** waarbij alle *genummerde rechte* lijnen elkaar in één *punt snijden.*

De *drager van de schaal* is dus ook dualistisch met den *top van de waaier.*

Met een *schalenstel, bestaande uit twee rechte schalen,* is dus dualistisch het *net, gevormd door twee waaiers,* terwijl dan tegenover het *snijpunt van de dragers van de schalen,* de *verbindingslijn van de toppen der waaiers* staat.

Bij het evenwijdig schalenstel ligt dat snijpunt in het oneindige. Duaal hiermede is dus het net gevormd door twee waaiers, waarvan de verbindingslijn der toppunten in het oneindige ligt.

Die toppunten liggen dus ook zelf in het oneindige en elk der beide waaiers wordt in dat geval een evenwijdige bundel.

Bijgevolg zijn dualistisch:

het evenwijdige schalenstel en *het net bestaande uit twee evenwijdige bundels;* evenzoo

het snijdend schalenstel en *het net gevormd door twee waaiers.*

In figuur **21** is een en ander verduidelijkt.

De dualiteit strekt zich nog verder uit. Een waardenstel wordt weergegeven, eenerzijds door de *lijn,* anderszijds door het *punt* **S.**

Wordt een betrekking tusschen de twee veranderlijken van het net door een *rechte* **P** daarop weergegeven, dan gaan op het schalenstel alle afleeslijnen door een gemeenschappelijk *snijpunt* **P.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Een *stralenbundel* op het net is dus dualistisch met een *schaal* op het schalenstel.

Is die stralenbundel (z_3) weer een *waaier,* dus hebben de rechte lijnen van den bundel een gemeenschappelijk snijpunt, dan is de schaal $[z_3]$, op het schalenstel, weer een *rechte schaal.*

Een nomogram bestaande uit *drie rechte schalen* is dus dualistisch met een grafiek gevormd door *drie elkaar snijdende waaiers.*

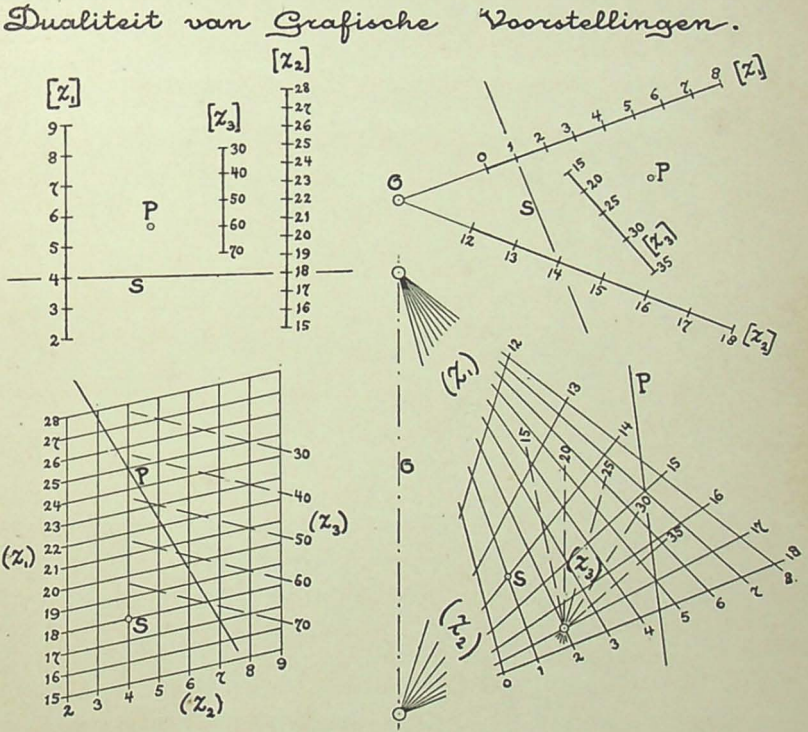


Fig. 21.

Is op het net gevormd door twee evenwijdige bundels, de derde bundel ook een evenwijdige, dan ligt de top van deze dus in het oneindige. De drager $[z_3]$ zal dan $[z_1]$ en $[z_2]$ in oneindig verre punten snijden en loopt er bijgevolg evenwijdig mede.

Ligt op het net gevormd door twee waaiers, de top van den derden waaier op de verbindingslijn **O** der beide andere waaiertoppen, dan gaat bij het schaalnomogram de drager $[z_3]$ door den oorsprong **O** van het snijdend schalenstel.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 12.

Nomogrammen op een evenwijdig schalenstel.

Type I: De derde schaal is een kromme schaal.

Afleiding van de functievergelijking en de constructieformules.

§ 52. In fig. 22 is $[z_1]$ een functieschaal voor $x = \mu_1 f_1$ met oorsprong O_1, en $[z_2]$ een functieschaal voor $y = \mu_2 f_2$ met oorsprong O_2 [1]). De afstand O_1O_2 wordt, zooals reeds vermeld is, aan-

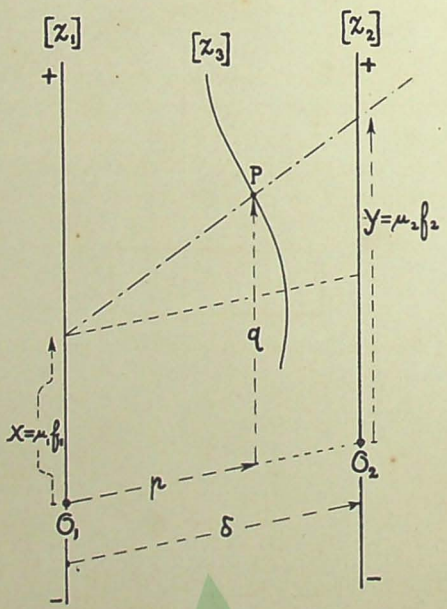


Fig. 22.

geduid met δ. De plaats van een willekeurig punt **P** van het teekenvlak, wordt bepaald door zijn cartesische coördinaten **p** en **q**.

[1]) In figuur 22 en in een aantal volgende figuren, is alleen de drager en c. q. de oorsprong van de schalen geteekend.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Uit de gelijkvormigheid van de twee driehoeken, in figuur 22 gelegen tusschen de afleeslijn door P en een rechte evenwijdig aan de oorspronglijn, blijkt:

$$\frac{y-x}{q-x}=\frac{\delta}{p}$$

dus $$y-x=\frac{q}{p}\delta-x\frac{\delta}{p}$$

of $$x\left(\frac{\delta}{p}-1\right)+y=\frac{q}{p}\delta.$$

Substitueer hierin $x=\mu_1 f_1$ en $y=\mu_2 f_2$, dan is:

$$f_1\cdot\underbrace{\left\{\frac{\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{\delta}{p}-1\right)\right\}}+f_2=\underbrace{\frac{q}{p}\cdot\frac{\delta}{\mu_2}}$$

De beide met een accolade aangegeven vormen zijn functies van z_3 en dus mogen wij

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{\delta}{p}-1\right)=g_3 \quad \text{en} \quad \frac{q}{p}\cdot\frac{\delta}{\mu_2}=f_3 \tag{19}$$

stellen.

Door eliminatie van z_3 uit de beide laatste vergelijkingen, ontstaat een verband tusschen **p** en **q**, n.l. de vergelijking van den drager $[z_3]$. Elke waarde van z_3 bepaalt daarop een schaalpunt.

De substitutie van (19) in de voorafgaande vergelijking, geeft als **functievergelijking** voor het algemeene geval dat de derde schaal een kromme schaal is:

$$\boxed{f_1\,g_3+f_2=f_3} \tag{I}$$

§ 53. De **constructieformules** voor dit nomogramtype zijn:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{voor } [z_1] & x=\mu_1 f_1 & \\ \text{„ } [z_2] & y=\mu_2 f_2 & \\ \text{„ } [z_3] & p=\dfrac{\mu_1\delta}{\mu_2 g_3+\mu_1} & q=\dfrac{\mu_1\mu_2 f_3}{\mu_2 g_3+\mu_1} \end{array}\right\} \tag{20}$$

De twee laatstgenoemde vormen voor **p** en **q** volgen uit (19).

Stel verder $g_3=F(f_3)$, dus $=F\left(\frac{q}{p}\cdot\frac{\delta}{\mu_2}\right)$,

dan is dus de **vergelijking van den drager $[z_3]$:**

$$p=\frac{\mu_1\delta}{\mu_2 F\left(\frac{q}{p}\cdot\frac{\delta}{\mu_2}\right)+\mu_1} \tag{21}$$

Is g_3 niet explicite in f_3 uit te drukken, dan kan de vergelijking van den drager met behulp van de formules (19) worden gevonden.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

§ 54. Constructie van $[z_3]$ door projectie.

Eenvoudiger dan door berekening met (20), kunnen de deel-

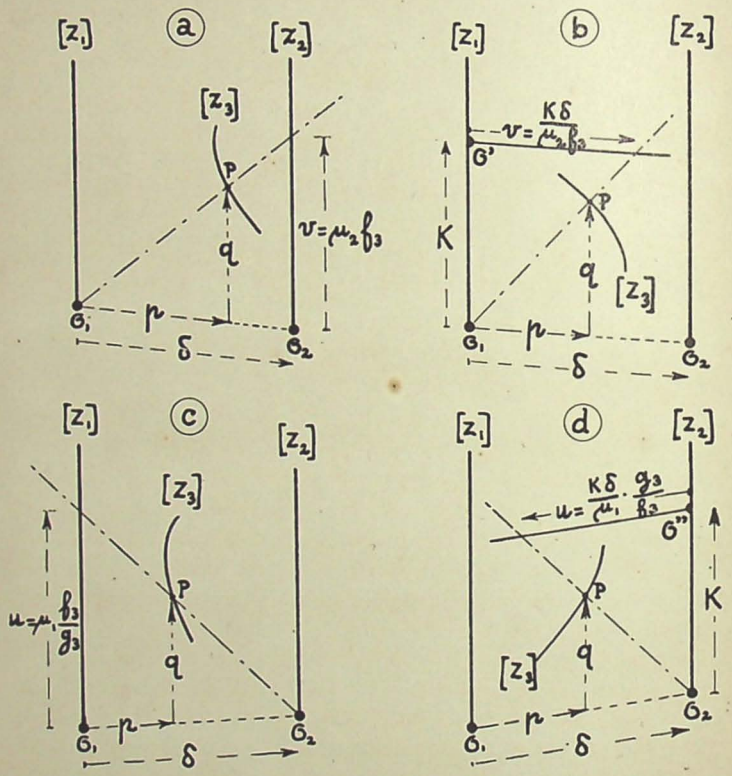


Fig. 23.

punten $[z_3]$ meestal verkregen worden als snijpunten van projectielijnen uit O_1 en O_2, n.l.:

Uit O_1,

naar een schaal $v = \mu_2 f_3$ op de as $[z_2]$ . . . . . figuur **23a**

, of naar een schaal $v = \frac{K\delta}{\mu_2 f_3}$, op een drager evenwijdig aan O_1O_2, met zijn oorsprong O' op de as $[z_1]$ op een afstand K van O_1 . . . . . figuur **23b.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

en uit O_2,

naar een schaal $u = \mu_1 \frac{f_3}{g_3}$ op de as $[z_1]$ . . . . . figuur **23c.**

, of naar een schaal $u = \frac{K\delta}{\mu_1} \cdot \frac{g_3}{f_3}$, op een drager evenwijdig aan O_2O_1, met zijn oorsprong O'' op de as $[z_2]$ op een afstand K van O_2. . . . . figuur **23d.**

Zoowel bij projectie uit O_1 als uit O_2, is K een naar verkiezing aan te nemen afstand.

Ook andere punten en lijnen kunnen voor de projectieve constructie van $[z_3]$ als toppunt en drager gekozen worden.

§ 55. Verdere aanwijzingen voor de constructie.

Bereken achtereenvolgens de functielengten en de moduli voor $[z_1]$ en $[z_2]$:

$$k_1 = f_1(\omega_1) - f_1(\alpha_1) \qquad \mu_1 \approx \frac{L}{k_1}$$

$$k_2 = f_2(\omega_2) - f_2(\alpha_2) \qquad \mu_2 \approx \frac{L}{k_2}.$$

Bereken nu: $\mu_1 f_1(\alpha_1)$, $\mu_1 f_1(\omega_1)$, $\mu_2 f_2(\alpha_2)$, $\mu_2 f_2(\omega_2)$ [1] en voorts p en q voor α_3 en ω_3.

Teeken daarna, bij wijze van proef, de schaallengten $[z_1]$ en $[z_2]$, met een willekeurigen afstand δ tusschen de beide oorsprongen, en bepaal de plaats van de uiterste schaalpunten van $[z_3]$.

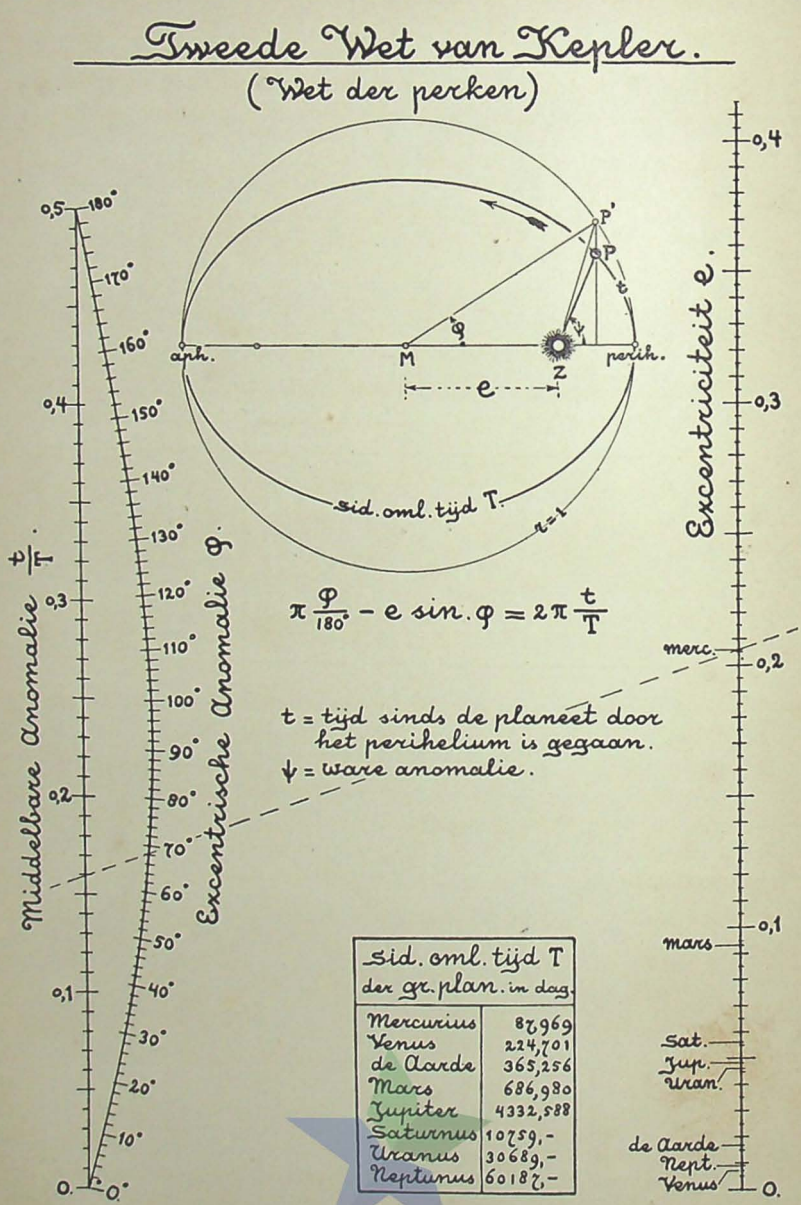
Nu zal in 't algemeen $[z_3]$ bij voorkeur middenschaal moeten zijn, omdat anders het beschikbare teekenvlak slecht wordt benut, of, — erger nog —, de schaal $[z_3]$ door het oneindige zou kunnen gaan. Mocht $[z_3]$ bij de geteekende situatie geen middenschaal zijn en is dat toch gewenscht, dan is het voldoende één der schalen $[z_1]$ of $[z_2]$ om te keeren, hetgeen neerkomt op het schrijven van (I) volgens een der vormen:

$$\left.\begin{aligned} (-f_1) \cdot (-g_3) + f_2 &= f_3 \\ \text{of} \\ f_1 \cdot (-g_3) + (-f_2) &= -f_3. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Wordt met de berekende moduli geen monogram verkregen, waarvan de onderlinge ligging en de lengte der drie schalen ons bevredigt, dan zal tóch de gemaakte schets in 't algemeen voldoende aanwijzingen geven voor de veranderingen, welke de gekozen moduli zullen moeten ondergaan, om tot een geschikt nomogram te geraken.

[1]) Er is geen bezwaar tegen, in $f_1(\alpha_1)$, enz. de index bij α, enz. weg te laten, daar het geen twijfel geeft, dat hier α_1, enz. wordt bedoeld.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA



Sid. oml. tijd T der gr. plan. in dag.	
Mercurius	87,969
Venus	224,701
de Aarde	365,256
Mars	686,980
Jupiter	4332,588
Saturnus	10759,-
Uranus	30689,-
Neptunus	60182,-

Fig. 24.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 56. **Voorbeeld.** *Tweede wet van Kepler. (Wet der perken).* (figuur **24**).

Voor de berekening van de plaats der planeten aan den hemel dient de uit de tweede wet van Kepler voortvloeiende betrekking tusschen de excentriciteit der loopbaan **e**, de middelbare anomalie $\frac{t}{T}$ en de excentrische anomalie φ:

$$\pi \frac{\varphi}{180^\circ} - e \sin \varphi = 2\pi \frac{t}{T}$$

Deze betrekking wordt volgens functievergelijking (I) geschreven als

$$e \sin \varphi + 2\pi \frac{t}{T} = \pi \frac{\varphi}{180^\circ}.$$

De aangenomen grenzen der veranderlijken zijn:

	α	ω
voor $f_1 \ldots\ldots e$	0	0,415 [1])
„ $f_2 \ldots\ldots 2\pi \frac{t}{T}$	0	0,5
„ $f_3 \ldots\ldots \pi \frac{\varphi}{180^\circ}$	0°	180°
„ $g_3 \ldots\ldots \sin \varphi$		

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur **24** [2]) werd de gewenschte schaallengte L $\approx$ 32 genomen. Dus was:

$k_1 = 0.415$ | $k_2 = \pi = 3{,}1416$

$\mu_1 \approx \frac{32}{0{,}415}$ | $\mu_2 \approx \frac{32}{\pi}$

aangenomen $\mu_1 = 80$ | aangenomen $\mu_2 = \frac{30}{\pi}$

Dus is: $\mu_1 f_1(\alpha) = 0$

$\mu_1 f_1(\omega) = 33{,}2$

$\mu_2 f_2(\alpha) = 0$

$\mu_2 f_2(\omega) = 30$

voor α_3 is $p = \delta$ en $q = 0$

voor ω_3 is $p = \delta$ en $q = 30$

---

[1]) De excentriciteit van de banen der planeten en planetoïden ligt binnen dit bereik.

[2]) In het nomogram figuur 24 zijn $[z_1]$ en $[z_2]$ van plaats verwisseld, dus ligt $[z_1]$ rechts, $[z_2]$ links en wordt p dus van O_1 uit naar links gemeten.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$[z_3]$ heeft dus met $[z_2]$ de eindschaalpunten gemeen. Om de ligging van $[z_3]$ nader te weten, bepalen wij nog het schaalpunt $z_3 = 90°$. Hiervoor is $p = 0{,}893\ \delta$ en $q = 13{,}4$.

Daar een discontinu verloop uitgesloten is, zal $[z_3]$ een flauw gebogen schaal zijn, welke door $[z_2]$ als koorde wordt overspannen.

Voor de constructie van figuur **24** namen wij aan, dat deze ligging ons bevredigde. Stel nu nog $\delta = 20$, dan waren dus de constructieformules:

voor $[z_1]$ $\quad x = 80e$

„ $[z_2]$ $\quad y = 60\,\frac{t}{T}$

„ $[z_3]$ $\quad p = \dfrac{160}{\frac{3}{\pi}\sin\varphi + 8} \qquad q = \dfrac{4\frac{\varphi}{3°}}{\frac{3}{\pi}\sin\varphi + 8}$

$[z_3]$ werd echter niet geconstrueerd met behulp van laatstgenoemde formules, maar door de snijding van projectielijnen,

uit O_1, naar een schaal $\nu = 0{,}2\ \varphi$, evenwijdig aan en op een afstand $p = 1{,}2\ \delta$ van $[z_1]$, met den oorsprong op het verlengde van O_1O_2;

en **uit het schaalpunt** $z_1 = \frac{\pi}{10}$ naar een schaal $\nu = \frac{\varphi}{6°} - 3\sin\varphi$ op de as $[z_2]$.

Toepassing van het nomogram:

Welke excentrische anomalie φ heeft Mercurius, juist 2 weken nadat deze planeet door het perihelium is gegaan?

De middelbare anomalie is dan

$$\frac{t}{T} = \frac{14}{87{,}969} = 0{,}1592$$

Met behulp van de door $z_1 = 0{,}206$ (Merc.) en $z_2 = 0{,}1592$ te leggen afleeslijn (zie stippellijn), vinden wij voor z_3 een hoek van iets meer dan 68°.

Opgemerkt wordt, dat de oplossing van het bovengestelde vraagstuk door gewone berekening, zeer lastig zou zijn.

Type II: De derde schaal is een snijdende rechte schaal.

§ 57. Stel in (I) $f_3 = 0$, dan is ook $q = 0$ en is $[z_3]$ dus een rechte schaal op O_1O_2, met haar oorsprong O_3 samenvallend met O_1. Deze gemeenschappelijke oorsprong zullen wij daarom aanduiden met O_{13} (figuur **25**).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De **functievergelijking** voor dit nomogramtype, waarbij de derde schaal recht is en de beide assen van het schalenstel snijdt, is dus

$$\boxed{f_1 g_3 + f_2 = 0} \qquad \textbf{(II)}$$

§ 58. **De constructieformules** zijn:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{voor } [z_1] & x = \mu_1 f_1 & \\ \text{„ } [z_2] & y = \mu_2 f_2 & \\ \text{„ } [z_3] & p = \dfrac{\mu_1 \delta}{\mu_2 g_3 + \mu_1} & \end{array}\right\} \qquad (23)$$

§ 59. **Constructie van $[z_3]$ door projectie.**

De deelpunten $[z_3]$ kunnen ook verkregen worden door projectie, b.v.:

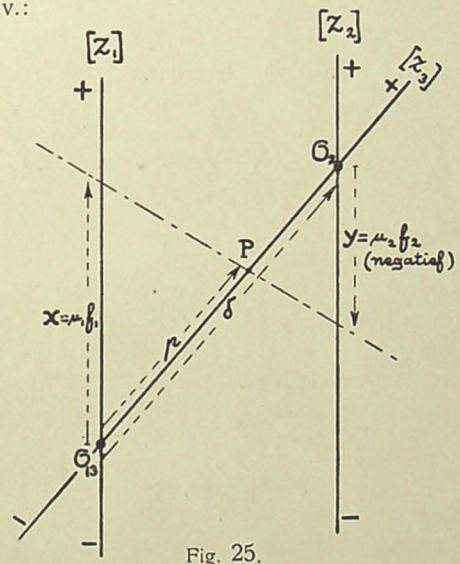


Fig. 25.

1°. van uit een punt **T′**, gelegen op de as $[z_1]$, op een afstand **K** van O_1, naar een schaal $v = -\frac{\mu_2}{\mu_1}\,Kg_3$ op de as $[z_2]$ . . . . . figuur **26b.**

2°. van uit een punt **T″**, gelegen op de as $[z_2]$, op een afstand **K** van O_2, naar een schaal $u = -\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{K}{g_3}$ op de as $[z_1]$ . . . . . figuur **26a.**

Hierin is **K** wederom een naar verkiezing (ook negatief) aan te nemen afstand.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opmerkingen:

1°. $[z_3]$ wordt regelmatig wanneer $g_3 = \frac{a + mz_3}{b - z_3}$, waarin a en b willekeurige getallen zijn en $m = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

2°. De gegeven vergelijking van type II kan desgewenscht tot

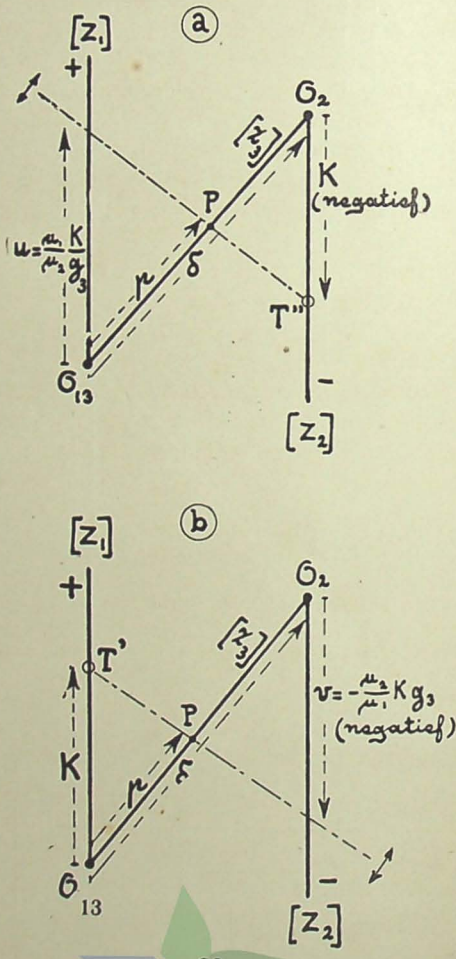


Fig. 26.

een nieuwe vergelijking van dat type vervormd worden, als

$$f_1^n g_3^n + \{-(-f_2)^n\} = 0 \qquad (24)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

, waarin **n** een exponent van willekeurige grootte kan zijn (zie het voorbeeld in § 135).

§ 60. Verdere aanwijzingen voor de constructie.

De berekening van de moduli heeft plaats als bij type I. Ook moet weer bij voorkeur $[z_3]$ tusschen de beide andere schalen gelegen zijn. Daartoe is noodig, dat een der functies f_1 of f_2 positief, de andere negatief is over het geheele of het grootste deel van het bereik.

Om aan deze voorwaarde te voldoen, kan (II) zoo noodig geschreven worden in een der vormen

$$\left.\begin{array}{l}(-f_1)\cdot(-g_3)+f_2=0\\ \text{of}\qquad f_1\cdot(-g_3)+(-f_2)=0\end{array}\right\} \qquad (25)$$

, wat overeenkomt met het omkeeren van de schaal $[z_1]$ of van $[z_2]$.

Is **B** de afstand, in c.m. gemeten, van de twee evenwijdige schalen, dan wordt dus δ bepaald uit

$$\delta \approx \sqrt{B^2 + L^2} \qquad (26)$$

§ 61. Voorbeeld. *Samengestelde interest* (figuur **27**).

Wanneer een kapitaal gedurende **n** jaren tegen **p** % rente op rente uitstaat, dan zal elke 100 gulden van dat kapitaal aangroeien tot een bedrag van

$$K = 100\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

gulden.

De gegeven vergelijking is te herleiden tot

$$\left[\log\left(1+\frac{p}{100}\right)\right]\cdot n + (2 - \log K) = 0$$

van het type II.

De aangenomen grenzen der veranderlijken zijn

	α	ω
voor f_1 . . . . . $\log\left(1+\frac{p}{100}\right)$	0	7
„ f_2 . . . . . $2 - \log K$	2000	100
„ g_3 . . . . . n	1	100

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur **27** werd aangenomen $L \approx 32$, $B = 20$. Dus was:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

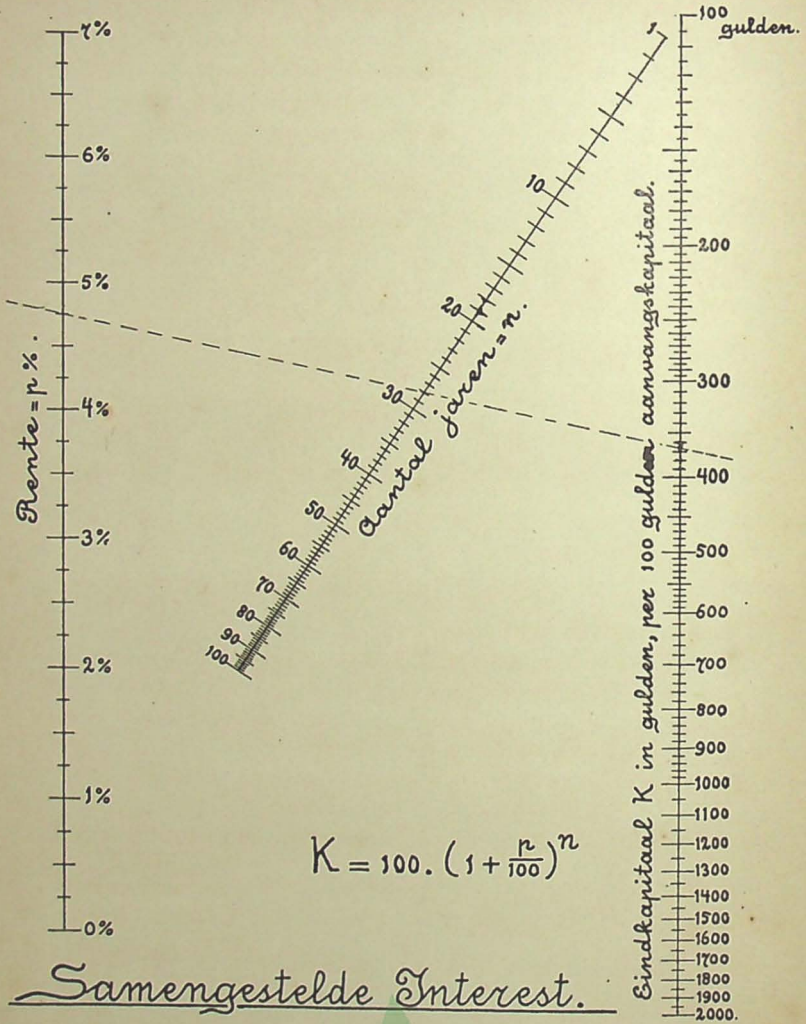


Fig. 27.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$f_1(\omega) = 0{,}029384$	$f_2(\omega) = 0$
$f_1(a) = 0$	$f_2(a) = -\ 1{,}30103$
$k_1 = 0{,}029384$	$k_2 = 1{,}30103$
$\mu_1 \approx \frac{32}{0{,}029384}$	$\mu_2 \approx \frac{32}{1{,}30103}$
aangenomen $\mu_1 = 1000$	aangenomen $\mu_2 = 25$

f_1 is positief, f_2 negatief over haar geheele bereik, dus komt $[z_3]$ tusschen $[z_1, z_2]$.

$$\delta \approx \sqrt{32^2 + 20^2} = 37{,}7 \ldots .$$

, aangenomen $\delta = 36$.

De constructieformules waren dus:

voor $[z_1]$ $\quad x = 1000 \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

„ $[z_2]$ $\quad y = 50 - 25 \log K$

„ $[z_3]$ $\quad p = \frac{36000}{25n + 1000}$

$[z_3]$ werd gemakkelijker door projectie verkregen, b.v. van een schaal $v = -\ 0{,}4\ n$ op de as $[z_2]$, van uit een punt op $[z_1]$, op een afstand $K = 16$ van O_1.

Voor kleine waarden van n, b.v. < 10, waarvoor de snijding der projecteerende lijnen met $[z_3]$ te scherp zou zijn geweest, werd de ligging der deelpunten uit de formule bepaald.

Toepassing van het nomogram:

Wanneer een kapitaal van *f* 20.000 gedurende 28 jaren tegen $4^3/_4$ % rente op rente uitstaat, dan is (zie stippellijn) elke honderd gulden van dat kapitaal aangegroeid tot ongeveer *f* 366,5, het geheele kapitaal dus tot ongeveer *f* 73.300.

Type III: De derde schaal is een evenwijdige rechte schaal.

§ 62. Stel in (I) $g_3 = 1$, dan is $p = \frac{\mu_1 \delta}{\mu_1 + \mu_2}$ en dus constant. $[z_3]$ is dus recht en evenwijdig met de beide andere schalen. De ligging ten opzichte van het schalenstel is bepaald door de verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2}$. (figuur 28). Want

$$\frac{p}{\delta - p} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad (27)$$

De **functievergelijking** voor dit nomogramtype met drie evenwijdige schalen, is

$$\boxed{f_1 + f_2 = f_3} \qquad \textbf{(III)}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

§ 63. De **constructieformules** zijn:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{voor } [z_1] & & x = \mu_1 f_1 \\ \text{„ } [z_2] & & y = \mu_2 f_2 \\ \text{„ } [z_3] & p = \dfrac{\mu_1 \delta}{\mu_1 + \mu_2} & q = \mu_3 f_3 \end{array}\right\} \qquad (28)$$

waarbij $$\mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad \text{of} \quad \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu_3} \qquad (29)$$

De betrekking (29) is in figuur **29** voorgesteld door een schaal-

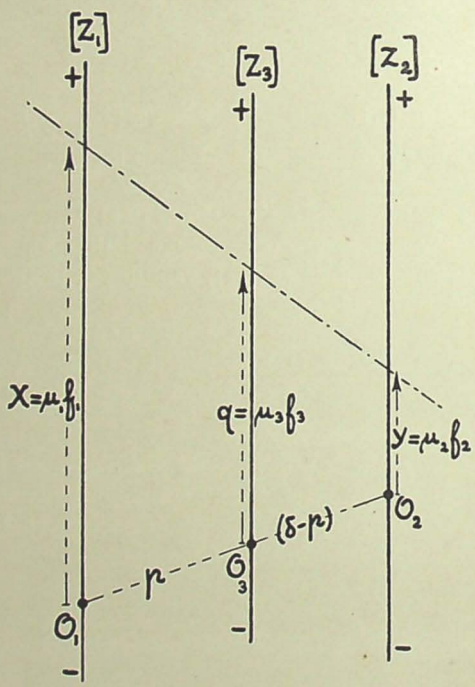


Fig. 28.

nomogram van het nog te behandelen type VI. Het gebruik van dit nomogram maakt de keuze van geschikte moduli voor de drie evenwijdige schalen gemakkelijker, te meer, omdat de stukken van de afleeslijn zich verhouden als de onderlinge afstanden van de schalen, van het met de betreffende moduli te construeeren nomogram.

§ 64. Het uit = en : samengestelde, in een cirkel geplaatste

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

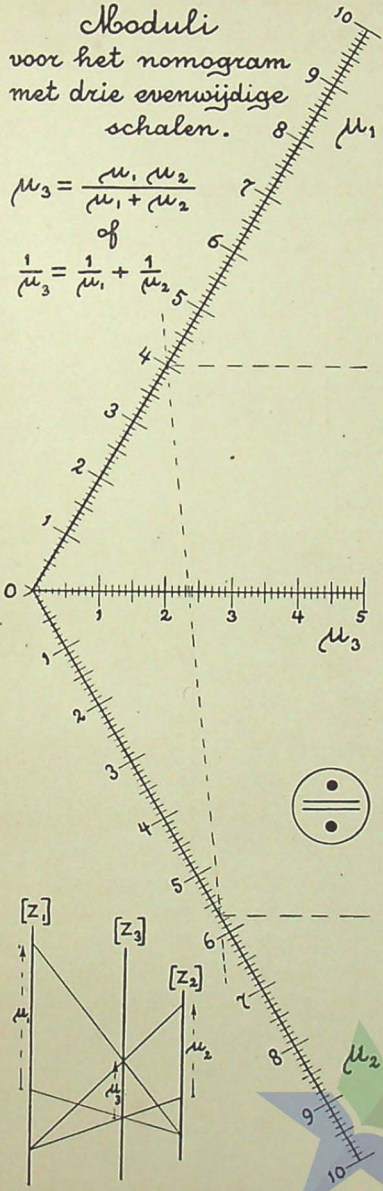


Fig. 29.

teeken (*evenredigheidsteeken*), beduidt, dat de voorgestelde betrekking geldig blijft voor evenredig vergrootte of verkleinde waarden der veranderlijken. Als dus bij de waarden $z_1 = \eta_1$ en $z_2 = \eta_2$ een waarde $z_3 = \eta_3$ behoort, dan heeft voor $z_1 = k\eta_1$ en $z_2 = k\eta_2$ de derde veranderlijke een waarde $z_3 = k\eta_3$.

De schalen van een nomogram voor zulk een betrekking, kunnen dus desgewenscht voor een kleiner bereik worden geteekend, dan anders noodig zou zijn. Hun nauwkeurigheid kan dan grooter wezen. Een voorbeeld van de toepassing van de genoemde eigenschap is door de gestippelde afleeslijn aangeduid, deze afleeslijn geldt voor de moduli van de in § 66 behandelde betrekking.

§ 65. Verdere aanwijzingen voor de constructie. Tusschen de lengten van de drie schalen, — en dit geldt voor alle schaalnomogrammen —, bestaat het in figuur **30** uitgedrukte verband. De middelste schaal moet het gedeelte AB geheel omvatten, doch mag niet uitsteken buiten CD, daar er anders nuttelooze gedeelten aan het nomogram zouden voorkomen. Kleine uitste-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

kende gedeelten ter verkrijging van een beter overzicht, — b.v. door een schaal niet bij $z = 97$, maar bij $z = 100$ te laten eindigen —, mogen wél voorkomen.

Er moet dus worden nagegaan of de grenzen der veranderlijken aan den genoemden eisch voldoen.

De aflezing van het nomogram is het gemakkelijkst en nauwkeurigst, wanneer de schaal voor de afhankelijk veranderlijke (de gezochte) tusschen de schalen voor de beide andere (de gegeven veranderlijken) geplaatst is. Anderzijds wordt het beschikbare teekenvlak het best benut, *wanneer de schaal voor de grootste functielengte tusschen de beide andere wordt geteekend.*

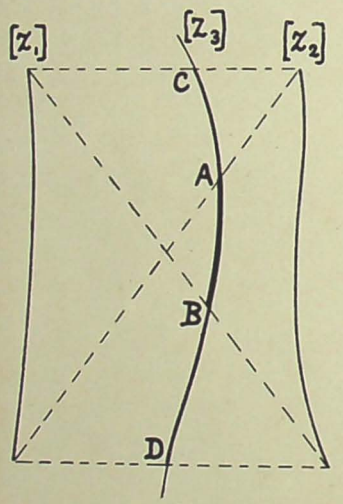


Fig. 30.

Is er veel verschil tusschen de drie functielengten dan volgen wij steeds den laatsten regel, is er slechts weinig verschil, dan den eersten.

De moduli μ_1 en μ_2 worden weer berekend uit

$$\mu_1 \approx \frac{L}{k_1} \quad \text{en} \quad \mu_2 \approx \frac{L}{k_2}$$

, waarin dus meestal $\mathbf{k}_1$ en $\mathbf{k}_2$ de twee kleinste functielengten zullen moeten wezen.

Is evenwel $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ of $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ ongeveer 3 of grooter, waardoor de middenschaal te dicht op een der buitenste zou zijn gelegen, terwijl de andere buitenste schaal, — in verhouding tot de belangrijkheid van haar veranderlijke —, gevoegelijk zeer verkort zou mogen wezen, dan is er wellicht reden om den modulus van deze laatste schaal twee- of meermalen kleiner te nemen, waardoor de onderlinge ligging der schalen wordt verbeterd.

§ 66. Voorbeeld. *Stroomsnelheid in kanalen* (figuur **31.**)

FORCHHEIMER heeft voor de betrekking tusschen de gemiddelde stroomsnelheid **v**, het verhang **J** en de gemiddelde straal **R** [1]) in

[1]) Het verhang is de daling van den waterspiegel in c.m. over 1 k.m. kanaallengte; de gemiddelde straal is het quotient van het natte profiel en den z.g. natten omtrek van de kanaaldoorsnede (zie de toelichtende schets in figuur **31**).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Stroomsnelheid in kanalen met eenigszins begroeide aarden wanden, volgens de formule van Forchheimer

$$V = 0{,}13\, R^{0{,}7} J^{0{,}5}$$

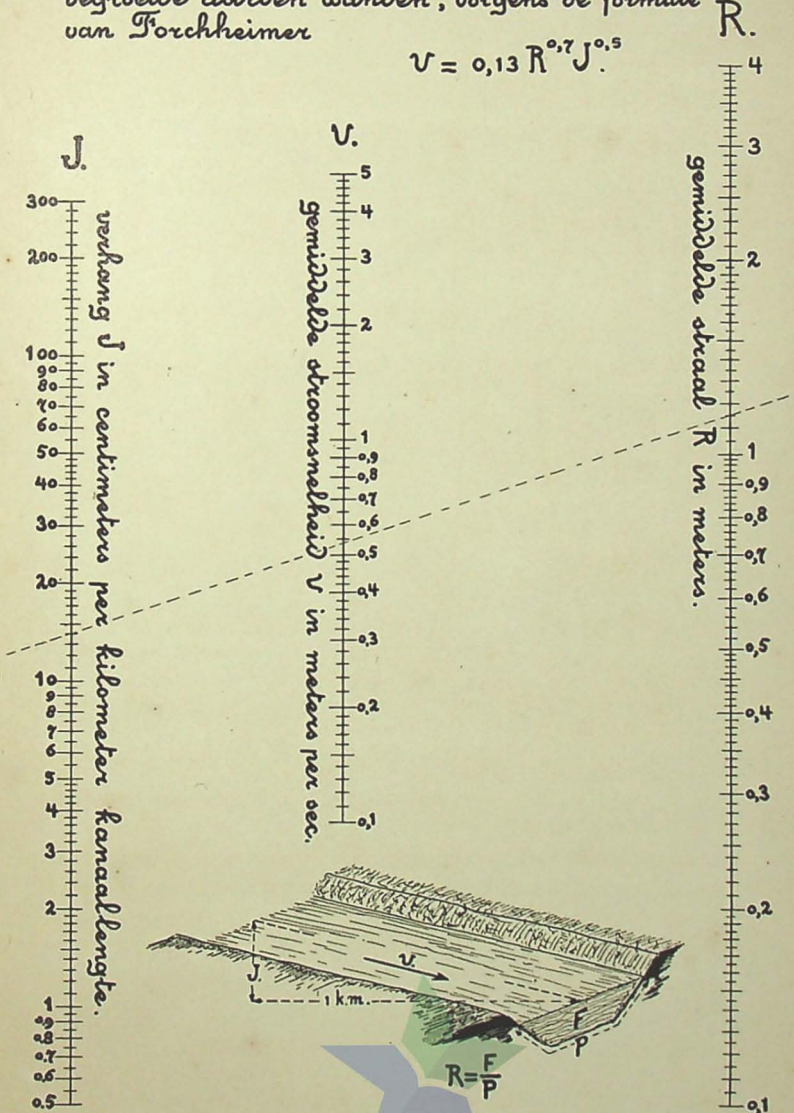


Fig 31.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

kanalen met eenigszins begroeide aarden wanden de formule afgeleid $v = 0{,}13\ R^{0,7}\ J^{0,5}$

De gegeven vergelijking kan worden herleid tot

$$0{,}5 \log J + (0{,}7 \log R + \log 0{,}13) = \log v$$

van het type III.

De aangenomen grenzen der veranderlijken zijn:

		a	ω
voor f_1	$0{,}5 \log J$	0,5	300
„ f_2	$0{,}7 \log R + \log 0{,}13$	0,1	4
„ f_3	$\log v$	0,1	5

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur **31** werd aangenomen L $\approx$ 30, B = 20.

Wij gaan nu eerst na of $[v]$ middenschaal mag worden. De functielengten zijn:

voor J . . . . 0,5 (log 300 — log 0,5) = 1,38953
„ R . . . . 0,7 (log 4 — log 0,1) = 1,12144
„ v . . . . . log 5 — log 0,1 = 1,69897

$[v]$ kan dus middenschaal wezen. Dus was verder:

$$\mu_1 \approx \frac{30}{1{,}38953}$$

dus $M_1 = 0{,}5\ \mu_1 \approx \dfrac{15}{1{,}38953}$

aangenomen $M_1 = 10$

dus $\mu_1 = 20$

$$\mu_2 \approx \frac{30}{1{,}12144}$$

dus $M_2 = 0{,}7\ \mu_2 \approx \dfrac{21}{1{,}12144}$

aangenomen $M_2 = 20$

dus $\mu_2 = \dfrac{200}{7} = 28{,}57\ldots$

In het nomogram figuur **29** zijn de waarden $\frac{\mu_1}{5} = 4$ en $\frac{\mu_2}{5} = 5{,}714$ door een afleeslijn verbonden. Daaruit blijkt in de eerste plaats $\frac{\mu_3}{5} \approx 2{,}35$, en in de tweede plaats zien wij daaruit hoe de ligging der drie schalen wezen zal.

Door berekening vinden wij $\mu_3 = \dfrac{200}{17} = 11{,}765$.

De verhouding van de afstanden van $[z_3]$ tot $[z_1]$ en $[z_2]$ is als $\mu_1 : \mu_2$ dus als 7 : 10.

De constructieformules voor de schalen waren dus:

voor $[z_1]$ $x = 10 \log J$
„ $[z_2]$ $y = 20 \log R - 25{,}316$
„ $[z_3]$ $q = 11{,}765 \log v$

$[z_1]$ en $[z_2]$ werden met behulp van voorhanden schaalverdeelingen met logarithmische schaaleenheden $M_1 = 10$ en $M_2 = 20$ geteekend.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Daar $x = 0$ voor $J = 1$
en $y = 0$ voor $R = 18{,}44$
, zijn de genoemde schaalpunten de oorsprongen van de beide schalen en is hun verbindingslijn de oorsprongslijn.

De oorsprong van $[z_3]$ is het schaalpunt $v = 1$, dit schaalpunt komt dus dáár te liggen, waar de drager $[z_3]$ door de oorsprongslijn gesneden wordt.

$[z_3]$ kan nu verder geteekend worden met behulp van de logarithmische harp, wanneer wij daarvan een schaaleenheid van 11,765 cm, overnemen.

$[z_3]$ is eveneens door projectie van $[z_2]$ te construeeren. Hiertoe herleiden wij de gegeven vergelijking tot

$$J = \frac{v^2}{0{,}0169\ R^{1.4}}$$

en berekenen daaruit:
voor $v = 1$ en $R = 1$ is $J = 59{,}17$
voor $v = 0{,}1$ en $R = 1$ is $J = 0{,}5917$.

De juiste plaats van deze schaalpunten J wordt desgewenscht nog berekend en door het trekken van de verbindingslijnen de plaats van $v = 0{,}1$ en $v = 1$ op den drager $[z_3]$ bepaald. Nu trekken wij nog de lijn $R = 0{,}1$, $v = 0{,}1$ en bepalen het snijpunt daarvan met de reeds getrokken lijn $R = 1$, $v = 1$. Uit dit punt als toppunt, kan $[z_3]$ door projectie van $[z_2]$ verkregen worden.

Toepassing van het nomogram.

De gemiddelde straal van een kanaalprofiel is 1,15 m. Deze is berekend uit de afmetingen van dat profiel, n.l. een bodembreedte van 4,93 m., taluds 2 : 1 en een waterdiepte van 1,64 m., waaruit volgt dat $F = 14{,}13\ m^2$ en $P = 12{,}28$ m., dus R gelijk aan het quotient dier beide waarden.

Het verhang op dat kanaal is 14 cm. per km. kanaallengte.

Uit het nomogram lezen wij af (stippellijn), dat de gemiddelde stroomsnelheid volgens Forchheimer, dan ongeveer 0,54 m/sec. zal bedragen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Stelsel betrekkingen van type III met twee gemeenschappelijke veranderlijken. Nomogrammen met meer dan drie evenwijdige schalen.

§ 67. **Afleiding van de constructieformules.**

Het komt meermalen voor dat een aantal betrekkingen

$$\left.\begin{array}{c} a_1 f_1 + a_2 f_2 = f_3 \\ b_1 f_1 + b_2 f_2 = f_4 \\ c_1 f_1 + c_2 f_2 = f_5 \\ \text{enz.} \end{array}\right\} \qquad (30)$$

, welke dus allen twee der veranderlijken gemeen hebben, gezamenlijk optreden.

In dat geval teekenen wij een schalenstel $[z_1, z_2]$ met

$$x = \mu_1 f_1 \quad \text{en} \quad y = \mu_2 f_2$$

, en stellen daarop achtereenvolgens de betrekkingen (30) voor, n.l. door het teekenen van de schalen $[z_3]$, $[z_4]$, $[z_5]$, enz.

Het stelsel (30) heeft **n** vergelijkingen met **n + 2** veranderlijken. Is dus de waarde van 2 veranderlijken gegeven, dan kan die der overige worden bepaald. Met het nomogram geschiedt dit door een rechte afleeslijn te leggen door de 2 gegeven schaalpunten en op de overige schalen, bij de betreffende snijpunten, de waarden af te lezen.

Voor elk der vergelijkingen (30) zijn de eigenlijke moduli voor $[z_1]$ en $[z_2]$ verschillend; voor de eerste zijn ze onderscheidenlijk $\frac{\mu_1}{a_1}$ en $\frac{\mu_2}{a_2}$, voor de tweede $\frac{\mu_1}{b_1}$ en $\frac{\mu_2}{b_2}$, enz.

Stellen wij weer den afstand $O_1O_2 = \delta$ en de verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2} = m$, dan is voor $[z_3]$

$$p = \frac{\frac{\mu_1}{a_1}\delta}{\frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_2}{a_2}} = \frac{m a_2 \delta}{a_1 + m a_2} \qquad (31)$$

en $q = \mu_3 f_3$, waarin

$$\mu_3 = \frac{\frac{\mu_1}{a_1} \cdot \frac{\mu_2}{a_2}}{\frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_2}{a_2}} = \frac{\mu_1}{a_1 + m a_2} \qquad (32)$$

De **constructieformules** zijn dus:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\left.\begin{array}{lll} \text{voor } [z_1] & x = \mu_1 f_1 & \\ \text{„ } [z_2] & y = \mu_2 f_2 & \\ \text{„ } [z_3] & p = \dfrac{ma_2\delta}{a_1 + ma_2} & q = \dfrac{\mu_1}{a_1 + ma_2} f_3 \\ \text{„ } [z_4] & p = \dfrac{mb_2\delta}{b_1 + mb_2} & q = \dfrac{\mu_1}{b_1 + mb_2} f_4 \\ \text{enz.} & & \end{array}\right\} \quad (33)$$

§ 68. Grafische bepaling van m.

De onderlinge ligging van de schalen wordt dus beheerscht door de verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2} = m$. Welke waarde daarvoor het meest geschikt is, kan grafisch worden vastgesteld.

Hiertoe wordt, bij voorbeeld op millimeterpapier, een assenstelsel geteekend (figuur **32**) en uit den oorsprong daarvan voor elk der

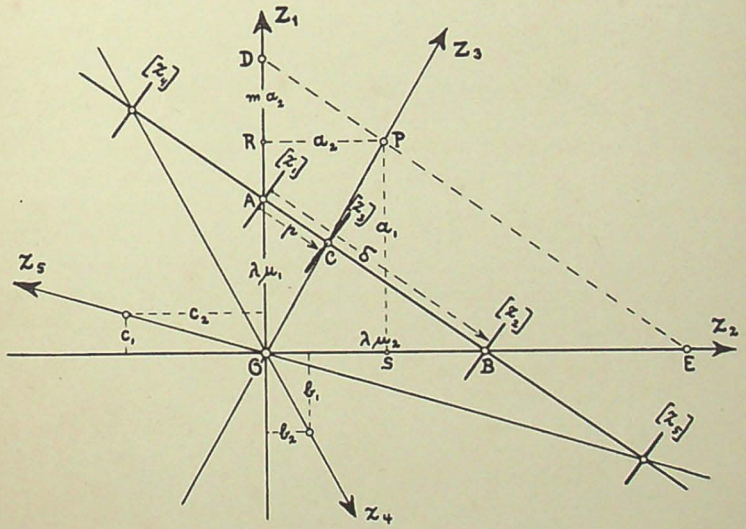


Fig. 32.

veranderlijken een straal getrokken, door een punt, dat de coëfficienten van f_1 en f_2 in (30) tot coördinaten heeft, waarbij a_1, b_1, enz. in *verticale* en a_2, b_2, enz. in *horizontale* richting worden uitgezet. De veranderlijken z_1 en z_2 zijn onderscheidenlijk aan de in die richtingen getrokken assen toegevoegd. Voor elke straal is de richting naar het gecoördineerde punt de positieve richting (aangeduid door de pijlpunt).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Een over dit stralenstelsel getrokken transversaal wordt gesneden in een reeks punten, wier onderlinge ligging overeenkomt met de ligging van de schalen van het nomogram, wanneer daarvoor een verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2} = m$ wordt aangenomen, welke gelijk is aan de verhouding van de door de transversaal van de vertikale en horizontale as afgesneden stukken.

Bewijs: In figuur **32** is door het punt **P**, met coördinaten $\mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_1$, de lijn DE // de transversaal getrokken. Nu is:

$$\frac{p}{\delta} = \frac{AC}{AB} = \frac{DP}{DE} = \frac{DR}{DO} = \frac{ma_2}{a_1 + ma_2}$$

dus $p = \frac{ma_2\delta}{a_1 + ma_2}$.

Voorts is $\frac{OC}{OP} = \frac{OA}{OD} = \frac{\lambda\mu_1}{a_1 + ma_2} = \lambda\mu_3$

De ligging van de transversaal moet zoo gekozen worden, dat

1°. de verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2} = m$ *positief* is, wanneer het normaal is, dat bij grooter wordende f_1 ook f_2 grooter wordt, en *negatief*, wanneer met het aangroeien van f_1 gewoonlijk een afnemen van f_2 gepaard gaat.

Wanneer aan dezen eisch voldaan is, zal de afleeslijn in 't algemeen niet te scherpe hoeken maken met de schalen en zullen laatstgenoemde niet te veel in lengte verschillen (zie figuur **33**).

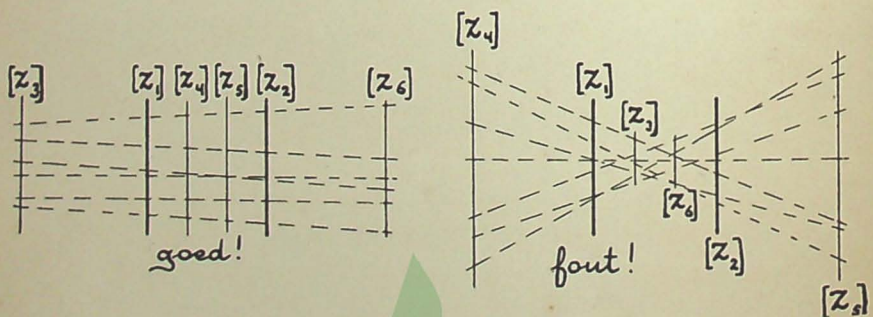


Fig. 33.

2°. de snijpunten met de stralen zoo gelijkmatig mogelijk over de transversaal verdeeld zijn. Hierdoor wordt vermeden dat in het nomogram 2 of meer schalen te dicht op elkander komen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 69. Verdere aanwijzingen voor de constructie.
Is aldus een waarde voor **m** gekozen, dan wordt een voorloopige schets gemaakt van de ligging der schalen en hunne eindpunten. Uit deze schets leiden wij dan af, of de oorspronglijn meer of minder scheef ten opzichte van de schalen moet worden genomen. Daarna wordt de juiste plaats der schalen berekend en vervolgens schaal voor schaal met behulp van de formules of door projectie geconstrueerd.

§ 70. Voorbeeld. *Berekening van cylindrische schroefveeren* (figuur **34**).
Bij gehard veerenstaal mag de toe te laten schuifspanning **T** op 40 kg. per mm.^{2} en de glijdingsmodulus **G** op 8000 kg. per mm.^{2} gesteld worden.
Is nu:
P = de maximum draagkracht in kg.,
f = de door belasting met P veroorzaakte verlenging of verkorting in mm.,
A = de bij belasting met P door de veer opgenomen arbeid in kgm.,
n = het aantal windingen van de veer en voorts:
d = de draaddikte in mm.,
D = de veerdiameter in mm.,
dan is:

$$P = \frac{\pi}{8} T \frac{d^3}{D} = 5\pi d^3 D^{-1}$$

$$\frac{f}{n} = 8 \frac{P}{G} \frac{D^3}{d^4} = 0{,}005\pi d^{-1} D^2$$

$$\frac{f}{nP} = \frac{8}{G} \frac{D^3}{d^4} = 0{,}001 d^{-4} D^3$$

en

$$\frac{A}{n} = 0{,}0005 P \frac{f}{n} = 0{,}0000125\pi^2 d^2 D.$$

Dit viertal betrekkingen kan geschreven worden als een stel vergelijkingen (30) met $z_1 = d$ en $z_2 = D$. In het algemeen zal **d** toenemen als **D** grooter wordt en omgekeerd.
Het stel vergelijkingen geschreven volgens (30) is dan:

$$(+3) \log d + (-1) \log D = \log P - \log 5\pi$$

$$(-1) \log d + (+2) \log D = \log \frac{f}{n} - \log 0{,}005\,\pi$$

$$(-4) \log d + (+3) \log D = \log \frac{f}{nP} + \log 1000$$

$$(+2) \log d + (+1) \log D = \log \frac{A}{n} - \log 0{,}0000125\,\pi^2.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Berekening van cylindrische schroefveeren.

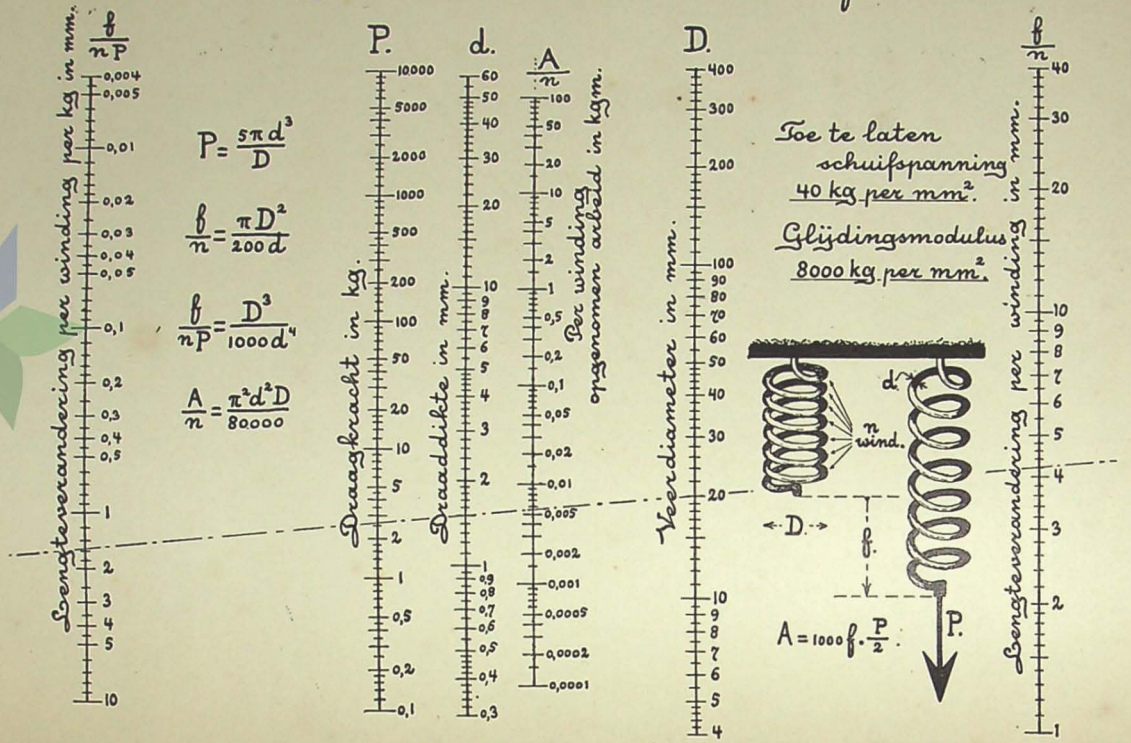


Fig. 34.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

In figuur **35** is het stralenstelsel voor deze betrekkingen geteekend. De straal voor **P** b.v. gaat door het punt met de coördinaten $a_1 = +3$ en $a_2 = -1$, naar boven en zijwaarts uitgezet.

Daar **d** met **D** toe- of afneemt, moet de transversaal hunne stralen beiden in de positieve of beiden in de negatieve gedeelten snijden. De geteekende ligging van de transversaal is dan ongeveer

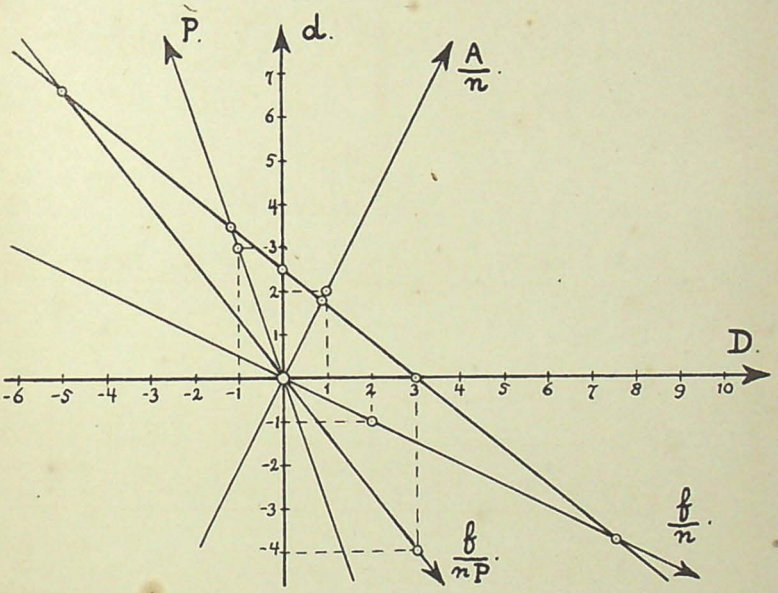


Fig. 35.

het geschiktst. Voor deze onderlinge ligging der schalen is het nomogram (figuur **34**) geteekend.

Uit figuur **35** volgt $m = \frac{5}{6}$.

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur **34** werd $\delta = 7$, $\mu_2 = 10$ en dus $\mu_1 = 8{,}333$ gekozen.

Dus was volgens de formules (31) en (32):

voor [P]	$p = -2{,}692$	$\mu_3 = +3{,}846$
„ $[\frac{b}{n}]$	$p = +17.5$	$\mu_4 = +12{,}5$
„ $[\frac{f}{nP}]$	$p = -11{,}667$	$\mu_5 = -5{,}556$
„ $[\frac{A}{n}]$	$p = +2{,}059$	$\mu_6 = +2{,}941$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De verdere constructie van deze schalen werd verricht met behulp van rechtstreeks uit de gegeven betrekkingen volgende alignementen. Zoo is

voor $d = 1$ en $D = 5\pi$ . . . . . $P = 1$

„ $d = 5\pi$ „ $D = 100$ . . . . . $\frac{f}{n} = 10$

„ $d = 1$ „ $D = 10$ . . . . . $\frac{f}{nP} = 1$

„ $d = 10$ „ $D = \frac{800}{\pi^2}$ . . . . . $\frac{A}{n} = 1$

Toepassing van het nomogram.

Met welk gewicht mag men een veer van 7 windingen, met een diameter van 20 mm. en een draaddikte van 1,5 mm. belasten? Hoe groot is de uitrekking van die veer en welke arbeid wordt door haar opgenomen?

Door aflezing uit het nomogram vinden wij (stippellijn), dat de draagkracht 2,6 kg. is, de verlenging per winding 4,2 mm., dus totaal 29,4 mm. bedraagt en de opgenomen arbeid $7 \times 0{,}0056 = 0{,}039$ kgm. zal wezen. De lengteverandering per winding per kg. is iets minder dan 1,6 mm.

Type Ia. De derde schaal ligt op een cirkelboog.

§ 71. Afleiding van de constructieformules.

Heeft $[z_3]$ niet een willekeurige kromme, maar een *cirkelboog* tot drager, dan bespaart dat, bij het teekenen van deze schaal, ongeveer de helft van den benoodigden tijd, wanneer wij tenminste de plaats van het middelpunt en den straal van den boog kennen.

Voor het geval er tusschen $\mathbf{f}_3$ en $\mathbf{g}_3$ een betrekking is van den 2en graad, is het dikwijls mogelijk een geschikt nomogram met cirkelboogvormigen $[z_3]$ af te leiden. Wij zullen dat hieronder aantoonen.

Stel dat er in (I) tusschen $\mathbf{f}_3$ en $\mathbf{g}_3$ de algemeene betrekking van den 2en graad is:

$$a_0 f_3^2 + a_1 f_3 g_3 + a_2 g_3^2 + a_3 f_3 + a_4 g_3 + a_5 = 0 \quad . \quad . \quad (34)$$

, waarin a_0, a_1, enz. willekeurige coëfficienten zijn.

Substitueer in (34) de uitdrukkingen voor f_3 en g_3 uit (19). Stel daarbij bovendien

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = m \text{ en } \frac{\delta}{\mu_2} = n \tag{35}$$

, dan verkrijgen wij de 2e graads-vergelijking in p en q:

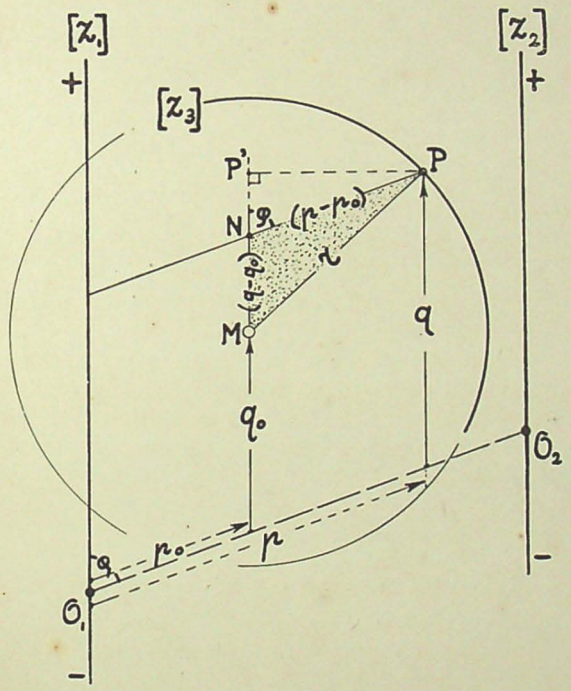


Fig. 36.

$$\left.\begin{aligned}(a_2m^2 - a_4m + a_5)p^2 + (a_3n - a_1nm)pq + (a_0n^2)q^2 + \\ + (a_4m\delta - 2a_2m^2\delta)p + (a_1nm\delta)q + a_2m^2\delta^2 = 0\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

De drager $[z_3]$ is dus een kegelsnede.

Voor een cirkel (zie figuur **36**), waarvoor de coördinaten van het middelpunt $\mathbf{p_0}$ en $\mathbf{q_0}$ zijn en de straal $\mathbf{r}$ is, is de vergelijking op scheefhoekige assen (cosinusregel in $\triangle$ MNP):

$$r^2 = (p - p_0)^2 + (q - q_0)^2 + 2(p - p_0)(q - q_0)\cos\varphi \tag{37}$$

of:

$$\left.\begin{aligned}p^2 + 2\cos\varphi \,.\, pq + q^2 - 2(p_0 + q_0\cos\varphi)p - \\ - 2(p_0\cos\varphi + q_0)q + (p_0^2 + q_0^2 + 2p_0q_0\cos\varphi - r^2) = 0\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Wij vermenigvuldigen nu de coëfficienten van (38) met een willekeurigen factor λ en stellen ze dan gelijk aan die van (36).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Uit de zes betrekkingen, welke op die wijze verkregen worden, kunnen wij, nadat voor **m** of **n** een waarde is aangenomen, achtereenvolgens de andere waarden, welke de ligging van den cirkelvormigen drager $[z_3]$ bepalen, berekenen.

Wij kunnen daarvoor de volgende formules afleiden:

$$\left.\begin{aligned} a_0 n^2 &= a_2 m^2 - a_4 m + a_5 \\ \cos\varphi &= \frac{a_3 - a_1 m}{2a_0 n} \\ \frac{p_0}{\mu_2} &= \frac{m}{2a_0 n \sin^2\varphi}\,(a_1 n \cos\varphi + 2a_2 m - a_4) \\ \frac{q_0}{\mu_2} &= \frac{m}{2a_0 n \sin^2\varphi}\,(-a_1 n - 2a_2 m \cos\varphi + a_4 \cos\varphi) \\ \left(\frac{r}{\mu_2}\right)^2 &= \left(\frac{p_0}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{q_0}{\mu_2}\right)^2 + 2\frac{p_0}{\mu_2}\cdot\frac{q_0}{\mu_2}\cdot\cos\varphi - \frac{a_2 m^2}{a_0} \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Het zal duidelijk zijn, dat niet elke waarde van **m** of **n** aan dit stel formules zal kunnen voldoen.

Op de beschreven wijze wordt dus o.a. de onderlinge ligging van $[z_1]$ en $[z_2]$ bepaald; behalve de bovenstaande formules gelden verder de bekende formules voor type I.

§ 72. **Voorbeeld.** *Tijdsbepaling uit zonshoogte of schaduwlengte* (figuur **37**).

De voor te stellen betrekking is

$$\sin h = \sin 52° \,.\, \sin d + \cos 52° \,.\, \cos d \,.\, \cos t.$$

Hierin beduiden (zie toelichtende schets in figuur **37**)

h de zonshoogte,
d de declinatie van de zon,
t de uurhoek van de zon.

De betrekking geldt voor een breedte van ongeveer 52°.

In het nomogram zijn in plaats van **t** en **d**, de met deze verbonden, meer practisch van belang zijnde veranderlijken, „ware tijd" en „datum" voorgesteld.

Daar 15° van den uurhoek overeenkomt met 1 uur tijdsverschil, is de eerstgenoemde vervanging zeer eenvoudig, de tweede werd met behulp van een tabel uitgevoerd.

De gegeven betrekking wordt als (I) geschreven in den vorm

$$(\text{cotg } 52° \cos t) \,.\, (-\cos d) + (\text{cosec } 52° \sin h) = \sin d.$$

Dus is: $f_3 = \sin d$ $\quad g_3 = -\cos d.$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Tijdsbepaling uit Zonshoogte of Schaduwlengte.

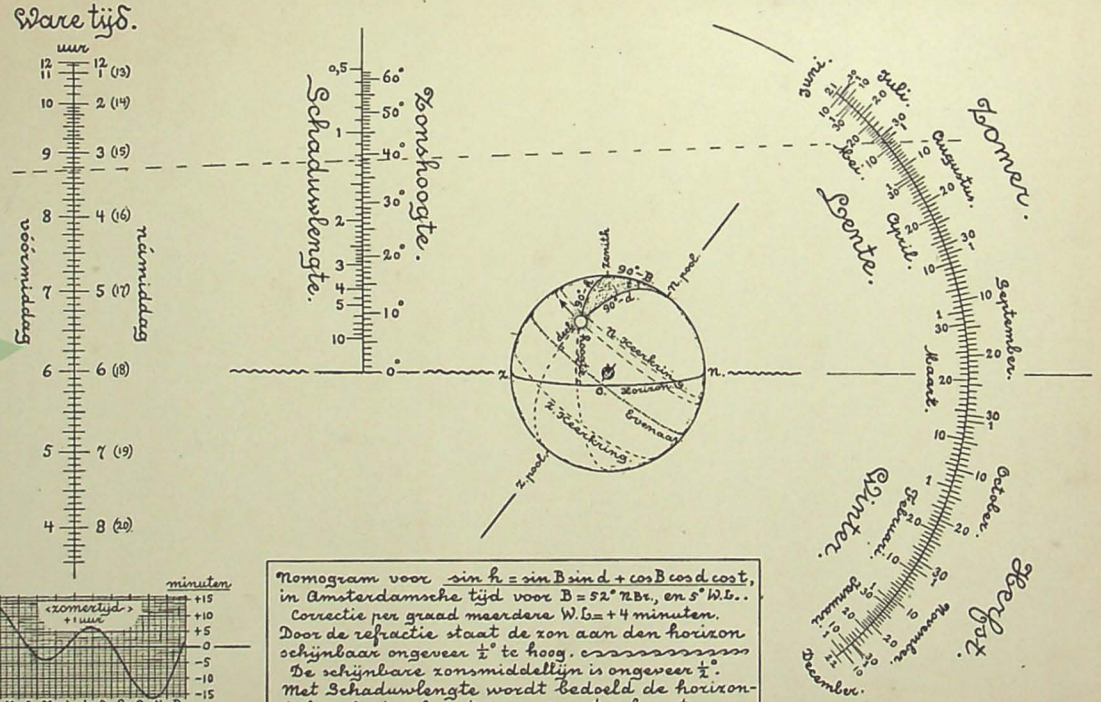


Fig. 37.

Vereffening tot middelbare tijd.

Nomogram voor $\sin h = \sin B \sin d + \cos B \cos d \cos t$, in Amsterdamsche tijd voor B = 52° NBr., en 5° W.L..
Correctie per graad meerdere W.L. = +4 minuten.
Door de refractie staat de zon aan den horizon schijnbaar ongeveer ½° te hoog.
De schijnbare zonsmiddellijn is ongeveer ½°.
Met Schaduwlengte wordt bedoeld de horizontale schaduwlengte van 1 meter hoogte.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bijgevolg, omdat

$$\sin^2 d + (-\cos d)^2 = \sin^2 d + \cos^2 d = 1$$

, is ook $$f_3^2 + g_3^2 = 1$$

Er is dus tusschen f_3 en g_3 een betrekking (34) met

$$a_0 = 1 \qquad a_3 = 0$$
$$a_1 = 0 \qquad a_4 = 0$$
$$a_2 = 1 \qquad a_5 = -1$$

Uit de formules (39) volgt na substitutie van deze waarden:

$$\text{Cos } \varphi = 0; \qquad q_0 = 0; \qquad n^2 = m^2 - 1;$$
$$\frac{p_0}{\mu_2} = \frac{m^2}{n}; \qquad \frac{r}{\mu_2} = \frac{m}{n}.$$

In de laatste drie vergelijkingen komen vijf veranderlijken voor, waarvan wij er dus twee naar verkiezing mogen bepalen.

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur 37 werden gekozen:

$$\mu_1 = 10 \text{ tg } 52° = 12{,}8; \qquad \mu_2 = 11 \sin 52° = 8{,}668$$

en dus zijn:

$$m = 1{,}477; \qquad n = 1{,}087; \qquad \delta = 9{,}41; \qquad p_0 = 17{,}4; \qquad r = 11{,}8.$$

De constructieformules voor de schalen waren dus:

voor $[z_1]$ $x = 10 \cos t$

„ $[z_2]$ $y = 11 \sin h$

„ $[z_3]$ $p = \dfrac{9{,}41}{1 - 0{,}6772 \cos d}$ $\qquad q = \dfrac{8{,}668 \sin d}{1 - 0{,}6772 \cos d}$

Voorts was de straal **r** van den cirkelboogvormigen $[z_3]$ gelijk aan 11,8 en waren de coördinaten van het middelpunt $p_0 = 17{,}4$, $q_0 = 0$.

Omtrent $[z_3]$ moet nog opgemerkt worden, dat de deelpunten het tijdstip van 12 uur overdag aanduiden.

Op $[z_2]$ is naast de zonshoogte de schaduwlengte aangegeven. De schaal voor de zonshoogte werd geconstrueerd met de formule $y = 11 \sin h$. Duiden wij de schaduwlengte aan met **S**, dan bestaat er tuschen **h** en **S** de betrekking

$$S = \text{cotg. } h$$

De dubbelschaal op $[z_2]$ kon dus, na de constructie van de schaal voor **h**, uit deze formule worden voltooid. Ook kon de schaal voor **S** direct worden geconstrueerd met de formule

$$y = \frac{11}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

, welke formule uit de twee voorgaande is af te leiden.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Het nomogram geeft de *ware* tijd; om de *middelbare* tijd te verkrijgen moet een correctie worden aangebracht, welke wij, aan de onder $[z_1]$ geteekende kromme, kunnen aflezen.

Toepassing van het nomogram.

Wanneer op 12 Mei des voormiddags, in midden-Nederland, een vertikaal gestelde stok een schaduw werpt van 1,255 maal de lengte van dien stok, wanneer dus de zonshoogte 38°40′ is, dan is de ware tijd, zooals uit het nomogram is af te lezen (stippellijn), 8 uur 42 min., de vereffening op dien datum is — 4 minuten, dus is de middelbare (Amsterdamsche) tijd 8 uur 38 min.

Met behulp van dit nomogram kan dus, als de zon schijnt, zonder uurwerk bepaald worden hoe laat het is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

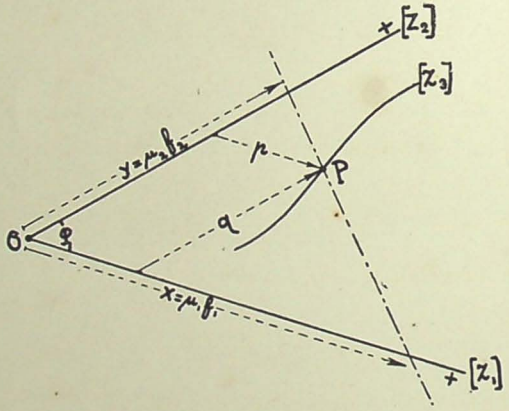
HOOFDSTUK 13.

Nomogrammen op een snijdend schalenstel.

Type IV: De derde schaal is een kromme schaal.

Afleiding van de functievergelijking en de constructieformules.

§ 73. In figuur 38 zijn $[z_1]$ en $[z_2]$ functieschalen met gemeenschappelijken oorsprong **O**, en wel voor $x = \mu_1 f_1$ en $y = \mu_2 f_2$.



Fg. 38.

De plaats van een willekeurig punt **P** van het teekenvlak wordt bepaald door zijn cartesische coördinaten **p** en **q**.

Uit de figuur blijkt:

$$\frac{p}{x} = \frac{y - q}{y} = 1 - \frac{q}{y}$$

of

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{q}{p}} + \frac{1}{y} = \frac{1}{q}$$

Substitueer hierin $x = \mu_1 f_1$ en $y = \mu_2 f_2$,

dan is:

$$\frac{1}{f_1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{q}{p}}} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{\underbrace{\frac{q}{\mu_2}}}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Stel $$\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{q}{p} = g_3 \text{ en } \frac{q}{\mu_2} = f_3 \qquad (40)$$

Door eliminatie van z_3 uit (40), wordt een betrekking tusschen p en q verkregen, namelijk de vergelijking van den drager $[z_3]$, Elke waarde van z_3 bepaalt daarop een schaalpunt.

De substitutie van (40) in de voorgaande vergelijking geeft dus als **functievergelijking** voor het algemeene geval dat de derde schaal een kromme is:

$$\boxed{\frac{1}{f_1 g_3} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}} \qquad \textbf{(IV)}$$

§ 74. De **constructieformules** voor dit nomogramtype zijn :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{voor } [z_1] & x = \mu_1 f_1 & \\ \text{,, } [z_2] & y = \mu_2 f_2 & \\ \text{,, } [z_3] & p = \mu_1 \dfrac{f_3}{g_3} & q = \mu_2 f_3 \end{array}\right\} \qquad (41)$$

, waarbij dus de formules voor $[z_3]$ uit (40) werden afgeleid.

Stel weer

$$g_3 = F(f_3), \text{ dus } = F\left(\frac{q}{\mu_2}\right),$$

dan is de **vergelijking van den drager $[z_3]$:**

$$p = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{q}{F\left(\frac{q}{\mu_2}\right)} \qquad (42)$$

Is g_3 niet explicite in f_3 uit te drukken, dan kan de vergelijking van den drager met behulp van de formules (40) verkregen worden.

De grootte van den hoek φ tusschen $[z_1]$ en $[z_2]$ kan willekeurig worden gekozen.

§ 75. Constructie van $[z_3]$ door projectie.

Eenvoudiger dan door berekening met (41), kunnen de deelpunten $[z_3]$ dikwijls door projectie verkregen worden, bij voorbeeld uit O,

naar een schaal $u = \dfrac{\mu_1 K}{\mu_2} \cdot \dfrac{1}{g_3}$, op een drager evenwijdig aan $[z_1]$, met haar oorsprong O'', gelegen op de as $[z_2]$, op een afstand K van O . . . . . figuur **39a.**

, of naar een schaal $v = \dfrac{\mu_2 K}{\mu_1} g_3$, op een drager evenwijdig aan $[z_2]$, met haar oorsprong O', gelegen op de as $[z_1]$, op een afstand K van O . . . . . figuur **39b.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Hierin is K wederom een naar verkiezing aan te nemen afstand.

§ 76. Verdere aanwijzingen voor de constructie.

De vorm van het nomogram kan eenigszins worden beheerscht door de keuze van de moduli μ_1 en μ_2 en van den hoek φ. Het snijdend schalenstel past zich echter in 't algemeen minder goed bij het beschikbare teekenvlak aan, dan het evenwijdige schalenstel. Het

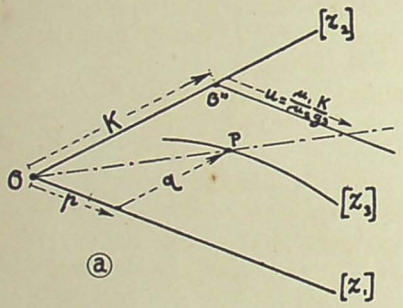


Fig. 39*a*.

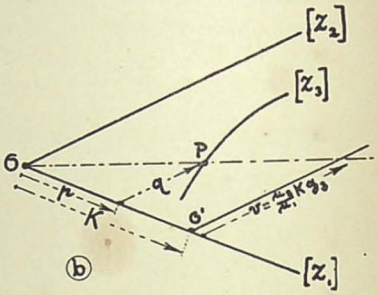


Fig. 39*b*.

is verder nadeelig, dat de volgorde der schalen door de betrekking zelve wordt bepaald en niet, als bij het evenwijdige schalenstel, vrij kan worden gekozen.

Ter verkrijging van een overzicht over het beloop der schalen, berekenen wij achtereenvolgens:

$$f_1(\alpha_1) \text{ en } f_1(\omega_1)$$
$$f_2(\alpha_2) \text{ ,, } f_2(\omega_2)$$
$$f_3(\alpha_3) \text{ ,, } f_3(\omega_3)$$
$$\text{en} \quad \frac{f_3(\alpha_3)}{g_3(\alpha_3)} \text{ ,, } \frac{f_3(\omega_3)}{g_3(\omega_3)}$$

, en bepalen, onder een voorloopige aanname van

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \approx \frac{f_2(\omega_2)}{f_1(\omega_1)}$$

op een paar snijdende assen de ligging van de schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ en der schaaleinden $[z_3]$ [1]).

Wij behandelen nu twee gevallen:

1°. $[z_3]$ *ligt tusschen* $[z_1]$ *en* $[z_2]$.

Bereken dan: $\frac{k_1}{f_1(\omega)}$ en $\frac{k_2}{f_2(\omega)}$ (43)

[1]) Om de uiteenzetting niet te ingewikkeld te maken, wordt verondersteld, dat $f_1(\alpha_1)$ en $f_1(\omega_1)$ beiden positief of beiden negatief zijn, evenzoo $f_2(\alpha_2)$ en $f_2(\omega_2)$. In de practijk is dit bijna steeds zoo.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Verschillen deze waarden veel, dan wordt, wanneer dat met de belangrijkheid der beide veranderlijken z_1 en z_2 overeenkomt, de schaal van de veranderlijke waarvoor die waarde het kleinst is, ongeveer langs de diagonaal van het rechthoekige teekenvlak geplaatst. De modulus der andere schaal wordt daarna bepaald met

$$\mu \approx \frac{L}{k}$$

, waarna de plaats van den gemeenschappelijken oorsprong O globaal kan worden vastgesteld en de afstand D van dit punt tot het tegenovergestelde hoekpunt kan worden gemeten.

De modulus van de in déze richting te teekenen schaal volgt dan uit:

$$\mu \approx \frac{D}{f(\omega)} \qquad (44)$$

, terwijl de grootte van den hoek φ reeds vast ligt.

Zijn de waarden (43) nagenoeg even groot, dan worden $[z_1]$ en $[z_2]$ ongeveer gelijk van lengte genomen en komt dus O in het midden van de korte zijde van het rechthoekige teekenvlak, terwijl μ_1 en μ_2 bepaald worden uit:

$$\mu_1 \approx \frac{D'}{f_1(\omega_1)} \text{ en } \mu_2 \approx \frac{D'}{f_2(\omega_2)} \qquad (45)$$

, waarin D' de afstand is van O tot een der overgelegen hoekpunten.

Komt op die wijze $[z_3]$ te dicht bij een der andere schalen te liggen, dan is het noodig de berekende moduli eenigszins te wijzigen.

2°. $[z_3]$ *is buitenschaal.*

Ligt $[z_3]$ als buitenschaal dicht bij een van de assen, dan kan de berekening van 1°. gevolgd worden.

Is het algemeene beloop van $[z_3]$ ongeveer evenwijdig met de andere buitenschaal, dan kunnen deze schalen zoo geplaatst worden, dat hun hoofdrichting evenwijdig is met de lange zijden van het rechthoekig teekenvlak.

In het algemeen, zal steeds uit het gemaakte globale schetsje, de wijze van berekening der moduli kunnen blijken.

§ 77. Voorbeeld. *Vervanging van gewone, capacitieve en inductieve weerstanden, bij overgang van parallel- tot serieschakeling.* (figuur **40**).

$$w_1 = w_2 \frac{w_3^2}{w_2^2 + w_3^2}.$$ [1])

[1]) REIN-WIRTZ. *Radiotelegraphisches Practikum.* 1922. blz. 69. Zie, voor de beteekenis van deze formule, ook de tabel boven het nomogram en de toepassing aan het slot van dit voorbeeld.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Vervanging van gewone, capacitieve en inductieve weerstanden bij overgang van parallel- tot serieschakeling.

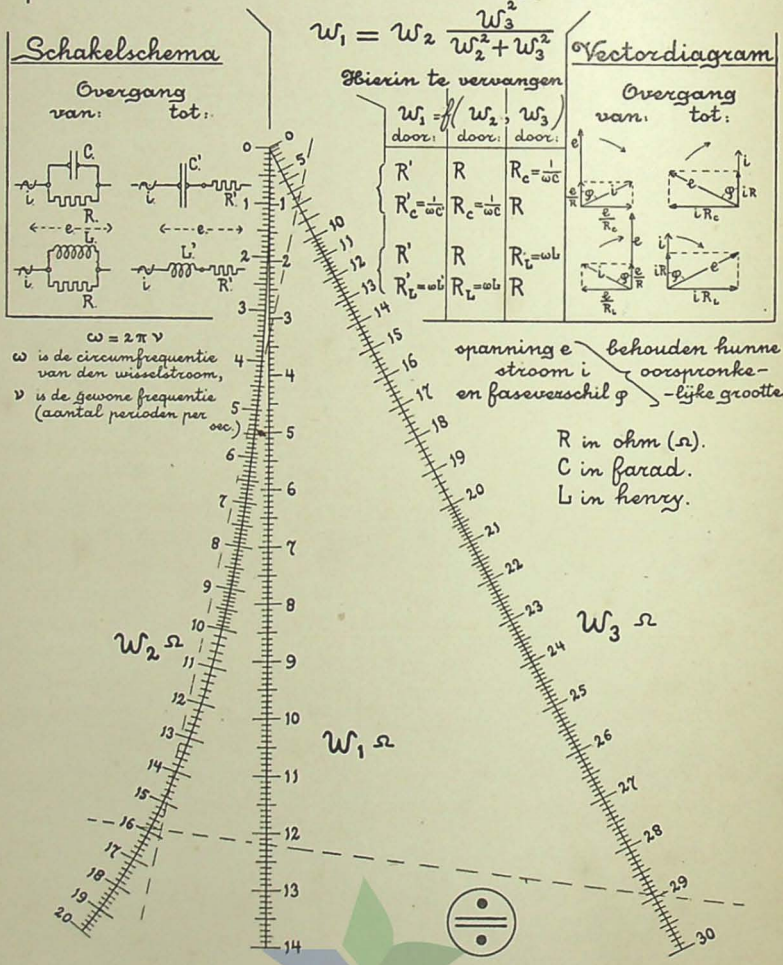


Fig. 40.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De gegeven betrekking kan herleid worden tot

$$\frac{1}{w_1} \cdot \frac{1}{-w_2} + \frac{1}{w_3^2} = \frac{1}{-w_2^2},$$

van type IV.

Als bereik van de veranderlijken is aangenomen:

voor $[z_1] \ldots . w_1$ van 0 tot 14 Ω
„ $[z_2] \ldots . w_3$ „ 0 „ 30 „
„ $[z_3] \ldots . w_2$ „ 0 „ 20 „

Dus is:

$$f_1(\alpha) = 0 \qquad f_1(\omega) = 14$$
$$f_2(\alpha) = 0 \qquad f_2(\omega) = 900$$
$$f_3(\alpha) = 0 \qquad f_3(\omega) = -400$$
$$\frac{f_3(\alpha)}{g_3(\alpha)} = 0 \qquad \frac{f_3(\omega)}{g_3(\omega)} = 20$$

$$\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = \frac{900}{14}.$$

Wij nemen daarom voorloopig $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 60$ en verkrijgen dan figuur **41** als schets van de onderlinge ligging der schalen De juiste vorm van $[z_3]$ is nog niet bekend.

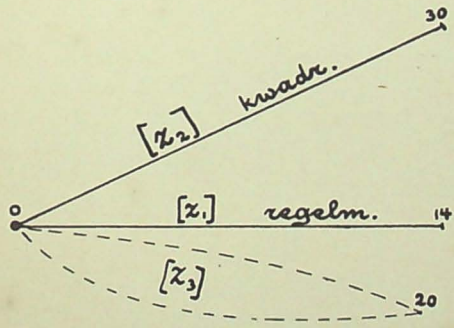


Fig. 41.

Wij zien, dat $[z_2]$ het langst zal moeten worden, omdat deze schaal kwadratisch is en z_2 het grootste bereik heeft. Daarom wordt $[z_1]$ evenwijdig aan de lange rechthoekzijde van het teekenvlak geplaatst.

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur **40** werd aangenomen

$$L = 30 \qquad B = 21.$$

Dus:

$$\mu_1 \approx \frac{L}{k_1} = \frac{30}{14}. \text{ Aangenomen } \mu_1 = 2.$$

$[z_1]$ kwam op ongeveer 14,5 c.m. van de rechter-rechthoekszijde. Dus werd $D' = 31,5$ c.m.
en

$$\mu_2 \approx \frac{D'}{k_2} = \frac{31,5}{900}. \text{ Aangenomen } \mu_2 = 0,035.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De constructieformules voor de schalen waren dus:

voor $[z_1]$ $\quad x = 2w_1$

„ $[z_2]$ $\quad y = 0{,}035\ w_3^2$

„ $[z_3]$ $\quad p = 2w_2 \quad q = -\ 0{,}035\ w_2^2$.

Opdat het alignement ω_1, ω_2 loodrecht op $[z_1]$ zal staan, moet

$$\cos\varphi = \frac{28}{31.5},$$

en is dus

$$\varphi = 27°16'.$$

Uit de gegeven vergelijking volgt, dat als $w_2 = w_3$ is, $w_1 = {}^1/_2 w_2$ en dus ook $= {}^1/_2 w_3$. Een stel schaalpunten $z_1 = {}^1/_2\eta$, $z_2 = \eta$ en $z_3 = \eta$ liggen dus op een rechte lijn, bovendien volgt uit de constructieformules voor de schalen, dat de schaalpunten op die verbindingslijn twee gelijke stukken afteekenen. Door van deze eigenschap gebruik te maken, wordt $[z_3]$ het vlugst geconstrueerd.

Als η_1, η_2 en η_3 een waardenstel is, dan is ook $k\eta_1$, $k\eta_2$ en $k\eta_3$ een waardenstel van de gegeven betrekking; k is weer een willekeurige factor.

Het teeken voor deze eigenschap (zie § 64), is daarom op het nomogram aangebracht.

Toepassing van het nomogram.

Een capaciteit $C = 2200\ \mu\mu F = 22 \times 10^{-10}$ Farad, is parallel geschakeld met een weerstand $R = 15{,}88\ \Omega$. De frequentie van den er door gaanden wisselstroom is $\nu = 25 \times 10^5$ perioden per sec. = 2500 kilohertz. (golflengte 120 m). Dus is de circumfrequentie $\omega = 2\pi\nu = 1{,}5708 \times 10^7$. De capacitieve weerstand is dus

$$R_c = \frac{1}{\omega C} = 28{,}94\ \Omega.$$

Het maakt voor de aangesloten keten geen verschil (e, i en φ veranderen niet), als de parallel geschakelde capaciteit en weerstand vervangen worden door een capaciteit en weerstand, elk van bepaalde grootte, in serie geschakeld Voor het berekenen van den daartoe benoodigden weerstand moet gesteld worden:

$$w_1 = R',\quad w_2 = R \text{ en } w_3 = R_c.$$

Wij lezen uit het nomogram af (stippellijn):

$$w_1 = R' = 12{,}20\ \Omega.$$

Voor het bepalen van de capaciteit nemen wij, om binnen het bereik der veranderlijken te blijven:

$$w_1 = {}^1/_2 R_c',\quad w_2 = {}^1/_2 R_c \text{ en } w_3 = {}^1/_2 R.$$

Daarbij lezen wij af (stippellijn):

$$w_1 = {}^1/_2 R_c' = 3{,}35\ \Omega, \text{ dus } R_c' = 6{,}7\ \Omega.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Hieruit volgt voor C'

$$C' = \frac{1}{\omega R_c'} = \frac{1}{1{,}5708 \times 10^7 \times 6{,}7} = 95 \times 10^{-10} \text{ Farad}$$

of

$$C' = 9500\ \mu\mu F.$$

Type V: De derde schaal is een snijdende rechte schaal.

§ 78. Stel in (IV)

$$g_3 = \frac{f_3}{f_3 + 1} \tag{46}$$

, dan wordt de vergelijking (42) voor den drager $[z_3]$

$$p = \frac{\mu_1}{\mu_2} q + \mu_1. \tag{47}$$

Dus voor $q = 0$ is $p = \mu_1$ en voor $p = 0$ is $q = -\mu_2$.

De drager $[z_3]$ is, daar (47) een lineaire betrekking is tusschen p en q, een rechte lijn, welke van de as $[z_1]$ een stuk μ_1 en van de as $[z_2]$ een stuk $-\mu_2$ afsnijdt (figuur **42a**). De richting van $[z_3]$ wordt dus bepaald door de verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2} = m$.

De **functievergelijking** van het nieuwe type volgt uit de substitutie van (46) in (IV), en is

$$\boxed{\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}} \tag{V}$$

§ 79. De **constructieformules** voor de schalen zijn:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{voor } [z_1] & x = \mu_1 f_1 \\ \text{„ } [z_2] & y = \mu_2 f_2 \\ \text{„ } [z_3] & r = \mu_3 f_3 \end{array}\right\} \tag{48}$$

, waarbij μ_1, μ_2 en μ_3 met den hoek φ verbonden zijn door den cosinusregel:

$$\mu_3^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\ \mu_1\ \mu_2 \cos\varphi \tag{49}$$

Daaruit volgt, dat μ_3 gelijk is aan het stuk, dat door de beide assen $[z_1]$ en $[z_2]$ van $[z_3]$ wordt afgesneden.

Voor $\mu_1 = \mu_2$, stel $= \mu$, maakt $[z_3]$ gelijke hoeken met $[z_1]$ en $[z_2]$ en is

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\mu_3 = \mu \sqrt{2\,(1 + \cos \varphi)} = 2\mu \cos {}^1/_2\, \varphi \qquad (50)$$

Voor $\varphi = 120°$ is bovendien $\mu_3 = \mu$ en zijn de drie moduli dus gelijk.

Voor $\mu_1 = -\mu_2$, maakt $[z_3]$ gelijke hoeken met $[z_1]$ en de negatieve richting van $[z_2]$ en is

$$\mu_3 = \mu_1 \sqrt{2\,(1 - \cos \varphi)} = 2\mu_1 \sin {}^1/_2\, \varphi \qquad (51)$$

Is $\varphi = 60°$, dan is weer $\mu_3 = \mu_1$.

De *verdere aanwijzingen voor de constructie* bij type IV gegeven, gelden grootendeels ook voor dit type.

§ 80. Tweede nomogram met andere ligging van dezelfde schalen.

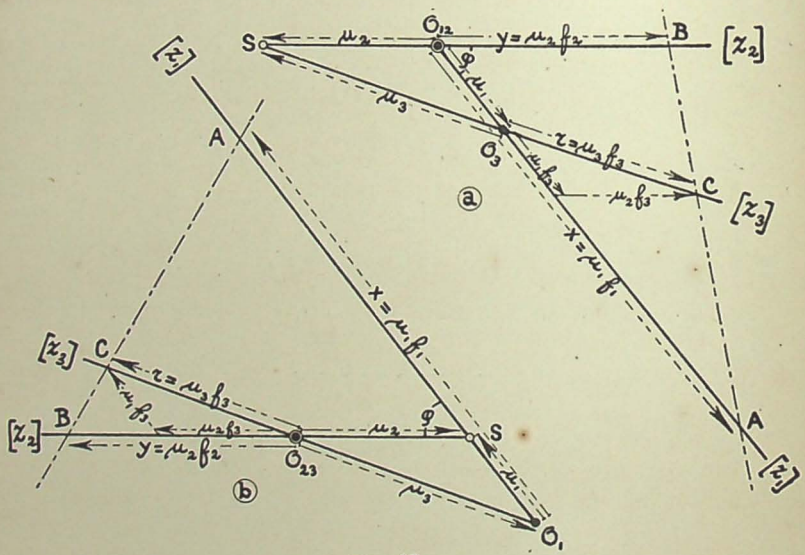


Fig. 42.

Stel in (V):

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 1 - F_1 \\ f_2 &= -1 - F_2 \\ f_3 &= -1 - F_3 \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

, dan gaat (V) na eenige herleiding over in:

$$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3} \qquad (V)$$

, wederom van het type V.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Er is dus een tweede nomogram mogelijk, met dezelfde schalen. Zij snijden elkaar alleen eenigzins anders (figuur **42b**.)

§ 81. Rechtstreeksche afleiding van de functievergelijking (V), met de stelling van Menelaos.

Bij de snijding van drie, volgens een driehoek gelegen rechte lijnen, door een vierde rechte (transversaal), zijn de *zes* afgesneden stukken zoodanig in twee groepen van drie te verdeelen, dat in elke groep de stukken geen uiteinden gemeen hebben. In figuur **42a**, waarin wij de afleeslijn als transversaal aannemen, zijn het:

O_3A, $O_{12}B$ en SC
en $O_{12}A$, SB en O_3C.

Volgens de *Stelling van Menelaos*, is het gedurig product van de eerste groep, gelijk aan dat van de tweede.

Dus is in figuur **42a**:

$$O_3A \times O_{12}B \times SC = O_{12}A \times SB \times O_3C.$$

of;

$$\mu_1(f_1 - 1) \cdot \mu_2 f_2 \cdot \mu_3(f_3 + 1) = \mu_1 f_1 \cdot \mu_2(f_2 + 1) \cdot \mu_3 f_3$$

dus
$$(f_1 - 1)f_2(f_3 + 1) = f_1(f_2 + 1)f_3 \qquad (53)$$

hetgeen te herleiden is tot:

$$f_2 + f_2 f_3 + f_1 f_3 = f_1 f_2.$$

Na deeling van beide leden dezer vergelijking door $f_1 f_2 f_3$, verkrijgen wij:

$$\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}. \qquad (V)$$

Ook voor de tweede schikking der drie schalen (figuur **42b**), kan (V) afgeleid worden. De drie stukken van het eene en van het andere stel zijn dan:

SA, $O_{23}B$ en O_1C
en O_1A, SB en $O_{23}C$.

§ 82. Voorbeeld. *Instellen zonder matglas* [1] (figuur **43**).

Bij het fotografeeren van een in de diepte opgestelde groep, of van een interieur, kan het te gebruiken diafragma bepaald worden uit de afstanden van de lens tot de voor- en achtergrens van de groep of het interieur, volgens deze betrekking:

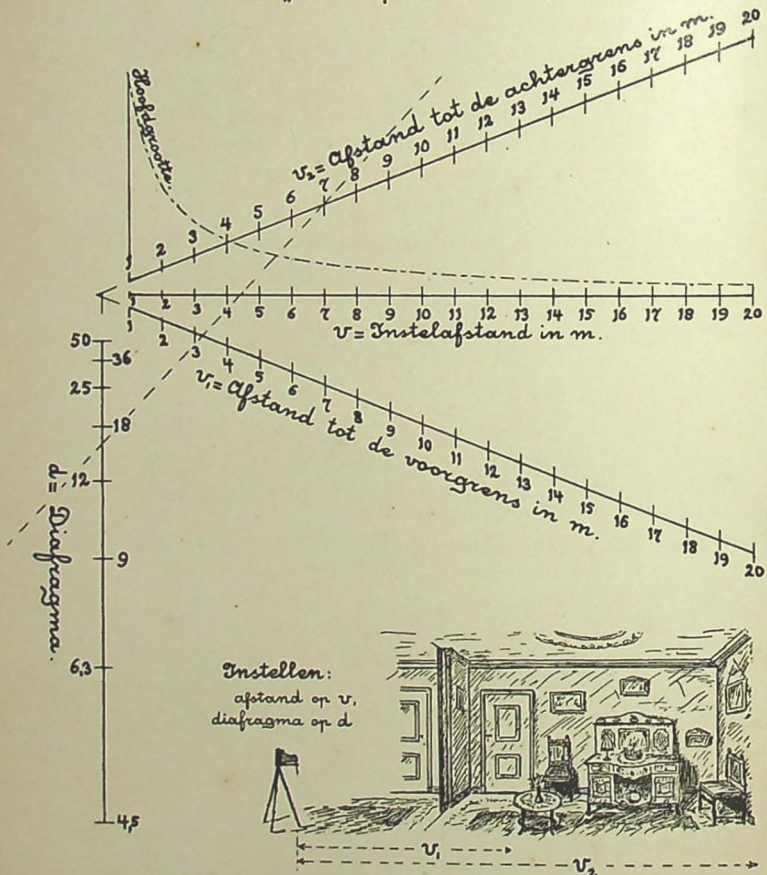
[1] Zie ook mijn gelijknamig artikel in het fotografisch tijdschrift „Lux" van 1 September 1922, aflevering 17.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Instellen zonder matglas.

$$v = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2} \qquad \text{en} \qquad d = \frac{10 (v_2 - v_1) f^2}{\{200 v_1 v_2 - f (v_1 + v_2)\} \delta}$$

δ = max. „onscherpte in m m. = 0,1.



De diafragma-schaal van bovenstaand nomogram is ontworpen, en dus slechts geldig, voor een fotografie-toestel met een brandpuntsafstand $f = 13{,}5$ c m..

Fig. 43.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$d = \frac{10(v_2 - v_1)f^2}{\{200v_1v_2 - f(v_1 + v_2)\}\delta}$$

, waarin:

v_1 = afstand (in meters) tot de voorgrens;

v_2 = „ „ „ „ „ achtergrens;

d = het minstens te bezigen diafragmanummer, dat is de brandpuntsafstand van het toestel, gedeeld door de middellijn van de diafragmaopening;

δ = grootste toelaatbare middellijn (in mm.), van den beeldcirkel van een punt van de te fotografeeren groep. Hiervoor zal 0,1 mm. worden aangenomen, welke „onscherpte", als beeld van een scherpe overgang zwart-wit, een overgangszône van 0,1 mm. breedte geeft;

f = brandpuntsafstand van de lens in cm.

Om voor deze betrekking een nomogram te kunnen construeeren, moeten de veranderlijken $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en **d** *gescheiden* zijn, d.w.z. de gegeven vergelijking moet herleid worden tot een van de besproken, of nog te bespreken typen functievergelijkingen. Wij verwijzen hiervoor naar hoofdstuk 25, waar in § 172 de bovenstaande vergelijking herleid wordt tot:

$$\frac{1}{\frac{100v_1}{f}\left(\frac{5f}{\delta d} - 0{,}5\right)} + \frac{1}{\frac{100v_1}{f}} + \frac{1}{\frac{-100v_2}{f}} = \frac{1}{\frac{5f}{\delta d} - 0{,}5}$$

van type V.

Het nomogram (figuur **43**) werd ontworpen voor een fotografietoestel met $f = 13{,}5$ c.m. De aangenomen grenzen waren:

voor $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ . . . . 1 tot 20 m.

„ **d** . . . . . 4,5 tot 50.

Op het snijdende schalenstel werd tevens een betrekking van het hierna te behandelen type VI voorgesteld, voor het verband tusschen $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ en den instelafstand **v**. In § 86 wordt dit nomogram nader besproken.

In de oorspronkelijke teekening is de schaal voor den instelafstand 20 cm. lang genomen en in verband daarmede, die voor $[z_1]$ en $[z_2]$ 21,5 cm. en dus $\cos {}^1/_2\varphi = 0{,}367$. Voorts was dus $\mu_1 = \mu_2 = 1{,}075 \times \frac{13{,}5}{100} = 0{,}1451$ en $\mu_3 = 2\mu \cos {}^1/_2\varphi = 0{,}1065$.

De constructieformules voor de schalen waren dus:

voor $[z_1]$ $x = 1{,}075\, v_1$

„ $[z_2]$ $y = -1{,}075\, v_2$

„ $[z_3]$ $r = \frac{71{,}9}{d} - 0{,}0533.$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$[z_3]$ heeft haar oorspong op $[z_1]$, op een afstand $\mu_1 = 0{,}1451$ van den oorsprong O_{12} en snijdt $[z_2]$ in een punt, op een afstand $(-\mu_2)$ van O_{12}.

Op $[z_1]$ en $[z_2]$ zijn slechts de geheele waarden als deelpunten aangegeven. Voor het practisch gebruik van het nomogram, is dit voldoende. Op $[z_3]$ zijn aangegeven de nummers **d**, volgens de diafragmanummering van *Dr Rudolf*, zooals deze o.a. op de Zeiss-lenzen is aangebracht

In het nomogram is voorts een kromme lijn geteekend, aangevende de beeldgrootte van het hoofd van een persoon, die zich op een afstand van **v** meter van de lens bevindt. De grootte van het beeld op de plaat, wordt aangegeven door de lengte van de in het schaalpunt **v** opgerichte loodlijn, tot aan de kromme.

Toepassing van het nomogram. Zie hiervoor § 86.

Type VI: De derde schaal is een rechte schaal door den oorsprong O

§ 83. Stel in (V)

$$g_3 = 1 \qquad (54)$$

, dan is volgens (40)

$$\frac{p}{q} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \text{constant.}$$

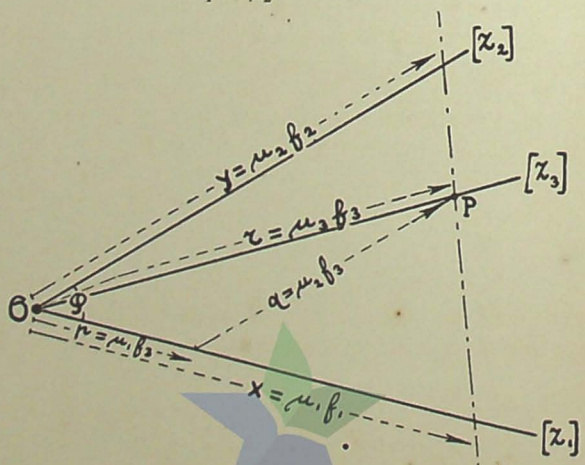


Fig. 44.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Hieruit volgt, dat $[z_3]$ recht is en door den gemeenschappelijken oorsprong O van $[z_1]$ en $[z_2]$ gaat (figuur **44**).

De **functievergelijking** van dit nomogramtype, wordt verkregen door substitutie van (54) in (IV), en is:

$$\boxed{\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{f_3}} \qquad \textbf{(VI)}$$

§ **84.** De **constructieformules** zijn geheel dezelfde als bij type V, n.l.:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{voor } [z_1] & x = \mu_1 f_1 \\ \text{„ } [z_2] & y = \mu_2 f_2 \\ \text{„ } [z_3] & r = \mu_3 f_3 \end{array}\right\} \qquad (55)$$

, waarbij μ_1, μ_2 en μ_3 met den hoek φ verbonden zijn door den cosinusregel:

$$\mu_3^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2 \cos\varphi \qquad (56)$$

Voor $\mu_1 = \mu_2$, stel $= \mu$, deelt $[z_3]$ den hoek φ middendoor en is:

$$\mu_3 = \mu\sqrt{2(1+\cos\varphi)} = 2\mu \cos {}^1/_2\,\varphi \qquad (57)$$

, waarbij dus voor $\varphi = 120°$ de drie moduli even groot zijn.

Voor $\mu_1 = -\mu_2$ deelt $[z_3]$ het supplement van den hoek φ middendoor en is:

$$\mu_3 = \mu_1\sqrt{2(1-\cos\varphi)} = 2\mu_1 \sin {}^1/_2\,\varphi \qquad (58)$$

, waarbij voor $\varphi = 60°$ weer $\mu_3 = \mu_1$ is.

Voor de verdere constructie van dit nomogramtype, gelden weer de aanwijzingen, bij het algemeene type IV gegeven.

§ **85. 1e Voorbeeld.** *Moduli voor het nomogram met drie evenwijdige schalen.* (figuur **29**).

De formule (29) uit § 63

$$\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}=\frac{1}{\mu_3}$$

, behoort tot type VI. Voor figuur **29** werden de drie moduli even groot genomen, dus was $\varphi = 120°$. Voor de oorspronkelijke teekening was $\mu = 2$, zoodat de constructieformules waren:

$$\begin{array}{lll} \text{voor } [z_1] & x = 2\mu_1 \\ \text{„ } [z_2] & y = 2\mu_2 \\ \text{„ } [z_3] & r = 2\mu_3 \end{array}$$

Toepassing van het nomogram. Een toepassing van het

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

nomogram (stippellijn), werd reeds besproken bij het in § 66 behandelde voorbeeld.

§ 86. 2e Voorbeeld. *Instellen zonder matglas* (figuur **43**). De voorstelling van de betrekking tusschen v_1, v_2 en **d**, door het nomogram figuur **43**, werd in § 82 besproken. In dat nomogram is tevens de betrekking voorgesteld tusschen v_1 en v_2 en den instelafstand **v**:

$$v = \frac{2\,v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

, in den vorm van (VI) te schrijven, als:

$$\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2} = \frac{1}{v}.$$

Evenals voor v_1 en v_2, werd voor **v** een bereik aangenomen van 1 tot 20 meter.

In de oorspronkelijke teekening was met een lengte van 20 cm., dus een modulus $\mu_3 = 1$, voor deze schaal rekening gehouden. Daar $\mu_1 = -\mu_2$ deelt $[z_3]$ het supplement van den hoek φ middendoor en is volgens (58):

$$\mu_1 = -\mu_2 = \frac{\mu_3}{2 \sin {}^1/_2 \varphi}$$

, of daar $\sin {}^1/_2 \varphi = \frac{20}{21{,}5}$, is $\mu_1 = -\mu_2 = 0{,}5375$ en waren bijgevolg de constructieformules:

voor $[z_1]$	$x = 1{,}075\, v_1$
„ $[z_2]$	$y = -1{,}075\, v_2$
„ $[z_3]$	$r = v$.

De schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ vallen dus samen met diezelfde schalen in § 82.

Toepassing van het nomogram.

Een te fotografeeren interieur, heeft een diepte van 3,25 m. tot 7 m. van de lens.

Bij aflezing (stippellijn) blijkt, dat er ingesteld moet worden op ongeveer 4,5 m. en dat een diafragma van omstreeks f : 18 genomen moet worden. Een persoon, staande in het midden van het interieur, op 5 m. afstand, zal op de foto een hoofdgrootte van ongeveer 7 mm. verkrijgen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Type IVa. De derde schaal ligt op een cirkelboog.

§ 87. Afleiding van de constructieformules.

Evenals bij type I, kunnen wij bij type IV trachten, voor den drager $[z_3]$ een cirkelboog te verkrijgen. Dit is wellicht mogelijk, wanneer tusschen $\frac{1}{f_3}$ en $\frac{1}{g_3}$ een betrekking is van den 2en graad:

$$\frac{a_0}{f_3^2} + \frac{a_1}{f_3 g_3} + \frac{a_2}{g_3^2} + \frac{a_3}{f_3} + \frac{a_4}{g_3} + a_5 = 0 \qquad (59)$$

, waarin a_0, a_1, enz. willekeurige coëfficienten zijn.

Substitueer in (59) de uitdrukkingen voor f_3 en g_3 uit (40), of:

$$\frac{1}{f_3} = \frac{\mu_2}{q} \quad \text{en} \quad \frac{1}{g_3} = \frac{p}{mq}.$$

Na vermenigvuldiging met q^2 verkrijgen wij dan:

$$\frac{a_2}{m^2} p^2 + \frac{a_4}{m} pq + a_5 q^2 + \frac{a_1 \mu_2}{m} p + a_3 \mu_2 q + a_0 \mu_2^2 = 0 \qquad (60)$$

Dit is de vergelijking voor den drager $[z_3]$, welke dus een kegelsnede is.

Voor een cirkel, waarvoor de coördinaten van het middelpunt $\mathbf{p}_0$ en $\mathbf{q}_0$ zijn en de straal $\mathbf{r}$ is, werd in § 71 op scheefhoekige assen de vergelijking (38) afgeleid:

$$p^2 + 2\cos\varphi \,.\, pq + q^2 - 2(p_0 + q_0 \cos\varphi)p - \\ - 2(p_0 \cos\varphi + q_0)q + (p_0^2 + q_0^2 + 2p_0 q_0 \cos\varphi - r^2) = 0.$$

Wij vermenigvuldigen nu de coëfficienten van (38), weer met een willekeurigen factor λ en stellen ze dan gelijk aan die van (60). Uit de zes betrekkingen, welke op die wijze verkregen worden, leiden wij onderstaande formules af, waaruit achtereenvolgens de grootheden berekend kunnen worden, welke de ligging van den cirkelboogvormigen $[z_3]$ bepalen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\left.\begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{a_2}{a_5}} \\ \cos\varphi &= \frac{a_4}{2ma_5} = \frac{a_4}{2\sqrt{a_2 a_5}} \\ \frac{p_0}{\mu_2} &= \frac{a_3\cos\varphi - \frac{a_1}{m}}{2a_5\sin^2\varphi} \\ \frac{q_0}{\mu_2} &= \frac{\frac{a_1}{m}\cos\varphi - a_3}{2a_5\sin^2\varphi} \\ \left(\frac{r}{\mu_2}\right)^2 &= \left(\frac{p_0}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{q_0}{\mu_2}\right)^2 + 2\frac{p_0}{\mu_2}\cdot\frac{q_0}{\mu_2}\cos\varphi - \frac{a_0}{a_5} \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Uit deze formules blijkt, dat het niet steeds mogelijk zal zijn, een stel reëele waarden voor m, φ, p_0, q_0 en r te verkrijgen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 14

Onderlinge herleiding van de behandelde functievergelijkingen.

§ 88. Van de tot dusver besproken nomogramtypen waren, (zie Tabel II op blz. 56 en 57), de typen II, III, V en VI van de 3e orde, de typen I en IV van de 4_0^e orde. De eerste groep had als eenvoudigste nomogramvorm drie rechte schalen, de tweede groep een samenstel van twee rechte schalen en één kromme.

Voor elk der twee groepen geldt de belangrijke eigenschap, dat een betrekking, welke door een nomogram van een der typen van een groep kan worden voorgesteld, eveneens door elk der andere typen kan worden weergegeven.

Van deze eigenschap maken wij gebruik, om voor een gegeven betrekking het meest geschikte nomogram te kunnen uitkiezen, n.l. dat, waarbij het verloop en de ligging van de functieschalen zoo gunstig mogelijk zijn.

§ 89. Voor de bijzondere functievergelijkingen van de 3e orde is in tabel III een overzicht van de onderlinge herleiding gegeven. Met behulp daarvan, kan een, als functievergelijking van een der typen geschreven betrekking, gemakkelijk tot de functievergelijkingen der andere typen worden herleid. Een voorbeeld wordt in § 90 gegeven.

De bij herleiding van de functievergelijkingen (III) en (VI) voorkomende letter **a**, mag elke willekeurige waarde > 0 hebben, behalve de waarde 1.

Evenzoo mag het grondtal, van de bij herleiding van (II) en (V) voorkomende logarithmen, elk willekeurig getal > 0 zijn, weer met uitzondering van het getal 1.

Voor wat de bijzondere functievergelijkingen der 4_0^e orde betreft, is de omvorming zeer eenvoudig. De typen (I) en (IV) worden namelijk tot elkaar herleid, door als nieuwe functies de reciproke van de oorspronkelijke te nemen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

TABEL III.

Onderlinge herleiding van de bijzondere functievergelijkingen van de 3e orde.

type		wordt herleid tot type	door in de functievergelijking van het laatstgenoemde type te stellen: $F_1 =$	$F_2 =$	F_3 of $G_3 =$
II	$f_1 g_3 + f_2 = 0$	III	$\log f_1$	$-\log(-f_2)$	$-\log g_3$
		V	$\frac{1}{1-f_1}$	$\frac{-1}{1+f_2}$	$\frac{-1}{1-g_3}$
			$\frac{-f_1}{1-f_1}$	$\frac{-f_2}{1+f_2}$	$\frac{g_3}{1-g_3}$
		VI	$\frac{1}{\log f_1}$	$\frac{-1}{\log(-f_2)}$	$\frac{-1}{\log g_3}$
III	$f_1 + f_2 = f_3$	II	a^{f_1}	$\frac{-1}{a^{f_2}}$	$\frac{1}{a^{f_3}}$
		V	$\frac{1}{1-a^{f_1}}$	$\frac{a^{f_2}}{1-a^{f_2}}$	$\frac{a^{f_3}}{1-a^{f_3}}$
			$\frac{-a^{f_1}}{1-a^{f_1}}$	$\frac{-1}{1-a^{f_2}}$	$\frac{-1}{1-a^{f_3}}$
		VI	$\frac{1}{f_1}$	$\frac{1}{f_2}$	$\frac{1}{f_3}$
V	$\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	II	$\frac{f_1 - 1}{f_1}$	$\frac{f_2 + 1}{-f_2}$	$\frac{f_3 + 1}{f_3}$
		III	$\log \frac{f_1 - 1}{f_1}$	$\log \frac{f_2}{f_2 + 1}$	$\log \frac{f_3}{f_3 + 1}$
		V'	$1 - f_1$	$-(1 + f_2)$	$-(1 + f_3)$
		VI	$\frac{1}{\log(f_1 - 1) - \log f_1}$	$\frac{1}{\log f_2 - \log(f_2 + 1)}$	$\frac{1}{\log f_3 - \log(f_3 + 1)}$
VI	$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	II	$\sqrt[f_1]{a}$	$-\sqrt[f_2]{\frac{1}{a}}$	$\sqrt[f_3]{\frac{1}{a}}$
		III	$\frac{1}{f_1}$	$\frac{1}{f_2}$	$\frac{1}{f_3}$
		V	$\frac{1}{1-\sqrt[f_1]{a}}$	$\frac{\sqrt[f_2]{a}}{1-\sqrt[f_2]{a}}$	$\frac{\sqrt[f_3]{a}}{1-\sqrt[f_3]{a}}$
			$\frac{-\sqrt[f_1]{a}}{1-\sqrt[f_1]{a}}$	$\frac{-1}{1-\sqrt[f_2]{a}}$	$\frac{-1}{1-\sqrt[f_3]{a}}$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

§ 90. Voorbeeld. De dikte van houten schotbalken kan worden berekend met de formule:

$$d = L\sqrt{\frac{750\,H}{T}}$$

, waarin

H = het te keeren waterverschil in *m*.

T = de in het hout toe te laten buigspanning, in kg. per cm.^{2}

L = de lengte of overspanning van den schotbalk in *m*.

d = de dikte van den schotbalk in cm.

Voor eiken- of grenenhout, waarvoor T = 100, wordt de formule:

$$d = 2.74\ L\sqrt{H}$$

, of geschreven als (II):

$$(2{,}74\ L)\ .\ (\sqrt{H}) + (-\ d) = 0$$

, hetgeen dus een nomogram zou geven met regelmatige [L] en [*d*] op de evenwijdige assen en een met $\sqrt{H}$ projectieve schaal, diagonaalsgewijze er tusschen.

Ter herleiding van de vergelijking tot (III), nemen wij nu dus:

$$F_1 = \log L + 0{,}437$$
$$F_2 = -\log d$$
$$F_3 = -\,{}^1/_2 \log H$$

en verkrijgen dan:

$$(\log L + 0{,}437) + (-\log d) = -\,{}^1/_2 \log H$$

of

$$(\log L + 0{,}437) + {}^1/_2 \log H = \log d$$

en dus een nomogram met drie evenwijdige logarithmische schalen, waarvan die voor de meestal gezochte veranderlijke *d*, in het midden ligt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 15.

Verbetering van nomogrammen door projectieve vervorming van de schalen.

§ 91. Bij het zoeken naar een geschikt nomogram voor een betrekking, komt het dikwijls voor, dat geen der behandelde typen voldoet, omdat een of meer veranderlijken daarbij door ongunstige schalen zouden moeten worden voorgesteld.

Die schalen zijn dan meestal ongunstig, omdat de gewenschte middenwaarde ν, te veel uit het midden valt.

Door een projectieve vervorming van de schalen, kan hierin verbetering gebracht worden.

De mogelijkheid van een zoodanige vervorming, kan met behulp van eenige stellingen uit de *Projectieve Meetkunde*, op eenvoudige wijze worden aangetoond (figuur **45**).

Voor een waarde van z_3, voorgesteld door het schaalpunt S, stellen de punten A_1 en A_2, B_1 en B_2, C_1 en C_2, eenige paren bijeenbehoorende waarden van z_1 en z_2 voor. Hiervoor is dus S het perspectiefcentrum. De twee schalen $[z_1]$ en $[z_2]$, worden uit twee punten, P_1 en P_2, zoodanig op andere dragers geprojecteerd, dat op deze laatste ν juist in het midden tusschen α en ω valt.

Volgens de Projectieve Meetkunde is nu [1]):

$$(O_{12}A_1B_1C_1 \ldots .) \wedge (O_{12}A_2B_2C_2 \ldots .)$$

en verder:

$$(O_{12}A_1B_1C_1 \ldots .) \wedge (O_1'A_1'B_1'C_1' \ldots .)$$
$$(O_{12}A_2B_2C_2 \ldots) \wedge (O_2'A_2'B_2'C_2' \ldots .)$$

dus:

$$(O_1'A_1'B_1'C_1' \ldots .) \overline{\wedge} (O_2'A_2'B_2'C_2' \ldots)$$

Wanneer twee toegevoegde punten van de beide laatste schalen tot samenvalling gebracht worden, is dus:

$$(O_1'A_1'B_1'C_1' \ldots .) \wedge (O_2'A_2'B_2'C_2' \ldots .)$$

Nu is het snijpunt O_{12}, als dekpunt, het eenige punt van $[z_1]$, dat bij een verplaatsing van S langs $[z_3]$, aan hetzelfde punt van $[z_2]$, — namelijk zich zelf —, toegevoegd blijft. Bij evenwijdige

[1]) Zie blz. 39.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

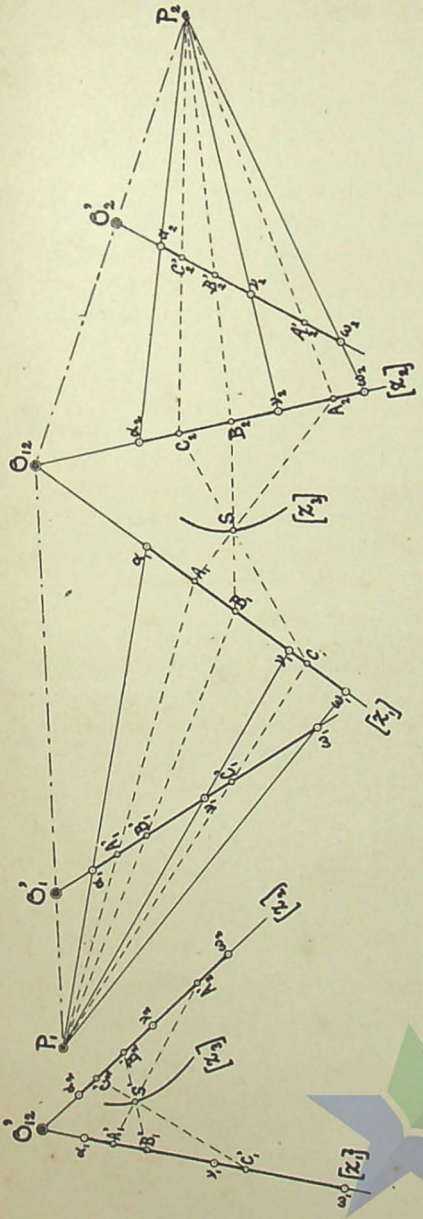


Fig. 45.

assen, valt O_{12} in het oneindige en zijn O_1' en O_2', de aan O_{12} toegevoegde vluchtpunten.

De vervormde schalen moeten dus zóó geplaatst worden, dat O_1' op O_2' valt, alsdan is (figuur **45** links):

$(O_{12}'A_1'B_1'C_1' \ldots .) \wedge$
$\wedge (O_{12}'A_2'B_2'C_2' \ldots .)$

, en snijden de alignementen $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$ en $C_1'C_2'$ enz. elkander in het nieuwe perspectiefcentrum S'.

§ 92. De ruimtelijke perspectivische vervorming, is als een bijzonder geval van het voorgaande te beschouwen. Wanneer n.l. in figuur **45**:

$$O_{12}P_1 = O_{12}P_2$$

en

$$O_{12}O_1' = O_{12}O_2'$$

zou zijn, dan zou deze figuur een uitslag kunnen wezen van een drievlakshoek, met de zijvlakken $P_1O_{12}C_1$, $C_1O_{12}A_2$ en $A_2O_{12}P_2$, welke gesneden worden door het vlak $C_1'O_{12}'A_2'$. De tophoek van dit vlak zou, in dat geval, bovendien een bepaalde grootte moeten hebben.

§ 93. Hoewel dat, uit een oogpunt van nauwkeurigheid, niet altijd de voorkeur verdient, kun-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

nen de vervormde schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ grafisch, — als in figuur **45** —, verkregen worden. Voor de schaal $[z_3]$ echter, is deze wijze van constructie in het algemeen te omslachtig. Meestal is zij nog het gemakkelijkst uit te voeren met behulp van uit de gegeven betrekking rechtstreeks afgeleide alignementen. Somtijds vormen deze dan waaiers, met den top op $[z_1]$ of $[z_2]$.

Aan de analytische afleiding van een nieuwe functievergelijking, waaruit de constructieformules voor de vervormde schalen volgen, moet, wegens de grootere nauwkeurigheid, de voorkeur worden gegeven.

§ 94. Voor de projectieve vervorming leiden wij als volgt de noodige formules af.

Wij stellen (figuur **46**):
op de oorspronkelijke schaal:

$$\left.\begin{aligned} f(\nu) - f(a) &= a \\ f(\omega) - f(\nu) &= b \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

en op de vervormde schaal

$$F(\omega) - F(\nu) = F(\nu) - F(a) = d \qquad (63)$$

De nieuwe schaal is zoo geplaatst, dat zij, met de oorspronkelijke, het schaalpunt ν gemeen heeft. Door evenwijdige verschuiving, kan de nieuwe schaal tot op elke gewenschte lengte gelijkvormig verkleind of vergroot worden.

Voor $\triangle$ BCC' met de transversaal PA, is volgens de *stelling van Menelaos* (zie blz. 103):

$$PC \,.\, a \,.\, 2d = PC' \,.\, (a + b) \,.\, d$$

dus:

$$\frac{PC}{PC'} = \frac{a+b}{2a} \text{ en dus } \frac{C'C}{PC'} = \frac{b-a}{2a}.$$

Bijgevolg is:

$$PO' = \frac{2ab}{b-a} \text{ en } O'C' = \frac{2ad}{b-a}.$$

In het parallelogram PO'BD, hebben dus de zijden een lengte:

$$\frac{2ab}{b-a} \text{ en } \frac{b+a}{b-a}d.$$

Het product van die zijden, hetwelk wij **W** stellen, is dan:

$$W = \frac{2abd\,(b+a)}{(b-a)^2} \qquad (64)$$

, terwijl de lengte OD, aangeduid met **c**, is:

$$c = \frac{2ab}{b-a} - a - f(a) = \frac{b+a}{b-a}a - f(a) \qquad (65)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nu heeft het parallelogram de eigenschap, dat een, uit een hoekpunt getrokken transversaal, de overstaande zijden zóó snijdt,

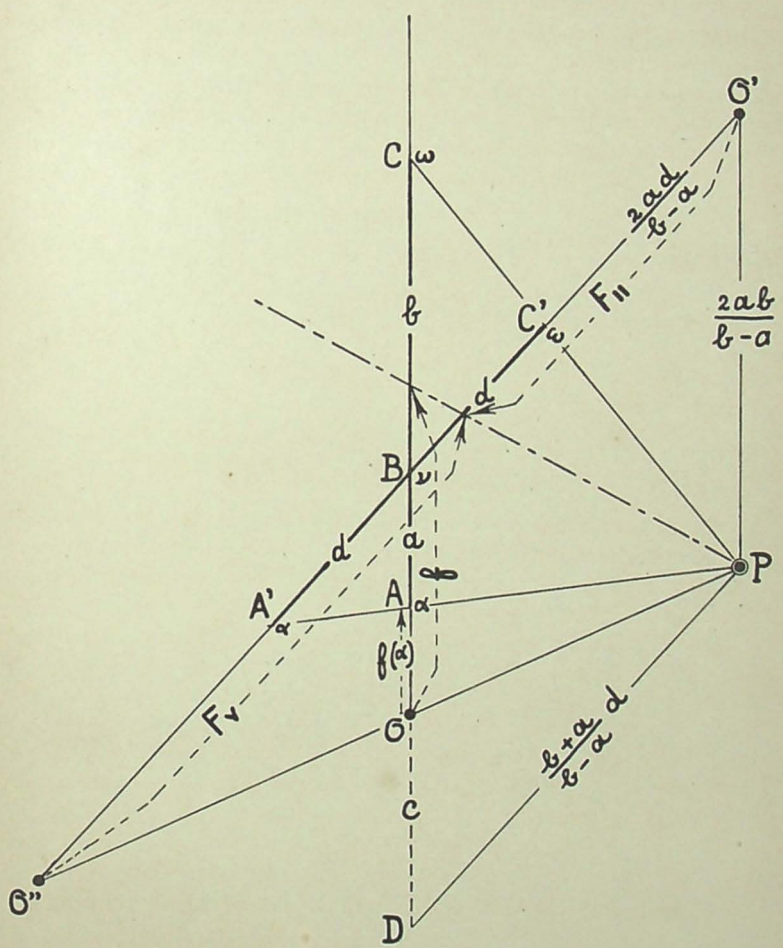


Fig. 46.

dat het product van de afgesneden stukken constant is en gelijk aan het product van de geheele zijden.

Het bewijs hiervan werd reeds op blz. 39 gegeven.

In figuur **46** is dus:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1°. voor oorspronkelijk evenwijdige (dat is in het oneindige snijdende) assen, waarvoor de nieuwe oorsprong **O'** is:

$$F_{II} = \frac{W}{f+c} \tag{66}$$

2°. voor oorspronkelijk in **O** snijdende assen, waarvoor de nieuwe oorsprong **O''** is:

$$F_V = \frac{W}{c} - \frac{W}{f+c} = \frac{W}{c} \cdot \frac{f}{f+c} \tag{67}$$

Daar wij de nieuwe schalen, met behulp van de te kiezen moduli, toch gelijkvormig kunnen vergrooten of verkleinen, behoeft **W** niet de waarde (64) te verkrijgen, maar kan naar believen gekozen worden. In de uitdrukking voor F_V, kan dus de factor c uit den noemer, opgenomen worden in die waarde **W**.

De nieuwe functies moeten dus zijn van den vorm:

$$F_{II} = \frac{W}{f+c} \quad \text{en} \quad F_V = \frac{Wf}{f+c} \tag{68}$$

Uit (62) en (65) volgt voor **c**,

$$\boxed{c = \frac{f(\nu)[f(\alpha)+f(\omega)] - 2f(\alpha) \cdot f(\omega)}{f(\alpha)+f(\omega) - 2f(\nu)}} \tag{69}$$

Met behulp van de formules (68) en (69), kan nu de analytische vervorming van de schalen, op eenvoudige wijze plaats vinden.

Tusschen de nieuwe en de oude functies, bestaan daarbij betrekkingen van den vorm (68), waarin voor W de eenheid of een functie van **c** gesubstitueerd is.

Tabel IV geeft, voor de behandelde typen van functievergelijkingen, geheel aan, hoe de verbeterde vergelijkingen verkregen worden. Bij twee der rechte schalen, wordt daarmede de gewenschte waarde in het midden van de schaal gebracht. Daar in het algemeen ν_1, ν_2 en ν_3, zeer globaal een waardenstel vormen, zal ook op de derde schaal de gewenschte middenwaarde een vrij gunstige ligging verkrijgen.

Opmerking. Uit formule 69 volgt:

1°. is $f(\nu)$ het *harmonisch gemiddelde* van $f(\alpha)$ en $f(\omega)$, dus is $f(\nu) = \frac{2f(\alpha)f(\omega)}{f(\alpha)+f(\omega)}$, dan is $c = 0$;

2°. is $f(\nu)$ het *meetkundig gemiddelde* van $f(\alpha)$ en $f(\omega)$, dus is $f(\nu) = \sqrt{f(\alpha)f(\omega)}$, dan is eveneens $c = \sqrt{f(\alpha)f(\omega)}$;

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

TABEL IV.

Verbetering van nomogrammen door projectieve vervorming van de schalen.								
De oorspronkelijke functievergelijking is:	van het type:	De verbeterde functievergelijking is:	deze is van het type:	De verbeterde functies worden als volgt uit de oorspronkelijke functies berekend:				
				$F_1 =$	$F_2 =$	$F_3 =$	$G_3 =$	daarbij is:
$f_1 g_3 + f_2 = f_3$	I	$\frac{1}{F_1 G_3} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	IV	$\frac{1}{f_1 + c_1}$	$\frac{1}{f_2 + c_2}$	$\frac{1}{f_3 + c_1 g_3 + c_2}$	$\frac{1}{g_3}$	
$f_1 g_3 + f_2 = 0$	II	$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	V	$\frac{c_1}{f_1 + c_1}$	$\frac{-c_2}{f_2 + c_2}$	$\frac{-c_3}{g_3 + c_3}$		$c_3 = \frac{c_2}{c_1}$
$f_1 + f_2 = f_3$	III	$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	VI	$\frac{1}{f_1 + c_1}$	$\frac{1}{f_2 + c_2}$	$\frac{1}{f_3 + c_3}$		$c_3 = c_1 + c_2$
$\frac{1}{f_1 g_3} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	IV	$\frac{1}{F_1 G_3} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	IV	$\frac{c_1 f_1}{f_1 + c_1}$	$\frac{c_2 f_2}{f_2 + c_2}$	$\frac{1}{\frac{1}{f_3} + \frac{1}{c_1 g_3} + \frac{1}{c_2}}$	g_3	
$\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	V	$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	V	$\frac{(c_1 + 1) f_1}{f_1 + c_1}$	$\frac{(c_2 - 1) f_2}{f_2 + c_2}$	$\frac{(c_3 - 1) f_3}{f_3 + c_3}$		$c_3 = \frac{c_1 c_2 + c_2}{c_1 + c_2}$
$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	VI	$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	VI	$\frac{c_1 f_1}{f_1 + c_1}$	$\frac{c_2 f_2}{f_2 + c_2}$	$\frac{c_3 f_3}{f_3 + c_3}$		$c_3 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$

, waarbij, voor (de) twee rechte schalen, **c** wordt bepaald uit:

$$c = \frac{f(\nu)[f(\alpha) + f(\omega)] - 2f(\alpha)f(\omega)}{f(\alpha) + f(\omega) - 2f(\nu)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

3°. is $f(\nu)$ het *rekenkundig gemiddelde* van $f(\alpha)$ en $f(\omega)$, dus is $f(\nu) = \frac{f(\alpha) + f(\omega)}{2}$, waarbij ν dus reeds midden tusschen α en ω gelegen is, dan is $c = \infty$;

4°. is $f(\nu) = \frac{f(\alpha) + 2f(\omega)}{3}$, dan is $c = f(\alpha) - 2f(\omega)$ en is $f(\nu) = \frac{2f(\alpha) + f(\omega)}{3}$, dan is $c = f(\omega) - 2f(\alpha)$ (zie § 96).

5°. is $f(\alpha) = 0$, dan is $c = \frac{f(\nu) f(\omega)}{f(\omega) - 2f(\nu)}$; is $f(\omega) = \infty$, dan is $c = f(\nu) - 2f(\alpha)$ en is $f(\alpha) = 0$ en $f(\omega) = \infty$, dan is $c = f(\nu)$.

§ 95. Verlenging of verkorting der schaaldeelen bij projectieve vervorming.

In figuur **47** zijn met ε en ζ twee schaaldeelen aangeduid, aan de einden van de te vervormen schaal gelegen. Wij veronderstellen deze deelen zeer klein, zoodat het verschil in lengte van de twee stralen uit **P**, die elk deel insluiten, ten opzichte van de lengte dezer stralen zelf, mag worden verwaarloosd. Daar deze verhouding kleiner genomen kan worden dan elk denkbaar getal, hoe klein ook, is die onderstelling geoorloofd.

De relatieve lengte van ε, ten opzichte van de oorspronkelijke schaal, is $\frac{\varepsilon}{b+a}$ en die van ε', ten opzichte van de vervormde schaal, $\frac{\varepsilon'}{2d}$.

Nu is uit figuur **47** af te leiden:

$$\varepsilon' = \frac{\frac{2ad}{b-a}}{\frac{b+a}{b-a}d} \cdot \frac{d}{b}\varepsilon = \frac{2a}{b+a} \cdot \frac{d}{b}\varepsilon. \tag{70}$$

en dus:

$$\frac{\varepsilon'}{2d} : \frac{\varepsilon}{b+a} = a : b. \tag{71}$$

Evenzoo is af te leiden:

$$\zeta' = \frac{\frac{2bd}{b-a}}{\frac{b+a}{b-a}d} \cdot \frac{d}{a}\zeta = \frac{2b}{b+a} \cdot \frac{d}{a}\zeta \tag{72}$$

dus:

$$\frac{\zeta'}{2d} : \frac{\zeta}{b+a} = b : a. \tag{73}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bijgevolg:

Bij een projectieve vervorming, waarbij de schaallengte onveranderd blijft, is de verlenging der schaaldeelen aan het eene schaaleinde, gelijk aan de verkorting der schaaldeelen aan het andere einde en zijn beiden gelijk aan de verhouding der stukken, waarin de gewenschte middenwaarde de oorspronkelijke schaal verdeelt.

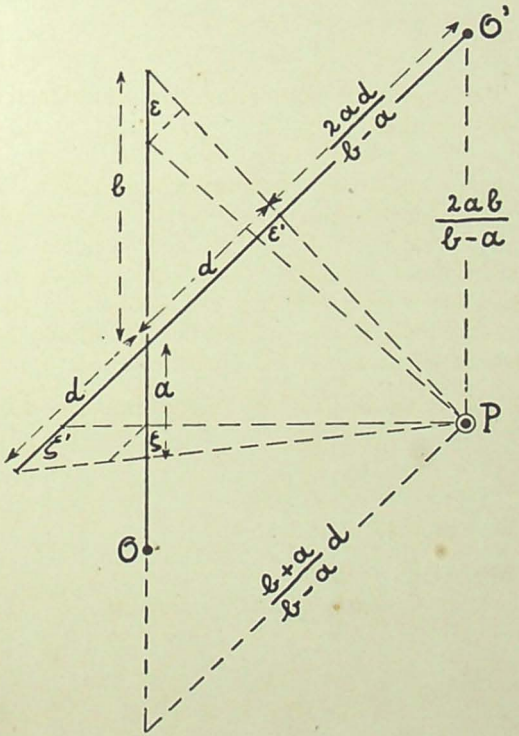


Fig. 47.

Zooals uit de figuur gemakkelijk is na te gaan, is de vervorming aan de schaaleinden het grootst. Voor een willekeurig schaaldeel daar tusschen in, is de formule voor de grootte der vervorming minder eenvoudig en voor ons ook van minder belang.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

a. Geschreven volgens **type I** is:

$f_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{1}{0{,}0149\ l^2}$

$f_2 \ldots \ldots \ldots \ldots -q$

$f_3 \ldots \ldots \ldots \ldots 24d$

$g_3 \ldots \ldots \ldots \ldots (0{,}94d - 1)^2.$

Uit de constructieformules blijkt, dat $[l]$ en $[d]$ zeer ongunstig zullen zijn. Een schets van het nomogram is in figuur **48** gegeven.

b. Geschreven volgens **type IV** is:

$f_1 \ldots \ldots \ldots \ldots 0{,}0149\ l^2$

$f_2 \ldots \ldots \ldots \ldots -\frac{1}{q}$

$f_3 \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{1}{24d}$

$g_3 \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{1}{(0{,}94d - 1)^2}$

$[d]$ is in dit geval niet zoo gemakkelijk uit de constructieformules

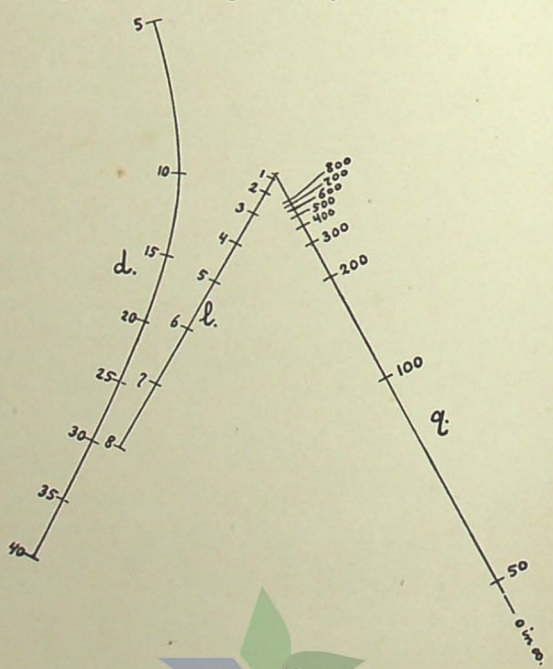


Fig. 49.

te overzien, echter is nu $[q]$ ongunstig en kan $q = 0$ daar niet op worden voorgesteld. Een schets van dit nomogram geeft figuur **49.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

c. Projectieve vervorming.

In figuur 48 is $[l]$ ongunstig, daarentegen $[q]$ zeer gunstig. Bij projectieve verbetering mag laatstgenoemde schaal dus zoo min mogelijk vervormd worden. Willen wij $[d]$ als middenschaal behouden, en kiezen voor $[l]$, $\nu_1 = 4$, dan moet voor $[q]$, ν_2 ongeveer $^2/_3 \times 800$ genomen worden. Aangenomen werd $\nu_2 = 540$.

Wij zullen dus een nomogram construeeren voor:

$$a_1 = 8 \qquad \nu_1 = 4 \qquad \omega_1 = 1$$
$$a_2 = 0 \qquad \nu_2 = 540 \qquad \omega_2 = 800$$

Dus is volgens (69):

$$c_1 = \frac{\frac{1}{0{,}0149 \times 16}\left(\frac{1}{0{,}0149 \times 64} + \frac{1}{0{,}0149}\right) - \frac{2}{0{,}0149^2 \times 64}}{\frac{1}{0{,}0149 \times 64} + \frac{1}{0{,}0149} - \frac{2}{0{,}0149 \times 16}} = 2{,}428$$

en

$$c_2 = \frac{-540\,(0 - 800)}{-800 + 1080} = 1543.$$

De verbeterde functies zijn dus:

$$F_1 = \frac{1}{f_1 + c_1} = \frac{0{,}4118\, l^2}{l^2 + 27{,}64}$$

$$F_2 = \frac{1}{f_2 + c_2} = \frac{1}{1543 - q}$$

$$F_3 = \frac{1}{f_3 + c_1 g_3 + c_2} = \frac{1}{2{,}145\, d^2 + 19{,}435\, d + 1545{,}4}$$

$$G_3 = \frac{1}{g_3} = \frac{1}{(0{,}94\, d - 1)^2}.$$

De bepaling van μ_1 en μ_2 geschiedt volgens de in § 76 verstrekte aanwijzingen.

$$k_1 = F_1(\omega) - F_1(\alpha) = 0{,}4118\left(\frac{64}{91{,}64} - \frac{1}{28{,}64}\right) = 0{,}273\ ^{1})$$

dus $$\frac{k_1}{F_1(\omega)} = \frac{\frac{64}{91{,}64} - \frac{1}{28{,}64}}{\frac{64}{91{,}64}} = 0{,}95$$

$$k_2 = F_2(\omega) - F_2(\alpha) = \frac{1}{743} - \frac{1}{1543}$$

dus $$\frac{k_2}{F_2(\omega)} = \frac{\frac{1}{743} - \frac{1}{1543}}{\frac{1}{743}} = 0{,}518.$$

---

1) Voor f_1 was $\alpha = 8$ en $\omega = 1$, voor F_1 daarentegen is $\alpha = 1$ en $\omega = 8$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dikte van vrij opgelegde, ingekaste of ingemetselde platen of balken van gewa-pend beton, alléén met een trekwapening, bij in rekening gebracht eigen gewicht.

$$\frac{(0{,}94\,d-1)^2}{0{,}0149\,l^2} - q = 24\,d.$$

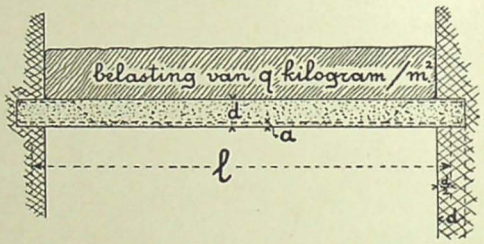


Fig. 50.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Het was, volgens het gestelde aan het einde van § 96, te voorzien, dat de laatste uitkomst ongeveer 0,5 zou wezen. Uit de berekende waarden volgt, dat $[z_2]$ ongeveer langs de diagonaal van het teekenvlak zal moeten liggen.

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur **50** werd aangenomen $L \approx 33$.

Dus $\mu_1 \approx \frac{L}{k_1} = \frac{33}{0{,}273} = 120{,}8$. Aangenomen werd $0{,}4118\,\mu_1 = 50$, dus $\mu_1 = \mathbf{121{,}42}$.

De afstand van den oorsprong tot het beginpunt van de schaal $[z_1]$ is:

$$\mu_1 F_1(\alpha) = 1{,}746.$$

De lengte van de diagonaal kan nu worden opgemeten. In de oorspronkelijke teekening was $D = 41$.

Dus was $\mu_2 \approx \frac{D}{F_2(\omega)} = 30463$. Aangenomen werd $\mu_2 = \mathbf{30.000}$.

Ligging van de eindpunten van $[z_1]$ en $[z_2]$ en contrôle op de ligging der gewenschte middenwaarden:

$\mu_1 F_1(\omega) = \frac{50 \times 64}{91{,}64} =$ 34,920

$\mu_1 F_1(\alpha) = \frac{50 \times 1}{28{,}64} =$ 1,746

af —— op

schaallengte $[z_1] =$ **33,174** $36{,}666 \times {}^1/_2 = 18{,}333$

$\mu_1 F_1(\nu) = \frac{50 \times 16}{43{,}64}$, dus eveneens gelijk aan 18,333

$\mu_2 F_2(\omega) = \frac{30.000}{743} =$ 40,376

$\mu_2 F_2(\alpha) = \frac{30.000}{15.43} =$ 19,442

af —— op

schaallengte $[z_2] =$ **20,934** $59{,}818 \times {}^1/_2 = 29{,}909$

$\mu_2 F_2(\nu) = \frac{30.000}{1003}$, dus eveneens gelijk aan 29,909

Verdere constructie van de drie schalen.

$[z_1]$ wordt berekend voor ronde waarden van z_1, daarna verder geteekend met behulp van den interpolator.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$[z_2]$ is projectief en kan dus door projectie van een regelmatige schaal geconstrueerd worden.

$[z_3]$ kan het vlugst verkregen worden uit de snijding van twee projecteerende bundels, b.v.:

1°. van $z_1 = \infty$ naar $z_2 = -24\, z_3$

2°. van $z_2 = 720$ naar

$$z_1 = 1{,}572\,\frac{z_3 - 1{,}063}{\sqrt{z_3 + 30}}.$$

Deze twee betrekkingen volgen rechtstreeks uit de gegeven vergelijking.

Toepassing van het nomogram.

Tusschen twee muren, op een onderlinge afstand van 4,60 m., moet een gewapend betonplaat gelegd worden, welke behalve het eigen gewicht, een belasting moet kunnen dragen van 600 kg./m². Bij een eerste aflezing over deze twee waarden, verkrijgen wij voor **d** ongeveer de waarde 21.

Wij lezen nu nog een tweede maal af voor $l = 4{,}60 + 0{,}22 = 4{,}82$ en $q = 600$ en vinden dan (stippellijn), $d =$ ruim 22 cm.

Was omgekeerd gevraagd, voor een plaat, waarvoor $l = 4{,}82$ m. en $d =$ ruim 22 cm., de toe te laten belasting te bepalen, dan had onmiddellijk $q = 600$ kg./m². afgelezen kunnen worden.

§ 98. 2e Voorbeeld. *Bepaling der hoekcorrectie bij indirect gericht vuur* (figuur **51**).

De voor te stellen betrekking is:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \varrho}.$$

Voor de beteekenis der veranderlijken, wordt naar de toelichtende schets in figuur **51** verwezen. De verhouding van den afstand **a**, tot de basislengte **b**, wordt aangeduid door de griecksche letter ϱ (rho). De gegeven vergelijking wordt als type (IV) geschreven:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon \,.\, \operatorname{cosec} \varphi} + \frac{1}{-\frac{1}{\varrho}} = \frac{1}{\sec. \varphi}.$$

Het bereik der veranderlijken is:

voor z_1, dat is voor ε van 0° tot 12°

„ z_2, „ „ „ ϱ „ 2 „ 50

„ z_3, „ „ „ φ „ 0° „ 180°.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bepaling der Hoekcorrectie bij indirect gericht vuur.

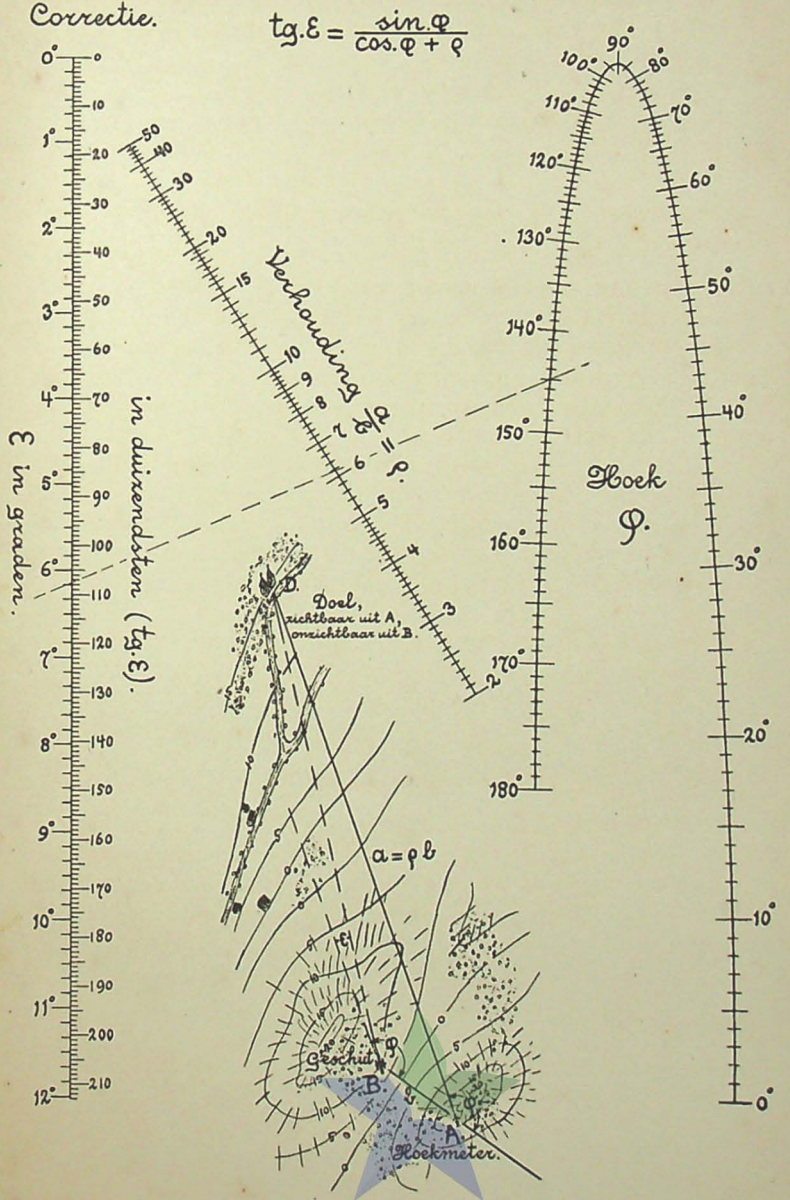


Fig. 51.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Zonder vervorming, zal dus $[z_1]$ een gunstig, daarentegen $[z_2]$ een ongunstig verloop hebben.

Voor de projectieve verbetering nemen wij dus, ten einde $[z_1]$ onveranderd te laten, (hetgeen bij type IV mogelijk is) $c_1 = \infty$.

De waarde van c_2 willen wij, in het onderhavige geval, niet geheel van de verlangde middenwaarde voor z_2, maar ook van den voor $[z_3]$ gewenschten vorm, laten afhangen.

Na de projectieve vervorming, zijn de functies:

$$F_1 \ldots\ldots \operatorname{tg} \varepsilon$$

$$F_2 \ldots\ldots \frac{1}{\frac{1}{c_2} - \varrho}$$

$$F_3 \ldots\ldots \frac{1}{\cos \varphi + \frac{1}{c_2}}$$

$$G_3 \ldots\ldots \operatorname{cosec} \varphi$$

Dus is:

voor $[z_1] \ldots\ldots x = \mu_1 \operatorname{tg} \varepsilon$

„ $[z_2] \ldots\ldots y = \dfrac{\mu_2}{\frac{1}{c_2} - \varrho}$

„ $[z_3] \ldots p = \dfrac{\mu_1 \sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{1}{c_2}} \quad \ldots q = \dfrac{\mu_2}{\cos \varphi + \frac{1}{c_2}}$

Uit de gegeven betrekking kan worden afgeleid, dat de schaalpunten $z_3 = 0°$ en $z_3 = 180°$ op den drager $[z_2]$ liggen en onderscheidenlijk samenvallen met de schaalpunten $z_2 = -1$ en $z_2 = 1$.

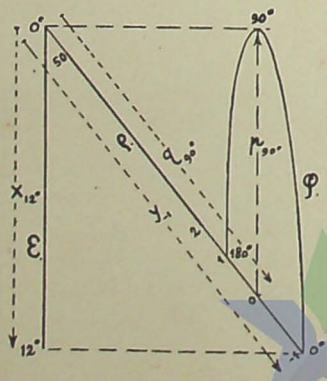


Fig. 52

Uit de constructieformules voor $[z_3]$ volgt voorts:

$$\frac{p}{q} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin \varphi$$

, zoodat een lijn door **O**, de schaal $[z_3]$ zal snijden in twee schaalpunten, welker waarden te zamen 180° zijn.

Voor $\varphi = 90°$ is die lijn dus een raaklijn aan $[z_3]$.

Wij trachten nu een nomogram te verkrijgen, waarbij deze raak-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

lijn in $\varphi = 90°$, ongeveer evenwijdig is aan de verbindingslijn der onderste schaalpunten $\varepsilon = 12°$ en $\varrho = -1$ (figuur **52**).

De gestelde voorwaarde is vervuld als:

$$\frac{-p_{90°}}{q_{90°}} = \frac{x_{12°}}{y_{-1}}$$

, dus als

$$\frac{-\mu_1 c_2}{\mu_2 c_2} = \frac{\mu_1 \operatorname{tg} 12°}{\frac{\mu_2}{\frac{1}{c_2} + 1}}$$

dus $\frac{1}{c_2} = -\operatorname{cotg} 12° - 1 = \mathbf{-5{,}7046.}$

In de oorspronkelijke teekening voor figuur **51**, werd aangenomen $L \approx 33$ en $D \approx 38$, dus

$$\mu_1 \approx \frac{L}{k_1} = \frac{33}{0{,}21256}$$

, aangenomen werd $\mu_1 = \mathbf{150}$;

$$\mu_2 \approx \frac{D}{\frac{c_2}{1 + c_2}} = -38 \operatorname{cotg} 12° = -178{,}775$$

, aangenomen werd $\mu_2 = \mathbf{-178.}$

De constructieformules waren dus:

voor $[z_1]$ . . . . . $x = 150 \operatorname{tg} \varepsilon$

„ $[z_2]$ . . . . . $y = \frac{178}{5{,}7046 + \varrho}$

„ $[z_3]$ . . $p = \frac{-150 \sin \varphi}{5{,}7046 - \cos \varphi}$ $\qquad q = \frac{178}{5{,}7046 - \cos \varphi}$.

Het teekenen van de schalen $[z_1]$ en $[z_2]$, behoeft nu geen toelichting meer. $[z_1]$ werd tevens voorzien van een verdeeling in duizendsten (tg ε), welke dus regelmatig is. $[z_3]$ werd ten deele verkregen met de constructieformules; gedeeltelijk ook door projectie (volgens § 75), o.a. door gebruikmaking van de eigenschap, dat voor $\varrho = 1$, $\varphi = 2\varepsilon$.

Het besproken nomogram kan eveneens bij afstandmeting gebruikt worden, waarbij b weer de basis is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Toepassing van het nomogram.

Bij een basislengte b, van hoekmeter tot geschut, van 400 m., wordt een afstand a opgemeten van 2463 m., zoodat $\varrho = 6{,}157$.

De hoek φ wordt bepaald op 144°57′. Met behulp van het nomogram (stippellijn), vinden wij, dat de, in dit geval negatieve correctie ε, 6°8,5′ bedraagt, zoodat de gecorrigeerde hoek gelijk is aan 138°48,5′.

Laat men de as van den vuurmond dezen hoek maken met de richting naar den hoekmeter, dan is die vuurmond op het — van daaruit onzichtbare — doel gericht.

Projectief vervormde nomogrammen, waarbij de derde schaal op een cirkelboog ligt.

§ 99. Nadat een vergelijking van het type I of IV, waarin f_3 en g_3 door een betrekking van den 2en graad verbonden zijn, ten einde gunstiger schalen te verkrijgen, projectief is vervormd, kan getracht worden voor het nieuwe nomogram volgens § 87, een cirkelboogvormigen $[z_3]$ te verkrijgen.

Déze en de projectieve vervorming, kunnen echter ook gelijktijdig plaats hebben. Daar wij in de keuze van ν voor de twee rechte schalen, altijd eenige vrijheid hebben, is de gecombineerde methode soepeler en is daarmede gemakkelijker een geschikt nomogram met cirkelboogvormige $[z_3]$ te verkrijgen. De benoodigde formules worden, op overeenkomstige wijze als in de §§ 71 en 87, afgeleid.

§ 100. Afleiding van de constructieformules

Stel dat de gegeven betrekking geschreven is als type (I)

$$f_1 g_3 + f_2 = f_3$$

, waarbij tusschen f_3 en g_3 weer de algemeene betrekking van den 2en graad is:

$$b_0 f_3^2 + b_1 f_3 g_3 + b_2 g_3^2 + b_3 f_3 + b_4 g_3 + b_5 = 0 \qquad (76)$$

Bij de projectieve vervorming tot:

$$\frac{1}{F_1 G_3} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$$

, is o.a.

$$F_3 = \frac{1}{f_3 + c_1 g_3 + c_2} \quad \text{en} \quad G_3 = \frac{1}{g_3}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

, dus omgekeerd is:

$$f_3 = \frac{1}{F_3} - \frac{c_1}{G_3} - c_2 \quad \text{en} \quad g_3 = \frac{1}{G_3}$$

Na substitutie van laatstgenoemde vormen in (76), gaat deze vergelijking over in:

$$\left.\begin{aligned} &b_0 \frac{1}{F_3^2} + (b_1 - 2b_0c_1)\frac{1}{F_3G_3} + (b_2 - b_1c_1 + b_0c_1^2)\frac{1}{G_3^2} + \\ &+ (b_3 - 2b_0c_2)\frac{1}{F_3} + (b_4 - b_3c_1 - b_1c_2 + 2b_0c_1c_2)\frac{1}{G_3} + \\ &+ (b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

Dit is dus een 2e graads-vergelijking tusschen $\frac{1}{F_3}$ en $\frac{1}{G_3}$, overeenkomstig (59), zoodat wij daarop de formules (61) mogen toepassen. Wij verkrijgen dan, ter bepaling van de 7 veranderlijken μ_1, μ_2, φ, p_0, q_0, r, c_1 en c_2, het volgende stel formules:

$$\left.\begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{b_2 - b_1c_1 + b_0c_1^2}{b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2}} \\ \cos\varphi &= \frac{b_4 - b_3c_1 - b_1c_2 + 2b_0c_1c_2}{2m(b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2)} \\ \frac{p_0}{\mu_2} &= \frac{(b_3 - 2b_0c_2)\cos\varphi - \dfrac{b_1 - 2b_0c_1}{m}}{2(b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2)\sin^2\varphi} \\ \frac{q_0}{\mu_2} &= \frac{\dfrac{b_1 - 2b_0c_1}{m}\cos\varphi - (b_3 - 2b_0c_2)}{2(b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2)\sin^2\varphi} \\ \left(\frac{r}{\mu_2}\right)^2 &= \left(\frac{p_0}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{q_0}{\mu_2}\right)^2 + 2\frac{p_0}{\mu_2}\cdot\frac{q_0}{\mu_2}\cos\varphi - \frac{b_0}{b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2} \end{aligned}\right\} \quad (78)$$

Twee van de genoemde veranderlijken mogen dus vrij gekozen worden, of wel het is mogelijk nóg twee betrekkingen tusschen eenige dier veranderlijken te vervullen.

§ 101. Voorbeeld. *Betrekking in den driehoek* (figuur 53).

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} = \varrho$$

, waarin $\varrho = \frac{a}{b}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

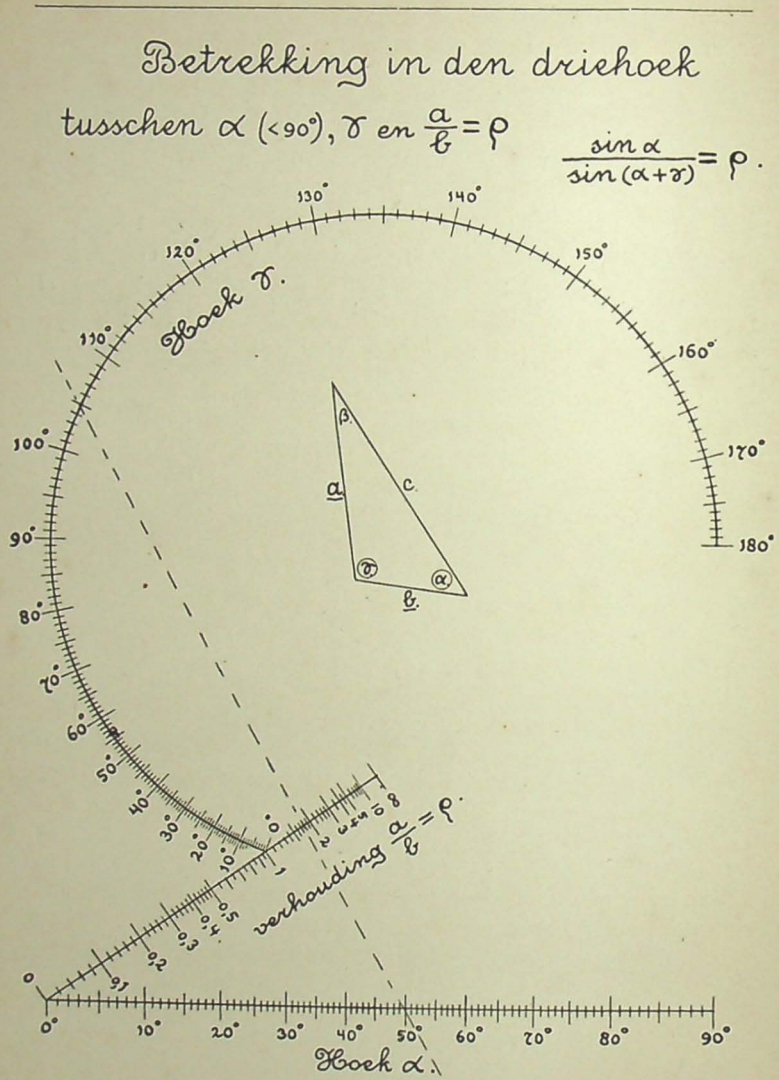


Fig. 53.

Deze betrekking kan als type (I) geschreven worden:

$$\operatorname{cotg} \alpha \sin \gamma + \frac{1}{-\varrho} = -\cos \gamma$$

, dus $f_3 = -\cos \gamma$ en $g_3 = \sin \gamma$, zoodat dus

$$f_3^2 + g_3^2 - 1 = 0$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

en er dus een betrekking (76) is, met de coëfficienten:

$$b_0 = 1 \qquad b_3 = 0$$
$$b_1 = 0 \qquad b_4 = 0$$
$$b_2 = 1 \qquad b_5 = -1$$

Het bereik der veranderlijken is:

voor z_1, dat is voor α, van 0° tot 90°,
„ z_2, „ „ „ ϱ, „ 0 „ 10,
„ z_3, „ „ „ γ, „ 0° „ 180°.

Zonder vervorming zouden de schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ dus zeer ongunstig, voor het gestelde bereik zelfs onmogelijk zijn.

Uit de gegeven betrekking kan worden afgeleid:

1°. als $\gamma = 0°$ is $\varrho = 1$;
2°. „ $\gamma = 180°$ „ $\varrho = -1$;
3°. „ $\varrho = \infty$ „ $\alpha + \gamma = 180°$;
4°. „ $\varrho = 1$ „ $2\alpha + \gamma = 180°$;
5°. wanneer $\alpha = 90°$ is $\cos\gamma = \frac{1}{\varrho}$, waaruit volgt, dat γ dan twee waarden kan hebben, welke te zamen 360° zijn; bijgevolg raakt de afleeslijn door $\alpha = 90°$ in $\gamma = 0°$ en $\gamma = 180°$ aan $[z_3]$;
6°. wanneer $\alpha = 0°$ is $\varrho = 0$ en $\sin\gamma$ onbepaald. Daar echter $\sin\gamma$ even groot is voor twee hoeken, welke te zamen 180° zijn, zal een afleeslijn door $\alpha = 0°$ welke $[z_3]$ snijdt, dit steeds doen in twee schaalpunten, welker waarden te zamen 180° zijn; bijgevolg raakt de afleeslijn door $\alpha = 0°$ in $\gamma = 90°$ aan $[z_3]$.

Van vorengenoemde eigenschappen wordt bij de constructie een dankbaar gebruik gemaakt. Wanneer wij, aan de hand van die eigenschappen, een schetsmatige figuur teekenen (figuur 54), rijst de vraag, of het niet mogelijk is, een nomogram met cirkelboogvormigen $[z_3]$ te construeeren, waarbij deze schaal recht boven $[z_1]$ ligt en een middellijn heeft ter lengte van laatstgenoemde schaal.

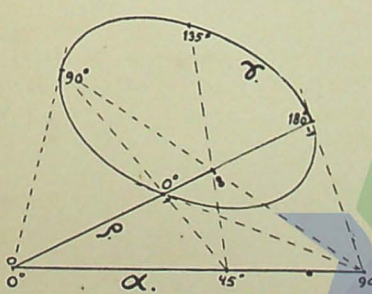


Fig. 54.

Uit die gewenschte ligging volgen twee voorwaarden, welke

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dus, mét de formules (78), kunnen dienen om de benoodigde gegevens voor de constructie te bepalen.

De verbeterde formules voor de twee rechte schalen zijn:

voor $[z_1]$ $\qquad x = \dfrac{\mu_1}{\operatorname{cotg} \alpha + c_1}$

„ $[z_2]$ $\qquad y = \dfrac{\mu_2 \varrho}{c_2 \varrho - 1}$.

Bijgevolg is de lengte van $[z_1]$ gelijk aan $\frac{\mu_1}{c_1}$ en dus

$$p_0 = -\frac{\mu_1}{2c_1}, \text{ terwijl } q_0 = \frac{\mu_2}{c_2 + 1}.$$

Stellen wij deze waarden voor p_0 en q_0 gelijk aan die welke uit (78) volgen, dan vinden wij:

$$c_1 = 1 \qquad \text{en} \qquad c_2 = -2$$

, en vervolgens met behulp van de overige formules (78):

$$m = -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \qquad \cos \varphi = \frac{1}{3}\sqrt{6},$$

$$\frac{p_0}{\mu_2} = \frac{1}{6}\sqrt{6}, \qquad \frac{q_0}{\mu_2} = -1, \qquad \frac{r}{\mu_2} = -\frac{1}{6}\sqrt{6}.$$

In de oorspronkelijke teekening voor figuur **53**, werd

$B = \frac{\mu_1}{c_1} = \mu_1 = 20$ genomen.

Dus was:

$$\mu_2 = \frac{20}{m} = -10\sqrt{6}$$

$$p_0 = -10$$

$$q_0 = 10\sqrt{6}$$

$$r = 10.$$

De constructieformules voor de rechte schalen waren dus:

voor $[z_1]$ $\qquad x = \dfrac{20}{\operatorname{cotg} \alpha + 1}$

„ $[z_2]$ $\qquad y = \dfrac{10\varrho\sqrt{6}}{2\varrho + 1}$.

De verdeeling op den cirkelboogvormigen drager $[z_3]$, werd geconstrueerd met behulp van de reeds vermelde betrekkingen 1^0 t/m 6^0, waarbij wij voor een afleeslijn, welke $[z_3]$ in twee waarden γ en γ' snijdt, nog de betrekking kunnen voegen:

$$2\alpha + \gamma + \gamma' = 180°.$$

De onder 4^0, 5^0 en 6^0 genoemde betrekkingen zijn hiervan bijzondere gevallen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Toepassing van het nomogram.

Het nomogram figuur **53**, stelt ons in staat om de overige elementen van een driehoek te bepalen, wanneer gegeven zijn:

1°. een zijde met de twee aanliggende hoeken;
2°. een zijde, een aanliggende en een overstaande hoek;
3°. twee zijden en den ingesloten hoek;
4°. twee zijden en een hoek tegenover een dezer zijden.

Wij verkeeren in het derde geval, als gegeven is:

$a = 30{,}26$ cm., $b = 17{,}12$ cm., $\gamma = 104°45'$.

Gevraagd wordt α te bepalen.

$\frac{a}{b} = \varrho = 1{,}77$. Uit het nomogram (stippellijn) blijkt $\alpha = 49°40'$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opgaven 22 t/m. 85 voor de constructie van nomogrammen van de 3e orde.

22. Inhoud van een cylinder $I = {}^1/_4\pi d^2 h$.

23. De capaciteit van twee evenwijdige draden (in lucht) is per meter lengte: $$C = \frac{1000}{36\ ln\ \frac{2D}{d}}$$
, als **d** = de dikte van de draden (0,02 tot 0,7 cm.)
D = afstand draden h.o h. (0,05 tot 150 cm)
en **C** = de capaciteit in $\mu\mu$F.

24. $R' = R(1 + 0{,}00393\ t)$, waarin:
R = weerstand van een koperen geleiding in Ω bij een willekeurige temperatuur,
R' = weerstand na een temperatuurssteiging van t graden Celsius,
R en R' van 0 tot 5Ω, t van 0° tot 300°.

25. De inhoud van een kegelvormig gestorten berg is in m^3:
$$I = {}^1/_3\pi h^3\ \text{cotg}^2\ \varphi$$
, waarin h = hoogte van den berg in m. en tg φ = het natuurlijk talud (bijschrijven voor verschillende materiaalsoorten).

26. Tusschen de drie zijden van een rechthoekigen boldriehoek bestaat de betrekking
$$\cos c = \cos a\ \cos b.$$

27. Het traagheidsmoment van een ringvormige doorsnede is
$$I = {}^1/_4\pi(R^4 - r^4).$$

28. Worpafstand $a = \frac{v_0^2}{g}\ \sin 2\alpha$, waarin v_0 de beginsnelheid in m/sec. en α den hoek, waaronder het voorwerp wordt opgeworpen.

29. Worptijd $t = \frac{2v_0}{g}\ \sin \alpha$. Beteekenis van v_0 en α als bij opgave **28.**

30. Sinusregel $\lambda = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, als $\lambda = \frac{a}{b}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

31. Uitzetting van een gas bij constanten druk:

$$a = \frac{273 + t_2}{273 + t_1}$$

, wanneer

t_1 = de oorspronkelijke temperatuur in ° C.
t_2 = de eindtemperatuur in ° C.

32. Afstand van het perspunt onder het midden van een rechthoek, cirkel of ellips

, bij een rechthoek (hoogte = a): $p = \frac{a^2}{12z}$

, bij een cirkel of ellips (vertikale as = a): $p = \frac{a^2}{16z}$.

In beide betrekkingen is **z** = de diepte van het midden van rechthoek, cirkel of ellips, onder den waterspiegel.

33. Bij het onderzoek van rookgassen, kan de verhouding λ, van toegevoerde tot benoodigde verbrandingslucht, berekend worden uit:

$$\lambda = 0{,}21 \frac{\frac{1}{CO_2} + 3a}{1 + 3a}$$

, waarin CO_2 het koolzuurgehalte der rookgassen is en $a = \frac{H - {}^1/_8 O}{C}$ berekend kan worden uit het **H**, **O** en **C**-gehalte van de brandstof. Bij [a] verschillende brandstoffen bijschrijven.

34. De luchtweerstand **W** van een parachute, met een oppervlakte van **S** vierkante meter, welke parachute met een snelheid van **v** m/sec. daalt, is in kg.:

$$W = 2{,}378\, S v^2 \,.\, 10^{-5}.$$

35. De excentriciteit **e** van een ellips, met halve groote as **a** en halve kleine as **b** is: $e = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$.

36. De dikte (in cm.) van een as, welke een vermogen A (in P.K.) moet overbrengen, kan worden berekend uit de formule:

$$d = 1{,}139 \sqrt[3]{\frac{A}{n}}$$

, waarin **n** het aantal omwentelingen per minuut is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

37. Wanneer op 2 m. hoogte de windsnelheid v_2 m/sec bedraagt, dan is op **h** m. hoogte de windsnelheid gemiddeld:

$$v_h = v_2 \sqrt[5]{1/2 h}$$

(Schreiber).

38. Tusschen de excentriciteit **e**, de excentrische anomalie φ en de ware anomalie **x** van een planetenbaan, bestaat de betrekking (zie schets in figuur **24**):

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 x = \operatorname{tg} {}^1/_2 \varphi \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

39. De waarde $\eta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$, is een maatstaf voor de „efficiency", van een lekweerstand- en roostercondensator-koppeling in een versterker. η (0.03 tot 1), is de verhouding van de spanning aan den lekweerstand tot die aan den roostercondensator en lekweerstand in serie, **R** is de lekweerstand in Ω (4.000—3.000.000) en **x** de reactantie van den condensator in Ω (1.000—10.000.000).

40. Wanneer van een schip, een gedeelte ter hoogte van **d** meter onder den horizon verzonken blijft, voor een waarnemer, die zich **h** meter boven den zeespiegel verheft, dan is de afstand in km., van den waarnemer tot het schip, rekening houdende met de gemiddelde straalbuiging:

$$L = 3{,}85\ (\sqrt{h} + \sqrt{d}).$$

41. Bepaling van de verwarming van electrische machines, volgens de „Vorschriften und Normen des Verband Deutscher Electrotechniker (V. D. E.)"

$$t = (r - 1)\,(235 + T_0)$$

, waarin T_0 de temperatuur van de koude wikkeling in ° C., **r** de verhouding van de weerstanden van de warme en koude wikkeling en **t** de temperatuurtoename in ° C is.

42. Voor boormachines geldt:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{20{,}8}{0{,}32d + \frac{c}{k}}}$$

, waarin:

d = diameter van den boor in mm. (10 tot 80),

c = stijfheid der boormachine (0 tot 16 000),

η = rendement, k = 100 of 200. (College Prof. Dresden)

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

43. Is voor een voertuig de uitlooplengte l meter en de uitlooptijd t sec, dan is de rijweerstand in kg. per ton gewicht van dat voertuig;

$$w = \frac{200l}{t^2}.$$

(Seefehlner. „Electrische Zugförderung").

44. Formule van *Biegeleisen* en *Bukovsky* voor de strooming van water door gietijzeren buizen:

$$J = \beta \frac{Q^{1,9}}{D^{4,9}}$$

, waarin β voor nieuwe buizen 9,0019
en voor gebruikte oude buizen 0,004061;
J = het verhang, **Q** = de afvoer in m^3/sec. en **D** = de buismiddellijn in m.

45. De temperatuurcorrectie voor een barometerstand **B** is $\beta = \frac{Bt}{6250}$, waarbij **t** de temperatuur is in ° C.

46. Tusschen de declinatie δ van de zon, de breedte β van een plaats op den aardbol en den uurhoek α, begrepen tusschen op- en ondergang van de zon, bestaat de betrekking:

$$\cos {}^1/_2\alpha = - \operatorname{tg} \beta \,.\, \operatorname{tg} \delta.$$

De schaal $[\alpha]$ te nummeren in aantal uren, $[\delta]$ volgens de data van het jaar, bij $[\beta]$ de voornaamste steden bijschrijven.

47. De toe te laten trekkracht in een ronde draad of staaf is:

$$P = {}^1/_4 \pi d^2 \sigma.$$

σ van 50 tot 2000 kg/cm^2, **d** van 0,01 tot 10 cm., **P** in kg. Bij $[\sigma]$ verschillende materialen bijschrijven.

48. De electrische weerstand in Ω per m. draadlengte is $R = \frac{4\sigma}{\pi d^2}$, waarin: σ = de soortelijke weerstand per m. draad van 1 $mm.^2$ doorsnede, **d** = de dikte van den draad in mm. Hierbij een dubbelschaal voor $G = \frac{1}{R}$, waarin **G** = het geleidingsvermogen. Bij $[\sigma]$ materialen bijschrijven.

49. Als $\gamma = \alpha \pm \beta$ is $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

50. Stootfactor $k = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$ voor verschillende stoffen. h = valhoogte, h_1 = opspringhoogte.

51. De waterafvoer door een ronde buis of opening is:

$$Q = 1000 \frac{\pi d^2}{4} v$$

v in m/sec., **d** in *m.*, **Q** in liter/sec., **Q** tevens nummeren in m^3/minuut, voor kleine hoeveelheden in m^3/uur.

52. Betrekking $x = y^n$ voor n van -3 tot $+3$.

53. Een legeering bestaande uit x % van het eene, en $(100 - x)$ % van het andere metaal, bevat, als de atoomgewichten zich verhouden als $a : b = \lambda : 1$, z % atomen van het eene, en $(100 - z)$ % atomen van het andere metaal, waarbij:

$$z = \frac{100x}{x + (100 - x)\lambda}. \qquad \text{(Pirani).}$$

54. Formule van *Kutter* en *Ganguillet*, voor den factor c, voor gewone kanalen en beken ($n = 0{,}025$):

$$c = \frac{63\,J + 0{,}00155}{J + (23\,J + 0{,}00155)\frac{1}{40\sqrt{R}}}$$

voor een verhang **J** van 25×10^{-6} tot 500×10^{-6} en een gemiddelde straal **R** van 0 tot 8 m. (type V toepassen).

55. In den rechthoekigen boldriehoek (met schuine zijde = c), bestaan de betrekkingen:

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \text{ en } \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

56. Toestandsvergelijking voor lucht:

$$pv = 29{,}3\ (t + 273°),$$

waarin p de luchtdruk in kg/m.^{2},
v het volume van 1 k.g. lucht in m.^{3},
t de temperatuur in ° C.

57. $\sin \alpha = n \sin \beta$. Breking van lichtstralen bij overgang in een doorzichtige stof met brekingsindex n.
Bij [n] verschillende glassoorten, enz. schrijven.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

58. De reactantie van een condensator is in Ω:

$$R = \frac{10^{12}}{2\pi n C} = \frac{531\lambda}{C}$$

, waarin n het aantal perioden per sec., C de capaciteit van den condensator in $\mu\mu$F, en λ de golflengte in meters. Dubbelschaal n, λ.

59. $C = 31{,}567 \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}$, is het aantal kilogramcaloriëen **C**, noodig voor het verwarmen van 1 cm.^{3} droge lucht van T_1 tot T_2 (in graden absolute temperatuur).

60. Voor het maken van een mijntrechter, wijd **b** meter, in gewonen gemengden grond, moet een op **h** meter diepte aangebrachte lading brisante springstof een grootte hebben in kg.:

$$L = [{}^1/_2\sqrt{b^2 + 4h^2} - h(\sqrt{2} - 1)]^3,$$

als veranderlijken aan te nemen: **L**, **h** en $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{h}}$.

61. De afvoer van een rivier is $Q = vF$, waarin v = de gemiddelde stroomsnelheid in m/sec, F = het natte profiel in m^2, Q in m^3/sec. Uit het profiel van een bepaalde rivier, kan een nummering van [F] volgens den waterstand worden afgeleid.

62. $S = vt$, waarin S = af te leggen weg in km., v = marschsnelheid (voor verschillende troepenonderdeelen: infanterie, wielrijders, autocolonnes, veldartillerie, enz. Deze bijschrijven).
t = benoodigde tijd.

63. Bij de strooming van gas door buisleidingen geldt:

$$\frac{h}{s} = 1655\, Q^2 D^{-5}$$

, waarin: $\frac{h}{s}$ = het quotient van het drukverlies per km. in mm. waterdruk en het gewicht van het gas per m.^{3} in kg., Q = de hoeveelheid gas in m^3, welke per uur door de buis stroomt en D = de wijdte van de buis in cm. (d'Ocagne).

64. Het gewicht van 1 m.^{3} lucht in grammen, bij h mm. barometerstand en $t°$ Celsius is:

$$\lambda = \frac{1293\, h}{760\left(1 + \frac{t}{273}\right)}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

65. Spanning in drijfriemen $\frac{T_1}{T_2} = e^{0,01745\sigma\alpha}$, waarin T_1 de spanning in de strakke zijde van den riem, T_2 de spanning in de losse zijde, α de booglengte, over welke riem en drijfwiel elkaar raken, σ een coëfficient, voor lederen riemen op gegoten ijzeren drijfwielen $= 0,3$. (T_1 van 10 tot 30, T_2 van 2 tot 20, α van 100° tot 300°). (Lipka).

66. Het door een drijfriem overgebrachte aantal P.K. is:

$$n = \frac{T_1 - T_2}{75} v,$$

waarin de beteekenis van T_1 en T_2 dezelfde is als in opgave **65** (in kg.) en **v** de riemsnelheid in m/sec is.

Veranderlijken: $(T_1 - T_2)$ van 2 tot 40, **v** van 1,5 tot 30, en **n**.

67. Berekening van houten schotbalken. Zie blz. 113.

68. De opwaaïing van een watervlakte is, in de windrichting, per km. lengte: $w = 0,04 \frac{v^2}{d}$,

, waarin **v** de windsnelheid in m/sec., **d** de waterdiepte in *m.* en **w** de opwaaïing in cm. per km. is.

69. Bij barometrische hoogtemeting, wordt een hoogteverschil **h**, in meters, bepaald uit de gemiddelde temperatuur **t** en de verhouding der barometerstanden β, met de formule:

$$h = (16000 + 64t) \frac{1 - \beta}{1 + \beta}.$$

70. Volgens *Bazin* is de stroomsnelheid in m/sec. in rivieren en kanalen met aarden wanden, wanneer α het verhang is en **R** de gemiddelde straal in m.:

$$v = \frac{87R\sqrt{\alpha}}{\sqrt{R} + 0,85}.$$

71. Het toe te laten draagvermogen van houten heipalen, bepaald, met de z.g. Hollandsche heiformule, uit de zakking in de laatste tocht (30 slagen), bij een valhoogte van het heiblok van 2 meter, is:

$$D = \frac{2B^2}{(B + P)z}$$

, waarin het paalgewicht **P**, voor een paallengte l van 10 en 14 m., te bepalen uit de formule $P = 3l^{2,3}$;

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

B = blokgewicht in kg. (300 tot 800);
z = zakking in de laatste tocht in cm. (1 tot 150);
D = toe te laten draagvermogen in tonnen (4 tot 20).

72. Het gedurig product $P = n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots$, kan benaderd berekend worden met de formule:

$$P = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

, waarin $e = 2{,}71828\ldots\ldots$ Deze formule kan herleid worden tot

$$(2n+1)\log\frac{n}{e} + (\log 2\pi e - 2\log P) = 0.$$

Stel $z_1 = n$, $z_2 = P$ en eveneens $z_3 = n$.

73. Scheepsweerstand in kanalen of rivieren:

$$w = \alpha v^2 \frac{n^2}{(n-1)^2}$$

, waarin **w** de weerstand in kg. per m^2 ondergedompelde doorsnede van het schip, **v** de snelheid van het schip ten opzichte van het water in m/sec. en **n** de verhouding van de natte doorsnede van het kanaal of de rivier tot die van het schip. α is een coëfficient, afhankelijk van den vorm van het schip, b.v. voor schepen met spitse voorsteven = 9, voor schepen met stompe voorsteven = 21 te stellen.

74. Overeenkomende tijdstippen in verschillende landen en steden: $T_1 + t = T_2$, waarin T_1 = Amsterdamsche tijd,
t = tijdsverschil met Amst. tijd, voor verschillende landen en steden en
T_2 = tijd in het andere land of de andere stad.

75. Het logarithmisch decrement δ, van een electrische slingerketen, wordt bepaald uit de verhouding **n** van de golflengte bij resonantie en een naburige grootere golflengte, en de verhouding τ van de stroomsterkte bij resonantie en bij die naburige golflengte, met de formule (Bjerknes):

$$\delta = \frac{\pi(1-n^2)}{2\sqrt{(\tau^2-1)}}.$$

76. Voor elk waterpasinstrument kan een nomogram geteekend worden, waaruit, wanneer de bel niet geheel inspeelt, de in rekening te brengen correctjes kunnen worden afgelezen. De voor te stellen betrekking is: $c = 100\ nha$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

, waarin **h** de bekende hoekwaarde van het niveau is, **a** de afstand tot den afleesbaak in meters, **n** het aantal niveaudeelen, waarover de bel uitwijkt en **c** de correctie in cm.

77. Voor een dynamo is $W = 0{,}736\,\eta N$, voor een motor $N = \frac{\eta}{0{,}736}\,W$, als **W** het verkregen, resp. het toegevoerde electrische vermogen in K.W., **N** het toegevoerde, resp. het afgeleverde mechanisch vermogen in P.K. en η het rendement van de dynamo of den motor is.

78. Voor het trapeziumvormig kanaalprofiel, dat, voor een bepaalde oppervlakte van het profiel, de maximum afvoer toelaat, is:

$$d = \sqrt{\frac{F \sin \varphi}{2 - \cos \varphi}}$$

, waarin **d** de diepte in meters, **F** de natte doorsnede in m^2, en φ den hoek van het talud is.

Op $[\varphi]$ een dubbelschaal teekenen voor $\frac{b}{d} = \frac{2}{\sin \varphi}$, waarin b de breedte van het kanaal op het wateroppervlak in m. is.

Nomogrammen met meer dan drie evenwijdige schalen (opgaven 79 t/m. 85).

79. Het weerstandsmoment eener rechthoekige doorsnede is $W = {}^1/_6 bh^2$, het traagheidsmoment $I = {}^1/_{12} bh^3$.
b van 2 tot 30, **h** van 5 tot 40 cm.

80. De centrifugale kracht per kg. gewicht is $C = \frac{v^2}{gr}$, het aantal omwentelingen per sec. is $n = \frac{v}{2\pi r}$, als **v** de omtrekssnelheid in m/sec., **r** de straal in m. en **g** de versnelling van de zwaartekracht, dat is 9,812 m/sec.^{2} is.

81. Doorsneden van fabrieksschoorsteenen:
rond van buiten en *rond* van binnen $F = {}^1/_4\pi(D^2 - d^2)$
vierkant van buiten en *rond* van binnen $F = D^2 - {}^1/_4\pi d^2$
vierkant van buiten en *vierkant* van binnen $F = D^2 - d^2$
achtkantig van buiten en *rond* van binnen $F = 2(\sqrt{2} - 1)D^2 - {}^1/_4\pi d^2$
, als **D** de kleinste buiten- en **d** de kleinste binnendiameter is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

82. Voor een balk met een overspanning van l meter, een weerstandsmoment van W cm.^{3}, een toe te laten buigspanning van T kg. per cm.^{2}, een geconcentreerde last in het midden van P ton of een gelijkmatig verdeelde last van q kg. per m., is:
voor een geconcentreerde last: $WT = 25000\ Pl$.,
voor een gelijkm. verdeelde last: $WT = 12{,}5\ ql^2$.
Neem T voor grenen- en eikenhout = 100, voor vloerijzeren liggers = 1200.
[W] te nummeren met handelsmaten van houten balken en met profielnummers van gewone en breedflenzige ijzeren liggers.

83. Formules van *Dupuit-Eytelwein* voor de stroomsnelheid **v** in m/sec. en den afvoer **Q** in m^3/sec., door een buisleiding met een doorsnede van **D** cm. en een verval **J**:

$$v = 2{,}55\sqrt{JD} \text{ en } Q = 0{,}0002\sqrt{JD^5}.$$

84. De straaldruk **P**, in de richting van een straal, welke onder een hoek α, met een stroomsnelheid van **v** m/sec. tegen een vlakken wand gespoten wordt, en de straaldruk **N** loodrecht op dien wand, zijn per dm.^{2} doorsnede van den straal, in kg.:

$$P = 1{,}0194\ v^2 \sin^2 \alpha.$$
$$N = 1{,}0194\ v^2 \sin \alpha \qquad \text{(Lacmann)}.$$

85. Bij een eenparig versnelde beweging, is $v = at$ en $s = {}^1/_2 at^2$, waarin **a** de versnelling in m/sec.^{2}, **t** de tijd in sec. sedert het begin der beweging, **v** de verkregen snelheid in m/sec. en **s** de afgelegde weg in m. is.

Opgaven 86 t/m 118 voor de constructie van nomogrammen van de 4^e_0 orde.

86. Derdemachtsvergelijking

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (\mathbf{a} \text{ en } \mathbf{b} \text{ van } -10 \text{ tot } +10).$$

87. De afvoer over een volkomen overlaat met contractie, is volgens *Francis:* $Q = 1{,}84\ (B - 0{,}2\ H)H^{3}/_{2}$, waarin **B** de breedte in m. van den overlaat, **H** de hoogte in m. van het bovenwater boven de kruin van den overlaat en **Q** den afvoer in m^3/sec. is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

88. De major *Hartl* heeft voor den coëfficient van straalbuiging μ de, — ook voor ons land geldige —, formule

$$2\mu = 0{,}1041 + 0{,}0840\, b^2$$

afgeleid, waarin **b** den tijd voor of na den middag voorstelt, uitgedrukt in het halve tijdsverloop tusschen zonsopgang en zonsondergang. Met behulp van een tabel voor de tijdstippen daarvan, kan een nomogram geteekend worden voor de betrekking tusschen datum, tijd van den dag en μ.

Neem voor den tijd van den dag een regelmatige schaal, voor b eveneens een regelmatige schaal daaraan evenwijdig (later te nummeren volgens μ); de schaal voor den datum wordt dan (wegens de tijdsvereffening tusschen middelbaren en waren tijd) een licht-S-vormig gebogen schaal.

89. De zelfinductie **L** in cm., van een rechten draad lang **l** en dik **d** cm., is:

$$L = 2l\left(ln\,\frac{4l}{d} - 1\right).$$

90. De verlichting **L** in Lux van een horizontaal vlak, in horizontale richting **R** meter en in verticale richting **Z** meter verwijderd van een lamp van 100 H.K., is:

$$L = \frac{100\,Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}.$$ (Pirani).

91. Wet der overeenkomstige toestanden:

$$\left(\varepsilon + \frac{3}{\nu^2}\right)(3\nu - 1) = 8\omega$$

, waarin ν, ε en ω onderscheidenlijk het gereduceerde volume, de gereduceerde druk en de gereduceerde absolute temperatuur beduiden, d.w.z. percentages van het kritische volume, de kritische druk en de kritische absolute temperatuur.

92. Empirische formule van *Wex*, voor den afvoer over grondstuwen (onvolkomen overlaten):

$$Q = 2{,}35H\sqrt{H_1} - 0{,}58\sqrt{H_1^3}$$

, waarin **Q** in m^3. per sec. per m. breedte van de stuw, **H** de hoogte in m. van het bovenwater boven de stuw en H_1 het hoogteverschil in m. van boven- en benedenwater is. (Lacmann).

93. Het totaal aantal voorwerpen in een pyramidevormigen stapel, met **x** eenheden langs de korte zijde van het rechthoekig grondvlak en **z** eenheden langs den kam van den stapel, is:

$$n = \tfrac{1}{6}x(x + 1)(2x + 3z - 2).$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

94. Wordt met een tachymeter, tusschen de draden op een baak een verschil **v** afgelezen, en staat de kijker onder een hoek α met den horizon, dan is het hoogteverschil tusschen de kijkeras en het afleespunt van den middendraad op de baak:

$$H = {}^1/_2 Av \sin 2\alpha + B \sin \alpha$$

, waarin **A** en **B** constanten van den tachymeter zijn.

95. Het toe te laten draagvermogen van houten heipalen, bepaald uit de zakking in de laatste tocht slagen (30 slagen), bij een valhoogte van het heiblok van 2 meter, is volgens *Eytelwein:*

$$D = \frac{2B^2}{(B+P)z} + 0{,}0003\,(B+P)$$

, daarbij het paalgewicht **P** te bepalen uit $P = 3l^3$, voor een paallengte **l** van 10 en 14 m.; **B** is het blokgewicht in kg. (300 tot 800), **z** de zakking van de heipaal in de laatste tocht in cm. (1 tot 150) en **D** het toe te laten draagvermogen in tonnen (ongeveer 4 tot 20).

96. Voor de zichtbaarheid van vuurtorenlichten geldt volgens *Allard* $d^2 = 100\ L\ a^d$

, waarin **L** de lichtsterkte van het kustlicht in kaarsen, **d** de afstand tot welke het licht zichtbaar is (in km.) en **a** een coëfficient afhankelijk van de helderheid der atmosfeer (0 tot 1) is.

(d'Ocagne, Soreau).

97. Formule van *Gauss* uit de foutentheorie:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$$

, waarin **x** van 0 tot 1,5, **y** van 0,05 tot 0,5, en **e** het grondtal van de nat. logarithmen is. (Le Heux).

98. Formule van *Mary* voor onvolkomen overlaten (zie figuur **55**)

$$Q = 0{,}8 h_2 \sqrt{2g\left(\left(h_1 + \frac{v_0^2}{2g}\right) - h_2\right)}.$$

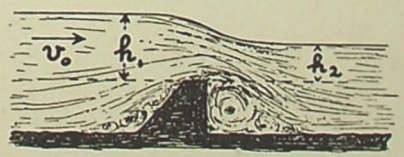


Fig. 55.

Q in m^3/sec. per m. breedte van den overlaat, $\mathbf{h_1}$ en $\mathbf{h_2}$ in m., $\mathbf{v_0}$ in m/sec. Neem schalen [Q], $[h_2]$ en $\left[h_1 + \frac{v_0^2}{2g}\right]$, de laatste tevens als dubbelschaal voor $h = \frac{v^2}{2g}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

99. Bij het meten met den sextant van den elevatiehoek van een richtlijn naar een nabijgelegen punt P, met behulp van een kunstmatigen horizon, is:

$$\gamma = {}^1/_2\alpha - m \cos^2 {}^1/_2\alpha$$

, waarin γ de gezochte elevatiehoek is, α de met den sextant opgemeten hoek en m de verhouding tusschen de hoogte van den sextant boven den kunstmatigen horizon en den afstand van deze laatste tot het punt P.

Nomogrammen van de 4^e_0 orde met cirkelboogvormige $[z_3]$. (Opgaven 100 t/m 118).

100. Vierkantsvergelijking

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (\mathbf{a} \text{ en } \mathbf{b} \text{ van } -10 \text{ tot } +10).$$

101. Eenparig vertraagde beweging

$$s = v_0 t - {}^1/_2 g t^2$$

, waarin $\mathbf{v_0}$ de beginsnelheid in m/sec., **t** de tijd sedert het begin van de beweging in sec. en **s** de afgelegde weg in m. is, terwijl

$$g = 9{,}812 \text{ m/sec}^2.$$

102. Wordt bij een electrische machine, na een zekeren tijd de temperatuursteiging $\mathbf{T_1}$ opgemeten, en na een tweemaal zoo langen tijd de temperatuursteiging $\mathbf{T_2}$, beiden ten opzichte van dezelfde begintemperatuur, dan is de steiging $\mathbf{T_\infty}$ tot de stationaire eindtemperatuur:

$$T_\infty = \frac{T_1^2}{2T_1 - T_2}. \qquad \text{(Schwerdt).}$$

103. De lengte **L** van een kabel, met doorhang **d** en spanwijdte **l**, alles in meters, is benaderd:

$$L = \frac{l^2 + {}^8/_3 d^2}{l}$$

l van 20 tot 100, **d** van 0,1 tot 2.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

104. Voor de vulling van een sluiskolk (zie figuur **56**) is:

$$\tau = \frac{H_1 + 2H_2}{\sqrt{H_2}}$$

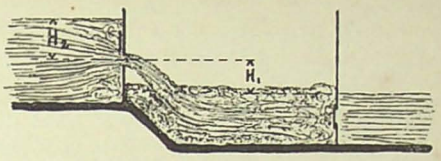


Fig. 56.

waarbij $\tau = mt$, als **t** de vultijd is en **m** een coëfficient, afhankelijk van de grootte van de kolk en van de schuifopening.

105. Bij axonometrische projectie (zie figuur **57**), is de verhouding der lengte-eenheden in de as-richtingen, als $m : n : 1$. Tusschen den hoek φ, welke een asrichting maakt met het verlengde van de Z-as, de lengte-eenheid **m** in die asrichting en de lengte-eenheid **n** in de derde asrichting, bestaat de betrekking:

$$2m^2 \cos 2\varphi - n^4 + 1 + m^4 = 0.$$

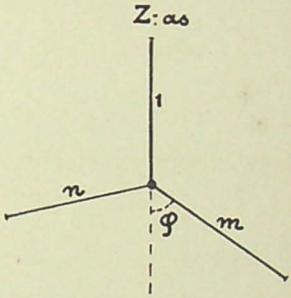


Fig. 57.

106. Bij planconvexe lenzen met een middellijn **m** en een dikte **d**, is de kromtestraal:

$$R = \frac{m^2 + 4d^2}{8d}.$$

107. De betrekking tusschen de excentrische anomalie φ en den hoek ψ, (P'-Z-Perih. in de schets bij figuur **24**), is:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - e}.$$

108. Berekening van de hoeken van een driehoek uit de drie zijden, met behulp van den cosinusregel. Stel: $\frac{a}{c} = a_1$ en $\frac{b}{c} = b_1$, dan is:

$$\cos \alpha = \frac{b_1^2 - a_1^2 + 1}{2b_1}.$$

109. Voor rondhouten stutten is volgens *Navier* en *Schwarz-Rankine:*

$$P = \frac{15\pi d^4}{d^2 + 36{,}8\, l^2}$$

, waarin P = de toe te laten belasting in kg,
d = de paaldikte in cm.,
l = de paallengte in m.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

110. Het volume van het ballastbed op een spoorweg, bij een dikte van **d** m., taluds 2 : 3 en een bovenbreedte van **b** m., is per m. lengte in m^3: $V = bd + 1{,}5d^2$. (d'Ocagne).

111. Tusschen den uurhoek **U**, de declinatie Φ en den afstand tot het Zenith ω van een ster, is voor een plaats met de breedte φ:

$$\cos \omega = \sin \varphi \sin \Phi + \cos \varphi \cos \Phi \cos U.$$

Neem voor φ de breedte van uwe woonplaats. [U] in uren te nummeren.

112. De te gebruiken schootshoek φ, wordt afgeleid uit den schootstafelhoek α en den terreinhoek ε met

$$(1 + \cos 2\varphi) \operatorname{tg} \varepsilon = \sin 2\varphi - \sin 2\alpha.$$

113. Loonberekening volgens het *Rowan*-stelsel:

$$b = (2t - w)\frac{w}{t}$$

, waarin **t** het getaxeerde aantal uren voor een bepaalden arbeid benoodigd, **w** het aantal uren, waarin de arbeider dat werk volbracht heeft en **b** het aantal uren, waarover loon wordt betaald.

114. Voor de tijdsbepaling uit de culminatie van een ster, moet een correctie **J** berekend worden

$$J = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta}$$

, waarin:

φ de geografische breedte van de plaats van waarneming en δ de declinatie van de ster is. (Wenner).

115. Evenzoo moet berekend worden een correctie **K** uit:

$$K = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta}$$

, waarin φ en δ dezelfde beteekenis hebben als in de opgave **114**. (Wenner).

116. Het uitzetten op het terrein van een cirkelboog met grooten straal **R**, kan plaats hebben, door achtereenvolgens punten daarvan te bepalen met behulp van hunne coördinaten **x** en **y**, (zie figuur **58**). De ordinaten **y** worden daarbij berekend uit de formule:

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2}.$$

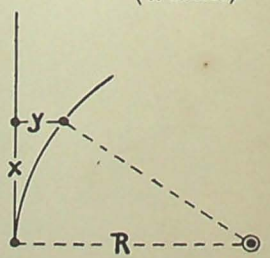


Fig. 58.

117. Wordt tusschen de draden van

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

een tachymeter op een baak een hoogteverschil **v** afgelezen, en is de kijker gericht volgens een hoek α met den horizon, dan is de horizontale afstand tot de baak:

$$L = Av \cos^2 \alpha + B \cos \alpha$$

, waarin A en B constanten van den tachymeter zijn.

118. Bij een trigonometrische hoogtemeting is, rekening houdende met de voor Nederland geldende gemiddelde aardkromming en straalbuiging, het hoogteverschil **h** tusschen twee punten (in meters): $h = a \text{ tg } e + 6{,}737 \times 10^{-8} a^2$
, waarin **a** de horizontale afstand in meters tusschen de twee punten is en **e** de elevatiehoek, onder welke het eene punt, van het andere uit, wordt gezien.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

B.

NOMOGRAMMEN OP EEN GEBOGEN SCHALENSTEL.

HOOFDSTUK 16.

Algemeene inleiding.

§ 102. Nomogrammen op een gebogen schalenstel hebben in het algemeen twee gebogen schalen, te zamen het schalenstel vormend, waarop de betrekking door een derde, kromme of rechte schaal, wordt voorgesteld.

Voor de afleiding van de functievergelijkingen dezer nomogrammen en voor hunne constructie, maken we echter meestal weer gebruik van een recht **hulpschalenstel** $[\varphi, \psi]$, waarvoor:

$$x = \mu'\varphi \quad \text{en} \quad y = \mu''\psi.$$

In wetenschap en techniek zijn de betrekkingen, welke alleen op een gebogen schalenstel voorgesteld kunnen worden, gering in aantal, vergeleken bij de op een recht schalenstel voor te stellen betrekkingen. Echter kunnen van deze laatste de typen van de 3e orde, behalve op een recht schalenstel, eveneens op bepaalde gebogen schalenstellen worden voorgesteld, hetgeen om verschillende redenen de voorkeur kan verdienen.

§ 103. Een gebogen schaaldrager, kan door een rechte afleeslijn in meerdere punten gesneden worden, en dus is het bij het gebogen schalenstel mogelijk, dat de twee gebogen schalen één gemeenschappelijken drager hebben.

Deze nomogrammen zijn voornamelijk van belang, wanneer hun gemeenschappelijke drager een kegelsnede en dan bij voorkeur een cirkel is. Is daarbij de derde schaal recht, dan heeft men een vorm van nomogram, waartoe elk nomogram met drie rechte schalen te transformeeren is.

Het is bij een gebogen schalenstel zelfs mogelijk, voor bepaalde betrekkingen den vorm van den gemeenschappelijken drager zoo

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

te kiezen, dat ook de derde schaal op dien drager gelegen is en dus het geheele nomogram maar één drager heeft. Daartoe moet deze door elke rechte afleeslijn in drie schaalpunten worden gesneden en bijgevolg minstens een kubische kromme wezen.

§ 104. In de volgende hoofdstukken zullen dus achtereenvolgens worden besproken:

1°. Nomogrammen op een gebogen schalenstel, met afzonderlijke dragers,
   a. de derde schaal is een kromme schaal,
   b. de derde schaal is een rechte schaal;

2°. Nomogrammen op een gebogen schalenstel, met een gemeenschappelijken drager van willekeurigen vorm;

3°. Kegelsnede-nomogrammen,
   a. de derde schaal is een kromme schaal,
   b. de derde schaal is een rechte schaal

4°. Kubische nomogrammen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 17.

Nomogrammen op een gebogen schalenstel met afzonderlijke dragers.

Type VII: De derde schaal is een kromme schaal.

§ 105. Afleiding van de functievergelijking.

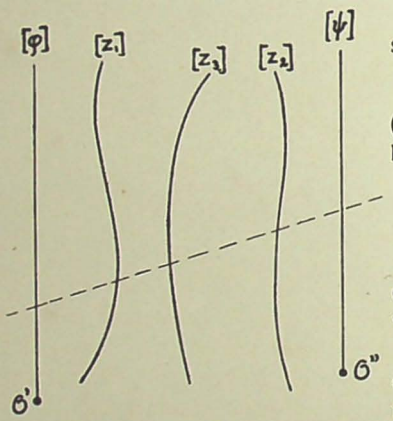


Fig. 59.

Op een evenwijdig schalenstel $[\varphi, \psi]$ met de functieschalen:

$$x = \mu'\varphi \quad \text{en} \quad y = \mu''\psi$$

(figuur **59**), worden de drie betrekkingen van type I:

$$\left.\begin{aligned} \varphi g_1 + \psi &= f_1 \\ \varphi g_2 + \psi &= f_2 \\ \varphi g_3 + \psi &= f_3 \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

elk door een kromme schaal voorgesteld.

Elimineeren wij de functies φ en ψ uit (79), — en dus de twee rechte hulpschalen uit figuur **59** —, dan vinden wij, als *functievergelijking voor het nomogram met drie willekeurig gevormde schalen,*

$$\boxed{\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_2 - f_3}{g_2 - g_3}} \qquad \textbf{(VII)}$$

Alle voorgaande en nog volgende functievergelijkingen voor nomogrammen met drie schalen, zijn dus uit (VII) af te leiden

Stellen wij daarin b.v.:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= F_1 & f_2 &= F_2 & f_3 &= \frac{F_3}{G_3 + 1} \\ g_1 &= 1 & g_2 &= 0 & g_3 &= \frac{G_3}{G_3 + 1} \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

, dan wordt de functievergelijking:

$$F_1 G_3 + F_2 = F_3,$$

van type I verkregen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Een andere schrijfwijze voor (VII) is:

$$f_1(g_2 - g_3) + f_2(g_3 - g_1) + f_3(g_1 - g_2) = 0. \qquad (81)$$

N.B. Het drietal betrekkingen van (79), kan als volgt in den vorm van een determinant worden weergegeven:

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \psi & C \\ \hline \left| \begin{array}{ccc} g_1 & 1 & f_1 \\ g_2 & 1 & f_2 \\ g_3 & 1 & f_3 \end{array} \right| & = 0 & (82) \end{array}$$

, waarbij dus de functies der veranderlijken z_1, z_2 en z_3, beschouwd worden als coëfficienten van φ, ψ of van de eenheid (constante).

§ 106. Constructieformules. De constructieformules voor het nomogram met drie kromme schalen, zijn van denzelfden vorm als voor $[z_3]$ bij type I, namelijk:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{voor } [z_1] & p = \dfrac{\mu'\delta}{\mu'' g_1 + \mu'} & q = \dfrac{\mu'\mu'' f_1}{\mu'' g_1 + \mu'} \\ \text{„ } [z_2] & p = \dfrac{\mu'\delta}{\mu'' g_2 + \mu'} & q = \dfrac{\mu'\mu'' f_2}{\mu'' g_2 + \mu'} \\ \text{„ } [z_3] & p = \dfrac{\mu'\delta}{\mu'' g_3 + \mu'} & q = \dfrac{\mu'\mu'' f_3}{\mu'' g_3 + \mu'} \end{array}\right\} \qquad (83)$$

Hierin zijn μ' en μ'' de moduli en is δ de afstand der oorsprongen O′ en O″ van de hulpschalen $[\varphi]$ en $[\psi]$. Deze grootheden kunnen naar verkiezing worden aangenomen. Worden de hulpschalen geteekend, dan kunnen de drie kromme schalen ook volgens de bij type I behandelde projectiemethoden, worden geconstrueerd.

§ 107. Vereenvoudigde constructieformules.

Daar de hulpschaal $[\psi]$ geen werkelijke schaal van het nomogram is, kan deze desgewenscht op een oneindigen afstand van $[\varphi]$ geplaatst worden.

Stellen wij behalve δ, ook $\mu'' = \infty$, maar hun quotient gelijk aan een eindige waarde **n**, dan worden de **constructieformules** voor de kromme schalen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{voor } [z_1] & p = \mu' \dfrac{n}{g_1} & q = \mu' \dfrac{f_1}{g_1} \\ \text{„ } [z_2] & p = \mu' \dfrac{n}{g_2} & q = \mu' \dfrac{f_2}{g_2} \\ \text{„ } [z_3] & p = \mu' \dfrac{n}{g_3} & q = \mu' \dfrac{f_3}{g_3} \end{array}\right\} \qquad (84)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

In vele gevallen is het gebruik van deze vereenvoudigde constructieformules mogelijk.

Uit (84) volgt:

$$\frac{q}{p} = \frac{f_1}{n} \qquad (85)$$

, enz.

, met behulp van welke formules, de schalen ten deele ook door projectie kunnen worden geconstrueerd.

Als $g_1 = F_1(f_1)$, enz. dan worden de vergelijkingen van de dragers,

voor $[z_1]$

$$p = \frac{\mu' n}{F_1\left(n\frac{q}{p}\right)} \qquad (86)$$

, enz.

§ 108. Wanneer in plaats van een *evenwijdig* hulpschalenstel, een *snijdend* gebezigd zou zijn, dan was als functievergelijking een vergelijking gevonden, welke uit (VII) verkregen wordt, door de omgekeerden van alle functies te nemen. Voor de constructieformules hadden wij dan dadelijk soortgelijke formules als (84), kunnen afleiden.

Betrekkingen, welke slechts in den vorm van het algemeene type VII zijn voor te stellen, komen in de techniek uiterst zelden voor. Mij is geen enkel voorbeeld van een zoodanige betrekking bekend. Het zal bovendien meestal wel zeer lastig zijn, de gegeven vergelijking tot den vorm (VII) te herleiden. (Zie Deel IV).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Type VIII. De derde schaal is een rechte schaal.

§ 109. Nemen wij deze rechte schaal op de as $[\varphi]$. dan wordt (79):

$$\left.\begin{aligned} \varphi g_1 + \psi &= f_1 \\ \varphi g_2 + \psi &= f_2 \\ \varphi &= f_3 \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

, dus is de **functievergelijking** voor nomogrammen met minstens één rechte schaal:

$$\boxed{\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = f_3} \qquad (VIII)$$

Hieruit is bij voorbeeld weer type (I) af te leiden, door te stellen:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= F_3 & f_2 &= F_2 & f_3 &= F_1 \\ g_1 &= G_3 & g_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

N.B. In determinantvorm wordt het stel vergelijkingen (87) geschreven:

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi & C \\ g_1 & 1 & f_1 \\ g_2 & 1 & f_2 \\ 1 & 0 & f_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (89)$$

§ 110. De **constructieformules** voor dit nomogramtype zijn:

$$\left.\begin{aligned} \text{voor } [z_1] \qquad \mu &= \frac{\mu'\delta}{\mu''g_1 + \mu'} & q &= \frac{\mu'\mu''f_1}{\mu''g_1 + \mu'} \\ \text{„ } [z_2] \qquad \mu &= \frac{\mu'\delta}{\mu''g_2 + \mu'} & q &= \frac{\mu'\mu''f_2}{\mu''g_2 + \mu'} \\ \text{„ } [z_3] \qquad & & x &= \mu' f_3 \end{aligned}\right\} \qquad (90)$$

, waarin weer μ', μ'' en δ naar verkiezing zijn aan te nemen. $[z_1]$ en $[z_2]$ kunnen ook weer, met behulp van de bij type I besproken projectiemethoden, gevonden worden.

§ 111. Vereenvoudigde constructieformules. Overeenkomstig (84) zijn deze formules voor het type VIII:

$$\left.\begin{aligned} \text{voor } [z_1] \qquad p &= \mu' \frac{n}{g_1} & q &= \mu' \frac{f_1}{g_1} \\ \text{„ } [z_2] \qquad p &= \mu' \frac{n}{g_2} & q &= \mu' \frac{f_2}{g_2} \\ \text{„ } [z_3] \qquad & & x &= \mu' f_3 \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

n en μ' zijn hierbij wederom naar keuze te bepalen. Voor de dragers $[z_1]$ en $[z_2]$ gelden weer de vergelijkingen (86).

Zoo noodig kan, voor het verkrijgen van een gunstiger nomogram, de vergelijking van type (VIII) herleid worden tot een nieuwe vergelijking van dat type

$$\frac{(af_1 + bg_1) - (af_2 + bg_2)}{(cf_1 + dg_1) - (cf_2 + dg_2)} = \frac{af_3 + b}{cf_3 + d}. \qquad (92)$$

Betrekkingen van het type VIII komen eveneens vrij zelden voor.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 18.

Nomogrammen op een gebogen schalenstel, met een gemeenschappelijken drager van willekeurigen vorm.

Type VIIa: De derde schaal is een kromme schaal.
Type VIIIa: De derde schaal is een rechte schaal.

§ 112. Bij de nomogramtypen VII en VIII worden, overeenkomstig formule (21), de vergelijkingen van de dragers $[z_1]$ en $[z_2]$ onderscheidenlijk:

$$p = \frac{\mu' \delta}{\mu'' F_1\left(\frac{q}{p} \cdot \frac{\delta}{\mu''}\right) + \mu'}$$

en

$$p = \frac{\mu' \delta}{\mu'' F_2\left(\frac{q}{p} \cdot \frac{\delta}{\mu''}\right) + \mu'}$$

of bij gebruik van de vereenvoudigde formules:

$$p = \frac{\mu' n}{F_1\left(n \frac{q}{p}\right)}$$

en

$$p = \frac{\mu' n}{F_2\left(n \frac{q}{p}\right)}$$

, waarin de functies F_1 en F_2 in beide gevallen dezelfde zijn als in

$$g_1 = F_1(f_1) \quad \text{en} \quad g_2 = F_2(f_2).$$

Dus hebben $[z_1]$ en $[z_2]$ een gemeenschappelijken drager, wanneer die twee functies van denzelfden vorm zijn, dus wanneer

$$g_1 = F(f_1) \quad \text{en} \quad g_2 = F(f_2). \qquad (93)$$

Substitueeren wij deze uitdrukkingen voor g_1 en g_2 in (VII) en (VIII), dan verkrijgen wij de **functievergelijkingen:**

$$\boxed{\frac{f_1 - f_2}{F(f_1) - F(f_2)} = \frac{f_2 - f_3}{F(f_2) - g_3}} \qquad \textbf{(VIIa)}$$

, indien de derde schaal een kromme schaal is, en

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$$\boxed{\frac{f_1 - f_2}{F(f_1) - F(f_2)} = f_3} \qquad \text{(VIIIa)}$$

, wanneer de derde schaal een rechte schaal is.

Het is mogelijk, dat g_1 niet expliciet in f_1 is uit te drukken, en dus evenmin g_2 in f_2.

Een betrekking is echter ook van het type VII*a* of VIII*a*, wanneer in

$$\Phi(f_1, g_1) = 0 \quad \text{en} \quad \Phi(f_2, g_2) = 0 \qquad (94)$$

Φ eenzelfde functie is.

§ 113. Aan de functievergelijkingen (VII*a*) en (VIII*a*) wordt o.a. voldaan door $f_1 = f_2$, omdat dan het eerste lid gelijk aan $\frac{0}{0}$ en dus onbepaald wordt. Dit beteekent echter niets anders, dan dat de twee schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ op hun gemeenschappelijken drager een dubbelschaal vormen voor $f_1 = f_2$. Dit zal somtijds een practisch bruikbare dubbelschaal wezen, meestal is echter het bereik van de twee veranderlijken zoo beperkt, dat de twee schalen niet of slechts ten deele, op hetzelfde gedeelte van den drager zullen liggen.

Type (III) kan met behulp van goniometrische functies tot (VIII*a*) worden herleid:

Als n.l. $f_1 + f_2 = f_3$

dan is $\dfrac{\cos f_1 - \cos f_2}{\sin f_1 - \sin f_2} = -\operatorname{tg} {}^1\!/_2 f_3$. [1]) (95)

De gemeenschappelijke drager van $[z_1]$ en $[z_2]$ is in dit geval een kegelsnede.

De **constructieformules** voor VII*a* en VIII*a* zijn dezelfde als voor VII en VIII.

Betrekkingen van het type VIII*a* komen vrij veelvuldig voor, waarbij de schalen voor $[z_1]$ en $[z_2]$ meestal zelfs geheel samenvallen. Daar **F** dan in het algemeen een machtsfunctie is, zullen met voordeel de *vereenvoudigde constructieformules* kunnen worden gebezigd.

Tot het type VIII*a* behoort ook de functievergelijking:

$$f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2 = f_3 \qquad (96)$$

---

[1]) Want

$$-\operatorname{tg} {}^1\!/_2(\alpha + \beta) = \frac{-2 \sin {}^1\!/_2(\alpha + \beta) \sin {}^1\!/_2(\alpha - \beta)}{2 \cos {}^1\!/_2(\alpha + \beta) \sin {}^1\!/_2(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

, daar het eerste lid geschreven kan worden als $\frac{f_1^3 - f_2^3}{f_1 - f_2}$.

Op dezelfde wijze kan type III geschreven worden als $\frac{f_1^2 - f_2^2}{f_1 - f_2} = f_3$.

§ 114. **Voorbeeld.** *Stroomsnelheid bij vrije uitstrooming door een rechthoekige opening* (fig. 60).

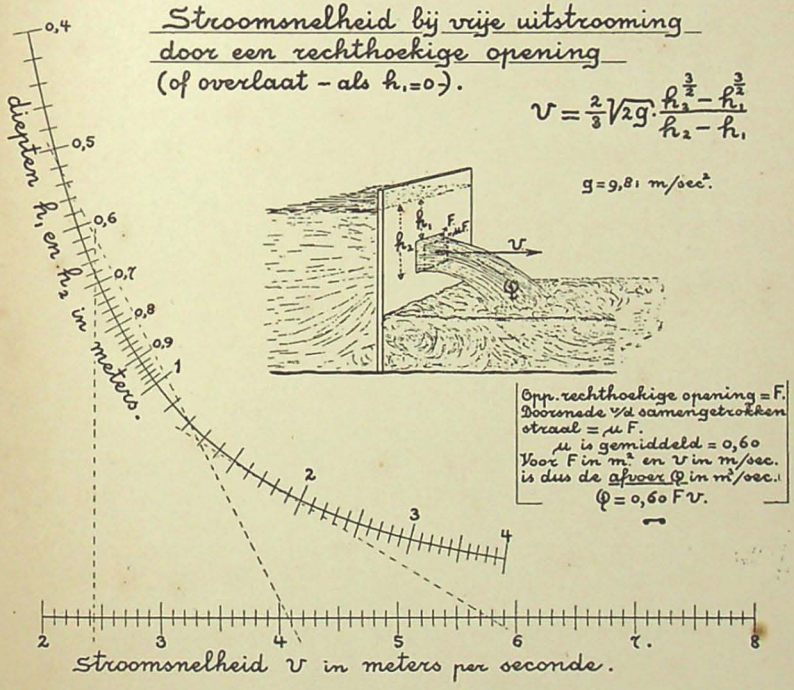


Fig. 60.

De voor te stellen betrekking is:

$$v = {}^2/_3 \sqrt{2g} \frac{h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2 - h_1}$$

, waarin h_1 en h_2 de afstanden in m zijn van boven- en onderrand van de opening tot den waterspiegel bovenstrooms, (bereik voor beiden van 0,4 tot 4), **v** de gemiddelde stroomsnelheid in m/sec. in het nauwste gedeelte van den straal (bereik van 2 tot 8) en **g** de versnelling van de zwaartekracht = 9,81 m/sec² is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De vereenvoudigde constructieformules zijn hier,

voor $[z_1]$ en $[z_2]$: $p = \mu' \frac{n}{h}$ $q = \mu' \sqrt{h}$

, voor $[z_3]$: $x = \mu' \frac{v}{{}^2/_3\sqrt{2g}} = \mu' \frac{v}{2{,}953}$.

In de oorspronkelijke teekening voor figuur **60** was $L \approx 24$. Wij namen $[z_3]$ in deze richting, de constructieformule voor de regelmatige $[v]$ moet dan $x = 4v$ wezen, zoodat

$$\mu' = 4 \times 2{,}953 = 11{,}812.$$

De richting van de oorspronglijn werd loodrecht op de hulpschalen genomen.

Voorts was $B \approx 20$, dus was voor $h = 0{,}4$,

$$p = 2{,}5\ n\mu' \approx 20.$$

Genomen werd $n\mu' = 8$ en dus waren de constructieformules:

voor $[z_1]$ en $[z_2]$: $p = \frac{8}{h}$ $q = 11{,}812\sqrt{h}$

„ $[z_2]$: $x = 4v$.

Toepassing van het nomogram.

Een schutkolk wordt uit het bovenpand gevuld door het openen van schuiven in de sluisdeuren. De, bij het ophalen van een schuif, vrijkomende rechthoekige opening, is 0,5 m. breed en reikt van 0,52 tot 1,2 m. onder het bovenwater. Uit het nomogram kan worden afgelezen, (middelste stippellijn) dat, — zoolang het water in de kolk beneden de opening blijft —, de gemiddelde stroomsnelheid daarin 4.07 m/sec. en dus de afvoer ongeveer $0{,}6 \times 0{,}5 \times 0{,}68 \times 4{,}07 = \mathbf{8{,}3\ m^3/sec.}$ zal bedragen

Wanneer $h_1 = h_2$, dan is de afleeslijn een raaklijn aan de gebogen schaal en geeft het nomogram de, bij een zekere stroomsnelheid behoorende, drukhoogte aan (volgens de formule $v = \sqrt{2gh}$). Zoo is de drukhoogte, behoorende bij een stroomsnelheid van 5,76 m/sec., ongeveer 1,7 m. (rechtsche stippellijn).

Is ten slotte $h_1 = 0$, welk schaalpunt in het oneindige op den oorspronglijn van het hulpschalenstel ligt, (want voor $h_1 = 0$, is $p = \delta = \infty$ en $q = 0$), dan staat dus de afleeslijn loodrecht op $[v]$ en is $v = {}^2/_3\sqrt{2gh_2}$, hetgeen een benaderde formule voor de stroomsnelheid over een overlaat is. Zoo is de snelheid van den stroom over een schotbalkwand, waarvan de bovenkant zich 0,68 m. beneden den bovenwaterstand bevindt, ongeveer 2,4 m/sec. (linksche stippellijn).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 19.

Kegelsnede-nomogrammen. Type IX.

Functievergelijking.

§ 115. Wanneer er in **VIIa** tusschen de functies **f** en **g**, zoowel van de veranderlijke z_1 als van z_2, een betrekking van den 2den graad is, dan zal, zooals bij type **Ia** werd aangetoond, de gemeenschappelijke drager van het schalenstel een kegelsnede zijn.

Nomogrammen, waarbij dit het geval is, worden daarom **kegelsnede-nomogrammen** genoemd (Fransch: Abaques Coniques).

Hunne functievergelijking, — waarvan wij zoo dadelijk, met behulp van eenige eigenschappen uit de Projectieve Meetkunde, de algemeene geldigheid zullen aantoonen —, wordt op eenvoudige wijze uit **VII** verkregen, door daarin te substitueeren:

$$g_1 = f_1^2 \qquad \text{en} \qquad g_2 = f_2^2$$

, waaruit volgt:

$$(f_1 - f_2)f_1f_2 - (f_1^2 - f_2^2)f_3 + (f_1 - f_2)g_3 = 0,$$

of, na deeling door $(f_1 - f_2)$,

$$\boxed{f_1f_2 - (f_1 + f_2)f_3 + g_3 = 0} \qquad \text{(IX)}$$

, waarbij dan in het algemeen de derde schaal krom is.

Is er tusschen f_3 en g_3 een lineaire verwantschap, dus is

$$g_3 = Af_3 + B$$

, dan is de derde schaal recht.

Projectieve vorming van het kegelsnede-nomogram.

§ 116. Afleiding van functievergelijking en constructieformules.

Wanneer (figuur **61**) de schaalpunten van twee, willekeurig gelegen, metrische schalen $[x']$ en $[x'']$, onderscheidenlijk verbonden worden met twee, eveneens willekeurig gekozen, *toppunten* **T'** en **T''**, dan zijn de beide aldus verkregen waaiers onderling projectief.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Elk punt **P** van een transversaal **l**, is dus tevens een punt, zoowel van een straal (genummerd **x'**) uit **T'**, als van een straal (genummerd **x''**) uit **T''**.

De beide waaiers snijden dus den transversaal volgens twee, —

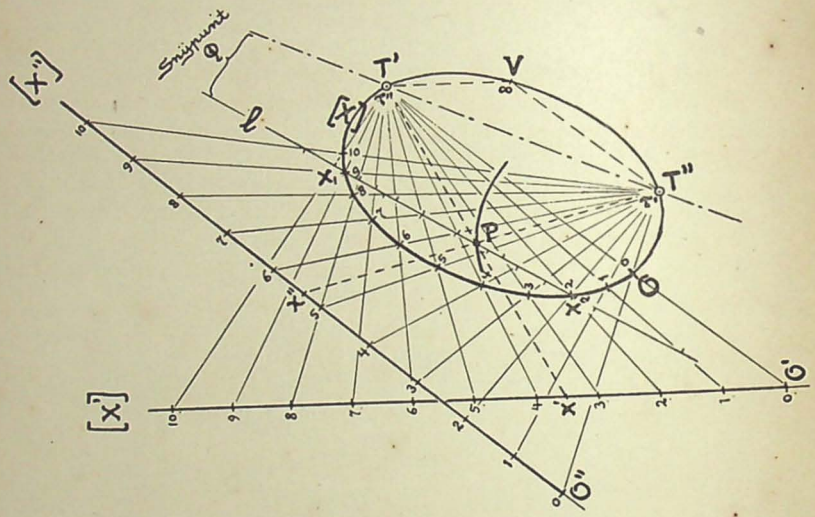


Fig. 61

onderling projectieve —, puntenreeksen; deze vormen te zamen een dubbelschaal voor de zoogenaamde **bilineaire betrekking**

$$\alpha x'x'' + \beta x' + \gamma x'' + \delta = 0 \qquad (97)$$

, waarin α, β, γ en δ coëfficienten zijn met onderling constante verhoudingen.

Voor welke punten van een transversaal zijn de nummers van de twee stralen gelijk, dus is $x' = x''$, stel $= x$?

In dat geval, volgt uit (97):

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + \delta = 0 \qquad (98)$$

De oplossing van deze vierkantsvergelijking, geeft voor **x** twee reëele, — ongelijke of gelijke —, óf twee imaginaire waarden, x_1 en x_2.

Op elke transversaal liggen dus steeds twee reëele, — verschillende of samenvallende —, óf twee imaginaire punten, waarvoor $x' = x''$.

De kromme, gevormd door deze zoogenaamde **dubbelpunten** van het door de waaiers gevormde net, is dus een **kegelsnede.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Deze gaat o.a. door den **Oorsprong O**, waarvoor $x = 0$, het **Vluchtpunt V**, waarvoor $x = \infty$, en de toppunten **T'** en **T''**.
Voor deze laatste stellen wij onderscheidenlijk:

$$x = \tau'' \quad \text{en} \quad x = \tau'.$$

De genummerde dubbelpunten vormen op de kegelsnede een schaal $[x]$. Daar echter elke snijlijn door twee schaalpunten x_1 en x_2 gaat, kan die schaal ook beschouwd worden als een schalenstel, gevormd uit de twee gelijke, samenvallende schalen $[x_1]$ en $[x_2]$.

Volgens deze zienswijze, denken wij ons dan het punt **P** als een schaalpunt van de derde schaal, en de lijn **l** als een door **P** gaande afleeslijn. In verband daarmede geven wij, van nu af, aan de nummers van de stralen door P, een indice 3.
Dan is dus volgens (97):

$$\alpha x_3' x_3'' + \beta x_3' + \gamma x_3'' + \delta = 0 \qquad (99)$$

Nu is echter voor het snijpunt **Q** van T'T'' met **l**:

$$x_3' = \tau' \text{ en } x_3'' = \tau''$$

en dus:

$$\alpha\tau'\tau'' + \beta\tau' + \gamma\tau'' + \delta = 0 \qquad (100)$$

Voorts volgt uit de vierkantsvergelijking (98), met de bekende eigenschappen van som en product der wortels:

$$\beta + \gamma = -\alpha(x_1 + x_2) \qquad (101)$$

en

$$\delta = \alpha x_1 x_2 \qquad (102)$$

Uit de laatste 4 vergelijkingen (99 t/m. 102), kunnen wij α, β, γ en δ elimineeren en verkrijgen dan den vorm:

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2)\frac{\tau''x_3' - \tau'x_3''}{(x_3' - x_3'') - (\tau' - \tau'')} + \\ + \frac{\tau'\tau''(x_3' - x_3'') - (\tau' - \tau'')x_3'x_3''}{(x_3' - x_3'') - (\tau' - \tau'')} = 0 \qquad (103)$$

De breuken in deze formule zijn uitsluitend functies van x_3' en x_3'', hunne waarde is dus alleen afhankelijk van de ligging van **P**.

Teekenen we (figuur **62**) op $[x']$ de schalen:

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = f_1, \quad x_2' = f_2 \quad \text{en} \quad x_3' = \varphi_3 \\ \text{en op } [x''] \text{ de schalen:} \\ x_1'' = f_1, \quad x_2'' = f_2 \quad \text{en} \quad x_3'' = \psi_3 \end{array}\right\} \qquad (104)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

en vervangen wij dus in (103) x_1 door f_1 en x_2 door f_2, terwijl wij de twee gebroken functies van x_2' en x_3'' door f_3 en g_3 voorstellen, dan verkrijgen wij weer de **functievergelijking voor het kegelsnede-nomogram:**

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0 \qquad \text{(IX)}$$

De schalen $[z_1]$ en $[z_2]$, hebben dus een kegelsnede tot gemeen-

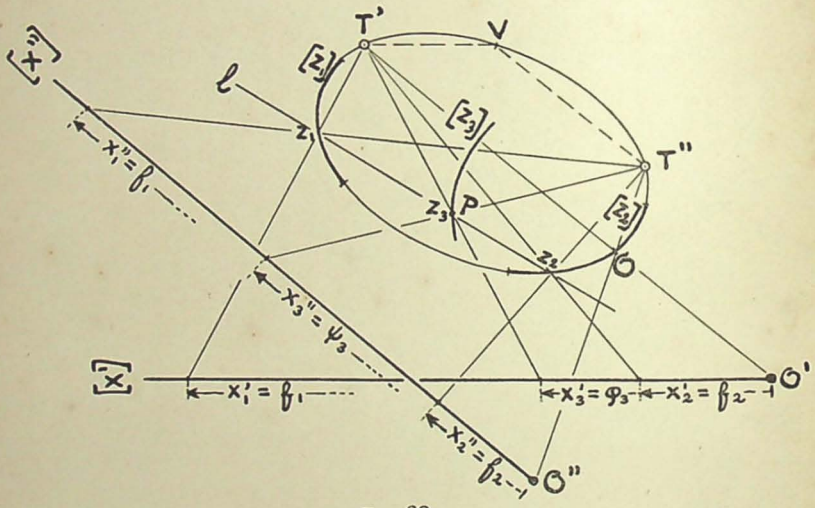


Fig. 62.

schappelijken drager en vormen te zamen een z.g. *kegelsnede-schalenstel.*

De **constructieformules voor** $[z_3]$, leiden wij af voor **drie bijzondere gevallen:**

1°. $\tau = 0$

, dus wanneer het toppunt T'' in den oorsprong valt.

Dan gaat (103) over in:

$$x_1 x_2 - (x_1 + x_2) \frac{\tau'' x_3'}{x_3' - x_3'' + \tau''} + \frac{\tau'' x_3' x_3''}{x_3' - x_3'' + \tau''} = 0 \qquad (105)$$

, waaruit voor $[z_3]$ de constructieformules volgen:

$$x_3' = \frac{g_3 - \tau'' f_3}{f_3 - \tau''} \quad \text{en} \quad x_3'' = \frac{g_3}{f_3} \qquad (106)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

2°. $\tau = \infty$

, dus wanneer het toppunt **T'** in het vluchtpunt ligt.

Dan is:

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2)x_3' + \tau'(x_3' - x_3'') + x_3'x_3'' = 0 \qquad (107)$$

, dus zijn dan de constructieformules voor $[z_3]$:

$$x_3' = f_3 \qquad \text{en} \qquad x_3'' = \frac{g_3 - \tau' f_3}{f_3 - \tau'} \qquad (108)$$

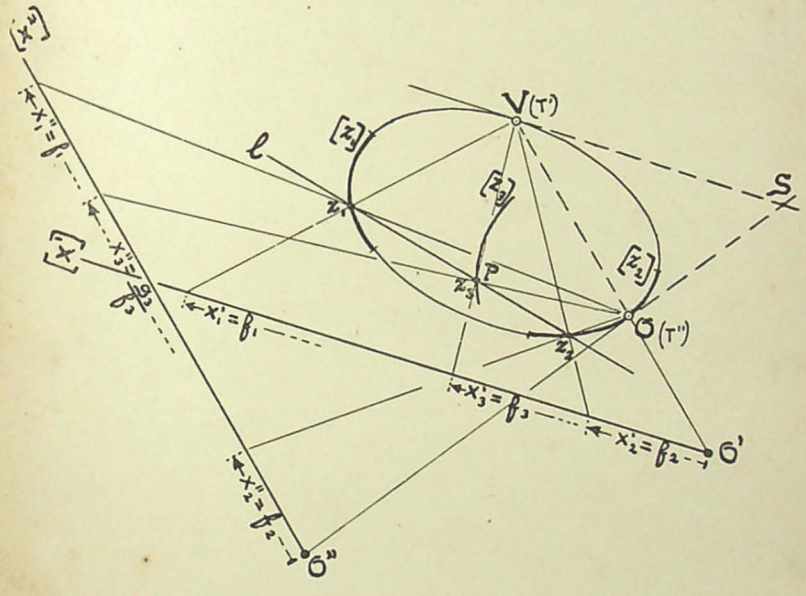


Fig. 63.

3°. $\tau' = 0$ en $\tau'' = \infty$

, dus wanneer **T''** in den oorsprong en **T'** in het vluchtpunt valt, (figuur **63**).

In dat geval is:

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2)\,x_3' + x_3'x_3'' = 0 \qquad (109)$$

, en dus zijn de constructieformules voor $[z_3]$ dan:

$$x_3' = f_3 \qquad \text{en} \qquad x_3'' = \frac{g_3}{f_3} \qquad (110)$$

In plaats van de schalen op $[x']$ en $[x'']$, kunnen voor de constructie ook daaraan evenwijdige, of in het algemeen, daarmede perspectief gelegen schalen worden gebezigd. Is bij voorbeeld.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$f_1 = \frac{1}{z_1}$, dan kan de kegelsnedeschaal $[z_1]$ ook verkregen worden door projectie van een regelmatige schaal $x = \mu z_1$.

§ 117. Benoodigde gegevens.

De hiervoor genoemde waaiers naar de metrische schalen $[x']$ en $[x'']$, zijn regelmatig. Wanneer drie genummerde stralen van zulk een waaier, een regelmatige schaal in de gelijk genummerde schaalpunten snijden, dan gaan ook alle overige stralen door de overeenkomstige schaalpunten van de regelmatige schaal.

Bij de projectieve vorming van kegelsneden, wordt van deze eigenschap gebruik gemaakt, om een waaier (x') of (x'') te construeeren, wanneer daarvan drie genummerde stralen bekend zijn.

groep gegevens	$/_x$	$\bullet_x$	$/_x$	$/$	$\bullet$
a		4			
b		3		1	
c		3			2
d	1	2			1
e	2	1			
f	2		1		

Fig. 64.

Op grond van deze constructiewijze, kan de vorm van het kegelsnedeschalenstel, ten deele worden beheerscht door de vrije keuze van eenige elementen, n.l. de ligging van punten en raaklijnen, al of niet genummerd. Hiervoor komen in aanmerking de groepen gegevens, voorgesteld in de tabel figuur **64**.

Ter toelichting van de constructie, dienen de volgende aanwijzingen:

Groep a. De waaiers (x') en (x'') worden verkregen, door twee van de vier genummerde punten als toppunt aan te nemen en elk te verbinden met de drie overige punten. De verdere constructie heeft dan plaats, als zooeven is besproken

Groep b. Neem het punt op de raaklijn als toppunt **T**′ en verbindt dit met de drie genummerde punten. Uit de nu te construeeren waaier (x'), volgt het nummer van de gegeven raaklijn en dus van het gegeven punt daarop. Neem nu een der andere gegeven punten als toppunt **T**″, en verbindt dit met de drie overige punten. Hieruit wordt dan (x'') verkregen.

Groep c. Verbindt elk van de twee ongenummerde punten, met de drie genummerde punten. Hieruit worden, op de bekende wijze, de waaiers (x') en (x'') verkregen.

Groep d. Neem weer het punt op de raaklijn als toppunt **T**′,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

en verbindt dit met de twee genummerde punten en met het ongenummerde punt. Uit de nu te construeeren waaier (x'), volgt het nummer van laatstgenoemd punt. Neem nu een ander genummerd punt als toppunt **T**″ en verbindt dit weer met de drie overige punten, waaruit dan de waaier (x'') verkregen wordt.

Groep e. Neem de beide punten op de raaklijnen als toppunten en verbindt elk van deze met de overige punten. Van elk der beide waaiers zijn dan drie genummerde stralen gegeven.

Groep f. Het punt op de derde raaklijn wordt gevonden met de *Stelling van Mac Laurin*: „Is in een driehoek een kegelsnede beschreven, dan gaan de verbindingslijnen van de hoekpunten met de raakpunten op de overstaande zijden, door één punt. De verdere constructie heeft plaats als bij groep **e**.

N.B. Van de gegeven punten mogen er geen drie collineair zijn, evenmin mogen er twee op één raaklijn liggen, of mogen er drie raaklijnen concurrent wezen. Voorts mogen twee raaklijnen geen gemeenschappelijk raakpunt hebben.

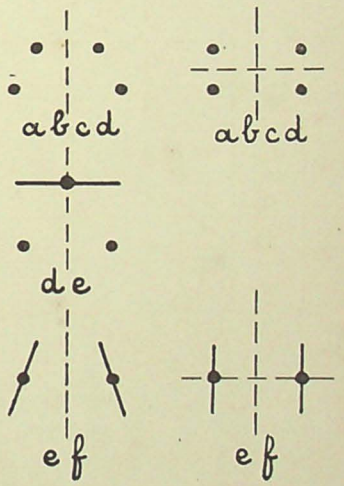


Fig. 65.

§ 118. Symmetrie van de gegevens.

Wanneer vier elementen, dus vier, al of niet genummerde punten en (of) raaklijnen, symmetrisch zijn gelegen, dan is de as van symmetrie een der assen van de kegelsnede.

De mogelijke gevallen van symmetrie zijn in figuur **65** geteekend. De daarbij geplaatste letters verwijzen naar die groepen van figuur **64**, waarbij het geteekende geval van symmetrie kan optreden.

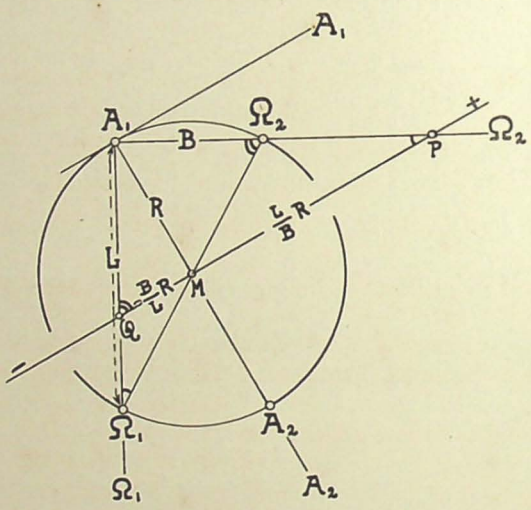
Cirkelnomogrammen.

§ 119. Wanneer voor de constructie van een kegelsnede-nomogram, wordt uitgegaan van de, volgens de hoekpunten van een rechthoek gelegen, eindpunten der schalen $[z_1]$ en $[z_2]$, dan is het van belang te weten, welke de verhouding moet wezen

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

tusschen de rechthoekszijden **B** en **L**, opdat de kegelsnede een cirkel wordt (figuur **66**).

Stel, voor de gegeven eindpunten, de nummers **x**, — dus de waarden der functies $f_1(\alpha)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\alpha)$ en $f_2(\omega)$ —, onderscheidenlijk A_1, Ω_1, A_2 en Ω_2, (grieksche hoofdletters alpha en omega). De kegelsnede door die punten is een cirkel, wanneer de raaklijn in A_1 loodrecht staat op den diagonaal A_1A_2. Behalve deze lijnen, trekken wij uit A_1 stralen naar de twee andere hoekpunten. Alle stralen



Flg. 66.

snijden de middelloodlijn van A_1A_2 in punten, voor wier afstanden tot **M**, de algemeene formule:

$$x = \frac{af + b}{cf + d}$$

geldt.

Passen we voor elk van de vier stralen, deze formule toe, dan verkrijgen wij:

voor $A_1\Omega_1$ $\quad \dfrac{a\Omega_1 + b}{c\Omega_1 + d} = -\dfrac{B}{L}R,$

voor A_1A_2 $\quad a\Omega_2 + b = 0,$

voor $A_1\Omega_2$ $\quad \dfrac{a\Omega_2 + b}{c\Omega_2 + d} = \dfrac{L}{B}R,$

voor A_1A_1 $\quad c\Omega_1 + d = 0$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

, waaruit na eliminatie van de coëfficienten volgt:

$$\frac{B}{L} = \sqrt{-\frac{(\Omega_1 - A_2)(\Omega_2 - A_1)}{(\Omega_1 - A_1)(\Omega_2 - A_2)}} = \lambda. \qquad (111)$$

Is deze verhouding niet te gebruiken, bij voorbeeld omdat ze te groot is, en wordt een andere verhouding:

$$\frac{B}{L} = \lambda'$$

gekozen, dan zal de kegelsnede een ellips zijn, waarvoor de verhouding van kleine tot groote as $\frac{\lambda'}{\lambda}$ zal bedragen.

Zou de vorm achter het wortelteeken in (111), negatief worden, dan moet, om een cirkelnomogram te kunnen verkrijgen, een der schalen van het schalenstel omgekeerd worden, zoodat b.v. $A_2 = f_2(\omega)$ en $\Omega_2 = f_2(\alpha)$ wordt. Wordt de verhouding $\frac{\lambda'}{\lambda}$ negatief genomen, dan zal de kegelsnede een hyperbool zijn.

Projectieve vorming van kegelsneden.

§ 120. Welken vorm en welke ligging verkrijgt de kegelsnede, gevormd door de snijpunten van de gelijkgenummerde stralen van twee regelmatige waaiers?

Dit is op het eerste gezicht moeilijk te overzien. Daarom zullen wij trachten, met behulp eener bijzondere voorstellingswijze, dat overzicht te vergemakkelijken (zie figuur **67** tegenover blz. 176).

Trek daartoe door elk der beide waaiers een transversaal (l′ en l″), zóó, dat daarop een metrische schaal wordt afgeteekend. Verbindt de toppunten **T′** en **T″** van de beide waaiers.

Denken wij ons nu (bovenste figuur) een regelmatig net, bestaande uit twee, elkander loodrecht snijdende, regelmatige bundels, in figuur **67** aangegeven door hunne schaalverdeeling op de assen. Die op de horizontale as is metrisch en stemt dus overeen met de metrisch verdeelde transversalen in de onderste figuur; de verdeeling op de verticale as is een regelmatige schaal voor de grootte van den hoek, welke een straal van een der waaiers met de lijn T′T″ maakt.

Op dit net, wordt het verband tusschen den afstand van een schaalpunt op den transversaal tot het nulpunt en den hoek, welke de bijbehoorende straal met de lijn T′T″ maakt, door een **tangenslijn** weergegeven.

Daar een straal na 180° draaiïng, een transversaal weer in hetzelfde schaalpunt snijdt, bestaat de voorstelling op het regel-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

matige net, feitelijk uit twee tangenslijnen, 180° boven elkander gelegen.

De waaier T′, is aldus in de bovenste figuur, door de twee dik getrokken tangenslijnen K, voorgesteld.

§ 121. De beteekenis van enkele bijzondere punten van zulk een tangenslijn, correspondeerende met bijzondere stralen van den waaier, willen wij even toelichten.

In de eerste plaats stemt het midden van de tangenslijn, dat is haar buigpunt, overeen met den loodrecht op den transversaal getrokken straal.

De oneindig verre punten van de tangenslijn, komen overeen met den evenwijdig aan den transversaal getrokken straal, dat is dus met den straal naar het vluchtpunt.

Het snijpunt van de tangenslijn met de horizontale as, of met de horizontale lijn voor 180°, stemt onderscheidenlijk overeen met een straal in de richting T′T″, of met een straal in de tegenovergestelde richting, beide stralen dus samenvallend met de verbindingslijn der toppunten T′ en T″.

§ 122. T″ is in de onderste figuur het gemeenschappelijke toppunt van vier waaiers. Eenvoudigheidshalve zijn deze waaiers zoo gekozen, dat zij allen door denzelfden transversaal I″, volgens metrische schalen, gesneden worden.

Voorts is de afstand van I″ tot T″, gelijk genomen aan die van I′ tot T′.

De vier metrische schalen op I″ zijn gemerkt: E(C), P, H I en H II; de afkortingen beduidend van Ellips (Cirkel), Parabool, Hyperbool I en Hyperbool II.

De overeenkomstige tangenslijnen in de bovenste figuur, zijn op gelijke wijze gemerkt.

Omtrent deze tangenslijnen valt het volgende op te merken: Door de bijzondere keuze van de vier waaiers T″, zijn die tangenslijnen, behoudens het tegengestelde verloop van H II, allen onderling en met K, gelijk van vorm. Bovendien hebben de vier tangenslijnen gemeenschappelijke asymptoten; in de onderste figuur vallen dus de vier stralen naar het vluchtpunt te zamen.

§ 123. Elk der vier waaiers T″ vormt nu met den waaier T′ een kegelsnede, welker vorm en ligging beoordeeld kan worden uit de ligging van de overeenkomstige tangenslijn ten opzichte van de tangenslijn K.

De combinatie van de op eenzelfde verticale lijn gelegen punten

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van de twee tangenslijnen, correspondeert n.l. met de combinatie van twee gelijkgenummerde stralen van de beschouwde waaiers, dus met een punt van de door hen voortgebrachte kegelsnede.

Bijzondere combinaties zijn:

1°. De twee, op eenzelfde verticaal gelegen punten vallen samen, (zie de ∞ gemerkte punten in de bovenste figuur) de twee tangenslijnen hebben daar dus een *gemeenschappelijk punt.* De twee bijbehoorende stralen in de onderste figuur zijn dan evenwijdig, de kegelsnede heeft in dat geval dus een oneindig ver gelegen punt.

Is het gemeenschappelijke punt een **snijpunt** van de twee tangenslijnen, dan beteekent dit, dat de eene straal den andere, wat de richting betreft, inhaalt en voorbijgaat en dat dus het snijpunt van de beide stralen, voor en na den evenwijdigen stand, in tegengestelde richtingen gelegen is en bijgevolg het oneindig verre punt *op een asymptoot ligt.*

Is daarentegen het gemeenschappelijke punt een **raakpunt** van de twee tangenslijnen, dan beteekent dit, dat de eene straal den andere evenwijdig komt en daarna weer achterblijft, en dat dus het snijpunt van de beide stralen, voor en na den evenwijdigen stand, ongeveer in dezelfde richting gelegen blijft. Het oneindig verre punt *ligt dan niet op een asymptoot.*

2°. Van de op eenzelfde verticaal (de lijnen **T″** en **T′** in de bovenste figuur) gelegen twee punten, valt er een samen met de horizontale as, of de horizontale lijn voor 180°.

Is dit het punt van een der tangenslijnen **K**, dan stelt dat punt den straal uit **T′** voor, welke samenvalt met T′T″. De combinatie van de twee punten op de verticaal, komt dus overeen met het toppunt **T″**

Is het bedoelde punt, een punt van een der andere tangenslijnen, dan stelt dat punt den straal uit **T″** voor, welke samenvalt met T′T″. De combinatie van de twee punten op de verticaal komt dan overeen met het toppunt **T′**.

§ 124. Wat de ligging van de twee tangenslijnen ten opzichte van elkander betreft, kunnen wij vier gevallen onderscheiden:

1°. De twee tangenslijnen [**E(C)** en **K**], hebben géén gemeenschappelijke punten. De kegelsnede is dan een **ellips E(C)**.

Zijn de twee tangenslijnen bovendien gelijk van vorm en liggen hunne middens recht boven elkaar, dan is hunne verticale afstand in de bovenste figuur, dus ook de hoek tusschen de twee stralen in de onderste figuur, constant en is de kegelsnede dus een **cirkel E(C)**.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

2°. De twee tangenslijnen (**P** en **K**) raken elkander. De kegelsnede is dan een **parabool P**. De hoek, welke wij bij het raakpunt aflezen, geeft de richting van de as van de parabool aan. De verticalen **T′** en **T″** van dit paar tangenslijnen, liggen ter weerszijden van het raakpunt, dus ligt in de onderste figuur, op elke paraboolhelft een toppunt.

3°. De twee tangenslijnen **(H I** en **K)**, hebben twee snijpunten, De kegelsnede is nu een **hyperbool H I**. De hoeken, welke wij bij de snijpunten aflezen, komen overeen met de richtingen der asymptoten. Het gedeelte van de tangenslijnen tusschen de twee snijpunten, komt overeen met de eene tak van de hyperbool (niet geteekend), het gedeelte daarbuiten met de andere tak. *De beide toppunten zullen steeds op denzelfden tak liggen.*

4°. De waaiers E(C), P en H I zijn allen in dezelfde richting genummerd als **T′**, namelijk, van uit het toppunt gezien, naar links. Daardoor zijn, in de bovenste figuur, de betreffende tangenslijnen allen stijgend naar rechts.

De tangenslijn, van elken, in tegengestelden zin als **T′** genummerden, waaier H II, zal naar rechts dalen en daardoor met **K** steeds twee snijpunten hebben. De gevormde kegelsnede is dan *steeds* een **hyperbool (H II).**

Het gedeelte van de tangenslijnen tusschen de twee snijpunten, komt weer overeen met de eene tak van de hyperbool, het gedeelte daarbuiten, met de andere tak. Daar steeds een der verticalen **T** in het eene gedeelte, de tweede in het andere gedeelte zal liggen, *zal dus op elken tak van de hyperbool een toppunt gelegen zijn.*

Zijn de tangenslijnen, behoudens hunne tegengestelde ligging, gelijk van vorm (**H II** en **K**), en liggen hunne middens recht boven elkaar, dan zijn zij in verticalen zin symetrisch ten opzichte van de beide snijpunten en liggen deze punten dus 90° uiteen. In de onderste figuur staan dan de asymptoten loodrecht op elkaar en is de hyperbool dus gelijkzijdig.

Snijden de twee tangenslijnen elkander op de horizontale as, of op de horizontale lijn voor 180°, dan ontaardt de kegelsnede in twee snijdende lijnen, waarvan T′T″ er een is.

Daar de vier waaiers **T″**, een gemeenschappelijke straal T″V hebben naar het oneindig genummerde schaalpunt op den transversaal l″, gaan de vier besproken kegelsneden allen door een gemeenschappelijk vluchtpunt V.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 125. **Voorbeeld.** *Bepaling der afstandcorrectie bij direct gericht vuur.* (figuur **69**).

$$a^2 = b^2 + (a + c)^2 - 2b(a + c)\cos\psi.$$

, dat is de cosinusregel, toegepast op den driehoek: afstandmeter — geschut — doel, waarbij:

a = de met den afstandmeter bepaalden afstand tot het doel in m. (400 tot 10.000);

b = de basislengte, dat is de afstand, waarop de afstandmeter , van het geschut verwijderd, is opgesteld; veelal, — ook voor figuur **69** —, aangenomen op 400 m.;

ψ = de hoek tusschen de basis en de richtlijn van het geschut (0° tot 180°);

c = de correctie in m., dat is de afstand, welke bij **a** gevoegd moet worden, om den afstand van het geschut tot het doel te verkrijgen (— 400 tot + 400).

De gegeven betrekking kan op eenvoudige wijze herleid worden tot de vergelijking van type (IX):

$$-a \,.\, b\cos\psi - (-a + b\cos\psi)\,.\,c + {}^1/_2\,(b^2 + c^2) = 0.$$

Wij wenschen deze vergelijking voor te stellen op een kegelsnedeschalenstel, bestaande uit een halve ellips. Vooreerst onderzoeken wij vluchtig, welke ligging $[z_3]$ dan zal verkrijgen.

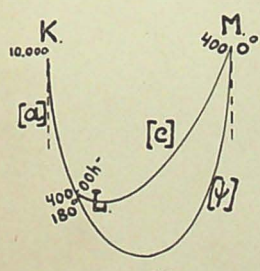


Fig. 68.

Daar voor $c = b$ volgt, dat $\psi = 0°$ en $a = -b$ en voor $c = -b$ volgt $\psi = 180°$ en $a = b$, vinden wij een vorm van het nomogram, als in figuur **68** is geschetst.

Wij kiezen nu de plaatsen voor de drie eindpunten der schalen en nemen de raaklijnen aan het schalenstel in **K** en **M** onderling evenwijdig en loodrecht op KM. Hierdoor worden KM en de middelloodlijn van KM de assen van de ellips.

Van den waaier met toppunt **K**, zijn dan drie stralen met hunne nummers bekend, n.l.:

de raaklijn in K met het nummer $f_1(\alpha) = -10.000$;
de straal KL „ „ „ $f_1(\omega) = f_2(\alpha) = -400$;
de straal KM „ „ „ $f_2(\omega) = +400$.

Evenzoo van den waaier met toppunt **M**, de drie stralen MK, ML en de raaklijn in M, met dezelfde nummers — 10 000, — 400 en + 400.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bepaling der Afstandcorrectie bij direct gericht vuur.

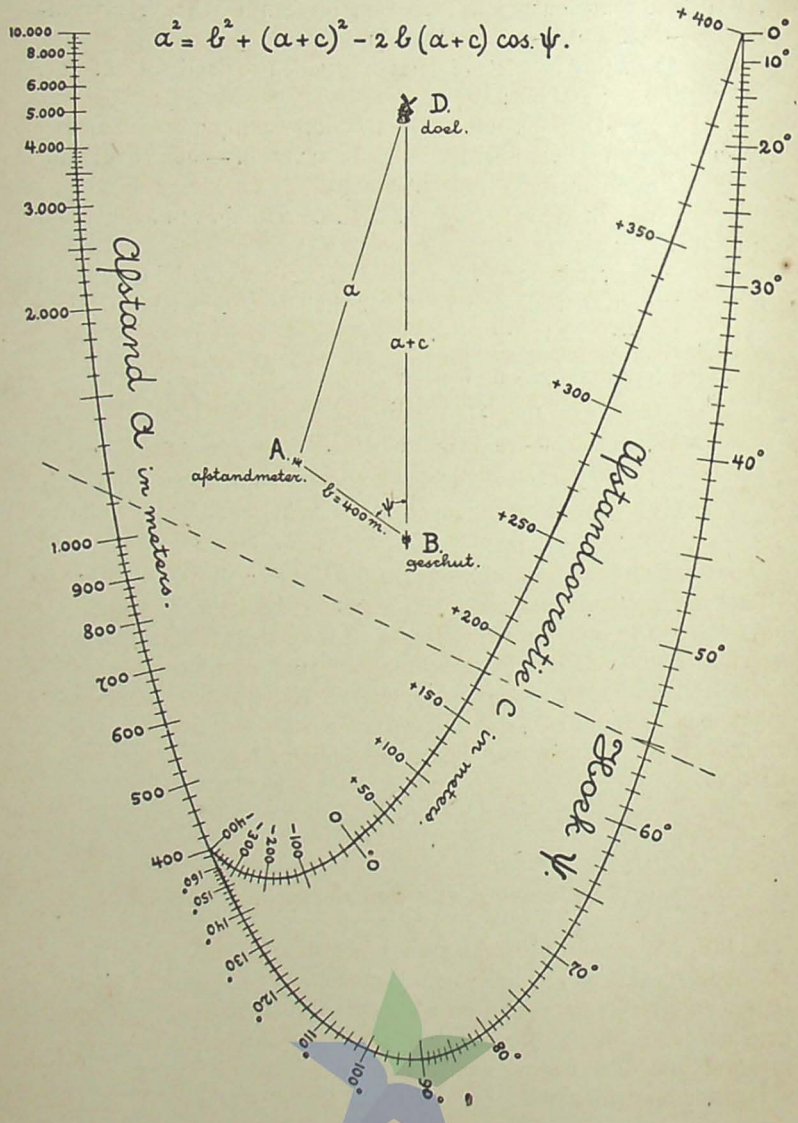


Fig. 69.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Trekken wij dus door elk van de beide waaiers een transversaal, waarop wij, uitgaande van de drie gegeven schaalpunten, schalen voor de beide veranderlijken construeeren, dan bouwen wij, door de snijpunten van overeenkomstige stralen te bepalen, het kegelsnedeschalenstel puntsgewijze op.

Constructie van [c]. Hiervoor bepalen wij met de zooeven gebruikte waaiers, de oorsprong **O** en het vluchtpunt **V** van het kegelsnedeschalenstel. Daarna passen wij de formules (110) toe en kunnen dus [*c*] construeeren met behulp van de waaiers uit **V** en **O**, naar de schalen:

$$x_3' = 2c \qquad \text{en} \qquad x_3'' = \frac{c^2 + 160.000}{2c}$$

, onderscheidenlijk evenwijdig aan de raaklijn in **V** en aan de lijn **OV**.

Voor de constructie van [*c*], in figuur **69**, werd in plaats van [x_3'], een daarmede evenwijdige schaal, en in plaats van [x_3''], een schaal $\left[\frac{1}{x_3''}\right]$, evenwijdig aan de raaklijn in **O**, gekozen.

De raaklijnen in **V** en **O** gaan beiden door een punt **S**, hetwelk het toppunt is van een waaier afleeslijnen voor

$$c + c' = 0 \qquad \text{en} \qquad \psi + \psi' = 180°.$$

Toepassing van het nomogram.

Met een afstandmeter wordt de afstand tot het doel bepaald op ongeveer 1135 m. De basislengte, d.w.z. de afstand tot het geschut is 400 m., terwijl de richting van den vuurmond met die basis een hoek maakt van ongeveer 55°10′. Uit het nomogram blijkt dan (stippellijn), dat de correctie + 180 m. zal bedragen en dus is de afstand van den vuurmond tot het doel ongeveer 1315 m.

Verplaatsing van den oorsprong.

§ 126. Wanneer oorsprong en vluchtpunt beiden buiten het vlak van teekening zouden vallen, kunnen wij de formules (106), (108) en (110) niet gebruiken. Door een herleiding van de gegeven vergelijking, kunnen wij echter de oorsprong zoo verplaatsen, dat deze daarna wel in het teekenvlak zal liggen.

Daartoe herleiden wij:

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0 \qquad \text{(IX)}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

tot $$F_1F_2 - (F_1 + F_2)F_3 + G_3 = 0 \qquad (112)$$

met $$\left.\begin{array}{ll} F_1 = f_1 + b & \\ F_2 = f_2 + b & \\ F_3 = f_3 + b & G_3 = g_3 + 2bf_3 + b^2 \end{array}\right\} \qquad (113)$$

Bij substitutie van (113) in (112) zal blijken, dat de functievergelijking (IX) terug wordt verkregen.

§ 127. Voorbeeld. *Overgang van rechthoekige op trapeziumvormige doorsnede bij grondkeerende muren* (figuur 70).

Een grondkeerende muur van rechthoekige doorsnede, van B m. dik en H m. hoog, kan dezelfde grondmassa keeren als een muur van trapeziumvormige doorsnede, met een bovenbreedte van lB m. en een breedte van B m. op hH m. van den bovenkant, wanneer er tusschen l, h en de verhouding p, van de soortelijke gewichten van den grond en den muur, een betrekking bestaat:

$$(1 + l)h^2 - l(1 + p)h - {}^1/_3(1 - l)(1 + 2p) = 0.$$

Deze vergelijking kan herleid worden, (zie deel IV, § 159), tot een vergelijking van type (IX):

$$\frac{-1}{l+1} \cdot p - \left(\frac{-1}{l+1} + p\right)\frac{3h-2}{4-3h} + \frac{3h^2 - 3h + 1}{4 - 3h} = 0.$$

Het bereik van de veranderlijken is:

voor **l** van 0,5 tot 1,
„ **p** „ 0,5 „ 1,
„ **h** „ 0,75 „ 1,

en dus is:

$$f_1(\alpha) = -{}^2/_3, \quad f_1(\omega) = -{}^1/_2, \quad f_2(\alpha) = {}^1/_2, \quad f_2(\omega) = 1.$$

Plaatsen wij deze eindpunten van $[l]$ en $[p]$, in de hoekpunten van een rechthoek, dan zal bij een vluchtig onderzoek blijken, dat oorsprong en vluchtpunt van het kegelsnedeschalenstel $[l, p]$, buiten het teekenvlak vallen. Wij nemen daarom onze toevlucht tot het verplaatsen van den oorsprong, door toepassing van de formules (113). Neem daarin $b = -1$, dan wordt dus ω_2 de oorsprong van het kegelsnedeschalenstel en wordt de nieuwe vergelijking van type (IX):

$$-\frac{l+2}{l+1} \cdot (p-1) - \left(-\frac{l+2}{l+1} + p - 1\right)\frac{6h-6}{4-3h} + \frac{3h^2 - 9h + 6}{4 - 3h} = 0$$

, waarvoor:

$$f_1(\alpha) = -{}^5/_3, \quad f_1(\omega) = -{}^3/_2, \quad f_2(\alpha) = -{}^1/_2, \quad f_2(\omega) = 0.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Overgang van rechthoekige op trapeziumvormige doorsnede bij grondkeerende muren.

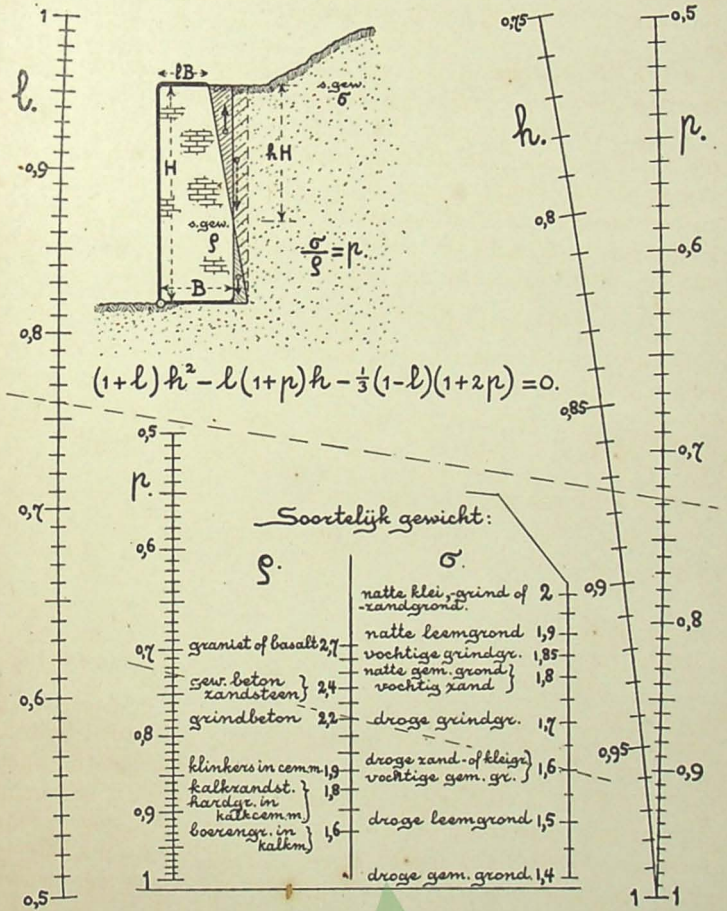


Fig. 70.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nadat wij nu, op de bekende wijze, met waaiers uit twee van de vier gegeven genummerde punten, het kegelsnedeschalenstel hebben geconstrueerd, kunnen wij $[z_3]$ construeeren met de formules (106):

$$x_3' = \frac{g_3 - \tau'' f_3}{f_3 - \tau''} = \frac{3h^2 - 9h + 6 - \tau''(6h - 6)}{6h - 6 - \tau''(4 - 3h)}.$$

Het is gunstig $\tau'' = -\,{}^3/_2$ te nemen, dan wordt

$$x_3' = 2h - \frac{2}{h}$$

, terwijl uit de formules (106) verder volgt:

$$x_3'' = \frac{g_3}{f_3} = 0{,}5h - 1.$$

Toepassing van het nomogram:

Een 2 m. dikke en 6,5 m hooge muur van grindbeton, moet vervangen worden door een muur van trapeziumvormige doorsnede, met een bovenbreedte van 1,52 m. Achter den muur is vochtige gemengde grond. Dus is $\sigma = 1{,}6$, $\varrho = 2{,}2$ en dus (stippellijn in hulpnomogram): $p = \frac{\sigma}{\varrho} = 0{,}727$.

$$l = \frac{1{,}52}{2} = 0{,}76.$$

Uit het nomogram volgt dan (stippellijn) voor **h** de waarde 0,874, zoodat de muur op $0{,}874 \times 6{,}5 = 5{,}68$ m. van den bovenkant, een breedte van 2 m. zal moeten verkrijgen. De onderbreedte zal dan slechts 2,07 m. bedragen.

Projectieve constructie van het kegelsnedenomogram met een evenwijdig hulpschalenstel.

§ 128. Op een evenwijdig hulpschalenstel $[\varphi, \psi]$, bestaande uit de functieschalen

$$x = \mu'\varphi \quad \text{en} \quad y = \mu''\psi$$

, worden van de betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi f_1^2 + \psi &= f_1 \\ \varphi f_2^2 + \psi &= f_2 \\ \varphi g_3 + \psi &= f_3 \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

, de twee eerste voorgesteld door schalen op een gemeenschappelijke kegelsnede, de derde door een schaal van anderen vorm.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Worden uit (114) de functies φ en ψ geëlimineerd, dan wordt, evenals in § 115, de functievergelijking:

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0 \qquad \text{(IX)}$$

verkregen. Met behulp van de in § 54 behandelde projectieme-

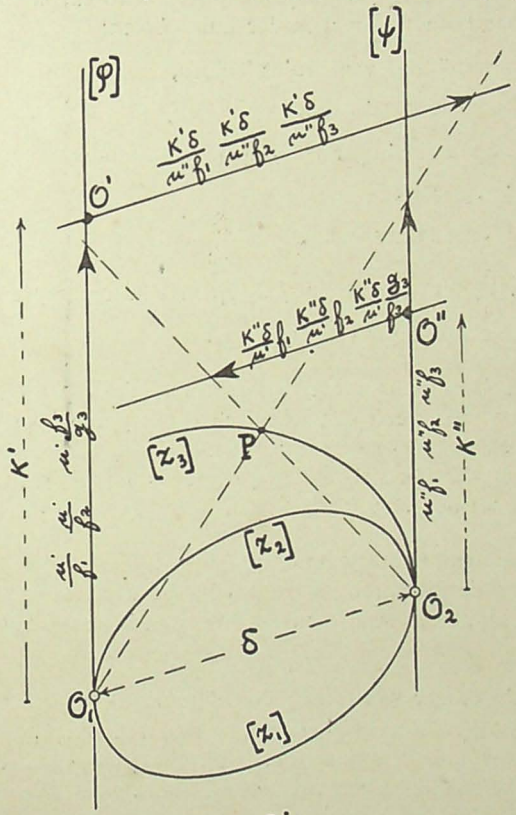


Fig. 71.

thoden, kunnen dus de schalen van het kegelsnedenomogram als volgt worden geconstrueerd (figuur **71**):

$[z_1]$ door snijding van projectielijnen,

uit $\mathbf{O}_1$ naar een schaal $x = \mu'' f_1$ op $[\psi]$; of naar een schaal $x = \dfrac{K'\delta}{\mu'' f_1}$ op een drager $// O_1O_2$, met haar oorsprong $\mathbf{O}'$ op $[\varphi]$ op een afstand $\mathbf{K}'$ van $\mathbf{O}_1$;

en uit $\mathbf{O}_2$ naar een schaal $x = \dfrac{\mu'}{f_1}$ op $[\varphi]$; of naar een schaal

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$x = \frac{K''\delta}{\mu'} f_1$ op een drager // O_2O_1, met haar oorsprong O'' op $[\psi]$ op een afstand K'' van O_2.

$[z_2]$ door snijding van projectielijnen als voren, na vervanging van f_1 door f_2 in de functies der hulpschalen.

$[z_3]$ door snijding van projectielijnen,

uit O_1 naar een schaal $x = \mu'' f_3$ op $[\psi]$; of naar een schaal $x = \frac{K'\delta}{\mu'' f_3}$, op een drager // O_1O_2, met haar oorsprong O' op $[\varphi]$ op een afstand K' van O_1;

en uit O_2 naar een schaal $x = \mu' \frac{f_3}{g_3}$ op $[\varphi]$; of naar een schaal $x = \frac{K''\delta}{\mu'} \cdot \frac{g_3}{f_3}$, op een drager // O_2O_1, met haar oorsprong O'' op $[\psi]$ op een afstand K'' van O_2.

Het kegelsnedenomogram, hetwelk met deze constructiewijze verkregen wordt, heeft een elliptischen of hyperbolischen drager voor $[z_1]$ en $[z_2]$, deze drager raakt in O_1 aan $[\varphi]$ en in O_2 aan $[\psi]$. Men zal gemakkelijk inzien, dat O_1 overeenkomt met het *vluchtpunt* V en O_2 met den *oorsprong* O van het kegelsnedeschalenstel.

§ 129. Cirkelnomogrammen.

Wanneer de oorspronglijn O_1O_2 loodrecht staat op het hulpschalenstel $[\varphi, \psi]$ en wanneer verder voldaan is aan de voorwaarde:

$$\mu'\mu'' = \delta^2 \qquad (115)$$

, dan is de drager van $[z_1, z_2]$ een *cirkel* met O_1O_2 als middellijn.

Tegenover het kegelsnedenomogram op een ellips-, hyperbool-, of paraboolvormigen drager, heeft het cirkelnomogram het voordeel van eenvoudiger constructie, het nadeel echter van meerdere gebondenheid in de keuze van de ligging der schalen.

Voorbeeld. *Gemiddelde straal van een kanaal met taluds 1 : 1* (figuur 72).

De voor te stellen betrekking

$$R = \frac{bd + d^2}{b + d\sqrt{8}}$$

, is als type (IX) te schrijven:

$$b(-R\sqrt{8}) - (b - R\sqrt{8})(-d\sqrt{8}) + d^2\sqrt{8} = 0$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

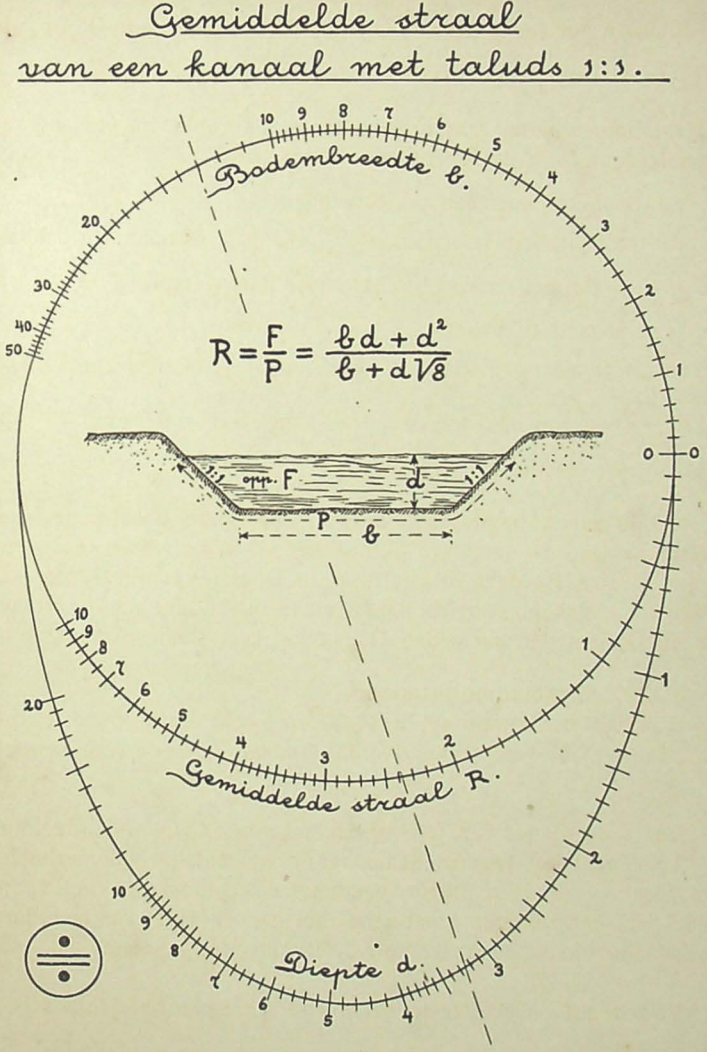


Fig. 72.

, waarbij dus de functies zijn:

f_1 . . . . . b,

f_2 . . . . . $-R\sqrt{8}$,

f_3 . . . . . $-d\sqrt{8}$,

g_3 . . . . . $d^2\sqrt{8}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur **72** werd aangenomen:

$\delta = 20, \quad \mu'' = 2{,}5$ en dus was volgens (115):

$$\mu' = \frac{\delta^2}{\mu''} = 160$$

[**b**] werd verkregen, gedeeltelijk door projectie uit O_1 van een schaal $x = 2{,}5b$ op $[\psi]$; anderdeels door projectie uit O_2 van een schaal $x = 0{,}5b$ evenwijdig aan O_2O_1, waarvoor $K'' = 4$ was.

[**R**] werd geconstrueerd, gedeeltelijk door projectie uit O_1 van een schaal $x = -5R$ evenwijdig aan $[\psi]$, op een afstand $10\sqrt{2}$ van O_1; anderdeels door projectie uit O_2 van een schaal $x = 2{,}5R$ evenwijdig aan O_2O_1, waarvoor $K'' = -5\sqrt{2}$ was.

[**d**] werd verkregen, ten deele door projectie uit O_1 van een schaal $x = -5d$, als voren genoemd, of, wat op hetzelfde neerkomt van de reeds verkregen schaal [R]; anderdeels door projectie uit O_2 van een schaal $x = 1{,}25\,d$ evenwijdig aan O_2O_1, waarvoor $K'' = -10$ was.

De voorgestelde betrekking heeft weer de eigenschap, dat een stel waarden voor de veranderlijken geldig blijft, wanneer het evenredig wordt vergroot of verkleind. Deze eigenschap is in figuur **72** door het bekende teeken aangeduid.

Toepassing van het nomogram.

Voor een kanaal met taluds 1 : 1, een bodembreedte **b** van 13 m. en een diepte **d** van 3,25 m., is de gemiddelde straal **R** = 2,38 m., (zie de afleeslijn in het nomogram).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opgaven 119 t/m 121 voor de constructie van nomogrammen van de 4e orde (kegelsnede-nomogrammen).

119. Stel (figuur 73) bij de zuigerbeweging:

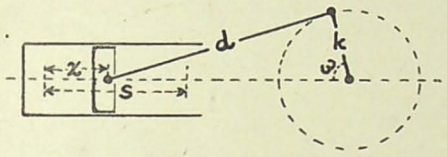


Fig. 73.

k = de lengte van de kruk,
d = de lengte van de drijfstang,
s = de zuigerslag-lengte,
z = de gedeeltelijke zuigerslag,
ω = de hoek tusschen den laagsten krukstand en den krukstand bij een gedeeltelijke slag **z**.

Noem verder:

$$\frac{d}{k} = \varrho \qquad \text{en} \qquad \frac{s}{z} = \sigma$$

, dan is:

$$\sigma = \frac{1 - \cos\omega}{2} + \frac{\varrho}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2\omega}{\varrho^2}}\right). \qquad \text{(Soreau)}$$

120. De gemiddelde straal van een kanaal, van trapeziumvormige doorsnede, met taluds 2 : 3, een bodembreedte van **b** m. en een diepte van **d** m., is in m.:

$$R = \frac{bd + 1{,}5d^2}{b + d\sqrt{13}}.$$

121. Bij kettingen met gesoldeerde schalmen, is de trekkracht, waarbij de ketting breekt, gelijk aan het product van de doorsnede van den schalm en de maximum trekspanning in het ijzer, gedeeld door een coëfficient **a**, waarvan de waarde is:

$$a = 1 + 4(m - 1)\left(1 \pm \frac{\pi}{2n + \pi m}\right).$$

, waarin $m = \frac{\varrho}{d}$ en $n = \frac{l}{d}$, als:

ϱ = de straal van het midden der halve bogen van de schalmen,
$2l$ = de lengte van elk der twee rechte gedeelten van de schalmen;
d = de dikte der schalmen.

Het + teeken geldt voor gewone schalmen, het — teeken voor geschoorde schalmen (damkettingen). (Soreau).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opgaven 122 t/m 128 voor de constructie van nomogrammen van de 5e orde, type VIIIa.

122. De warmteovergang tusschen twee vloeistoffen met temperaturen t_1 en t_2 in °C., is evenredig met:

$$A = \frac{t_1 - t_2}{ln\, t_1 - ln\, t_2}$$

(t_1 en t_2 van 1 tot 100).

123. De zwaartepuntsafstand van een halven vlakken ring, (zie figuur **74**), is:

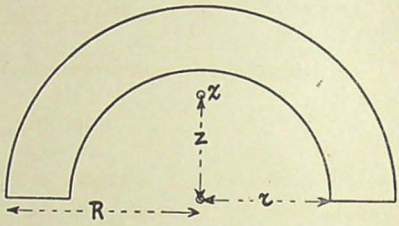


Fig. 74.

$$z = \frac{4}{3\pi} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

124. Idem van een halven hollen bol:

$$z = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$$

125. De hoeveelheid warmte, welke door straling overgaat van een lichaam met temperatuur t_1, naar omringende vlakken met een temperatuur t_2, (t_1 en t_2 in °C.), is evenredig met:

$$a = \frac{\left(\frac{273 + t_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{273 + t_2}{100}\right)^4}{t_1 - t_2}.$$

126. Voor den inhoud van een afgeknotten kegel geldt:

$$\frac{V}{h} = \frac{\pi}{12}(D^2 + Dd + d^2)$$

, waarin **V** de inhoud, **h** de hoogte, **D** en **d** de middellijnen van grond- en bovenvlak zijn. Neem samenvallende schalen [D] en [d], en een schaal $\left[\frac{V}{h}\right]$. (Zie § 113 formule (96)).

127. Wanneer $a < b < 1$ en $n > o$, is $a^n - b^n$ maximum voor:

$$n = \frac{\log(-\log b) - \log(-\log a).}{\log a - \log b}$$ (Schwerdt)

128. Wanneer $a > b > 1$ en $n < o$, is $a^n - b^n$ minimum voor:

$$n = \frac{\log\log a - \log\log b}{\log b - \log a}.$$ (Schwerdt).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 20.

Kegelsnede-nomogrammen met rechte $[z_3]$.

Inleiding.

§ 130. $[z_3]$ is recht, wanneer er in (IX) een lineaire verwantschap is tusschen f_3 en g_3, dus wanneer

$$f_1f_2 - (f_1 + f_2)f_3 + (Af_3 + B) = 0 \qquad (116)$$

, waarin **A** en **B** constanten zijn.

Deze vergelijking, is te schrijven in den vorm van de *algemeene functievergelijking van de 3e orde* en kan als volgt herleid worden tot de functievergelijking (II) van die orde. (Zie ook Deel IV, § 173.)

Stel:

$$\left.\begin{aligned} {}^1/_2A + \sqrt{{}^1/_4A^2 + B} &= R' \\ {}^1/_2A - \sqrt{{}^1/_4A^2 + B} &= R'' \end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

en

, zoodat dus **R'** en **R''** de beide wortels zijn van een vierkantsvergelijking:

$$R^2 - AR - B = 0 \qquad (118)$$

, dan is (116) te herleiden tot een functievergelijking van type II:

$$\frac{f_1 - R'}{f_1 - R''} \cdot \frac{f_3 - R''}{f_3 - R'} - \frac{f_2 - R''}{f_2 - R'} = 0 \qquad (119)$$

of tot:

$$\frac{f_1 - R'}{f_1 - R''} \cdot \frac{f_2 - R'}{f_2 - R''} = \frac{f_3 - R'}{f_3 - R''} \text{ [1]} \qquad (120)$$

§ 131. Omgekeerd kan bewezen worden, dat elk nomogram met drie rechte schalen, (dus van de typen II, III, V of VI) te vervormen is tot een kegelsnede-nomogram voor dezelfde betrekking. Daarbij blijft $[z_3]$ zelfs onveranderd. Het bewijs daarvoor steunt op de beroemde **Stelling van Pascal**. Het leert ons tevens de wijze van constructie van deze nomogrammen kennen.

---

[1]) In het bovenstaande is verondersteld dat ${}^1/_4A^2 + B > 0$. Voor de andere gevallen zie § 173.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Teekenen wij daartoe (figuur 75), een willekeurige kegelsnede zóó, dat deze gaat door de beide snijpunten van $[z_3]$ met $[z_1]$ en $[z_2]$. Laat die kegelsnede $[z_1]$ nogmaals snijden in T_1, $[z_2]$ in T_2. Van uit deze twee punten worden nu $[z_2]$ en $[z_1]$ op de kegelsnede geprojecteerd.

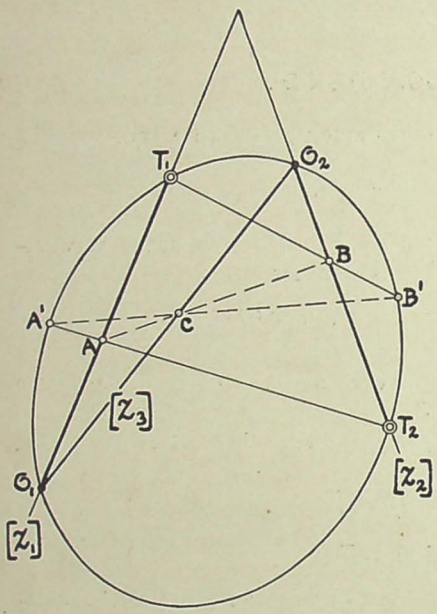


Fig. 75.

Wij zullen nu aantoonen, dat wanneer de projecties **A'** en **B'** met een schaalpunt **C** van $[z_3]$ in één rechte lijn liggen, ook **A** en **B** met **C** collineair zijn.

Beschouwen wij daartoe den in de kegelsnede beschreven zeshoek

$$O_1T_1B'A'T_2O_2.$$

Volgens de *Stelling van Pascal*, liggen de snijpunten **A**, **B** en **C** der drie paren overstaande zijden O_1T_1 en $A'T_2$, T_1B' en T_2O_2, $B'A'$ en O_2O_1, op één rechte lijn.

De afleeslijnen AB en A'B' snijden $[z_2]$ dus in hetzelfde schaalpunt **C**.

§ 132. Constructie van het kegelsnede-nomogram met rechte $[z_3]$.

De constructie van het nomogram is uit het voorgaande duidelijk, de schalen op de kegelsnede worden dus verkregen, door projectie van de rechte hulpschalen $[z_1]$ en $[z_2]$ uit T_2 en T_1 [1]). In plaats van deze hulpschalen, kunnen ook andere worden gebruikt, welke met de eerstgenoemde perspectief gelegen zijn ten opzichte van het bijbehoorende toppunt T_2 of T_1.

Ingeval wij uitgaan van een nomogram van type III of VI, zoo moeten wij ons in de keuze van de kegelsnede eenigszins beperken.

---

[1]) Deze toppunten kunnen beiden of een van beiden in het oneindige liggen, in dat geval zijn de projecteerende lijnen evenwijdig.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bij type III liggen de snijpunten van $[z_3]$ met $[z_1]$ en $[z_2]$ in het oneindige. De kegelsnede kan dan slechts een hyperbool zijn, welke $[z_3]$ tot asymptoot heeft (figuur **76**).

Bij type VI vallen de snijpunten van $[z_3]$ met $[z_1]$ en $[z_2]$ te zamen. De kegelsnede moet dan in dit punt aan $[z_3]$ raken (figuur **77**).

§ 133. Voordeelen van het kegelsnedenomogram met rechte $[z_3]$, ten opzichte van het nomogram met drie rechte schalen.

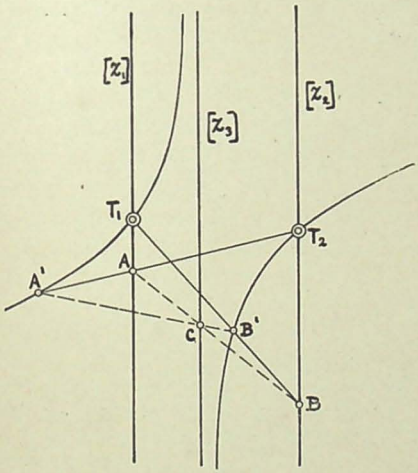


Fig. 76.

Het kegelsnede-nomogram heeft op het rechte nomogram voor, dat, bij het eerste, schalen voor elk willekeurig groot bereik, zelfs voor een bereik van $-\infty$ tot $+\infty$ mogelijk zijn. Inzonderheid is het kegelsnede-nomogram dan op zijn plaats, wanneer de schalen eenerzijds een groot bereik moeten omvatten, maar anderzijds gevergd wordt, dat, binnen een beperkter bereik, een zeer nauwkeurige aflezing mogelijk moet zijn (zie het voorbeeld § 135).

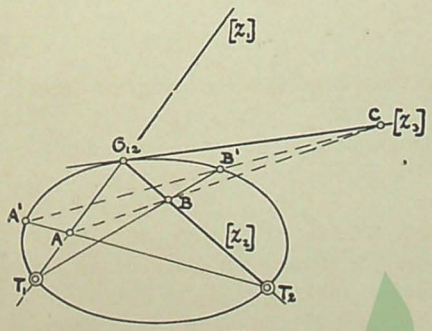


Fig. 77.

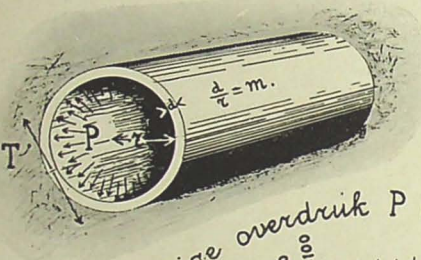
De constructie, in het bijzonder van cirkelnomogrammen, is niet veel omslachtiger dan van een recht nomogram voor dezelfde betrekking. (Zie voorts § 145).

§ 134. 1e Voorbeeld. *Wanddikte van buizen, cylinders en ketels met inwendigen overdruk* (figuur **78**).

De voor te stellen betrekking kan geschreven worden als een vergelijking van type II:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Wanddikte van buizen, cylinders en ketels met inwendigen overdruk.



$$\frac{T}{P} = 0{,}85\,\frac{(m+1)^2+1}{(m+1)^2-1} + 0{,}45\,.$$

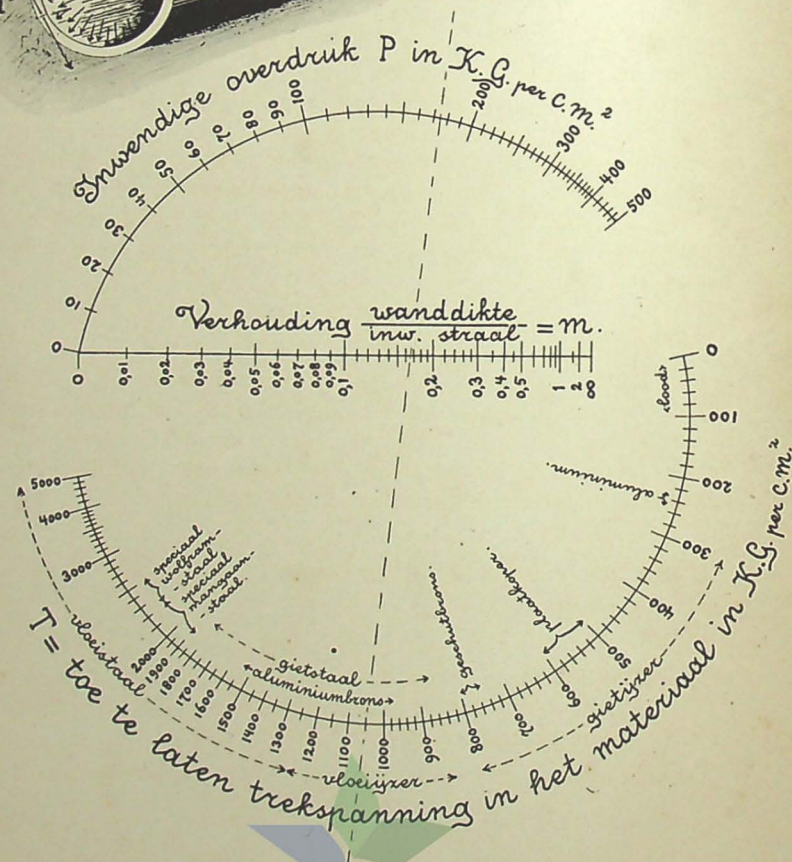


Fig. 78.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$P \cdot \left[0{,}85\,\frac{(m+1)^2+1}{(m+1)^2-1} + 0.45\right] + (-T) = 0$$

en dus worden voorgesteld door een nomogram van dat type met de schalen:

$[z_1] \ldots\ldots\ x = \mu_1 P$
$[z_2] \ldots\ldots\ y = -\mu_2 T$
$[z_3] \ldots\ p = \dfrac{\mu_1\delta}{\mu_2 g_3 + \mu_1} = \dfrac{\mu_1\delta(m^2+2m)}{\mu_2(1{,}3\,m^2 + 2{,}6\,m + 1{,}7) + \mu_1(m^2+2m)}$.

In de oorspronkelijke teekening voor figuur **78** werd gekozen:

$$\mu_1 = 0{,}075, \qquad \mu_2 = 0{,}01 \quad \text{en} \quad \delta = 19{,}55.$$

Voor de kegelsnede werd een cirkel genomen, gaande door de snijpunten van $[z_3]$ met $[z_1]$ en $[z_2]$, maar zoodanig, dat voor [T] een grootere boog ter beschikking kwam dan voor [P], omdat eerstgenoemde schaal een grooter bereik en een aantal bijschriften heeft.

De toppunten $\mathbf{T_1}$ en $\mathbf{T_2}$ lagen onderscheidenlijk ongeveer in de schaalpunten P = 197,5 en T = 1895. Van $\mathbf{T_2}$ uit, werd de rechte hulpschaal $[z_1]$; van $\mathbf{T_1}$ uit, de hulpschaal $[z_2]$ op den cirkel geprojecteerd.

Toepassing van het nomogram.

Een 60 cm. wijde vloeiijzeren cylinder, waarvoor T = 1050 kg/cm.^{2}, moet kunnen worden blootgesteld aan een inwendigen overdruk van 174 kg/cm.^{2}. Uit het nomogram blijkt (stippellijn), dat de verhouding **m** minstens 0,166 moet bedragen, de dikte van den cylinder zal dus minstens 5 cm. moeten zijn.

§ 135. 2e Voorbeeld. *Electrische trillingen* (figuur **79**).

$$\lambda = 1{,}884\,\sqrt{LC}$$

, waarin

C = de capaciteit van de trillingsketen in $\mu\mu$F,
L = de zelfinductie van de trillingsketen in μH,
λ = de golflengte van de opgewekte trilling.

De voor te stellen betrekking kan als type (II) geschreven worden:

$$\sqrt{\frac{1}{L}\cdot\frac{\lambda}{1\,884}} - \sqrt{C} = 0.$$

Hierbij wordt $[\lambda]$ middenschaal.

Om voor het groote bereik der veranderlijken, — het relatieve bereik is onderscheidenlijk 10^{11} en 10^7 —, betere schalen te verkrijgen,

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

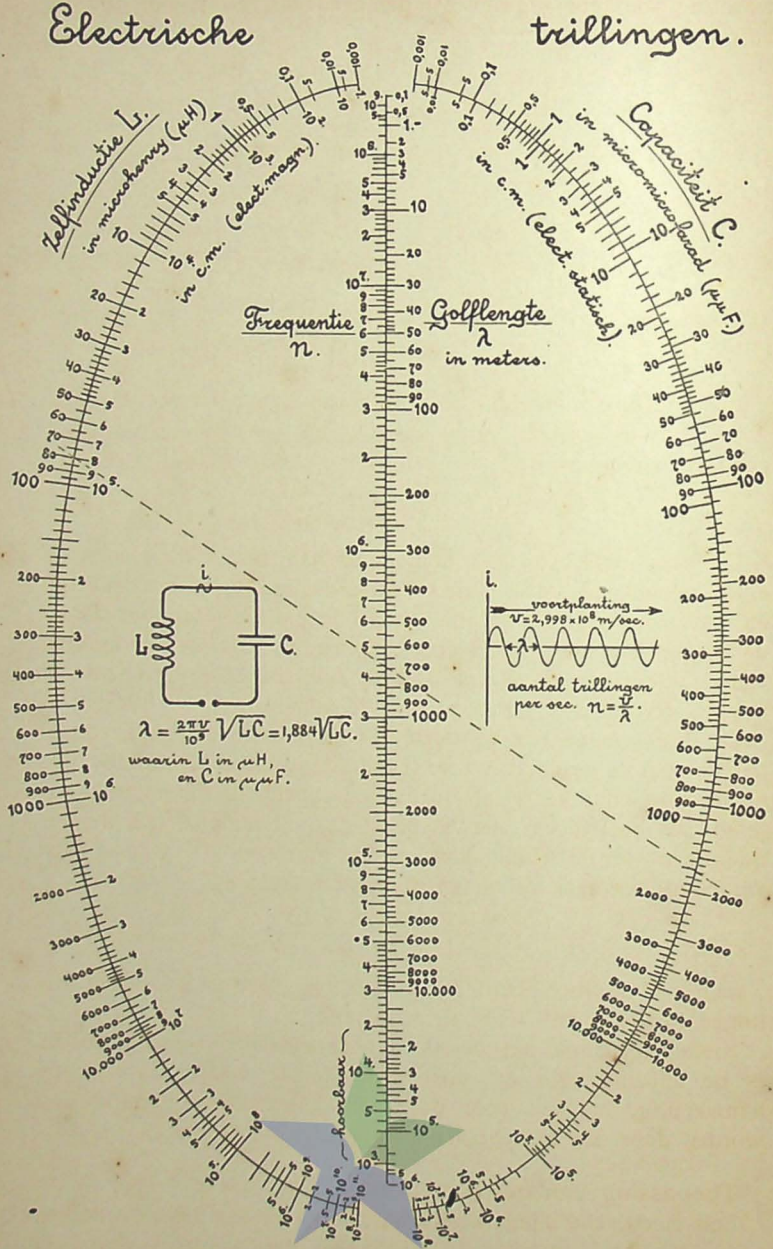


Fig. 79.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

wordt de voorkeur gegeven aan den eveneens van type (II) zijnden vorm (zie blz. 72, opm. 2⁰.).

$$\sqrt[4]{\frac{1}{L}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{1{,}884}} - \sqrt[4]{C} = 0.$$

Voor het nomogram type II, zijn dan de schalen:

$$[z_1] \ldots x = \mu_1 \sqrt[4]{\frac{1}{L}}$$

$$[z_2] \ldots y = \mu_2 \sqrt[4]{C}$$

$$[z_3] \ldots p = -\frac{\mu_1 \delta}{\mu_2 \sqrt{\frac{\lambda}{1{,}884}} + \mu_1}$$

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur **79**, werd

$$\mu_1 = 84{,}5, \quad \mu_2 = 4{,}75 \quad \text{en} \quad \delta = 34{,}7$$

gekozen, zoodat voor:

$$[z_3] \ldots p = \frac{34{,}7}{0{,}0409\sqrt{\lambda} + 1}.$$

De constructie van het nomogram had plaats door eerst de ellips te teekenen, daarna de schaalverdeeling $[z_3]$ te construeeren en vervolgens de rechte hulpschaal $[z_2]$ uit het toppunt T_1 op de kegelsnede te projecteeren (T_1 en T_2 zijn de eindpunten van de kleine as der ellips). [C] (in $\mu\mu$F) is het spiegelbeeld van [L] (in μH) en dus van deze over te nemen.

De drie schalen zijn voorts tot dubbelschalen gemaakt, zoodat het nomogram geschikt is voor toepassing, zoowel bij zelfinducties gegeven in microhenry, als in cm. en capaciteiten in micromicrofarad, als wel in cm., terwijl naast de golflengte λ, ook de frequentie **n** van de trilling kan worden afgelezen. De laatste twee veranderlijken zijn verbonden door de betrekking:

$$n = \frac{v}{\lambda} = \frac{2{,}998 \times 10^8}{\lambda}$$

, waarin **v** de voortplantingssnelheid van electromagnetische trillingen (o.a. van het licht), in m/sec. is.

Niettegenstaande het bereik der veranderlijken zeer groot is, is de aflezing voor de meer gebruikelijke waarden voldoende nauwkeurig, hetgeen voor deze betrekking alleen bereikt kon worden door den afgebeelden nomogramvorm te kiezen.

Toepassing van het nomogram.

Een electrische slingerketen, bestaande uit een zelfinductie van

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

80 μH (= 8 cm.) en een capaciteit van 1700 $\mu\mu$F (= 1530 cm.), heeft een golflengte van 695 m, of een frequentie van 432 kiloherz (= 432.000) (zie gestippelde afleeslijn).

§ 136. **3e Voorbeeld.** *Parallelschakeling van weerstanden. Serieschakeling van capaciteiten. Lenzen-formule.* (figuur **80**).

$$z_3 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2},$$

of:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}$$

, wanneer wij nemen:

	z_1	voor	$-R_1$,	$-C_1$	en	$-v$;
	z_2	„	R,	C	„	f;
en	z_3	„	R_2,	C_2	„	b.

De tweede schrijfwijze is volgens type (VI); de schalen voor het nomogram van dit type, zijn voor $\varphi = 120°$ en bij gelijke moduli:

$[z_1]$ . . . $x = -\mu R_1$, enz.
$[z_2]$ . . . $y = \mu R$, enz.
$[z_3]$ . . . $r = \mu R_2$, enz.

Als kegelsnede werd wederom een cirkel genomen, welke dus, bij dit type, in den oorsprong aan $[z_3]$ moet raken.

De snijding met $[z_1]$ en $[z_2]$ is zóó gekozen, dat T_1 ligt in het schaalpunt $R_1 = 11{,}55$, T_2 in het schaalpunt $R_1 = \infty$ (overeenkomende met $R = 11{,}55$).

$[R_1]$ werd, voor $R_1 > 11{,}55$, geconstrueerd door projectie uit den oorsprong, van een regelmatige schaal // $[z_2]$.

Toepassing van het nomogram. (gestippelde afleeslijn).

1°. Twee parallelle weerstanden van 23Ω en 5,75Ω, kunnen vervangen worden door een enkele weerstand van 4,6Ω, zonder dat de stroomsterkte in de buitenketen behoeft te veranderen.

2°. Evenzoo kunnen een capaciteit van 23$\mu\mu$F, in serie geschakeld met een capaciteit van 5,75$\mu\mu$F, vervangen worden door een enkele condensator, met een capaciteit van 4,6$\mu\mu$F.

3°. De brandpunts-afstand van een lens, welke van een voorwerp op 2,3 m. afstand, een beeld geeft op 57,5 cm. achter de lens, is 46 cm.

Bij het nomogram is weer het evenredigheidsteeken geplaatst.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

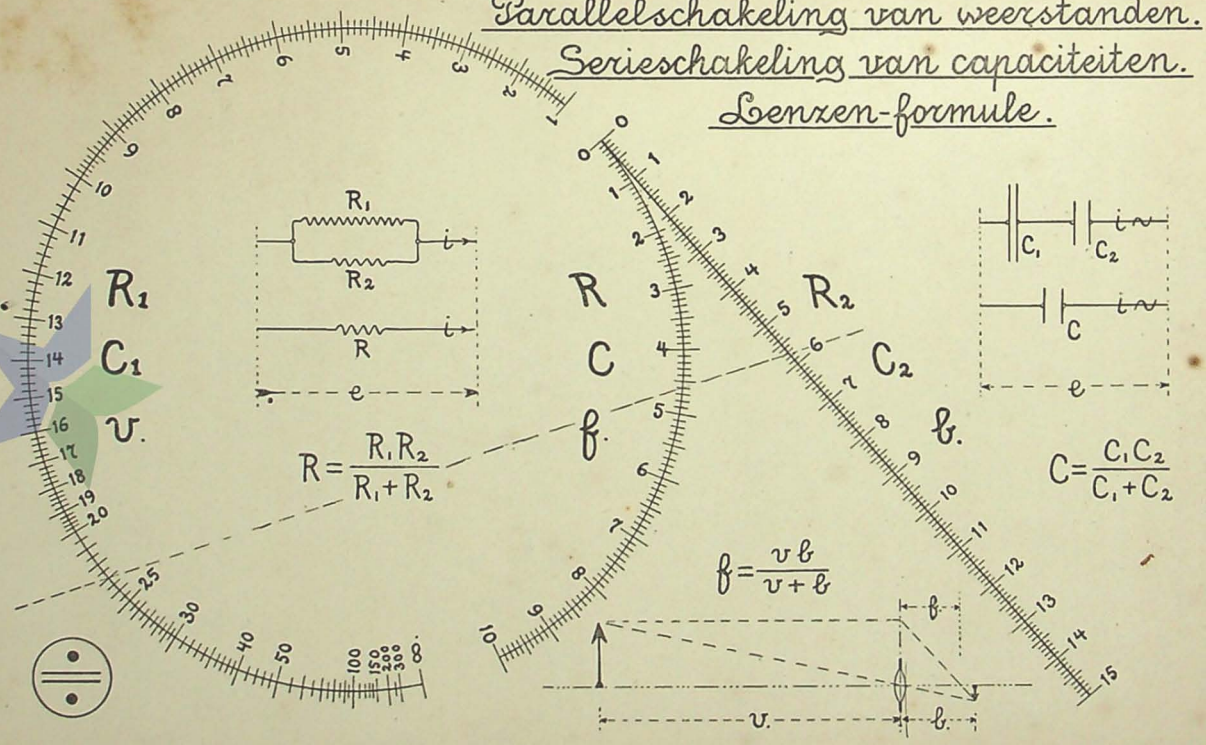


Fig. 80.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nadere beschouwing van de projectieve eigenschappen van het kegelsnede-nomogram met rechte $[z_3]$.

§ 137. Wij keeren terug tot de algeheel projectieve vorming van het kegelsnede-nomogram, (zie blz. 165), en nemen ter vereenvoudiging van de formules aan, dat het toppunt **T'** in het vluchtpunt en **T''** in den oorsprong van de kegelsnedeschaal $[x]$ valt.

In dat geval, was volgens (109):

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2)\,x_3' + x_3'x_3'' = 0.$$

Deze vergelijking geldt zoowel voor alle waardestellen $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ *, verkregen door afleeslijnen gaande door een vast punt* $\mathbf{x_3'}$, $\mathbf{x_3''}$; *als voor alle punten* $\mathbf{x_3'}$, $\mathbf{x_3''}$ *van een vaste lijn, gaande door de kegelsnedeschaalpunten* $\mathbf{x_1}$ *en* $\mathbf{x_2}$.

Voor een rechte lijn, gaande door twee kegelsnedeschaalpunten $\mathbf{x_{31}}$ en $\mathbf{x_{32}}$, is dus:

$$x_{31}x_{32} - (x_{31} + x_{32})\,x_3' + x_3'x_3'' = 0 \qquad (121)$$

Uit (109) en (121) volgt na eliminatie van $\mathbf{x_3''}$:

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2)\,x_3' + (x_{31} + x_{32})\,x_3' - x_{31}x_{32} = 0$$

of als wij $x_{31} + x_{32} = A$ en $-x_{31}x_{32} = B$ stellen, (122)

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2)\,x_3' + (Ax_3' + B) = 0. \qquad (123)$$

Worden weer de volgende schalen geteekend:

op $[x']$ $x_1' = f_1$, $x_2' = f_2$ en $x_3' = f_3$
en op $[x'']$ $x_1'' = f_1$ en $x_2'' = f_2$ (124)

, dan verkrijgen wij dus, na de projectie van deze schalen uit **V** en **O**, een kegelsnedenomogram met een rechte schaal $[z_3]$, voor de functievergelijking (116):

$$\mathbf{f_1f_2 - (f_1 + f_2)f_3 + (Af_3 + B) = 0.}$$

Bijzondere ligging van de rechte schaal (figuur **81**).

§ 138. Zijn de nummers van de twee stralen uit **V** en **O** door een bepaald punt **P**, x' en x'' (figuur **81**), dan is, voor een transversaal door **P**, welke de kegelsnede snijdt in de schaalpunten x_1 en x_2, volgens (109):

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2)x' + x'x'' = 0. \qquad (125)$$

Voor een andere transversaal door **P**, welke de kegelsnede in de schaalpunten x_3 en x_4 snijdt, is evenzoo:

$$x_3x_4 - (x_3 + x_4)x' + x'x'' = 0. \qquad (126)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 139. Ligt het punt **P** op OS, dan is $x'' = 0$ en volgt dus uit (125) en (126):

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4} \tag{127}$$

Wordt nu $x_4 = \infty$ genomen en de kegelsnedeschaal dus uit **V** op OS geprojecteerd, dan verkrijgen wij een nomogram voor:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}. \tag{128}$$

Den drager OS zullen wij daarom den **reciprokensom-drager** noemen.

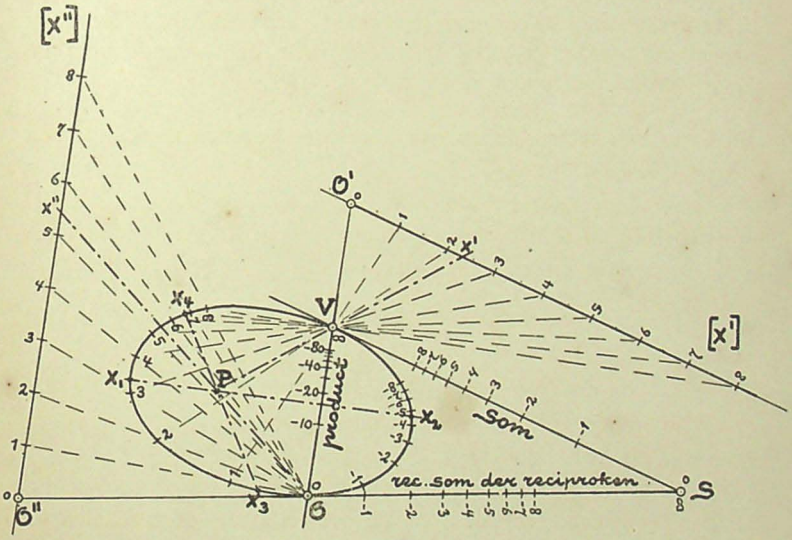


Fig. 81.

§ 140. Ligt **P** op VO, dan is $x' = 0$ en $x'' = \infty$ en volgt dus uit (125) en (126):

$$x_1x_2 = x_3x_4 \tag{129}$$

Nemen wij nu $x_4 = 1$ en projecteeren dus de kegelsnedeschaal uit het schaalpunt 1 op VO, dan stelt het nomogram de betrekking:

$$x_1x_2 = x_3 \tag{130}$$

voor. Den drager VO noemen wij daarom den **product-drager.**

§ 141. Ligt tenslotte **P** op VS, dan is $x' = \infty$ en volgt uit (125) en (126):

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \tag{131}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nemen wij nu $x_4 = 0$ en projecteeren dus de kegelsnedeschaal uit **O** op VS, dan zal het nomogram de betrekking:

$$x_1 + x_2 = x_3 \qquad (132)$$

voorstellen. Den drager VS noemen wij daarom den **somdrager.**

N.B. Wanneer op $[x']$ weer de schalen:

$$x_1' = f_1, \quad x_2' = f_2 \text{ en } x_3' = f_3$$

en op $[x'']$ de schalen:

$$x_1'' = f_1 \text{ en } x_2'' = f_2$$

worden geteekend, dan stellen wij dus, op de besproken wijzen, de betrekkingen voor:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}, \qquad f_1 f_2 = f_3 \qquad \text{en} \quad f_1 + f_2 = f_3.$$

§ 142. De betrekking (130) kan ook geschreven worden:

$$\ln x_1 + \ln x_2 = \ln x_3 \qquad (133)$$

Zij ε een oneindig klein getal, dan is x^ε oneindig weinig verschillend van 1 en kan dus:

$$\ln x^\varepsilon = x^\varepsilon - 1$$

gesteld worden, of

$$\ln x = \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon}, \qquad (134)$$

en dus is (133) te herleiden tot:

$$x_1^{\,\varepsilon} + x_2^{\,\varepsilon} = x_3^{\,\varepsilon} + 1,$$

of eenigszins symbolisch geschreven:

$$x_1^{\,\circ} + x_2^{\,\circ} = x_3^{\,\circ} + 1. \qquad (135)$$

Projecteeren wij de schalen op OS en VS eveneens uit het schaalpunt 1, dus nemen wij in de formules (127) en (131) $x_4 = 1$, dan verkrijgen wij op OS. VO en VS schalen, welke met het kegelsnedeschalenstel onderscheidenlijk nomogrammen vormen, voor dit karakteristieke drietal betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{-1} + x_2^{-1} &= x_3^{-1} + 1 \\ x_1^{\,\circ} + x_2^{\,\circ} &= x_3^{\,\circ} + 1 \\ x_1^{+1} + x_2^{+1} &= x_3^{+1} + 1 \end{aligned}\right\} \qquad (136)$$

§ 143. Uit (122) leiden wij af:

$$\left.\begin{aligned} x_{31} &= {}^1/_2\,\mathrm{A} + {}^1/_2\sqrt{\mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B}} \\ x_{32} &= {}^1/_2\,\mathrm{A} - {}^1/_2\sqrt{\mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B}} \end{aligned}\right\} \qquad (137)$$

Naar gelang $\mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B}$ dus positief, nul of negatief is, heeft de rechte drager $[x_3]$ twee, één of geen punten met de kegelsnede gemeen.

Is dus $\mathrm{B} = -{}^1/_4\mathrm{A}^2 \qquad (138)$

, dan raakt de rechte drager aan de kegelsnede in het schaalpunt $x = {}^1/_2\mathrm{A}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 144. De reciprokensom-, product- en somschaal op de dragers OS, OV en SV zijn projectieve schalen, zij worden dus regelmatig (figuur 82):

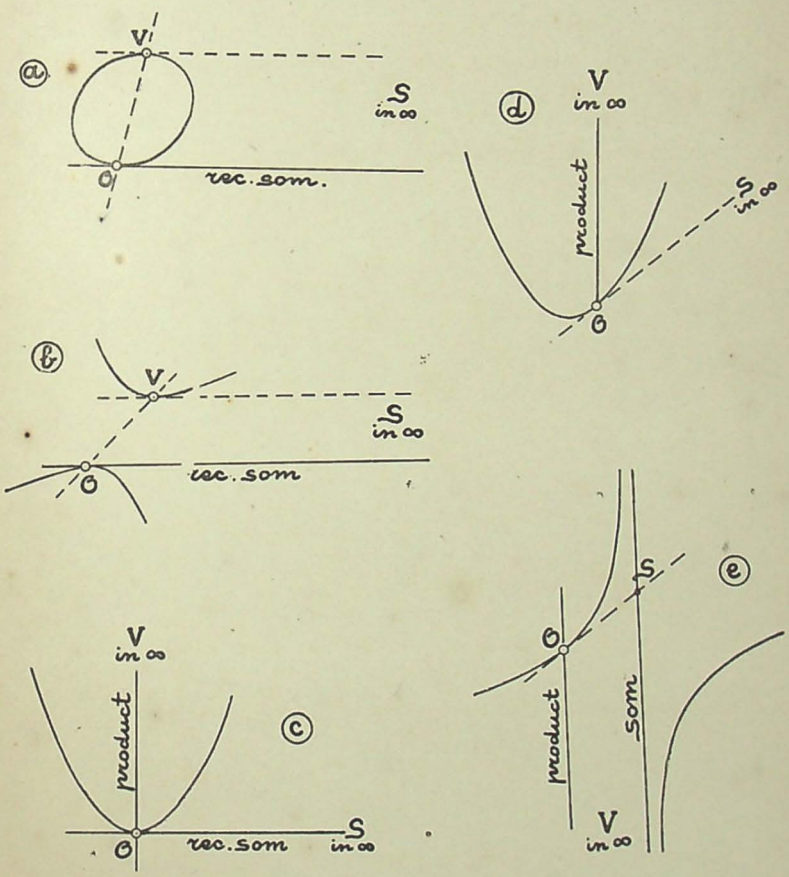


Fig. 82.

1°. de **reciprokensom-schaal** op OS, als **S** in het oneindige ligt (figuren **82 a, b** en **c**),

2°. de **product-schaal** op OV, als **V** in het oneindige ligt (figuren **82 c, d** en **e**) en

3°. de **som-schaal** op SV, als SV // OV (figuur **82 e**).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 145. Figuur **83** stelt het bijzondere nomogram voor, waarbij de drie genoemde schalen op OS, OV en SV geheel gelijk, en wel segmentair, zijn. De kegelsnede is hierbij weer een cirkel.

Wij zagen hierboven, dat op een en hetzelfde kegelsnedeschalenstel $[z_1, z_2]$ de som, het product en de reciprokensom van z_1 en z_2, óf functies daarvan, te zamen door schalen kunnen worden voorgesteld.

Op een recht schalenstel is dat practisch niet mogelijk.

Naast de reeds opgesomde voordeelen van het kegelsnede-

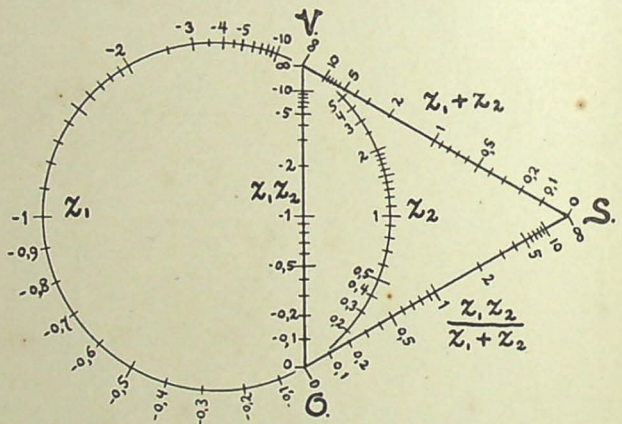


Fig. 83.

nomogram ten opzichte van het rechte nomogram (§ 133), is het bovengenoemde een nieuwe gunstige eigenschap.

§ 146. **Voorbeeld.** *Gemiddelden van* **a** *en* **b**. (figuur **84**).

Er worden drie gemiddelden onderscheiden, n.l. het *rekenkundig* gemiddelde **r**, het *meetkundig* gemiddelde **m** en het *harmonisch* gemiddelde **h**. Onderscheidenlijk zijn:

$$r = \frac{a+b}{2}, \qquad m = \sqrt{ab} \quad \text{en} \quad h = \frac{2ab}{a+b}$$

, voorts is $m = \sqrt{rh}$.

Worden **a** en **b** afgelezen op de als schalenstel beschouwde kegelsnedeschaal $[x]$, dan komt **r** op den somdrager, **m** op den productdrager en **h** op den reciprokensomdrager, dit laatste omdat

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

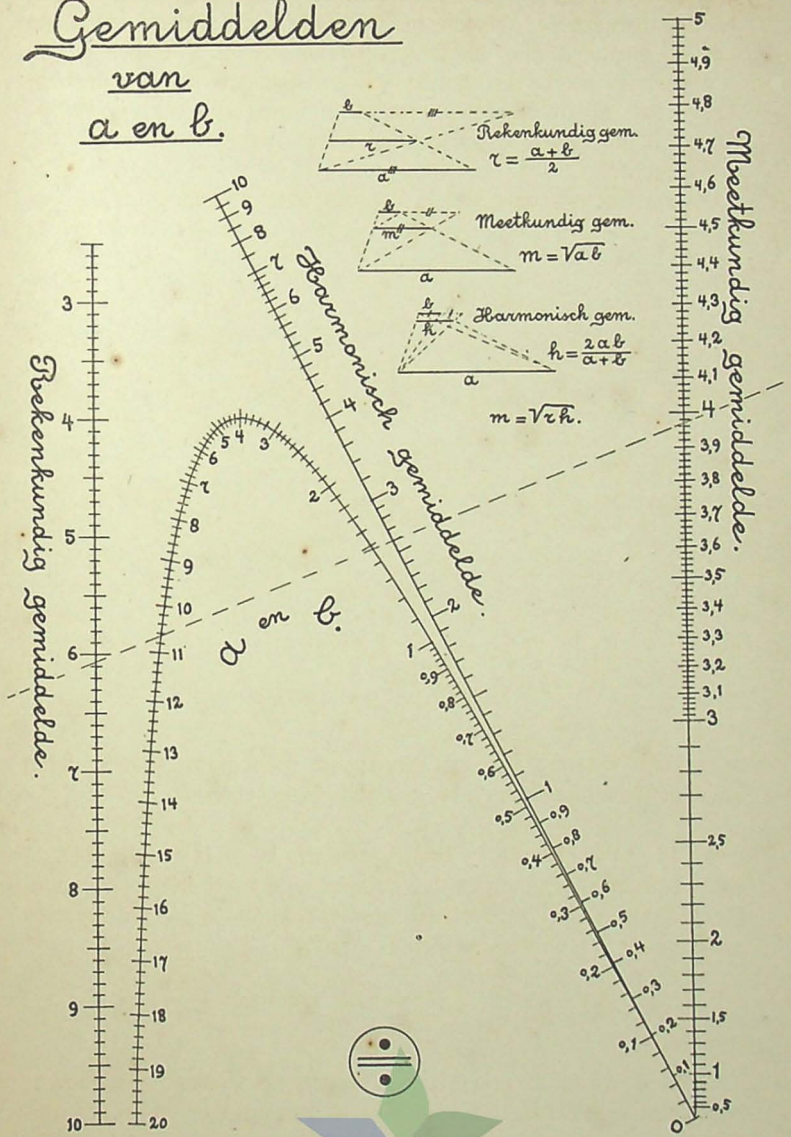


Fig. 84.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Daarom nemen wij product- en somdrager evenwijdig aan elkander en de hyperbolische schaal voor **a** en **b** daar tusschen in. Aldus verkrijgen wij het nomogram van figuur **84**, met een regelmatige schaal voor **r** en een kwadratische schaal voor **m**, terwijl de projectieve schaal voor **h** in den oorsprong aan de kegelsnedeschaal raakt. Het vluchtpunt van de kegelsnedeschaal ligt in het oneindige, waardoor de drager van $[r]$ een asymptoot is van de hyperbool.

Door gebruik te maken van formule (134), kan worden aangetoond, dat de betrekkingen voor de drie gemiddelden, eveneens karakteristiek geschreven kunnen worden, als:

$$\left.\begin{aligned} a^{-1} + b^{-1} &= 2h^{-1} \\ a^{0} + b^{0} &= 2m^{0} \\ a^{+1} + b^{+1} &= 2r^{+1} \end{aligned}\right\} \qquad (139)$$

In figuur **84** is tevens aangegeven hoe in een trapezium met evenwijdige zijden **a** en **b**, de daaraan evenwijdige lijnen met een lengte **r**, **m** en **h** gelegen zijn.

Toepassing van het nomogram.

Zijn de gegeven getallen $a = 10{,}65$ en $b = 1{,}48$, dan vinden wij met behulp van het nomogram (gestippelde afleeslijn), voor het rekenkundig gemiddelde 6,065, voor het meetkundig gemiddelde 3,97 en voor het harmonisch gemiddelde 2,6.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 21.

Kubische nomogrammen.

Theorie volgens Clark. [1])

§ 147. De functievergelijking (IX) is symmetrisch ten opzichte van f_1 en f_2. Naar analogie, stelt **Clark** de functievergelijking der kubische nomogrammen, als volgt symmetrisch ten opzichte van f_1, f_2 en f_3:

$$f_1f_2f_3 + A(f_1f_2 + f_2f_3 + f_3f_1) + B(f_1 + f_2 + f_3) + C = 0 \quad (140)$$

Daar deze vergelijking van de 3e orde is, zijn alle andere functievergelijkingen van de 3e orde er toe herleidbaar.

Bij de afleiding van (IX) uit de formules (114), treedt evenals in § 115, de factor $(f_1 - f_2)$ op. Op overeenkomstige wijze laat *Clark* bij de kubische nomogrammen den factor:

$$W = (f_1 - f_2)(f_2 - f_3)(f_3 - f_1) = \begin{vmatrix} 1 & f_1 & f_1^2 \\ 1 & f_2 & f_2^2 \\ 1 & f_3 & f_3^2 \end{vmatrix}$$

optreden en verkrijgt door vermenigvuldiging van (140) met dezen factor, den determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & -A & +B & -C \\ 1 & f_1 & f_1^2 & f_1^3 \\ 1 & f_2 & f_2^2 & f_2^3 \\ 1 & f_3 & f_3^2 & f_3^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (141)$$

De onderdeterminanten van de eerste rij van (141) zijn n.l.:

$$f_1f_2f_3W, \quad (f_1f_2 + f_2f_3 + f_3f_1)W, \quad (f_1 + f_2 + f_3)W \text{ en } W.$$

Door die eerste rij van de overige af te trekken, komt *Clark* ten slotte tot den determinant:

φ	ψ	C
$f_1 + A$	$f_1^2 - B$	$f_1^3 + C$
$f_2 + A$	$f_2^2 - B$	$f_2^3 + C$
$f_3 + A$	$f_3^2 - B$	$f_3^3 + C$

$$= 0. \quad (142)$$

[1]) Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre" par Dr. *J. Clark*. Revue de Mécanique 1907—1908.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Daar de kolommen onderling verwisseld mogen worden, kunnen uit dezen determinant verschillende stellen vergelijkingen worden afgeleid. Uit de rangschikking (142) volgt bij voorbeeld:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi = \dfrac{f_1 + A}{f_1^2 - B} + \psi = \dfrac{f_1^3 + C}{f_1^2 - B} \\ \text{enz.} \end{array}\right\} \qquad (143)$$

, waaruit dan met de constructieformules (84), gevonden wordt:

$$\text{voor } [z_1] \qquad \left.\begin{array}{c} p = \mu' n \dfrac{f_1^2 - B}{f_1 + A} \qquad q = \mu' \dfrac{f_1^3 + C}{f_1 + A} \\ \text{enz.} \end{array}\right\} \qquad (144)$$

§ 148. Voorbeeld. $z_1 z_2 z_3 = 1$ (figuur 85).

Deze betrekking wordt uit (140) verkregen, door daarin $A = B = 0$,

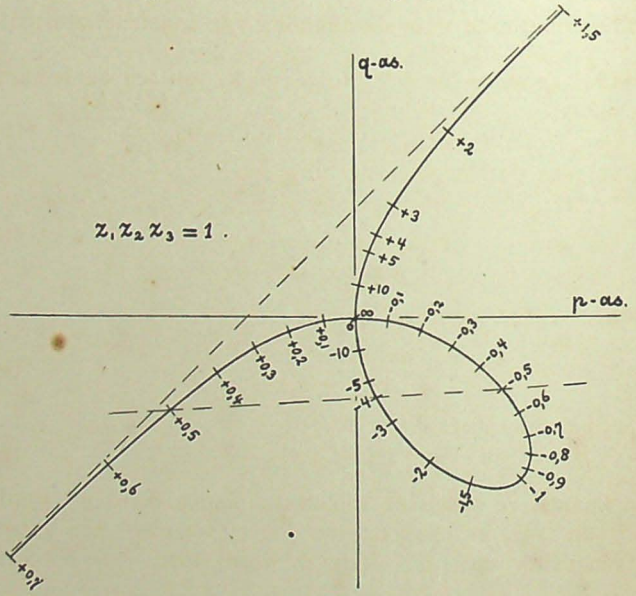


Fig. 85.

$C = 1$ en de functies gelijk aan de veranderlijken zelf te stellen. Schuiven wij bovendien in (142) de kolommen cyclisch één plaats naar rechts, dan verkrijgen wij het stel vergelijkingen:

$$\varphi \frac{z_1^3 - 1}{z_1} + \psi = z_1$$

enz.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

en dus de constructieformules:

voor $[z_1]$ $\quad p = \mu' n \dfrac{z_1}{z_1^3 - 1} \qquad q = \mu' \dfrac{z_1^2}{z_1^3 - 1}$

enz.

, waaruit volgt:

$$\frac{q}{p} = \frac{z_1}{n}, \qquad \text{enz.}$$

, terwijl, volgens (86), de vergelijking van den kubischen drager is:

$$n^3 q^3 - p^3 = \mu' n^2 pq.$$

De kromme is dus een *folium van Descartes.*

Toepassing van het nomogram.

$$0{,}5 \times (-4) \times (-0{,}5) = 1 \text{ (stippellijn).}$$

Andere methode voor de afleiding van constructieformules.

§ 149. Voor de wortels $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ en $\mathbf{x_3}$ van een derdemachtsvergelijking:

$$x^3 + Sx^2 + Rx + P = 0 \tag{145}$$

geldt volgens de Hoogere Algebra

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -S \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= R \\ x_1x_2x_3 &= -P \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

Snijden wij de kubische kromme

$$y = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{a_1x^2 + b_1x + c_1}, \tag{147}$$

door een rechte afleeslijn

$$y = mx + n \tag{148}$$

, dan kunnen de abscissen van de snijpunten berekend worden, door **y** uit (147) en (148) te elimineeren, waardoor een vergelijking van den vorm (145) verkregen wordt, met:

$$S = \frac{b - b_1m - a_1n}{a - a_1m}, \quad R = \frac{c - c_1m - b_1n}{a - a_1m}, \quad P = \frac{d - c_1n}{a - a_1m}. \tag{149}$$

Na eliminatie van **m** en **n** uit de drie vergelijkingen (149), vinden wij een betrekking tusschen **S**, **R** en **P**, welke in determinantvorm geschreven kan worden als:

$$\begin{vmatrix} (a_1S - b_1) & a_1 & (aS - b) \\ (a_1R - c_1) & b_1 & (aR - c) \\ a_1P & c_1 & (aP - d) \end{vmatrix} = 0 \tag{150}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

of als een som:

$$-a\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & S \\ c_1 & b_1 & R \\ 0 & c_1 & P \end{vmatrix} - a_1\begin{vmatrix} S & a_1 & b \\ R & b_1 & c \\ P & c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b \\ c_1 & b_1 & c \\ 0 & c_1 & d \end{vmatrix} = 0 \qquad (151)$$

en dus kan worden samengevat tot:

$$\begin{vmatrix} P & 0 & c_1 & d \\ -R & c_1 & b_1 & c \\ S & b_1 & a_1 & b \\ -1 & a_1 & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \qquad (152)$$

, welke laatste determinant te schrijven is als:

$$\alpha x_1x_2x_3 + \beta(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + \gamma(x_1 + x_2 + x_3) + \delta = 0 \qquad (153)$$

, wanneer α, β, γ en δ de onderdeterminanten zijn van de eerste kolom van (152).

Stellen wij nu $x_1 = f_1$, $x_2 = f_2$ en $x_3 = f_3$, dan gaat (153) over in de functievergelijking voor de kubische nomogrammen:

$$\alpha f_1f_2f_3 + \beta(f_1f_2 + f_2f_3 + f_3f_1) + \gamma(f_1 + f_2 + f_3) + \delta = 0 \qquad (154)$$

§ 150. Is een vergelijking van dit type gegeven, dan zijn er dus, tusschen de 7 coëfficienten van (147), vier betrekkingen, n.l. die voor de onderdeterminanten α, β, γ en δ, bekend.

Den vorm van de kubische kromme kunnen wij nu nog voldoende beheerschen, en wel:

1°. door de vrije keuze van de moduli voor abscissen en ordinaten (x en y);

2°. door het kiezen van een geschikte hoek tusschen de assen;

3°. door het vooraf bepalen van de grootte van drie coëfficienten van (147), daarbij uitgaande van de volgende gegevens:

de kromme heeft tot asymptoot $y = \frac{a}{a_1}x + \frac{ab_1 + a_1b}{a_1^2}$;

de x-as is asymptoot, als $a = b = 0$;

de y-as „ „ „ $c_1 = 0$;

de y-as is as van symmetrie, als $a = c = b_1 = 0$;

de oorsprong is symmetrie-punt (buigpunt), als $b = d = b_1 = 0$;

de kromme gaat door den oorsprong, als $d = 0$,

de richting in den oorsprong is dan $\frac{c}{c_1}$;

de kromme raakt in den oorsprong aan de x-as, als $c = d = 0$,

dat raakpunt is bovendien buigpunt, als ook $b = 0$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

4°. Wanneer β en γ nul zijn, kunnen er drie moduli μ_1, μ_2 en μ_3 worden ingevoerd, mits $\mu_1\mu_2\mu_3 = 1$;

en wanneer α en β nul zijn, kunnen er drie termen λ_1, λ_2 en λ_3 aan de functies worden toegevoegd, mits $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Zijn in de gegeven vergelijking (154) δ en nog twee van de drie overige coëfficienten nul, dan kunnen de drie functies allen een zelfde modulus μ verkrijgen.

§ 151. **Voorbeeld.** *Verband tusschen toerental en omtreksnelheid.* (figuur **86**).

De voor te stellen betrekking is:

$$v = 2\pi r\frac{n}{60}$$

of, geschreven als de som van drie functies $\mathbf{f}_1$ $\mathbf{f}_2$ en $\mathbf{f}_3$:

$$\log r + \log n + \left(\log\frac{\pi}{30} - \log v\right) = 0.$$

Wij kiezen als drager een S-vormige kromme, waarvoor de oorsprong symmetrie-punt is, dus nemen in (147):

$$b = d = b_1 = 0.$$

Uit de waarden van de onderdeterminanten volgt verder, dat $a_1 = 0$ is en $\mathbf{c}$ naar verkiezing kan worden aangenomen. De vergelijking van den drager wordt dus van den vorm.

$$y = ax^3 + cx.$$

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur **86** namen wij de kromme:

$$y = 0{,}064\,x^3 - 4{,}8\,x$$

, omdat een gunstig gevormd gedeelte daarvan, besloten kon worden in het beschikbare teekenvlak, waarvoor L $\approx$ 32 en B $\approx$ 20 was.

Daar in de gegeven functievergelijking, volgens (154), de coëfficienten α, β en δ nul waren, namen wij, volgens het gestelde in de vorige paragraaf onder 4°, voor de abscissen:

$$x_1 = \mu \log r + \lambda_1$$
$$x_2 = \mu \log n + \lambda_2$$
$$x_3 = \mu\left(\log\frac{\pi}{30} - \log v\right) + \lambda_3$$

, waarbij $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Verband tusschen toerental en omtreksnelheid.

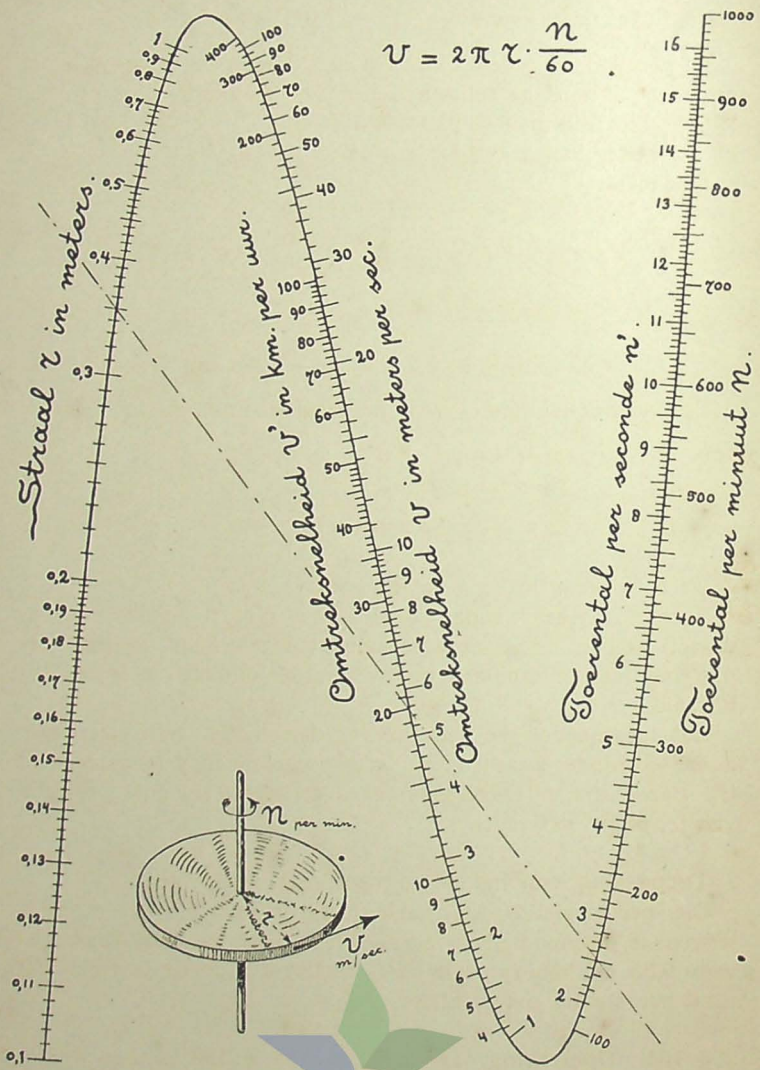


Fig. 86.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Het bereik van de veranderlijken was:

r van 0,1 tot 1;
n „ 100 „ 1000;
v „ 1 „ 100.

In verband met den vorm van den drager werd nagegaan, of het mogelijk was de schalen daarop zoo te kiezen, dat:
$[r]$ reikte van $x = -10$ tot $x = -6$
en $[n]$ reikte van $x = 6$ tot $x = 10$.
Alsdan is:

$$\begin{aligned} -\mu + \lambda_1 &= -10 \\ \lambda_1 &= -6 \\ 2\mu + \lambda_2 &= 6 \\ 3\mu + \lambda_2 &= 10 \end{aligned}$$

, waaruit volgt,

$$\mu = 4, \quad \lambda_1 = -6, \quad \lambda_2 = -2, \text{ en dus } \lambda_3 = 8.$$

De constructieformules voor de schalen waren dus:

voor $[z_1]$ $\quad x_1 = 4 \log r - 6$
„ $[z_2]$ $\quad x_2 = 4 \log n - 2$
„ $[z_3]$ $\quad x_3 = -4 \log v + 4 \log \frac{\pi}{30} + 8.$

De constructie had als volgt plaats:
Voor een reeks ronde waarden van **r** en **n** werden eerst **x**, daarna **y** bepaald en deze schaalpunten geteekend, daarna werden met een interpolator de overige deelpunten van $[r]$ en $[n]$ bepaald.
Het tusschengelegen gedeelte van den drager werd geteekend, door bij ronde waarden van **x** de waarde van **y** te berekenen. Op dezen drager, werd vervolgens de schaal $[v]$ door projectie van $[r]$ of $[n]$ verkregen.

Toepassing van het nomogram. (gestippelde afleeslijn).
Om per rijwiel 20 km. per uur, dat is ruim 5,5 m/sec., af te leggen, is het noodig, dat de wielen, welke een straal van ongeveer 0,35 m. hebben, ruim $2^1/_2$ maal per seconde of ruim 150 maal per minuut rondwentelen.

§ 152. **Opmerking.** De methode van § 150 kunnen wij op gelijke wijze toepassen op de vierdegraadsvergelijking:

$$x^4 + Sx^3 + Rx^2 + Qx + P = 0 \qquad (155)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

en de vierdegraadskromme:

$$y = \frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1} \qquad (156)$$

Voorbeeld. Snijden wij b.v. de kromme

$$y = \frac{x^4 - 40x^2 + 144}{10x}$$

(figuur **87**), door een rechte lijn $y = mx + n$, dan zijn er in het

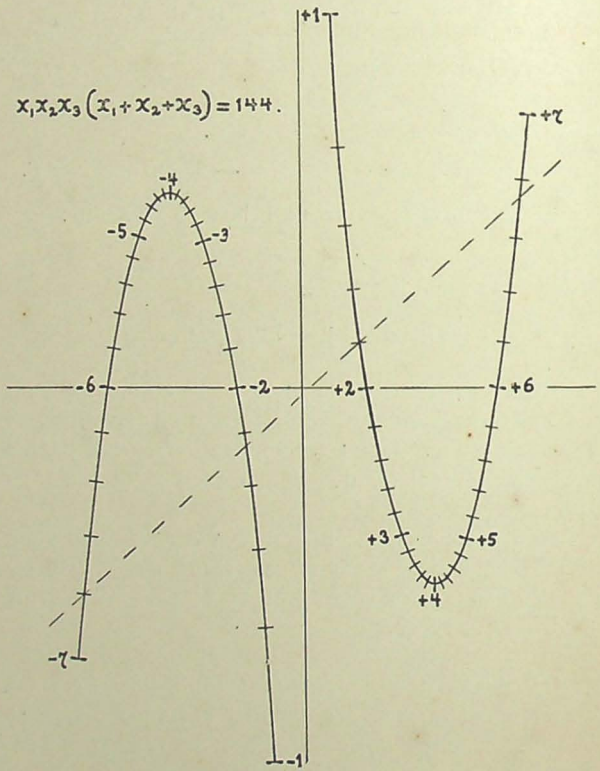


Fig. 87.
(Verkleining: $^1/_2$ ×).

algemeen vier snijpunten, welker abscissen de wortels zijn van de vergelijking

$$x^4 - (40 + 10m)x^2 - 10nx + 144 = 0.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dus is voor die abscissen,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 144$$

, waaruit de betrekking met drie veranderlijken volgt:

$$x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = -144.$$

Daar deze vergelijking o.a. ten opzichte van x_3 van den 2den graad is, behooren bij elk stel waarden x_1 en x_2 in het algemeen 2 waarden x_3.

Toepassing van het nomogram.

Voor $x_1 = -6{,}8$ en $x_2 = +1{,}8$ is (stippellijn):

$$x_3 = -1{,}74 \text{ en } = +6{,}74.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

DEEL IV.

SCHEIDING DER VERANDERLIJKEN.

HOOFDSTUK 22.

Inleiding.

§ 153. Onder de scheiding der veranderlijken eener vergelijking, wordt verstaan het herleiden van die vergelijking, tot den vorm van een der bijzondere functievergelijkingen (I) tot en met (IX), voor welke de wijze van constructie van het schaalnomogram, rechtstreeks werd aangegeven. [Zie ook Hoofdstuk 10 (blz. 55)].

Om die scheiding, bij de in de practijk voorkomende vergelijkingen, indien mogelijk, snel te kunnen uitvoeren, behandelen wij haar voor enkele **algemeene functievergelijkingen,** dat zijn functievergelijkingen van een zoodanigen vorm, dat een groot aantal vergelijkingen daartoe op het eerste gezicht herleidbaar is. Soms omvat zulk een algemeene functievergelijking alle door een schaalnomogram voor te stellen vergelijkingen van een orde, ze wordt dan de **algemeene functievergelijking van die orde** genoemd.

Voor elke vergelijking welke daarin begrepen is, kan de scheiding der veranderlijken plaats hebben, dit is niet steeds het geval bij de andere algemeene functievergelijkingen.

In de bij Hoofdstuk 10 behoorende tabel II (blz. 56 en 57), werd reeds een overzicht van de bijzondere en algemeene functievergelijkingen gegeven.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 23.

5e en 6e orde.

§ 154.

$$\boxed{\Phi_{12}g_3 + \Psi_{12} = f_3} \qquad (a)$$

In deze algemeene functievergelijking zijn Φ_{12} en Ψ_{12} zoowel functies van z_1 als van z_2.

Wij stellen:

$$\Phi_{12} = x \quad \text{en} \quad \Psi_{12} = y \qquad (157)$$

en trachten achtereenvolgens z_1 en z_2 uit (157) te elimineeren. Gelukt dit en zijn de verkregen vormen lineair in **x** en **y**, dan is (*a*) gesplitst in het stelsel vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} xg_1 + y &= f_1 \\ xg_2 + y &= f_2 \\ xg_3 + y &= f_3. \end{aligned}\right\} \qquad (158)$$

Zijn de verkregen vormen niet lineair in **x** en **y**, dan is de scheiding in het algemeen niet mogelijk.

Mochten z_1 en z_2 niet uit (157) geëlimineerd kunnen worden, dan is toch scheiding niet uitgesloten. Wij kunnen hierop echter niet verder ingaan.

In het algemeene geval, waarin de functies **g** en **f** door niet-lineaire, en in de drie vergelijkingen verschillende, betrekkingen zijn verbonden, volgt, bij eliminatie van **x** en y uit (158), de functievergelijking (VII) voor het nomogram met drie kromme schalen:

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_2 - f_3}{g_2 - g_3}. \qquad (VII)$$

§ 155. Is er echter tusschen de twee functies van een der veranderlijken een lineaire betrekking, dan is de schaal voor die veranderlijke recht.

Is bij voorbeeld in (VII)

$$g_3 = af_3 + b$$

, dan kunnen wij de gegeven vergelijking herleiden tot het type (VIII)

$$\frac{F_1 - F_2}{G_1 - G_2} = F_3$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

, door te stellen:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{f_1}{af_1 + b - g_1} & G_1 &= \frac{1}{af_1 + b - g_1} \\ F_2 &= \frac{f_2}{af_2 + b - g_2} & G_2 &= \frac{1}{af_2 + b - g_2} \\ F_3 &= f_3 \end{aligned}\right\} \quad (159)$$

§. 156 Zijn er in (VII) twee lineaire betrekkingen, dan zijn er twee rechte schalen.

Is bij voorbeeld:

$$g_1 = a_1 f_1 + b_1 \qquad \text{en} \qquad g_2 = a_2 f_2 + b_2$$

, dan kan de gegeven vergelijking herleid worden tot type (I):

$$F_1 G_3 + F_2 = F_3$$

door te stellen: [1])

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{-1}{(a_1 - a_2)f_1 + (b_1 - b_2)} \\ F_2 &= \frac{1}{(a_1 - a_2)f_2 + (b_1 - b_2)} \\ F_3 &= \frac{1}{a_1 f_3 + b_1 - g_3} & G_3 &= \frac{a_2 f_3 + b_2 - g_3}{a_1 f_3 + b_1 - g_3} \end{aligned}\right\} \quad (160)$$

§ 157. Zijn in twee of drie van de vergelijkingen (158) de functies **g** en **f** door *gelijkluidende* betrekkingen verbonden, dan liggen, zooals uit hoofdstuk 18 bekend is, de overeenkomstige schalen op denzelfden drager. Is er tusschen $\mathbf{g}_1$ en $\mathbf{f}_1$ en tusschen $\mathbf{g}_2$ en $\mathbf{f}_2$ een zelfde betrekking van den tweeden graad, dan wordt de gemeenschappelijke drager van $[z_1]$ en $[z_2]$ een kegelsnede. Alsdan valt de voor te stellen vergelijking onder de hierna te bespreken algemeene functievergelijkingen (*b*) en (*c*) van de **4e** orde.

[1]) Zie, voor de afleiding van de formules (160), het voorbeeld in § 165.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 24.

4e orde.

§ 158. De algemeene functievergelijking van de 4e orde is:

$$\Phi_{12}\,\xi_3 + \Psi_{12} = \zeta_3 \qquad \text{(b)}$$

, waarin:

$$\Phi_{12} = \frac{a_0f_1f_2 + a_1f_1 + a_2f_2 + a_3}{c_0f_1f_2 + c_1f_1 + c_2f_2 + c_3} \quad \text{en} \quad \Psi_{12} = \frac{b_0f_1f_2 + b_1f_1 + b_2f_2 + b_3}{c_0f_1f_2 + c_1f_1 + c_2f_2 + c_3}$$

en waarin ξ_3 en ζ_3 **niet** lineair verwant mogen zijn.

Stel weder $\Phi_{12} = x$ en $\Psi_{12} = y$ (161)

en elimineer wederom z_1 en z_2 uit deze twee vergelijkingen.

Wij verkrijgen dan weer een stel vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} x\xi_1 + y &= \zeta_1 \\ x\xi_2 + y &= \zeta_2 \\ x\xi_3 + y &= \zeta_3 \end{aligned}\right\} \qquad (162)$$

Massau en *Clark* hebben aangetoond, dat er nu slechts twee gevallen mogelijk zijn:

1°. Zoowel tusschen ξ_1 en ζ_1, als tusschen ξ_2 en ζ_2 is een lineaire betrekking. Wij hebben dan voor de herleiding tot type (I) de formules (160) toe te passen.

2°. Tusschen ξ_1 en ζ_1 en tusschen ξ_2 en ζ_2 is een gelijkluidende betrekking van den tweeden graad.

In dit geval is $[z_1, z_2]$ een kegelsnedeschalenstel of dubbelschaal voor

$$\xi_1 = \xi_2 \quad \text{of} \quad \zeta_1 = \zeta_2 \qquad (163)$$

, welke laatste betrekkingen tot elkander herleidbaar zijn.

Uit (163) kunnen wij ook afleiden

$$z_1 = \Phi(z_2) \quad \text{of} \quad z_2 = \Psi(z_1) \qquad (164)$$

Stel in het algemeen een der betrekkingen (163) of (164), of

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

een andere daaruit af te leiden betrekking met gescheiden veranderlijken, voor door

$$f_1 = f_2 \tag{165}$$

en bereken daaruit de functies

$$z_1 = \varphi(f_1) \quad \text{en} \quad z_2 = \psi(f_2). \tag{166}$$

Worden deze functies nu gesubstitueerd in de gegeven vergelijking van den vorm (b), dan kunnen wij daaruit een vergelijking van type (IX) afleiden:

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2)\,\Phi_3 + \Psi_3 = 0 \tag{IX}$$

§ 159. Voorbeeld. *Overgang van rechthoekige op trapeziumvormige doorsnede bij grondkeerende muren.*

Voor de hierbij optredende betrekking

$$(1 + l)h^2 - l(1 + p)h - \tfrac{1}{3}(1 - l)\,(1 + 2p) = 0 \tag{167}$$

werd in § 127 een kegelsnedenomogram geconstrueerd.

Ter herleiding van (167) schrijven wij deze vergelijking in den vorm van de algemeene functievergelijking (b):

$$\frac{l}{1 + l}\,(1 + p)h + \frac{1 - l}{3(1 + l)}\,(1 + 2p) = h^2 \tag{168}$$

en stellen dus:

$$\frac{l}{1 + l}\,(1 + p) = x \quad \text{en} \quad \frac{1 - l}{3(1 + l)}\,(1 + 2p) = y. \tag{169}$$

Eliminatie van p en l uit (169) en substitutie van $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in (168) leveren het stel vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} x \cdot \frac{2(l - 1)}{3l} + y &= \frac{l - 1}{3(l + 1)} \\ x \cdot \frac{2(2p + 1)}{3(p + 1)} + y &= \frac{2p + 1}{3} \\ x \cdot h + y &= h^2 \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

Deze zijn dus overeenkomstig (162). Uit de voor ξ_1 en ζ_1, ξ_2 en ζ_2 in de plaats gekomen vormen valt af te leiden, dat voor *beide* veranderlijken een betrekking van den 2den graad aanwezig is:

$$\xi = \frac{4\zeta}{3\zeta + 1} \tag{171}$$

Voor de kegelsnededubbelschaal $[z_1, z_2]$, is nu

$$\zeta_1 = \zeta_2$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dus $$\frac{l-1}{l+1} = 2p+1$$

of $$\frac{-1}{l+1} = p.$$

Stel dit $$f_1 = f_2$$

, dan is dus

$$l = \frac{f_1+1}{-f_1} \quad \text{en} \quad p = f_2.$$

Dit in (167) gesubstitueerd, geeft:

$$-\frac{h^2}{f_1} + \frac{f_1+1}{f_1}(f_2+1)h - \frac{2f_1+1}{3f_1}(2f_2+1) = 0.$$

of:

$$f_1 f_2(4-3h) - (f_1+f_2)(3h-2) + (3h^2-3h+1) = 0$$

, dus als type (IX) en met substitutie van de uitdrukkingen voor $\mathbf{f_1}$ en $\mathbf{f_2}$:

$$\frac{-1}{l+1}\cdot p - \left(\frac{-1}{l+1}+p\right)\frac{3h-2}{4-3h} + \frac{3h^2-3h+1}{4-3h} = 0 \qquad (173)$$

§ 160. Elke vergelijking van type (IX) is tot een nieuwe vergelijking van dat type te vervormen. Zij de oorspronkelijke vergelijking

$$f_1 f_2 - (f_1+f_2)f_3 + g_3 = 0$$

, dan gaat deze over in

$$F_1F_2 - (F_1+F_2)F_3 + G_3 = 0$$

door te stellen:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{af_1+b}{cf_1+d} \qquad F_2 = \frac{af_2+b}{cf_2+d} \\ F_3 &= \frac{(ad+bc)f_3 + acg_3 + bd}{d^2+2cdf_3+c^2g_3} \\ G_3 &= \frac{b^2+2abf_3+a^2g_3}{d^2+2cdf_3+c^2g_3} \end{aligned}\right\} \qquad (174)$$

a, b, c en **d** zijn hierin naar keuze te bepalen coëfficienten.

De formules (113) voor de verplaatsing van den oorsprong van het kegelsnedeschalenstel (blz. 179) zijn een bijzonder geval van de formules (174).

§ 161. *Soreau* [1]) geeft de volgende directe methode voor het

[1]) „Traité de Nomographie" Tome I pag. 234.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

afleiden van de functie $z_1 = \varphi(f_1)$, als daarbij $z_2 = f_2$ is (zie de formules 166).

Schrijven wij de coëfficienten van Φ_{12} en Ψ_{12} aldus onder elkaar:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

, — waarbij ter vermijding van breuken, de elementen van een rij met eenzelfden factor vermenigvuldigd mogen worden —, en noemen nu de determinant, welke wij na weglating van den kolom met indices 0 verkrijgen D_0; die na weglating van den kolom met indices 1, D_1,; enz., dan is

$$z_1 = \frac{D_0 + D_1 f_1}{D_2 + D_3 f_1} \qquad (175)$$

§ 162. **Voorbeeld.** *Overgang van rechthoekige op trapeziumvormige doorsnede bij grondkeerende muren.* (zie § 127 en § 159).

Uit (168) volgt voor de coëfficienten:

lp	l	p	Const.
1	1	0	0
— 2	— 1	2	1
0	1	0	1

, waarbij de 1e en 3e rij door 3 werden gedeeld. De waarde der determinanten is dus:

$$D_0 = 2, \qquad D_1 = 2, \qquad D_2 = 0, \qquad D_3 = -2.$$

Bijgevolg is: $$l = \frac{1 + f_1}{-f_1}.$$

§ 163. De algemeene functievergelijking van de **4e** orde (*b*) , kan ook geschreven worden, als:

$$f_1 f_2 (a_0\xi_3 + b_0 - c_0\zeta_3) + f_1(a_1\xi_3 + b_1 - c_1\zeta_3) + \\ + f_2(a_2\xi_3 + b_2 - c_2\zeta_3) + (a_3\xi_3 + b_3 - c_3\zeta_3) = 0 \qquad (176).$$

, waarin ξ_3 en ζ_3 weer niet lineair verwant mogen wezen.

Wij kunnen dus de **algemeene functievergelijking van de 4e orde** ook schrijven:

$$f_1 f_2 F_3 + f_1 G_3 + f_2 H_3 + K_3 = 0 \qquad (c)$$

, waarin F_3, G_3, H_3 en K_3 allen functies zijn van z_3, waartusschen nu echter een verband behoort te bestaan:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\alpha F_3 + \beta G_3 + \gamma H_3 + K_3 = 0 \qquad (177)$$

en K_3 niet nul mag wezen.

Was $K_3 = 0$, dan zou (*c*), bij deeling door $f_1 f_2 G_3$, overgaan in een vergelijking van type I of IV.

De scheiding der veranderlijken heeft nu als volgt plaats.

Trekken wij (177) van (*c*) af, dan verkrijgen wij de vergelijking:

$$(f_1 f_2 - \alpha)F_3 + (f_1 - \beta)G_3 + (f_1 - \gamma)H_3 = 0 \qquad (178)$$

Stel

$$\beta\gamma - \alpha = \lambda \qquad (179)$$

, dan kan voor den factor $(f_1 f_2 - \alpha)$ geschreven worden:

$$(f_1 - \beta)(f_2 - \gamma) + \gamma(f_1 - \beta) + \beta(f_2 - \gamma) + \lambda$$

en dus voor (178):

$$(f_1 - \beta)\left(-\frac{G_3}{F_3} - \gamma\right) + (f_2 - \gamma)\left(-\frac{H_3}{F_3} - \beta\right) = (f_1 - \beta)(f_2 - \gamma) + \lambda. \qquad (180)$$

Wij hebben nu (*c*) herleid tot het type:

$$F_1\Phi_3 + F_2\Psi_3 = F_1F_2 + \lambda \qquad (181)$$

, hetwelk als type (IX) is te schrijven als:

$$F_1 \cdot \frac{\lambda}{F_2} - \left(F_1 + \frac{\lambda}{F_2}\right)\frac{\lambda}{\Phi_3} + \frac{\lambda\Psi_3}{\Phi_3} = 0. \qquad (182)$$

Voor $\beta\gamma - \alpha = \lambda = 0$, gaat (182) echter, na voorafgaande deeling door λ, over tot den vorm van type (I) of (IV):

$$\frac{1}{F_1} \cdot \frac{\Psi_3}{\Phi_3} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{\Phi_3}. \qquad (183)$$

Substitueeren wij in (182) en (183), weer de functies en constanten waaruit (*c*), (177) en (179) zijn opgebouwd, dan verkrijgen wij onderscheidenlijk:

$$(f_1 - \beta) \cdot \frac{\lambda}{(f_2 - \gamma)} - \left(f_1 - \beta + \frac{\lambda}{f_2 - \gamma}\right) \cdot \frac{-\lambda F_3}{\gamma F_3 + G_3} + \lambda\frac{\beta F_3 + H_3}{\gamma F_3 + G_3} = 0 \qquad (184)$$

$$\text{en} \quad \frac{1}{f_1 - \beta} \cdot \frac{\beta F_3 + H_3}{\gamma F_3 + G_3} + \frac{1}{f_2 - \gamma} = \frac{-F_3}{\gamma F_3 + G_3} \qquad (185)$$

De laatste vergelijking, wordt dus slechts verkregen, wanneer $\beta\gamma - \alpha = 0$.

Het is alleen in dit geval, dat een functievergelijking van type (I) of (IV) wordt verkregen. Vandaar, dat wij (I) en (IV) functievergelijkingen van de 4^e_0 **orde** noemen. Hierbij is het kegelsnedeschalenstel in een recht schalenstel ontaard.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 164. Uit (176) volgt, in verband met (177), het stel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden:

$$\left.\begin{aligned} a_0\alpha + a_1\beta + a_2\gamma + a_3 &= 0 \\ b_0\alpha + b_1\beta + b_2\gamma + b_3 &= 0 \\ c_0\alpha + c_1\beta + c_2\gamma + c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (186)$$

Schrijven wij, als in § 161, de coëfficienten weer aldus op:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

en noemen wij weer de determinant, die na weglating van den kolom met indices 0 verkregen wordt, D_0; die na weglating van den kolom met indices 1, D_1; enz., dan is:

$$\alpha = -\frac{D_0}{D_3}, \quad \beta = \frac{D_1}{D_3} \text{ en } \gamma = -\frac{D_2}{D_3}. \qquad (187)$$

Indien de grootte van α, β en γ niet op het eerste gezicht blijkt, kunnen deze waarden dus met de formules (186) of (187) worden bepaald.

§ 165. Voorbeeld. *Herleiding van een vergelijking type VII tot type I of IV, wanneer in VII:*

$$g_1 = a_1 f_1 + b_1 \quad en \quad g_2 = a_2 f_2 + b_2.$$

(zie § 156).

Alsdan is $$\frac{f_1 - f_2}{(a_1 f_1 + b_1) - (a_2 f_2 + b_2)} = \frac{f_2 - f_3}{a_2 f_2 + b_2 - g_3}$$

of volgens (*c*) geschreven:

$$f_1 f_2(a_1 - a_2) + f_1(-a_1 f_3 - b_2 + g_3) + f_2(a_2 f_3 + b_1 - g_3) + \\ + (-b_1 f_3 + b_2 f_3) = 0 \qquad (188)$$

, waarin dus:

$$\alpha(a_1 - a_2) + \beta(-a_1 f_3 - b_2 + g_3) + \gamma(a_2 f_3 + b_1 - g_3) + \\ + (-b_1 f_3 + b_2 f_3) = 0. \qquad (189)$$

Uit (189) volgen de drie betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} -a_1\beta + a_2\gamma - b_1 + b_2 &= 0 \\ \beta - \gamma &= 0 \\ (a_1 - a_2)\alpha - b_2\beta + b_1\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (190)$$

, waaruit wij oplossen:

$$\beta = \gamma = -\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \quad \text{en} \quad \alpha = \left(\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}\right)^2. \qquad (191)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dus is $\beta\gamma - \alpha = \lambda = 0$.

Na substitutie in (185), van de vormen voor F_3, G_3, H_3, β en γ uit (188) en (191), verkrijgen wij dus de vergelijking van type I of IV:

$$\frac{-1}{(a_1 - a_2)f_1 + (b_1 - b_2)} \cdot \frac{a_2 f_3 + b_2 - g_3}{a_1 f_3 + b_1 - g_3} + \frac{1}{(a_1 - a_2)f_2 + (b_1 - b_2)} = \\ = \frac{1}{a_1 f_3 + b_1 - g_3}. \qquad (192)$$

N.B. Zie voor een andere toepassing § 175.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 25.

3e orde.

§ 166. De algemeene functievergelijking van de 3de orde is:

$$Af_1f_2f_3+B_1f_2f_3+B_2f_3f_1+B_3f_1f_2+C_1f_1+C_2f_2+C_3f_3+D=0 \quad \text{(d)}$$

Betrekkingen van dezen vorm, welke niet op het eerste gezicht tot een der bijzondere functievergelijkingen II, III, V of VI herleid kunnen worden, komen vrij veelvuldig voor.

Wij zullen eenige, zeer verschillende, methoden behandelen om de scheiding der veranderlijken, in vergelijkingen van dezen vorm, te voltrekken.

§ 167. 1°. **Met behulp van formules, verkregen door toepassing van de Stelling van Menelaos.**

De scheiding van de veranderlijken heeft alsdan plaats volgens onderstaand, nader toe te lichten, schema: [1])

(*d*) kan herleid worden tot:	$B_1f_2f_3 + B_2f_3f_1 + B_3f_1f_2 + C_1f_1 + C_2f_2 + C_3f_3 + D = 0$ (193)
Is in (193) één van de coëff. B nul, dan (193) herleiden tot:	$f_2f_3 + f_3f_1 + C_1f_1 + C_2f_2 + C_3f_3 + D = 0$ (194)
Is in (194) $C_1 = C_2$, dan (194) herleiden tot:	$f_2f_3 + f_3f_1 + f_1 + f_2 + C_3f_3 + D = 0$ (195)
Zijn in (193) twéé coëff. B nul, dan (193) herleiden tot:	$B_2f_3f_1 + f_1 + f_2 + f_3 = 0$ (196)

[1]) Waar twee verschillende functies van eenzelfde veranderlijke niet in direct verband met elkander staan, wordt in den loop der beschouwingen, als ook in

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Kan de vergelijking, waarin wij de scheiding der veranderlijken tot stand willen brengen, niet dadelijk als (193) geschreven worden, dan moet zij tot dien vorm worden herleid:

a. Als in (*d*) een der coëfficienten nul is, moet men de gegeven vergelijking deelen door de in den betreffenden term niet voorkomende functies. Is b.v. $C_2 = 0$ dan moet gedeeld worden door $f_1 f_3$.

b. Is geen der coëfficienten van (*d*) nul, dan deelt men den eersten term door een van de drie volgende, b.v. door den derden term, men verkrijgt dan:

$$\frac{A f_2}{B_2}.$$

Voor de verdere toelichting bepalen wij ons tot dit voorbeeld. Wij stellen nu

$$\frac{A f_2}{B_2} = \frac{A F_2}{B_2} - 1 \qquad (197)$$

, waarin F_2 een nieuwe functie is, die uit (197) volgt. Deze betrekking kan ook geschreven worden:

$$f_2 = F_2 - \frac{B_2}{A}. \qquad (198)$$

Bij substitutie van dezen vorm voor f_2 in (*d*) valt de derde term weg. Men kan dan verder volgens **a** handelen.

§ 168. *Scheiding van de veranderlijken in:*

$B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0 \ldots .$ (193)

, waarin B_1, B_2 en $B_3 \neq 0$,

Wij passen de **stelling van Menelaos** (zie § 81) toe op figuur 88, waarbij de gestipstreepte afleeslijn als transversaal beschouwd wordt. Door de coëfficienten van de op deze wijze verkregen vergelijking, gelijk te stellen aan de met een factor λ vermenigvuldigde coëfficienten van (193), vinden wij de onderstaande vormen (200) en (201) voor λ en voor de 6 lengten **m** en **s**.

De tamelijk lange, maar eenvoudige berekeningen, welke hiertoe noodig zijn, laten wij buiten beschouwing.

---

dit schema, bij het overgaan van de eene op de andere functie, niet steeds een andere letter als symbool daarvoor gekozen. Zoo beteekenen in de functievergelijkingen (*d*) en (193) tot en met (196), f_1, f_2 of f_3 in het algemeen telkens andere functies van z_1, z_2 of z_3. Op overeenkomstige wijze geldt het voorgaande voor de coëfficienten B, C en D.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De scheiding der veranderlijken, in een vergelijking van den vorm (193), geschiedt nu als volgt:

Bereken de waarde:

$$Q = (B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3)^2 + 4B_2B_3\,(B_1D - C_2C_3) \qquad (199)$$

, daarna de **reëele** waarden λ uit:

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{\pm Q}}{2B_1B_2B_3} \qquad (200)$$

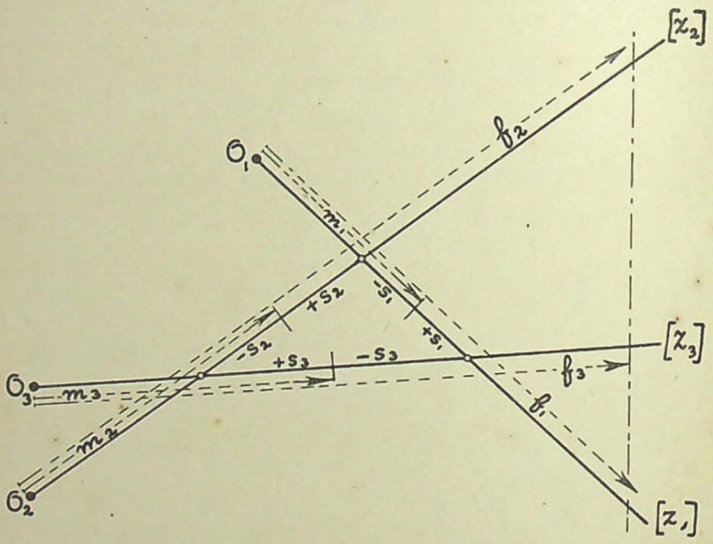


Fig. 88.

en vervolgens het stel waarden:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \lambda B_1 & m_1 &= \frac{B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3}{2B_2B_3} \\ s_2 &= \lambda B_2 & m_2 &= \frac{-B_1C_1 + B_2C_2 - B_3C_3}{2B_3B_1} \\ s_3 &= \lambda B_3 & m_3 &= \frac{-B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3}{2B_1B_2} \end{aligned}\right\} \qquad (201)$$

Vergelijking (193) kan nu, met behulp van deze waarden, vervormd worden tot een der vergelijkingen van de typen II, III, V of VI (zie tabel V). Daarbij zijn drie gevallen te onderscheiden, n.l. $Q > 0$; $Q = 0$ en $Q < 0$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Tabel V.

Scheiding van de veranderlijken in:

$$B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0$$

, waarin

$$B_1,\ B_2 \text{ en } B_3 \neq 0.$$

Wanneer:	is de gegeven vergelijking		met de functies:		
	te vervormen tot:	type:	$F_2 =$	$F_2 =$	F_3 of $G_3 =$
$Q>0$	$F_1G_3 + F_2 = 0$	II	$\frac{f_1-(m_1-s_1)}{f_1-(m_1+s_1)}$	$\frac{f_2-(m_2+s_2)}{f_2-(m_2-s_2)}$	$\frac{f_3-(m_3-s_3)}{f_3-(m_3+s_3)}$
"	$\frac{1}{F_1F_3}+\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}=\frac{1}{F_3}$	V	$\frac{f_1-(m_1+s_1)}{-2s_1}$	$\frac{f_2-(m_2-s_2)}{-2s_2}$	$\frac{f_3-(m_3+s_3)}{2s_3}$
"	"	V'	$\frac{f_1-(m_1-s_1)}{2s_1}$	$\frac{f_2-(m_2+s_2)}{2s_2}$	$\frac{f_3-(m_3-s_3)}{-2s_3}$
$Q=0$	$F_1 + F_2 = F_3$	III	$\frac{B_1}{f_1-m_1}$	$\frac{B_2}{f_2-m_2}$	$\frac{-B_3}{f_3-m_3}$
"	$\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}=\frac{1}{F_3}$	VI	$\frac{f_1-m_1}{B_1}$	$\frac{f_2-m_2}{B_2}$	$\frac{f_3-m_3}{-B_3}$
$Q<0$	$F_1 + F_2 = F_3$	III	$\text{bg.tg.}\frac{s_1}{f_1-m_1}$	$\text{bg.tg.}\frac{s_2}{f_2-m_2}$	$\text{bg.tg.}\frac{-s_3}{f_3-m_3}$
"	$\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}=\frac{1}{F_3}$	VI	$\frac{1}{\text{bg.tg.}\frac{s_1}{f_1-m_1}}$	$\frac{1}{\text{bg.tg.}\frac{s_2}{f_2-m_2}}$	$\frac{1}{\text{bg.tg.}\frac{-s_3}{f_3-m_3}}$

Opmerking. (V') wordt, zooals uit de tabel blijkt, behalve met (52), uit (V) verkregen door omkeering van het teeken van **s**, als gevolg ven de twee tegengestelde waarden van λ.

Voor het geval $Q < 0$, is voor het scheiden der veranderlijken gebruik gemaakt van de goniometrische betrekking

$$\text{tg}\,\gamma = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$

, waarin $\gamma = \alpha + \beta$. Hieruit volgt, dat

$$f_2f_3 + f_3f_1 + f_1f_2 = 1 \qquad (202)$$

te herleiden is tot:

$$\text{bg tg}\left(\frac{1}{f_1}\right) + \text{bg tg}\left(\frac{1}{f_2}\right) = \text{bg tg}\left(-\frac{1}{f_3}\right). \qquad (203)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 169. *Scheiding van de veranderlijken in*

$$f_2 f_3 + f_3 f_1 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0 \qquad (194)$$

, *waarin* $C_1 \neq C_2$.

Is in (193) één der coëfficienten **B** nul, dan wordt die vergelijking tot (194) herleid, door de overblijvende coëfficienten **B** in de twee niet-gemeenschappelijke functies van de bijbehoorende termen op te nemen, dus B_2 in f_1 en B_1 in f_2; de coëfficienten C_1 en C_2 worden daarna resp. door B_2 en B_1 gedeeld.

De herleiding van (194) is zeer eenvoudig, zij wordt rechtstreeks als type (II) geschreven in den vorm

$$\left(f_1 - \frac{C_2C_3 - D}{C_1 - C_2}\right) \cdot \frac{f_3 + C_1}{f_3 + C_2} + \left(f_2 + \frac{C_1C_3 - D}{C_1 - C_2}\right) = 0. \qquad (204)$$

§ 170. *Scheiding van de veranderlijken in*

$$f_2 f_3 + f_3 f_1 + f_1 + f_2 + C_3 f_3 + D = 0. \qquad (195)$$

Als in (194) $c_1 = c_2$, dan vermenigvuldigen wij alle termen met $\frac{1}{c_1}$ en nemen dezen factor in f_3 op, wij verkrijgen zoo (195). Deze vergelijking wordt tot type (III) herleid door haar te schrijven

$$f_1 + f_2 = -\frac{c_3 f_3 + D}{f_3 + 1}. \qquad (205)$$

§ 171. *Scheiding van de veranderlijken in*

$$B_2 f_3 f_1 + f_1 + f_2 + f_3 = 0 \qquad (196)$$

Zijn in (193) twee coëfficienten **B** nul, dan kunnen wij de gegeven vergelijking tot (196) herleiden door C_1 in f_1, C_3 in f_3 en C_2 en **D** in f_2 op te nemen.

De vergelijking (196) wordt als volgt geschreven als type (II):

$$(B_2 f_1 + 1)\,(B_2 f_3 + 1) + (B_2 f_2 - 1) = 0 \qquad (206)$$

Met behulp van tabel III (blz. 112), kunnen de vergelijkingen (204), (205) en (206), ook tot den vorm van de andere bijzondere functievergelijkingen van de 3de orde worden herleid.

§ 172. **1e Voorbeeld.** *Instellen zonder matglas* (zie § 82 en figuur **43**).

In het voorbeeld van § 82, voor een nomogram van type V, moesten de veranderlijken v_1, v_2 en **d** gescheiden worden in de vergelijking:

$$d = \frac{10\,(v_2 - v_1)\,f^2}{\{200 v_1 v_2 - f\,(v_1 + v_2)\}\,\delta}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Wij herleiden dezen vorm eerst tot

$$\frac{f}{\delta d} = \frac{200\,\frac{\nu_1}{f}\cdot\frac{\nu_2}{f} - \frac{\nu_1}{f} - \frac{\nu_2}{f}}{10\,\frac{\nu_2}{f} - 10\,\frac{\nu_1}{f}} \qquad (207)$$

Overgang tot functies: [1])

Stel:

$$\frac{\nu_1}{f} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; f_1$$

$$\frac{\nu_2}{f} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; f_2$$

en

$$\frac{f}{\delta d} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; f_3$$

, dan gaat (207) over in:

$$f_3 = \frac{200 f_1 f_2 - f_1 - f_2}{10 f_2 - 10 f_1}$$

of

$$10 f_2 f_3 - 10 f_3 f_1 - 200 f_1 f_2 + f_1 + f_2 = 0$$

van den vorm (193), met:

$$B_1 = 10 \qquad C_1 = 1$$
$$B_2 = -10 \qquad C_2 = 1 \qquad D = 0$$
$$B_3 = -200 \qquad C_3 = 0$$

Dus is volgens (199) en (200)

$$Q = 20^2 \quad \text{en} \quad \lambda = \pm 0{,}0005$$

en volgens (201)

$$s_1 = \pm 0{,}005 \qquad m_1 = 0{,}005$$
$$s_2 = \mp 0{,}005 \qquad m_2 = 0{,}005$$
$$s_3 = \mp 0{,}1 \qquad m_3 = 0$$

Voor tijpe V (en V.') wordt dus volgens tabel V

$$F_1 = \frac{f_1 - (0{,}005 \mp 0{,}005)}{\mp 0{,}01} \qquad F_2 = \frac{f_2 - (0{,}005 \pm 0{,}005)}{\pm 0{,}01}$$

$$F_3 = \frac{f_3 \pm 0{,}1}{\mp 0{,}2}$$

---

[1]) Het gebruik van dezelfde of bijna dezelfde letters voor uiteenloopende aanduidingen, zooals b.v. hier f voor den brandpuntsafstand en f_1 voor de functie van de 1e veranderlijke, komt in de Nomografie herhaaldelijk voor. Het is daarom aan te bevelen den overgang tot functies en den terugkeer tot de veranderlijken duidelijk aan te geven.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Wij nemen, om de functies zoo eenvoudig mogelijk te doen zijn, de onderste teekens, en dus:

$$F_1 = 100f_1 \qquad F_2 = -100f_2 \qquad F_3 = 5f_3 - 0{,}5$$

Terugkeer tot de veranderlijken:

$$F_1 \ldots\ldots \frac{100v_1}{f}$$

$$F_2 \ldots\ldots \frac{-100v_2}{f}$$

$$F_3 \ldots\ldots \frac{5f}{\delta d} - 0{,}5$$

, zoodat dus de oorsponkelijke vergelijking als type (V) wordt geschreven in den vorm:

$$\frac{1}{\frac{100v_1}{f}\cdot\left(\frac{5f}{\delta d} - 0{,}5\right)} + \frac{1}{\frac{100v_1}{f}} + \frac{1}{\frac{-100v_2}{f}} = \frac{1}{\frac{5f}{\delta d} - 0{,}5} \qquad (208)$$

§ 173. 2de Voorbeeld. *Herleiding van*

$$f_1f_2 - (f_1 + f_2)f_3 + (Af_3 + B) = 0 \qquad (116)$$

tot de typen II, III, V of VI (zie blz. 189).

(116) wordt weer als (193) geschreven als:

$$-f_2f_3 - f_3f_1 + f_1f_2 + Af_3 + B = 0 \qquad (209)$$

, waarin dus:

$$B_1 = -1 \qquad C_1 = 0$$
$$B_2 = -1 \qquad C_2 = 0 \qquad D = B.$$
$$B_3 = 1 \qquad C_3 = A$$

Dus is volgens (199) en (200)

$$Q = A^2 + 4B \quad \text{en} \quad \lambda = \pm\,{}^1/_2\sqrt{\pm(A^2 + 4B)} \text{ (reëel)}$$

en volgens (201)

$$s_1 = -\lambda \qquad m_1 = {}^1/_2A$$
$$s_2 = -\lambda \qquad m_2 = {}^1/_2A$$
$$s_3 = \lambda \qquad m_3 = {}^1/_2A$$

Nu kan:

$A^2 + 4B \gtrless 0$, $A^2 + 4B = 0$ of $A^2 + 4B < 0$ zijn.

1°. $A^2 + 4B > 0$.

Stel (zie 117) $\quad {}^1/_2A + \sqrt{{}^1/_4A^2 + B} = R'$

en $\quad {}^1/_2A - \sqrt{{}^1/_4A^2 + B} = R''$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

, dan is:

$$m_1 + s_1 = R'' \qquad m_1 - s_1 = R'$$
$$m_2 + s_2 = R'' \qquad m_2 - s_2 = R'$$
$$m_3 + s_3 = R' \qquad m_3 - s_3 = R''$$

en wordt dus (116) als type (II) geschreven:

$$\frac{f_1 - R'}{f_1 - R''} \cdot \frac{f_3 - R''}{f_3 - R'} - \frac{f_2 - R''}{f_2 - R'} = 0. \tag{210}$$

Daar echter λ ook de tegengestelde waarden mag hebben, is eveneens de schrijfwijze mogelijk:

$$\frac{f_1 - R''}{f_1 - R'} \cdot \frac{f_3 - R'}{f_3 - R''} - \frac{f_2 - R'}{f_2 - R''} = 0 \tag{211}$$

2°. $A^2 + 4B = 0$.

Volgens tabel V, is (116) alsdan te schrijven in den vorm van type (III) of (VI):

$$\frac{1}{2f_1 - A} + \frac{1}{2f_2 - A} = \frac{1}{2f_3 - A}. \tag{212}$$

3°. $A^2 + 4B < 0$.

Eveneens volgens tabel V, kan (116) in dit geval herleid worden tot type (III):

$$\text{bg tg}\frac{\sqrt{A^2 + 4B}}{2f_1 - A} + \text{bg tg}\frac{\sqrt{A^2 + 4B}}{2f_2 - A} = \text{bg tg}\frac{\sqrt{A^2 + 4B}}{2f_3 - A} \tag{213}$$

§ 174. 3e Voorbeeld. Een in techniek en wetenschap veel voorkomende formulevorm is

$$f_3 = \frac{af_1 + bf_2}{cf_1 + df_2} \tag{214}$$

Wij laten het aan den lezer over, met behulp van de formules (193), (194) en (204), de scheiding der veranderlijken uit te voeren en (214) te herleiden tot type (II):

$$f_1 \cdot \frac{a - cf_3}{b - df_3} + f_2 = 0 \tag{215}$$

Is $f_3 = z_3$, dan wordt $[z_3]$ regelmatig, wanneer μ_1 en μ_2 zóó gekozen worden, dat

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = m = -\frac{c}{d} \tag{216}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 175. 2°. **Scheiding van de veranderlijken met behulp van de algemeene functievergelijking (c.)**

Met gebruikmaking van andere letters voor de coëfficienten, schrijven wij (*d*):

$$m_0 f_1 f_2 f_3 + n_0 f_1 f_2 + m_1 f_1 f_3 + m_2 f_2 f_3 + n_1 f_1 + n_2 f_2 + m_3 f_3 + n_3 = 0 \tag{217}$$

of, in den vorm van (*c*):

$$f_1 f_2 (m_0 f_3 + n_0) + f_1 (m_1 f_3 + n_1) + f_2 (m_2 f_3 + n_2) + (m_3 f_3 + n_3) = 0. \tag{218}$$

Stellen wij nu in (177) $\alpha = 0$, dan vinden wij voor β en γ

$$\beta = \frac{m_2 n_3 - m_3 n_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1} \qquad \lambda = \frac{m_3 n_1 - m_1 n_3}{m_1 n_2 - m_2 n_1}.$$

Is β of γ nul, dan is $\lambda = 0$ en kan (218) herleid worden tot den vorm van type (I) of (IV), waarin alsdan een lineaire betrekking zal bestaan tusschen de twee functies van z_3. Voor de verdere herleiding tot een der bijzondere functievergelijkingen van de 3de orde gebruiken wij dan de hierna volgende formules (219) of (220).

Zijn β en γ beiden ongelijk aan nul, dan is ook $\lambda \neq 0$ en kan (218) herleid worden tot (116), en verder met behulp van het in § 173 behandelde tot een der functievergelijkingen II, III, V of VI.

§ 176. Wanneer in een vergelijking van den vorm (I)

$$f_1 g_3 + f_2 = f_3$$

tusschen f_3 en g_3 een lineaire betrekking

$$g_3 = a f_3 + b$$

bestaat, dan kan die vergelijking herleid worden tot type (II)

$$F_1 G_3 + F_2 = 0$$

met:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= a f_1 - 1 \qquad & F_2 &= \frac{a}{b} f_2 + 1 \\ \text{en} \quad G_3 &= \frac{a}{b} f_3 + 1 = \frac{g_3}{b} \end{aligned}\right\} \tag{219}$$

, of tot type V (en V')

$$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

met: $F_1 = \frac{1}{af_1}$, $F_2 = \frac{b}{af_2}$, $F_3 = \frac{b}{af_3}$.

of met: $F_1 = \frac{af_1 - 1}{af_1}$, $F_2 = \frac{af_2 + b}{-af_2}$, $F_3 = \frac{af_3 + b}{-af_3}$. (220)

§ 177. **Voorbeeld**. *Instellen zonder matglas* (zie §§ 82 en 172 en figuur 43).

De functievergelijking was hierbij

$$10f_2f_3 - 10f_3f_1 - 200f_1f_2 + f_1 + f_2 = 0 \qquad (221)$$

, of geschreven als (218):

$$f_1f_2(-200) + f_1(-10f_3 + 1) + f_2(10f_3 + 1) = 0$$

, bijgevolg zijn β, γ en dus ook $\lambda = 0$.

(221) gaat nu over in de vergelijking type (I):

$$\frac{1}{f_1} \cdot \frac{10f_3 + 1}{-10f_3 + 1} + \frac{1}{f_2} = \frac{200}{-10f_3 + 1}. \qquad (222)$$

Stel $\frac{10f_3 + 1}{-10f_3 + 1} = \Psi_3$ en $\frac{200}{-10f_3 + 1} = \Phi_3$, dan is daartusschen een lineair verband

$$\Psi_3 = a\Phi_3 + b$$

met $a = 0{,}01$ en $b = -1$.

Dus verkrijgt (222), bij overgang tot type (V), waarvoor wij gebruik maken van de formules (220), den vorm:

$$\frac{1}{100f_1} \cdot \frac{1}{5f_3 - 0{,}5} + \frac{1}{100f_1} + \frac{-1}{100f_2} = \frac{1}{5f_3 - 0{,}5}.$$

§ 178. 3°. Scheiding van de veranderlijken door differentieeren ten opzichte van f_1, f_2 en f_3.

Deze, door *Soreau* ook voor de 4_0^e **orde** uitgewerkte methode, berust hierop, dat wanneer in de vergelijking (*d*), verkort aangeduid met $E_{123} = 0$, en in de volgens type (III) geschreven vergelijking $F_1 + F_2 + F_3 = 0$

, aan f_1 en f_2 aangroeiïngen df_1 en df_2 worden toebedeeld, de daaruit voortvloeiende aangroeiïng df_3 van f_3 moet volgen, zoowel uit $E_1'df_1 + E_2'df_2 + E_3'df_3 = 0$,

als uit $F_1'df_1 + F_2'df_2 + F_3'df_3 = 0$

, waarin E_n' en F_n' de afgeleide functies voorstellen van E_{123} en van F_n ten opzichte van f_n.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Uit deze twee vergelijkingen volgt nu:

$$\frac{E_1'}{F_1'} = \frac{E_2'}{F_2'} = \frac{E_3'}{F_3'},$$

of ook

$$\frac{F_1'}{F_3'} = \frac{E_1'}{E_3'} \quad \text{en} \quad \frac{F_2'}{F_3'} = \frac{E_2'}{E_3'} \tag{223}$$

Voor (d) is dus:

$$\frac{F_1'}{F_3'} = \frac{Af_2f_3 + B_2f_3 + B_3f_2 + C_1}{Af_1f_2 + B_1f_2 + B_2f_1 + C_3} \tag{224}$$

en

$$\frac{F_2'}{F_3'} = \frac{Af_1f_3 + B_1f_3 + B_3f_1 + C_2}{Af_1f_2 + B_1f_2 + B_2f_1 + C_3} \tag{225}$$

Substitueeren wij nu in (224) voor $\mathbf{f_2}$ den voor deze functie uit (d) af te leiden vorm in f_1 en f_3, en in (225) voor $\mathbf{f_1}$ den daarvoor uit (d) af te leiden vorm in f_2 en f_3, dan verkrijgen die vergelijkingen de gedaante:

$$\frac{F_1'}{F_3'} = \frac{a_3f_3^2 + b_3f_3 + c_3}{a_1f_1^2 + b_1f_1 + c_1} \tag{226}$$

en

$$\frac{F_2'}{F_3'} = \frac{a_3f_3^2 + b_3f_3 + c_3}{a_2f_2^2 + b_2f_2 + c_2} \tag{227}$$

Hieruit volgt, dat de drie afgeleide functies $\mathbf{F_1'}$, $\mathbf{F_2'}$ en $\mathbf{F_3'}$ zich verhouden, als de omgekeerden van de drie vierkantsvormen in $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ en $\mathbf{f_3}$. Daar in type III in de drie functies eenzelfde factor zou mogen worden opgenomen, mogen wij $\mathbf{F_1'}$, $\mathbf{F_2'}$ en $\mathbf{F_3'}$ ook *gelijkstellen* aan de genoemde vierkantsvormen en is dus:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \int (a_1f_1^2 + b_1f_1 + c_1)^{-1}\, \mathbf{d}f_1 \\ F_2 &= \int (a_2f_2^2 + b_2f_2 + c_2)^{-1}\, \mathbf{d}f_2 \\ \text{en} \quad F_3 &= \int (a_3f_3^2 + b_3f_3 + c_3)^{-1}\, \mathbf{d}f_3 \end{aligned}\right\} \tag{228}$$

Om de uitkomsten van deze integralen te kunnen aangeven, stellen wij:

$$\sqrt{\pm (b^2 - 4ac)} = \lambda \tag{229}$$

, waarin λ alleen reëel mag zijn, en welke waarde, zooals bij volledige uitwerking der substitutie in (224) en (225) zou zijn gebleken, dezelfde is voor alle drie de functies $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ en $\mathbf{F_3}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De oplossing van de integraal is nu:
1°. wanneer $a \neq 0$, is

$$\int (af^2 + bf + c)^{-1} \mathbf{d}f$$

als:	gelijk aan:
$b^2 - 4ac > 0$	$\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda - (2af + b)}{\lambda + (2af + b)} + \text{Const.}$
$b^2 - 4ac = 0$	$\frac{-2}{2af + b} + \text{Const.}$
$b^2 - 4ac < 0$	$\frac{2}{\lambda} \text{bg tg} \frac{2af + b}{\lambda} + \text{Const.}$

(230)

2°. wanneer $a = 0$, is

$$\int (bf + c)^{-1} df = \frac{1}{b} \ln (bf + c) + \text{Const.} \qquad (231)$$

Bij de scheiding verkrijgen wij dus de som van drie logarithmische, drie algebraïsche of drie cyclometrische functies, plus een constante. Deze laatste kan uit een willekeurige oplossing van de gegeven vergelijking worden bepaald.

§ 179. Voorbeeld. *Instellen zonder matglas* (zie §§ 82, 172 en 177 en figuur **43**).

De scheiding moet uitgevoerd worden in de functievergelijking (221):

$$E_{123} = 10f_2f_3 - 10f_3f_1 - 200f_1f_2 + f_1 + f_2 = 0.$$

Hiervoor is:

$$\begin{aligned} E_1'\mathbf{d}f_1 &= -10f_3 - 200f_2 + 1 \\ E_2'\mathbf{d}f_2 &= 10f_3 - 200f_1 + 1 \\ E_3'\mathbf{d}f_3 &= 10f_2 - 10f_1 \end{aligned}$$

en dus:

$$\frac{F_1'}{F_3'} = \frac{-10f_3 - 200f_2 + 1}{10f_2 - 10f_1} \qquad (232)$$

en

$$\frac{F_2'}{F_3'} = \frac{10f_3 - 200f_1 + 1}{10f_2 - 10f_1} \qquad (233)$$

Uit (221) volgt verder:

$$f_2 = \frac{10f_3f_1 - f_1}{10f_3 - 200f_1 + 1} \qquad (234)$$

en

$$f_1 = \frac{10f_2f_3 + f_2}{10f_3 + 200f_2 - 1} \qquad (235)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

(234) in (232) en (235) in (233) gesubstitueerd, geeft:

$$\frac{F_1'}{F_3'} = \frac{100f_3^2 - 1}{-2000f_1^2 + 20f_1} \quad \text{en} \quad \frac{F_2'}{F_3'} = \frac{100f_3^2 - 1}{2000f_2^2 - 20f_2}$$

Daaruit volgt voor de coëfficienten **a**, **b** en **c** van de integraalvormen (228):

	a	b	c
voor F_1	-2000	20	0
„ F_2	2000	-20	0
„ F_3	100	0	-1

Bijgevolg is voor alle drie functies

$$b^2 - 4ac = 400 \quad \text{en dus} \quad \lambda = 20.$$

En dus is:

$$F_1 = \frac{1}{20} \ln \frac{100f_1}{1 - 100f_1} + \text{Const.}$$

$$F_2 = \frac{1}{20} \ln \frac{1 - 100f_2}{100f_2} + \text{Const.}$$

$$F_3 = \frac{1}{20} \ln \frac{1 - 10f_3}{1 + 10f_3} + \text{Const.}$$

Dus is:

$$\ln \frac{100f_1}{1 - 100f_1} + \ln \frac{1 - 100f_2}{100f_2} + \ln \frac{1 - 10f_3}{1 + 10f_3} + \text{Const.} = 0. \quad (236)$$

Uit (221) volgt nog, dat voor f_1 en $f_2 = \infty$ ook $f_3 = \infty$. Dus is de constante in (236) gelijk aan nul en wordt de betrekking (221) als type (II) geschreven:

$$\frac{100f_1}{100f_1 - 1} \cdot \frac{10f_3 - 1}{10f_3 + 1} + \frac{100f_2}{100f_2 - 1} = 0 \quad (237)$$

, welke vergelijking met behulp van tabel III tot type (V) wordt vervormd als:

$$\frac{1}{100f_1} \cdot \frac{1}{5f_3 - 0{,}5} + \frac{1}{100f_1} + \frac{-1}{100f_2} = \frac{1}{5f_3 - 0{,}5}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

DEEL V.

AANVULLENDE HOOFDSTUKKEN.

HOOFDSTUK 26.

Voorstelling van grensbetrekkingen door stop-, toegangs- en waarschuwingslijnen.

§ 180. **Grensbetrekking.** Bij de voorstelling van een betrekking door een nomogram wordt de toepassing van die betrekking steeds begrensd door het bereik dat men voor de veranderlijken heeft gekozen. Het komt dikwijls voor dat er daarenboven nog een of meer *grensbetrekkingen* zijn. Hieronder verstaan wij betrekkingen tusschen twee van de drie veranderlijken, meestal voorgesteld door een vergelijking, waarvan het tweede lid een getal is. Alsdan geldt de door het nomogram voorgestelde betrekking slechts voor die waardestellen, waarvoor het eerste lid van de grensbetrekking hetzij grooter, hetzij kleiner dan dat getal is.

Als voorbeeld nemen wij de knikformules van *Euler* en *Tetmajer* voor ronde vurenhouten stutten (zie figuur **90**). De grensbetrekking is hier

$$\frac{d}{l} = 4$$

, waarbij **d** de dikte van den paal in cm. en **l** de lengte daarvan in m. is. De formule van *Euler* geldt dan voor $\frac{d}{l} < 4$, die van *Tetmajer* voor $\frac{d}{l} \geqslant 4$.

Buitendien is er nog een grensbetrekking

$$\frac{P}{d^2} > 47$$

, waarin P de toe te laten belasting is in kg. Deze grensbetrekking, voortvloeiende uit den eisch, dat de toe te laten druk per cm^2. paaldoorsnede niet mag worden overschreden, behoeft echter in figuur **90** niet te worden voorgesteld, daar het bereik der

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

veranderlijken — en de eerstgenoemde grensbetrekking — de toepassing van het nomogram reeds enger beperken.

§ 181. **Stoplijn en toegangslijn.** In Hoofdstuk 4 zagen wij, dat een betrekking tusschen twee veranderlijken op een schalenstel wordt weergegeven door een raakkromme of door een enkel punt.

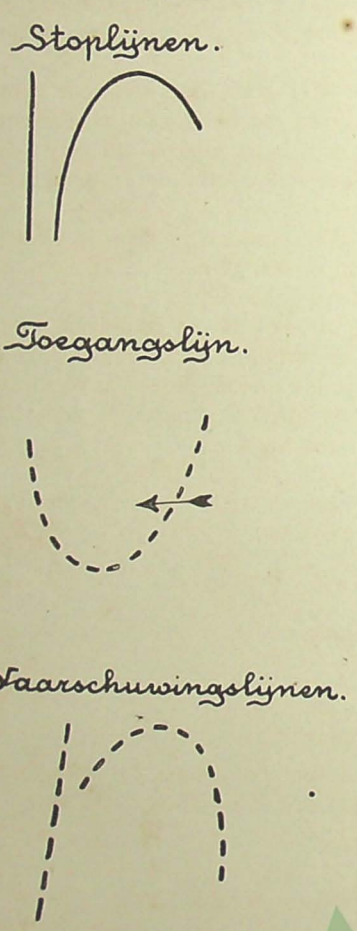


Fig. 89.

Beschouwen wij laatstgenoemd geval het eerst.

Wanneer de grensbetrekking wordt weergegeven door een enkel punt, dan verbinden wij dit met een punt buiten het afleesgebied door een rechte of gebroken zoogenaamde *stoplijn*. (Fransch: arrêt). De toepassing van het nomogram wordt dan in zooverre begrensd, dat *de afleeslijn deze stoplijn niet mag snijden*.

Naar welke zijde de stoplijn getrokken moet worden, volgt onmiddellijk uit een beschouwing van het nomogram in verband met het teeken $<$ of $>$ in de grensbetrekking.

De stoplijn wordt in het nomogram geteekend als een zeer dikke lijn (figuur **89**).

Wordt de grensbetrekking door een raakkromme weergegeven, dan zal het voor de afleeslijnen toegankelijke gebied aan de *bolle* of aan de *holle* zijde van die raakkromme kunnen liggen. Zooveel mogelijk moet getracht worden de eerstgenoemde ligging te verkrijgen. De raakkromme wordt dan zoo noodig tot buiten het nomogram verlengd en dik ge-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

trokken. Ze is dan weer een stoplijn, die door de afleeslijn niet mag worden gesneden (figuur **89**).

Ligt het toegankelijke gebied aan de *holle* zijde, dan wordt de, — c.q. verlengde —, raakkromme geteekend als een dikke streepjeslijn, gekruist door een pijltje (figuur **89**). Wij noemen haar dan *toegangslijn*, omdat *de afleeslijn deze toegangslijn steeds zal moeten snijden.* Een toegangslijn is dus altijd een gebogen lijn.

§ 182. **Waarschuwingslijn.** Het komt ook wel eens voor, dat men over een zeker bereik van het nomogram, afgebakend door bekende schaalwaarden of grensbetrekkingen, wil verwijzen naar aanvullende betrekkingen, veelal eveneens door nomogrammen voorgesteld

Op ongeveer dezelfde wijze als voor de stoplijnen is uiteengezet, worden dan *waarschuwingslijnen* geteekend. Zij worden als dikke streepjeslijnen getrokken (figuur **89**).

Bij de waarschuwingslijnen is meestal, bij de stoplijnen soms, een Romeinsch cijfer geplaatst, als verwijzing naar een als nomogram of op andere wijze voorgestelde vervangende of aanvullende befrekking, welke toegepast moet worden wanneer de afleeslijn de stoplijn of waarschuwingslijn zou snijden.

§ 183. **1e Voorbeeld.** *Berekening van ronde vurenhouten stutten* (figuur **90**).

I. Voor $\frac{d}{l} < 4$ is volgens *Euler:* $P = \frac{d^4}{2l^2}$;

II. Voor $\frac{d}{l} \geqslant 4$ is volgens *Tetmajer:* $P = 24\,(d^2 - 2{,}648\,ld)$,

waarin: **d** = de dikte in cm.
l = de lengte in m.
P = de toe te laten belasting in kg.

De constructie van I had, in de oorspronkelijke teekening van figuur **90**, plaats met de volgende drie evenwijdige schalen:

$[d] \ldots\ldots x = 20 \log d$
$[l] \ldots\ldots y = -20 \log l$
$[P] \ldots\ldots q = {}^{10}/_{3}\,(\log P + \log 2)$.

De constructie van II geschiedde met twee evenwijdige regelmatige schalen:

$[P] \ldots\ldots x = 0{,}5\,P$
$[l] \ldots\ldots y = -2{,}5$,

terwijl de kromme schaal $[d]$ grootendeels geconstrueerd kon worden met de betrekkingen:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Berekening van ronde vurenhouten stutten,

met ongev. 10 voud. zekerheid,

I. voor $\frac{d}{l} < 4$ volgens Euler: $P = \frac{d^4}{2l^2}$

II. voor $\frac{d}{l} \geqslant 4$ volgens Tetmajer: $P = 24(d^2 - 2{,}648\,ld)$.

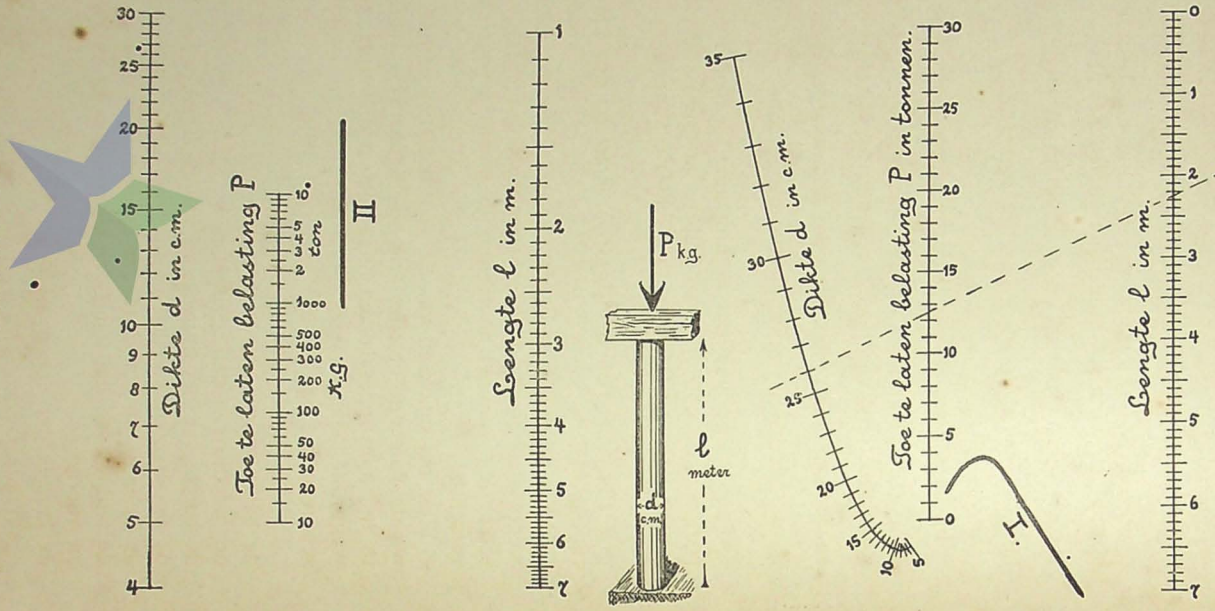


Fig. 90.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

voor $l = 0$ is $P = 24\,d^2$
„ $P = 0$ is $d = 2{,}648\,l$.

De grensbetrekking $\frac{d}{l} = 4$ wordt in nomogram I voorgesteld door het onderste punt van de stoplijn. Deze is vandaar naar boven getrokken tot buiten het gebied der afleeslijnen. Voor alle waardestellen waarbij $\frac{d}{l} > 4$ is, houdt de stoplijn dus de afleeslijnen tegen en verwijst naar nomogram II.

In nomogram II wordt de grensbetrekking $\frac{d}{l} = 4$ voorgesteld door een raakkromme op het schalenstel $[d, l]$. Deze raakkromme wordt met een recht stuk verlengd tot beneden de schaaleinden en is dan de stoplijn, die voor alle waardestellen waarbij $\frac{d}{l} < 4$ is, de afleeslijnen opvangt en verwijst naar nomogram I.

Toepassing van het nomogram. Voor een ronde vurenhouten paal van 26 cm. dikte en 2,25 m. lengte, is de toe te laten belasting volgens *Tetmajer* 12,5 ton (zie stippellijn).

§ 184. **2e Voorbeeld.** *Grondverzet bij den aanleg van wegen.* (figuur 91).

Dit voorbeeld is gekozen in navolging van *d'Ocagne*. Voor het wegprofiel zijn echter andere afmetingen aangenomen, terwijl ook de uitvoering van het nomogram in meerdere opzichten belangrijk verschilt.

Voor het opmaken van de voor te stellen betrekkingen, bezigen wij de volgende notaties (zie ook figuur 91), waarbij alle lengten in m., alle oppervlakken in m² gemeten worden en de voor het wegprofiel aangenomen waarden tusschen haakjes zijn bijgeschreven (zie figuur 92).

de halve wegbreedte = **b** . . . . . (6 m)
de breedte van den greppel = **s** . . . . . (2 m)
de lengte van het buitentalud van den greppel = **l** . (0,85 m)
de oppervlakte van het profiel van den greppel = δ (0,75 m²)
de helling van het talud der ophooging = $\mathrm{tg}\,\varphi$ . . ($^2/_3$)
de helling van het talud der afgraving = $\mathrm{tg}\,\varphi'$ . . (1)
en voorts:
de insteek der ophooging = ε.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Grondwerket bij den aanleg van wegen. enz.

Fig. 91.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

de insteek der afgraving $= \varepsilon'$.
de insteek van het driehoekig deel van het profiel $= \mathbf{a}$,
de lengte van het talud der ophooging $= \mathbf{L}$.
de lengte van het talud der afgraving $= \mathbf{L'}$.
het terreinpeil ten opzichte van den wegbovenkant $= \mathbf{z}$.
de terreinhelling $= \mathbf{tg}\ \Phi$.
(steigend—positief, dalend—negatief).
het profieloppervlak van de ophooging $= \mathbf{O}$.
het profieloppervlak van de afgraving $= \mathbf{A}$.
het driehoekig deel van het profiel $= \mathbf{C}$.

Voor de waarden **O**, **A** en **C** geldt, dat alle profielen van afgraving, — dus van uitkomenden grond —, positief; daarentegen alle profielen van ophooging, — dus van bij te storten grond —, negatief in rekening gebracht worden.

Bij een ligging van het terreinoppervlak ten opzichte van den wegbovenkant, waarbij zoowel afgraving als ophooging voorkomen, is dus **O** of **A** de algebraïsche som van die gedeeltelijke profielen.

Al naar gelang wij het wegprofiel in ophooging (zónder greppel) of in ingraving (mét greppel), dan wel alleen het driehoekig profielgedeelte beschouwen (figuur **92**), kunnen wij de volgende betrekkingen afleiden:

I. Weg in ophooging (figuur **92a**).
In $\triangle$ ABC is:

$$(-z + b\ \mathrm{tg}\ \varphi)\ .\ \varepsilon = -2O + b^2\ \mathrm{tg}\ \varphi$$
$$-z + b\ \mathrm{tg}\ \varphi = \varepsilon\ (\mathrm{tg}\ \Phi + \mathrm{tg}\ \varphi)$$
$$\varepsilon = b + \mathrm{L}\cos\varphi$$

, of met de waarden, aangenomen voor het gekozen wegprofiel:

$$(-z + 4)\ .\ \varepsilon = -2O + 24$$
$$-z + 4 = \varepsilon\ (\mathrm{tg}\ \Phi + {}^2/_3)$$
$$\varepsilon = 6 + 0{,}832\ \mathrm{L}.$$

II. Weg in ingraving (figuur **92b**).
In $\triangle$ ABC is:

$$\{z + (b + s)\ \mathrm{tg}\ \varphi'\}\ .\ \varepsilon' = 2A + (b + s)^2\ \mathrm{tg}\ \varphi' - 2\delta$$
$$z + (b + s)\ \mathrm{tg}\ \varphi' = \varepsilon'\ (\mathrm{tg}\ \varphi' - \mathrm{tg}\ \Phi)$$
$$\varepsilon' = (\mathrm{L'} - l)\cos\varphi' + b + s\ .$$

, of, voor het gekozen wegprofiel:

$$(z + 8)\ .\ \varepsilon' = 2A + 62{,}5$$
$$z + 8 = \varepsilon'\ (1 - \mathrm{tg}\ \Phi)$$
$$\varepsilon' = 0{,}707\ \mathrm{L'} + 7{,}4.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

III. Driehoekig deel van het profiel (bij gedeeltelijke ophooging en afgraving) (figuur **92c**).

$$a = -z \text{ cotg } \Phi$$
$$2C = -z^2 \text{ cotg } \Phi$$

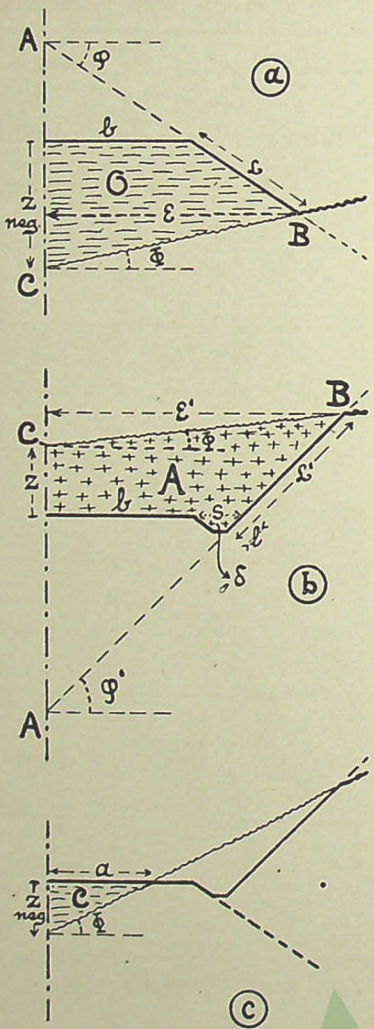


Fig. 92.

Voor de drie nomogrammen werden, in de oorspronkelijke teekening voor figuur **91**, de volgende schalen gebezigd:

Voor **I**:

$x = 25 \log (-z + 4)$
$y = 12{,}5 \log \varepsilon$
$q = 18^1/_3 \log (-2O + 24)$
$q' = -25 \log (\text{tg } \Phi + {}^2/_3)$
$y = 12{,}5 \log (6 + 0{,}832\ L)$

Voor **II**:

$x = 40 \log (z + 8)$
$y = 20 \log \varepsilon'$
$q = 13^1/_3 \log (2A + 62{,}5)$
$q' = -40 \log (1 - \text{tg } \Phi)$
$y = 20 \log (0{,}707\ L' + 7{,}4)$

Voor **III**:

$x = 10 \log z$
$y = -7{,}5 \log \text{tg } \Phi$
$q = 3 \log 2C$
$q' = {}^{30}/_7 \log a$

De gestippelde afleeslijnen in de nomogrammen I en II leveren de volgende waardestellen, behoorende bij de in het nomogram geteekende toelichtende figuren:

Ophooging: $z = -3{,}3$ m.; tg $\Phi = 0{,}07$ en dus $\varepsilon = 9{,}9$ m.; $L = 4{,}7$ m.; Profiel $= -24{,}2$ m^2.

Afgraving: $z = 2{,}7$ m.; tg $\Phi = -0{,}09$ en dus $\varepsilon' = 9{,}8$ m.; $L' = 3{,}4$ m.; Profiel $= 21{,}2$ m^2.

In figuur **93** zijn de zes gevallen, welke zich kunnen voordoen, met daarachter de aanwijzingen voor de toepassing der drie nomogrammen, aangegeven.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Hieruit is de ligging van de benoodigde stop- en waarschuwingslijnen af te leiden. Wij zullen deze lijnen bespreken in de volgorde waarin zij in figuur 91 van links naar rechts voorkomen.

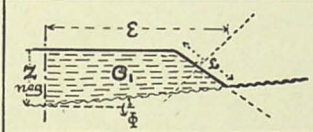
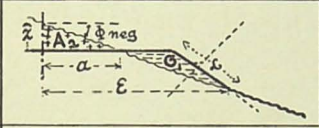
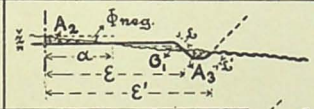
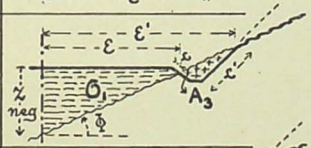
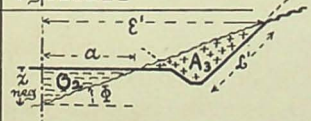
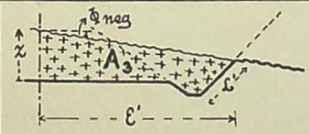
Te bepalen oppervlakken; in geval:				
		met		
№	Profiel:	Nom. I $\sigma =$	Nom. III $c =$	Nom. II. $A =$
1		σ_1	–	–
2		$A_2+\sigma_1$	A_2	–
3		$A_2+\sigma_1$	A_2	$A_2+\sigma_1+A_3$
4		σ_1	–	σ_1+A_3
5		–	σ_2	σ_2+A_3
6		–	–	A_3
ε en λ zijn steeds te bepalen met Nom. I, ε' en λ' met Nom. II en a met Nom. III.				

Fig. 93.

a. Wanneer het terreinoppervlak den wegbovenkant snijdt, is er een driehoekig deel van het profiel en moet daarvoor nomogram III gebruikt worden.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dit is bij de toepassing van nomogram I het geval, wanneer z positief en $\varepsilon > 6$ is (geval n⁰. 2). De naar nomogram III verwijzende waarschuwingslijn is dus de verbindingslijn van $z = 0$ en $\varepsilon = 6$.

b. Het talud der ophooging kan door het terreinoppervlak niet binnen 6 m. afstand van de wegas gesneden worden. Wél het verlengde van dat talud (gevallen nrs. 5 en 6), maar dan hebben wij te maken met het profiel van den weg in afgraving en moet dus nomogram II gebruikt worden. Vandaar de stoplijn in nomogram I, opwaarts getrokken van het punt $\varepsilon = 6$ en verwijzend naar nomogram II.

c. Als grens tusschen de gevallen nrs. 1 en 4 nemen wij die ligging van het terreinoppervlak aan, waarbij dit door den voet van het binnentalud van den greppel gaat. Alsdan is voor het gekozen wegprofiel $\varepsilon = 6{,}9$ m. Voor $\varepsilon < 6{,}9$ moet dus, behalve nomogram I ook nomogram II toegepast worden. De waarschuwingslijn in nomogram I geeft dit aan.

d. Een driehoekig deel van het profiel is slechts aanwezig , wanneer $a = -z \operatorname{cotg} \Phi < 6$ is (gevallen nrs. 2, 3 en 5), want deze insteek **a** van het driehoekig gedeelte kan niet grooter zijn dan de halve wegbreedte, dat is hier 6 m. De naar nomogram I of II verwijzende stoplijn, is dus van het punt $a = 6$ in bovenwaartsche richting getrokken.

e. Het talud der afgraving ligt met zijn voet op 7,4 m. afstand van de wegas. Het terreinoppervlak snijdt dit talud dus steeds met een insteek $\varepsilon' > 7{,}4$.

Wel kan het verlengde van dat talud, op kleineren afstand dan 7,4 m. uit de wegas, door het terreinoppervlak gesneden worden (gevallen nrs. 1 en 2), maar dan ligt de weg in ophooging. De stoplijn in nomogram II van het punt $\varepsilon' = 7{,}4$ benedenwaarts getrokken, verwijst dus naar nomogram I.

f. Wanneer $-z$ cotg. $\Phi > 6$ en $\varepsilon' > 7{,}4$ is (geval n⁰. 4), moet, behalve nomogram II, ook nomogram I geraadpleegd worden. De grensbetrekking $-z \operatorname{cotg} \Phi = 6$ wordt in nomogram II door een, als een punt te beschouwen, stukje raakkromme (ter plaatse van de snijding der naar I en III verwijzende waarschuwingslijnen) voorgesteld. De naar nomogram I verwijzende waarschuwingslijn is dus de verbindingslijn van het punt $\varepsilon' = 7{,}4$ met het vorengenoemde punt (eigenlijk de raaklijn uit het punt $\varepsilon' = 7{,}4$ aan de raakkromme).

g. Bij de toepassing van nomogram II, is er een driehoekig deel van het profiel, wanneer z negatief en $-z \operatorname{cotg} \Phi < 6$ is (geval n⁰. 5).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Ook is dit het geval, wanneer z positief en $\varepsilon' >$ ongeveer 7,4 en < 8 is (geval n^0. 3).

Voor beide gevallen doet de waarschuwingslijn dienst, welke het punt $z = 0$ verbindt met het als punt te beschouwen stukje raakkromme voor de grensbetrekking $— z \operatorname{cotg} \Phi = 6$.

Bij alle waardestellen van **z** en **tg Φ**, welke binnen het bereik dezer veranderlijken kunnen voorkomen, wijzen dus de stop- en waarschuwingslijnen op duidelijke wijze den weg aan, welke bij het gebruik der nomogrammen moet worden gevolgd.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 27.

Nomogrammen met gebroken schalen.

§ 185. In het voorgaande hoofdstuk zagen wij, dat een *grensbetrekking* dikwijls het totale bereik van een verband tusschen eenige veranderlijken in twee betrekkingen splitst, welke elk op zichzelf door een vergelijking kunnen worden voorgesteld.

Een zelfde soort splitsing kan ook door een **scheidingswaarde** van een der veranderlijken worden teweeggebracht.

Voldoen in dat geval de twee vergelijkingen aan bepaalde voorwaarden, dan is het toch nog mogelijk het totale bereik van het verband door één nomogram voor te stellen, van welk nomogram dan echter de schaal voor de veranderlijke met de scheidingswaarde, op het schaalpunt voor die waarde, **gebroken** zal wezen.

Dat wil zeggen, dat de schaalverdeeling op dat punt discontinu is, terwijl veelal ook de drager aldaar een knik zal hebben. Zulk een schaal noemen wij daarom een **gebroken schaal.**

Wordt het totale verband, door het aanwezig zijn van scheidingswaarden in méér dan een veranderlijke, in méérdere betrekkingen verdeeld, dan is het theoretisch denkbaar, dat twee of drie, c.q. méérvoudig gebroken schalen, optreden. Dergelijke gevallen zijn mij echter practisch niet bekend, om welke reden ik mij zal beperken tot het bespreken van de eenvoudigste nomogramvormen met één gebroken schaal op een evenwijdig schalenstel, en wel aan de hand van het schema figuur **94.**

Als scheidingswaarde is hierbij aangenomen de waarde θ_3 van de veranderlijke z_3. De twee functievergelijkingen van een stel hebben steeds dezelfde f_1 en f_2, daar de schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ voor de beide betrekkingen samenvallen. De oorsprongen van de overigens samenvallende schalen behoeven echter niet op elkaar te vallen. Wij hebben in figuur **94** dus rekening gehouden met een verschuiving μ_1 **a** op $[z_1]$ en μ_2**·b** op $[z_2]$, uitgezonderd in gevallen, waarin een der functievergelijkingen van het type I is, omdat hierbij een verschuiving van de twee evenwijdige schalen , geen invloed heeft op den vorm van de functievergelijking.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

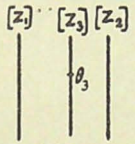
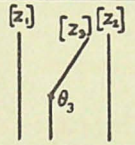
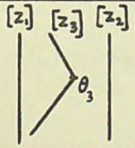
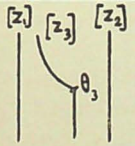
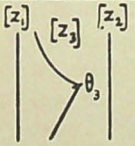
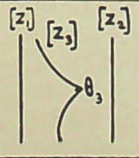
Nomogrammen met een gebroken schaal.		
Vorm:	Functievergelijkingen:	Voorwaarden:
	$f_1 + f_2 = f_3$ $f_1 + f_2 = F_3$	$f_{\theta_3} = F_{\theta_3}$
	$f_1 g_3 + f_2 = 0$ $f_1 + f_2 = F_3$	$g_{\theta_3} = 1$ $F_{\theta_3} = 0$
	$f_1 g_3 + f_2 = 0$ $(f_1 + a) G_3 + (f_2 + b) = 0$	$g_{\theta_3} = G_{\theta_3} = -\frac{b}{a}$
	$f_1 g_3 + f_2 = f_3$ $f_1 + f_2 = F_3$	$g_{\theta_3} = 1$ $f_{\theta_3} = F_{\theta_3}$
	$f_1 g_3 + f_2 = f_3$ $(f_1 + a) G_3 + (f_2 + b) = 0$	$g_{\theta_3} = G_{\theta_3}$ $f_{\theta_3} + a g_{\theta_3} = -b$
	$f_1 g_3 + f_2 = f_3$ $(f_1 + a) G_3 + (f_2 + b) = F_3$	$g_{\theta_3} = G_{\theta_3}$ $F_{\theta_3} - f_{\theta_3} - a g_{\theta_3} = b.$

Fig. 94.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Want in plaats van

$$(f_1 + a) + (f_2 + b) = F_3$$

kunnen wij schrijven

$$f_1 + f_2 = (F_3 - a - b).$$

Berekenen wij vervolgens voor beide functievergelijkingen de ligging van het scheidingspunt θ_3, dan kunnen de voorwaarden in de laatste kolom van figuur **94** afgeleid worden. Uit deze voorwaarden blijkt, dat, van de twee waarden **a** en **b**, er slechts één naar verkiezing kan worden aangenomen.

§ 186. Voorbeeld. *Doorslaan van ijzeren constructies met brisante springstof* (figuur **95**).

Voor het doorslaan van wel- en vloeiijzeren platen, breed **b** en dik **d** cm., met behulp van blokjes brisante springstof van 200 gram, werden door mij uit empirische en andere gegevens twee formules afgeleid [1]), namelijk:

$$\text{voor } b < 16 \quad \text{is} \quad n = 0{,}16 \sqrt{bd^3}$$
$$\text{en voor } b > 16 \quad \text{is} \quad n = 0{,}04\, b\sqrt{d^3}$$

, welke beide vergelijkingen geschreven kunnen worden als type I, n.l.

$$\log n + (-1{,}5 \log d) = 0{,}5 \log b + \log 0{,}16$$
$$\log n + (-1{,}5 \log d) = \log b + \log 0{,}04$$

De scheidingswaarde θ_3 is dus hier de waarde $b = 16$.

Aan de voorwaarde uit de laatste kolom van figuur **94** is voldaan, want

$$0{,}5 \log 16 + \log 0{,}16 = \log 16 + \log 0{,}04$$

of:

$$0{,}16 \sqrt{16} = 0{,}04 \times 16.$$

Aan de schaal $[n]$ gaven wij een negatieve modulus om haar tusschen de beide andere schalen te doen vallen.

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur **95** waren de schalen:

$[n]$ $\quad x = -10 \log n$

$[d]$ $\quad y = 16^2/_3 (-1{,}5 \log d) = -25 \log d$

Dus $p = \dfrac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\, \delta = -1{,}5\delta$ en $\mu_3 = \dfrac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = -25$

dus $[b]$ $\quad \begin{cases} q = -12{,}5 \log b - 25 \log 0{,}16 \\ q' = -25 \log b - 25 \log 0{,}04 \end{cases}$

[1]) Zie: „Mavors" Mei 1923. „Nomogrammen voor lading-berekening".

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De schaalverdeeling van [b] is dus gebroken bij het scheidingspunt $b = 16$.

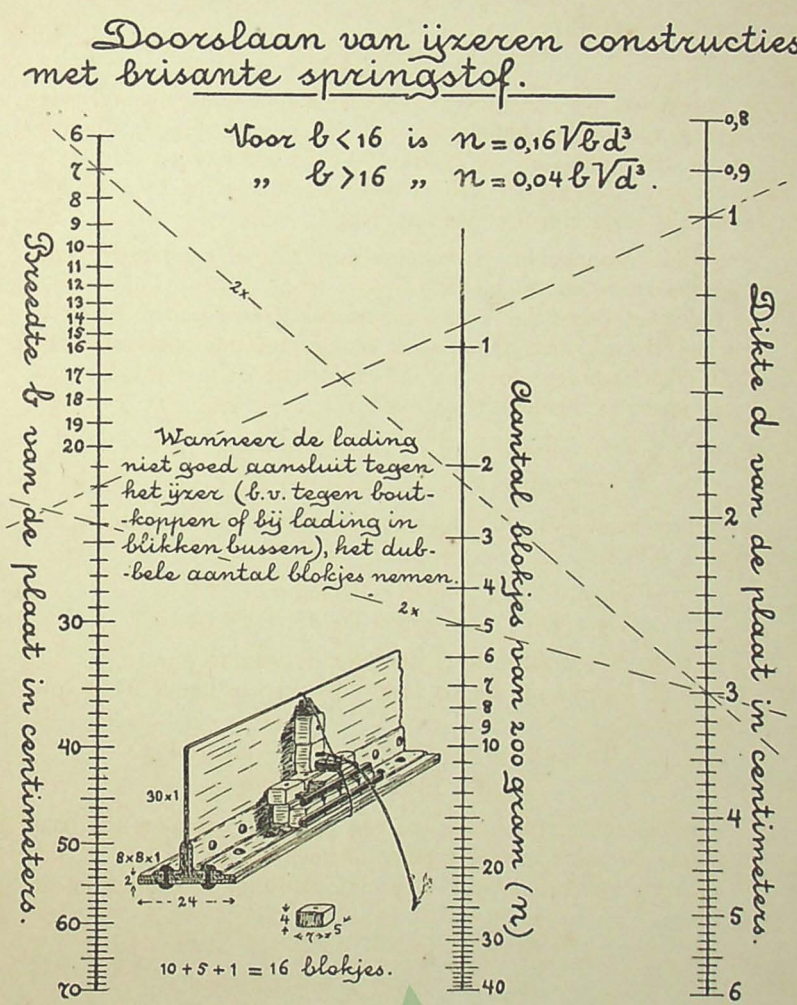


Fig. 95.

Toepassing van het nomogram.

Er wordt gevraagd om de grootte te berekenen van de lading, welke noodig is voor het doorslaan van den in figuur **95** afgebeelden onderrand van een vakwerkligger.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Deze ligger kan verdeeld gedacht worden in:

een geklonken plaat van 24 × 3 cm.
„ „ „ „ 7 × 3 „
en een vlakke plaat van 22 × 1 „

, waarvoor onderscheidenlijk 10; 5 en 1 blokje(s) springstof noodig zijn (zie de gestippelde afleeslijnen), dus totaal 16 blokjes.

Deze blokjes worden tegen den ligger geklemd, b.v. op de in de figuur geteekende wijze, en tot ontsteking gebracht met behulp van een slaghoedje en een eind vuurkoord.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK 28.

Benoodigde gegevens voor de constructie van een nomogram. Eenige opmerkingen en aanwijzingen.

§ 187. **Benoodigde gegevens.** Uit het tot dusver behandelde zal duidelijk gebleken zijn, dat het mogelijk is elke betrekking, steeds op meerdere, dikwijls zeer uiteenloopende wijzen, voor te stellen, vooropgesteld, dat de veranderlijken gescheiden konden worden.

De opgave voor de constructie van een nomogram, zal daarom alle gegevens moeten omvatten, welke noodig zijn, om uit de mogelijke constructievormen de meest geschikte te kunnen uitkiezen.

In het algemeen zijn de volgende gegevens gewenscht:

1°. De voor te stellen vergelijking(en), met de verklaring van de beteekenis van elk der veranderlijken (welke daarin door letters zijn voorgesteld) en zoo noodig de eenheden, waarin deze veranderlijken worden uitgedrukt. Voorts de waarde van c.q. in de vergelijking voorkomende constanten.

2°. Het bereik (totale bereik) van elk der veranderlijken, dus de grootste en kleinste waarde van elk dezer.

3°. Eventueel aanwezige grensbetrekkingen, dat zijn betrekkingen, — tusschen éénige van de veranderlijken, — welke de toepassing van de gegeven vergelijking beperken (zie Hoofdstuk 26).

4°. De *gewenschte middenwaarde* v voor elk der schalen, dan wel het *normale bereik* van elk der veranderlijken (zie de volgende §).

§ 188. Het is in het algemeen mogelijk, om voor elke veranderlijke welke in een betrekking voorkomt, een zoogenaamde *frequentiekromme* te teekenen (zie figuur **96**), aangevende de globale verhouding van de aantallen malen, dat, bij de practische toepassing van het nomogram, elk der waarden van de veranderlijke zal worden gebruikt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Zoo is in figuur **96** de verhouding van de ordinaten bij de waarden $z = \varepsilon$ en $z = \nu$, gelijk aan de verhouding van de aantallen malen dat **z** een waarde van ongeveer ε en een waarde van ongeveer ν zal hebben.

De ordinaten behoorende bij α en ω zullen nul of zeer klein wezen, wanneer echter een grenswaarde of grensbetrekking de

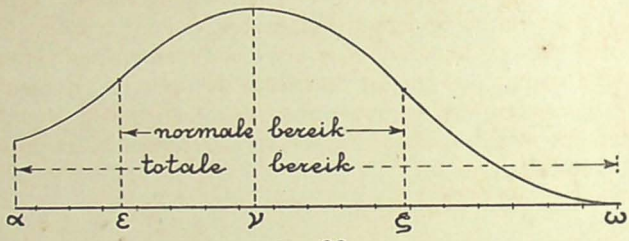


Fig. 96.

geldigheid van de gegeven betrekking beperkt, zal de betreffende ordinaat in het algemeen grooter zijn.

De reeks waarden gelegen tusschen de ordinaten, ongeveer gaande door de buigpunten in de frequentiekromme, noemen wij het **normale bereik** van de veranderlijke (in figuur **96** van ε tot ζ). In tegenstelling daarmede, noemen wij dan het bereik van laagste tot hoogste waarde, het **totale bereik** van die veranderlijke.

Vooral bij de kegelsnedenomogrammen, kunnen de schalen dikwijls zóó geconstrueerd worden, dat de schaaldeelen binnen het normale bereik grooter zijn dan daarbuiten, waardoor dus een gunstige schaalverdeeling kan worden verkregen.

§ 189. Om een indruk te verkrijgen van de menigvuldigheid der gevallen, waarin de behandelde nomogramvormen kunnen worden gebruikt, kan de volgende verdeeling worden aangenomen.

Van **20** betrekkingen (tusschen drie veranderlijken), welke in wetenschap of techniek voorkomen, zijn er gemiddeld **14** van de 3de orde, **4** van de 4^{e}_{0} orde (bij ongeveer de helft hiervan, is een cirkelboogvormige $[z_3]$ mogelijk), **1** van de overige orden en is er **1** niet door een schaalnomogram voor te stellen.

Wat deze laatste betreft, is het meestal nog mogelijk, door een andere keuze van veranderlijken, tot een betrekking te komen, welke zich wél door een nomogram laat voorstellen.

Was b.v. in § 127, in plaats van de verhouding **h**, de verhouding van de onderbreedte van de trapeziumvormige doorsnede tot de dikte **B** van de rechthoekige doorsnede gekozen, hetgeen

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

meer voor de hand liggend zou zijn geweest, dan zouden wij een vergelijking verkregen hebben, waarin de veranderlijken niet gescheiden hadden kunnen worden. Vandaar de eenigszins „gezochte" keuze der veranderlijke **h.**

§ 190. Hoewel voor een betrekking met meer dan 3 veranderlijken afzonderlijke vormen van schaalnomogrammen bestaan, waarvan de bespreking buiten het bestek van dit boek valt, zoo is het dikwijls eenvoudiger, door een combineeren der veranderlijken, het aantal hiervan tot drie terug te brengen. Komen b.v. in een betrekking de veranderlijken z_1 tot en met z_5 voor, dan kan getracht worden twee nieuwe veranderlijken z_2' en z_3' in te voeren, zoodanig dat b.v.

$$z_2' = z_2 \pm z_3 \quad \text{of} \quad = \frac{z_2}{z_3} \quad \text{of} \quad = z_2 z_3$$

en

$$z_3' = z_4 \pm z_5 \quad \text{of} \quad = \frac{z_4}{z_5} \quad \text{of} \quad = z_4 z_5$$

, of een andere combinatie waarvoor de rekenkundige bewerking gemakkelijk „uit het hoofd" kan worden uitgevoerd. (Zie o.a. § 98 en § 101).

§ 191. Omgekeerd kan het voorkomen, dat een betrekking tusschen 2 veranderlijken zoo ingewikkeld is, dat de berekening van een tabel of de constructie van een dubbelschaal zeer tijdroovend zou wezen. In dat geval, kan dikwijls beter een der veranderlijken, welke op eenige plaatsen in de vergelijking voorkomt, op de eene plaats b.v. z_1 en op een andere plaats z_3 worden genoemd. (Zie opgave 72 op blz. 145).

§ 192. **Enkele aanwijzingen voor het teekenen van nomogrammen.** Voor het teekenen van nomogrammen moet bij voorkeur papier van uitstekende kwaliteit genomen worden, met een niet te ruw, doch ook niet te glad oppervlak. De plaats van punten wordt het best aangegeven, door ze in te prikken met een passerpunt of ontleednaald; projectielijnen worden het vlugst getrokken, door in het projectiecentrum een dunne naald te plaatsen, waartegen de driehoek of liniaal kan steunen.

Voor het trekken van dunne lijnen voldoet een beitelvormig geslepen potloodpunt het meest. Daar de constructielijnen later meerendeels weer uitgegomd moeten worden, mag het potlood niet te hard wezen, anders laat het krassen na. Een 2H-potlood is meestal voldoende hard. Het gebruik van een teekendriehoek

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van doorschijnend materiaal is aan te bevelen. Evenwijdig aan de schuine zijde, kan een afleeslijn worden ingekrast. De constructie van logarithmische schalen (zie blz. 44) heeft plaats, hetzij met behulp van een schalenboekje, — dat is een verzameling aaneengehechte papierstrooken, waarop aan de zijkanten logarithmische schaaleenheden van verschillende lengten zijn overgenomen (b.v. van rekenlinialen) —, òf met de gewone of verkorte logarithmische harp.

Bij andere schaalverdeelingen kunnen de ónderverdeelingen zoo noodig met den interpolator worden geconstrueerd.

Dragers van kromme, niet-cirkelboogvormige schalen, worden langs mallen getrokken.

Voor voldoende bijschriften, ter verduidelijking van de voorgestelde betrekking en de toepassing van het nomogram, dient te worden gezorgd.

Moet een met inkt geteekende figuur verbeterd worden, dan raad ik aan, zoo mogelijk eerst de verbetering aan te brengen en pas daarna het overtollige weg te radeeren (b.v .met een Gillettemesje); na het radeeren de papiervezel weer glad te strijken met het bovenvlak van den nagel.

Op blz. 29 werd reeds opgemerkt, dat krimpen van het papier in het algemeen niet nadeelig is voor de nauwkeurigheid van het nomogram. Daarom is er ook in het algemeen geen bezwaar tegen vermenigvuldiging door lichtdrukken, al is de droge werkwijze daarbij toch meer te verkiezen.

Wel is het noodig bij fotografische reproductie verteekening te voorkomen. Verteekening (distorsie) heeft niet plaats bij gebruik van symmetrische lenzen, ook is zij voldoende te ontgaan, door voor de reproductie gebruik te maken van een lens met grooten brandpuntsafstand.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

LITERATUUR [1]).

1. **Soreau (R.).** Nomographie ou Traité des Abaques. 2 tômes (18 × 26; 780 blz.) Et. Chiron, Paris. 1921.
2. **d'Ocagne (Maurice).** Traité de Nomographie (483 blz.) Gauthier—Villars, Paris. 1921.
3. **Schwerdt (H.).** Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage. Springer, Berlin. 1924.
4. **Lipka (J.).** Graphical and Mechanical Computation. J. Willey and Sons, New-York. 1918.
5. **Werkmeister (Prof. Dr.-Ing. P.).** Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln. (Nomographie). Springer, Berlin. 1923.
6. **Brodetsky (S.).** A first course in Nomography. Bell and Sons, London. 1920.
7. **Lacmann (Dr.-Ing. Otto).** Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln. Springer, Berlin. 1923.
8. **Clark (Dr.J.).** Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre. Revue de Mécanique 1907—1908.
9. **Luckey (P.).** Einführung in die Nomographie. 2 Bändchen. Teubner, Berlin. 1918, 1920.
10. **Konorski (Ing. B. M.).** Die Grundlagen der Nomographie. Springer, Berlin. 1923.
11. **Schwerdt (H.).** Nomographie. Otto Salle, Berlin. 1927.
12. **Pirani (Prof. Dr. Marcello).** Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik Sammlung Göschen 1919.
13. **Schilling (Prof. Dr. Fr.).** Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Teubner, Berlin. 1900.
14. **Le Heux (J. W. N.).** Beginselen der Nomographie. Kluwer, Deventer. 1926.
15. **Wenner (Dr. Fritz).** Praktische Rechenbildkunde (Nomographie). Aachener Verlags- und Druckerei-Gesellschaft. 1926.
16. **Vaes (Ir. F. J.).** Overzicht van: „M. d'Ocagne". „Traité de Nomographie. 1899". Marineblad 1900, 2e en 3e afl.

[1]) Volgorde ongeveer naar den omvang der werken.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

17. **Krauss (Ing. Fritz).** Die Nomographie oder Fluchtlinienkunst. (55 blz.). Springer, Berlin. 1923.
18. **Mayer (Dr.-Ing. Max).** Zur Einführung in die Nomographie. (39 blz.). Bauwelt-Verlag, Berlin. 1926.

No. 7 geeft voorbeelden op hydraulisch gebied, no. 15 toepassingen op het gebied van landmeten en astronomische tijdsbepaling.

Nomogramverzamelingen of nomografisch bewerkte boeken zijn voorts o.a.:

19. **Seco de la Garza (Ricardo).** (Spaansch Genie-officier). Les Nomogrammes de l'Ingénieur Gauthier—Villars, Paris. 1912. (Verzameling van nomogrammen voor den pionier-officier).
20. **Steevensz (Ir. J. M.).** Grafieken voor hydraulische berekeningen Uitgave van de Vereeniging van Waterstaatsingenieurs in N. O. Indië. 1920.
21. **Seefehlner (E. E.).** Electrische Zugförderung. Berlin. 1922.
22. **d'Ocagne (Maurice).** Principes Usuels de Nomographie avec application à divers problèmes concernant l'Artillerie et l'Aviation. Gauthier—Villars, Paris. 1920.
23. **Mayer (Dr.-Ing. Max).** Nomographie des Bauingenieurs. Sammlung Göschen. 1927.
24. **Schoklitsch (A.).** Graphische Hydraulik. Teubner, Berlin. 1923.
25. **Vaes (Ir. F. J.).** Technische rekenplaten. Jaarverslag 1903—1904 No. XVII van het Kon. Inst. v. Ing., Vakafd. voor Werktuig- en Scheepsbouw.
26. **Bergmann (Dr. Ludwig).** Nomographische Tafeln für den Gebrauch in der Radiotechnik. Springer, Berlin. 1925.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

GEBEZIGDE NOTATIES EN TEEKENS.

Notatie of teeken:	Beteekenis:	Zie bladz.:
z	een veranderlijke	10
z_1, z_2, enz.	1e, 2e veranderlijke, enz.	10
x, **y**	door een metrische schaal voorgestelde veranderlijken;	33
p, **q**, **r**	**x** en **y** voornamelijk voor het rechte schalenstel,	64, 94
u, **v**	**p** en **q** (en **r**) voor de coördinaten van een punt in het vlak van het schalenstel,	64
	u en **v** voor hulpschalen bij projectie.	66
f, **g**, **F**, **G** **E**, **H**, **K** φ, ψ, ξ, ζ Φ en Ψ ook: **f(z)**, **g(z)**, enz.	functies van **z**	30
f_1, g_3, F_2, enz.	functies van z_1, z_3, z_2, enz.	30
f_{12}, g_{12}, enz	functies van z_1 én z_2	30
$[z_1]$	schaal voor z_1	11
(z_1)	bundel voor z_1	12
$[z_1, z_2]$	schalenstel, gevormd door $[z_1]$ en $[z_2]$	16
(z_1, z_2)	net, gevormd door (z_1) en (z_2)	16
$[f]$	schaal voor de functie **f**	33
$[\varphi, \psi]$	hulpschalenstel	154, 156
μ	modulus van een schaal, in cm.	34

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

		Bladz.
α	waarde van **z**, waarvoor **f(z)** minimum is;	33
ω	waarde van **z**, waarvoor **f(z)** maximum is.	33
ν	meest gebezigde waarde van **z**, of gewenschte middenwaarde van [z] . .	48
η	willekeurige waarde binnen het bereik van **z**	36
θ	scheidingswaarde van **z** bij een gebroken schaal	248
τ	waarde van **x**, behoorend bij een toppunt **T** op een kegelsnedeschaal	167
k	functielengte of functiebereik $f(\omega) - f(\alpha)$	33
L	ongeveer gewenschte schaallengte in cm.	34
B	maatgevende breedte van het nomogram in cm.	73
D	maatgevende diagonaal van het nomogram in cm.	97
δ	lengte in cm. van den afstand O_1O_2 der oorsprongen, bij een evenwijdig schalenstel.	61
φ	hoek tusschen de schalen van het snijdend schalenstel	95
M	logarithmische schaaleenheid in cm. (Manteb)	44
m	o.a. voor het quotient $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 82,	89
n	o.a. voor het quotient $\frac{\delta}{\mu_2}$ 89,	157
$\approx$	(is) ongeveer gelijk aan	34
$\neq$	(is) ongelijk aan	225
$\sim$	(is) gelijkvormig met	39
$\wedge$	(is) perspectief met	39
$\overline{\wedge}$	(is) projectief met	39
$\doteqdot$	evenredigheidsteeken voor nomogrammen	77

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

GRIEKSCH ALPHABET.

A, *α*	alpha	a	
B, *β*	bèta	b	
Γ, *γ*	gamma	g	
Δ, *δ*	delta	d	
E, *ε*	epsilon	e	
Z, *ζ*	zèta	z	
H, *η*	èta	è	
Θ, *θ*, *ϑ*	thèta	th	
I, *ι*	iöta	i	
K, *κ*	kappa	k	
Λ, *λ*	lambda	l	
M, *μ*	mu	m	
N, *ν*	nu	n	
Ξ, *ξ*	xi	x	
O, *ο*	omikron . . .	o	
Π, *π*	pi	p	
P, *ρ*	rho	r	
Σ, *σ*, *ς*	sigma	s	
T, *τ*	tau	t	
Y, *υ*	upsilon	u	
Φ, *φ*	phi	ph	
X, *χ*	chi	ch	
Ψ, *ψ*	psi	ps	
Ω, *ω*	omega	oo	

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

SYSTEMATISCH OVERZICHT VAN DE VOORBEELDEN EN OPGAVEN.

1. Algebra.

Bladz.
Berekening van $\frac{1000}{x}$. Figuur **20** 51
$x = ln.y$ of $y = e^x$. Figuur **20** 51
Moduli voor het nomogram met drie evenwijdige schalen. Figuur **29** 77
Gemiddelden van **a** en **b**. Figuur **84** 203
$z_1z_2z_3 = 1$. Figuur **85** 206
$x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 144$. Figuur **87**. 212

Opgaven: 3, 4, 52, 72, 86, 93, 97, 100, 127 en 128.

2. Goniometrie, Vlakke- en Boldriehoeksmeting.

Betrekking in den driehoek. Figuur **53** 134

Opgaven: 2, 26, 30, 49, 55 en 108.

3. Vlakke Meetkunde en Stereometrie.

Opgaven: 1, 11, 22, 25, 35, 105 en 126.

4. Sterrenkunde en Tijdsbepaling.

Tweede Wet van Kepler. Figuur **24** 68
Tijdsbepaling uit zonshoogte of schaduwlengte. Figuur **37** 91

Opgaven: 38, 46, 74, 107, 111, 114 en 115.

5. Landmeten en Geodesie.

Opgaven: 14, 21, 40, 69, 76, 88, 94, 97, 99, 116, 117 en 118.

6. Mechanica.

Vrije val en verticale worp. Figuren **4, 5** en **6** . . 15, 16, 17
Verband tusschen toerental en omtreksnelheid. Figuur **86.** 210

Opgaven: 17, 28, 29, 43, 50, 62, 80, 85, 101, 123 en 124.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

7. Warmteleer.

Bladz.
Herleiding van °C. tot °F. Figuur **20** 51

Opgaven: 13, 19, 31, 41, 56, 59, 91, 102, 122 en 125.

8. Lichttechniek en Fotografie.

Verlichting. Figuren **7, 8, 9** en **10** . . . 20, 22, 23, 24
Instellen zonder matglas. Figuur **43** 104
Lenzen-formule. Figuur **80** 197

Opgaven: 19, 57, 90, 96 en 106.

9. Electrotechniek.

Weerstand van koperen geleidingen. Figuur **20** . . . 51
Zelfinductie van spoelen. Figuur **20** 51
Vervanging van wisselstroom-weerstanden bij overgang van parallel- tot serie-schakeling. Figuur **40** 98
Electrische trillingen. Figuur **79** 194
Parallelschakeling van weerstanden, serieschakeling van capaciteiten. Figuur **80** 197

Opgaven: 10, 16, 18, 20, 23, 24, 39, 41, 48, 58, 75, 77, 89 en 102.

10. Werktuig- en Scheepsbouw.

Herleiding van K.W. tot P.K. Figuur **20** 51
Berekening van cylindrische schroefveeren. Figuur **34** . 86
Wanddikte van buizen, enz. met inwendigen overdruk. Figuur **78** 192

Opgaven: 12, 31, 33, 36, 42, 43, 47, 53, 63, 65, 66, 73, 80, 103, 119 en 121.

11. Toegepaste Mechanica en Bouw- en Waterbouwkunde.

Dikte van gewapend-betonplaten met enkele wapening bij in rekening gebracht eigen gewicht. Figuur **50** . . 126
Overgang van rechthoekige op trapezium-vormige doorsnede bij grondkeerende muren. Figuur **70.** 181
Vurenhouten stutten. Figuur **90** 240
Grondverzet bij den aanleg van wegen. Figuur **91** . . 242

Opgaven: 25, 27, 47, 53, 67, 71, 73, 79, 81, 82, 95, 103, 104, 109, 110 en 123.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

SYSTEMATISCH OVERZICHT VAN DE VOORBEELDEN EN OPGAVEN.

1. Algebra.

Bladz.

Berekening van $\frac{1000}{x}$. Figuur **20** 51

$x = ln.y$ of $y = e^x$. Figuur **20** 51

Moduli voor het nomogram met drie evenwijdige schalen. Figuur **29** 77

Gemiddelden van **a** en **b**. Figuur **84** 203

$z_1 z_2 z_3 = 1$. Figuur **85** 206

$x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = 144$. Figuur **87**. 212

Opgaven: 3, 4, 52, 72, 86, 93, 97, 100, 127 en 128.

2. Goniometrie, Vlakke- en Boldriehoeksmeting.

Betrekking in den driehoek. Figuur **53** 134

Opgaven: 2, 26, 30, 49, 55 en 108.

3. Vlakke Meetkunde en Stereometrie.

Opgaven: 1, 11, 22, 25, 35, 105 en 126.

4. Sterrenkunde en Tijdsbepaling.

Tweede Wet van Kepler. Figuur **24** 68

Tijdsbepaling uit zonshoogte of schaduwlengte. Figuur **37** 91

Opgaven: 38, 46, 74, 107, 111, 114 en 115.

5. Landmeten en Geodesie.

Opgaven: 14, 21, 40, 69, 76, 88, 94, 97, 99, 116, 117 en 118.

6. Mechanica.

Vrije val en verticale worp. Figuren **4, 5** en **6** . . 15, 16, 17

Verband tusschen toerental en omtreksnelheid. Figuur **86.** 210

Opgaven: 17, 28, 29, 43, 50, 62, 80, 85, 101, 123 en 124.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

7. Warmteleer.

Bladz.
Herleiding van °C. tot °F. Figuur **20** 51

Opgaven: 13, 19, 31, 41, 56, 59, 91, 102, 122 en 125.

8. Lichttechniek en Fotografie.

Verlichting. Figuren **7, 8, 9** en **10** . . . 20, 22, 23, 24
Instellen zonder matglas. Figuur **43** 104
Lenzen-formule. Figuur **80** 197

Opgaven: 19, 57, 90, 96 en 106.

9. Electrotechniek.

Weerstand van koperen geleidingen. Figuur **20** . . . 51
Zelfinductie van spoelen. Figuur **20** 51
Vervanging van wisselstroom-weerstanden bij overgang van parallel- tot serie-schakeling. Figuur **40** 98
Electrische trillingen. Figuur **79** 194
Parallelschakeling van weerstanden, serieschakeling van capaciteiten. Figuur **80** 197

Opgaven: 10, 16, 18, 20, 23, 24, 39, 41, 48, 58, 75, 77, 89 en 102.

10. Werktuig- en Scheepsbouw.

Herleiding van K.W. tot P.K. Figuur **20** 51
Berekening van cylindrische schroefveeren. Figuur **34** . 86
Wanddikte van buizen, enz. met inwendigen overdruk. Figuur **78** 192

Opgaven: 12, 31, 33, 36, 42, 43, 47, 53, 63, 65, 66, 73, 80, 103, 119 en 121.

11. Toegepaste Mechanica en Bouw- en Waterbouwkunde.

Dikte van gewapend-betonplaten met enkele wapening bij in rekening gebracht eigen gewicht. Figuur **50** . . 126
Overgang van rechthoekige op trapezium-vormige doorsnede bij grondkeerende muren. Figuur **70.** 181
Vurenhouten stutten. Figuur **90** 240
Grondverzet bij den aanleg van wegen. Figuur **91** . . 242

Opgaven: 25, 27, 47, 53, 67, 71, 73, 79, 81, 82, 95, 103, 104, 109, 110 en 123.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

Bijzondere functievergelijkingen . . . **55**, 56, 58, 112, 214

Cartesische coördinaten . 64, 94
Cartesius 1
Centimeterverdeeling . . . 11
Chasles 3
Cirkel . 89, 109, 174, **175**, **184**
Cirkelboogvormige schaal **88**, 109, **132**, 254
Cirkelnomogrammen . 171, 184
Cirkelwaaier 13
Clark (Dr. J.) . . 205, 217, 257
Collineair 171
Collneatie 3
Combineeren der veranderlijken 255
Concurrent **39**, 61, 171
Constanten 253
Continue reëele variabele . **7**, 8
Coördinaten 1, 83
cartesische — 64, 94
metrische — 2
tangentieele — 3
Coördinatennet 7
Coördinatenpapier . . . 6, 7, **29**
Cosinusregel 89
Cyclometrische functies . . 235

Data 8
Deel 11, 12, **13**
Deellijn 12, **13**
Deelpunt 10, **11**
Deelstreep 11
Dekpunt 114
Dennert en Pape 44
Derdemachtsvergelijking . . 207
Descartes **1**, 2
Dieptelijnen 1
Differentieeren . . . 122, 233
Discontinu 248
Distorsie 256
Drager 10, **11**, 199, 200
afzonderlijke —s . . 155, 156

Bladz.

gemeenschappelijke — 17, **154**, 155, **161**, 216
Driehoek 255
Driehoeksmeting 262
Duale transformatie 3
Dualiteit 62
Dualiteitsbeginsel 2
Dubbelpunten 166
Dubbelschaal **17**, 28, **49**, 162, 255
gebonden — **49**, 54
vrije — 49

Eenheden 253
Electrotechniek 263
Ellips 174, **175**
Empirische betrekkingen . . 3
— formules 3, 5, 7
Euclides 2
Evenredigheidsteeken . . . 77
Evenwijdige bundel . . . **13**, 63
Evenwijdig schalenstel **61**, 62, **64**
regelmatig — — 16
Explicite . . . **30**, 31, 65, 162

Faber (A. W.) 44
Figuurlijke voorstelling . . 6
Formaat 26
Formule 3, 5, **30**
empirische — 3, 5, 7
theoretisch afgeleide — . . 7
Fotografie 2, 263
Fotografische reproductie . . 256
Frequentiekromme 253
Functie 2, **30**
Functiebereik 33
Functiebundel . . . **13**, 16, 28
Functielengte **33**, 78
Functienet 18, 29
Functieschaal **11**, 13, 16, 28, **33**, **36**, 43
Functieschalenstel . . . **18**, 21
Functievergelijking . . . **31**, 55
algemeene — . . . **55**, 57, **214**
algemeene — van de 3de orde 57, 189, **224**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.
algemeene — van de 4de orde 57, **217, 220**
algemeene — van een orde 58, 214
bijzondere of typische — **55, 56,** 58, 112, 214
Functiewaarde 33

Gebogen schaaldrager . . . 154
— schalenstel 154
Gebonden dubbelschaal . **49,** 54
Gebroken schaal 248
Gebruik van nomogrammen . 29
Gegevens 170, **253**
Gelijkzijdige hyperbool . . . 176
Gemeenschappelijke drager 17, **154,** 155, **161,** 216
— veranderlijken 82
Gemeten betrekking 5
Gemiddelde . . . 48, 118, 202
Genummerde lijn 10
Genummerd punt 10
Geodesie 262
Gergonne 2
Gescheiden veranderlijken **31, 32,** 49, 54, 214
Getalveranderlijke 7
Gewenschte middenwaarde **48,** 114, 121, 253
Goniometrie 262
Goniometrische functies 162, 227
Grafiek 3, 5, **18,** 26
Grafische vervorming . . . 116
— voorstelling 1, 3, 4, 7, **18, 26,** 62
Grensbetrekking . . **237,** 253, 254
Grenswaarden **33,** 254
Grieksch alphabet 261
Grondfiguur **14,** 61
Grondtal 111
Grootste functiewaarde . . 33
Gunther 1

Harmonisch gemiddelde 48, 118, 202
Harp 44

Bladz.
Hoofddeellijn 12, **13**
Hoofddeelpunt 10, **11**
Hoofdstralen 35
Hoogere Algebra 207
— Meetkunde 2
Hoogtelijnen 1
Hulpschalen 157
Hulpschalenstel . . **154,** 158, 182
Hydraulica 264
Hyperbool 174, 176, 191

Implicite **30,** 31
Indices . . . 10, 167, 220, 222
Integraal 234
Interpolator **35,** 256
Interpoleeren . . 11, 13, 21, 28

Karakteristieken 6
Kegelsnede 62, 89, 166
Kegelsnede-nomogrammen 55, 155, **165,** 254
Kegelsnede-schalenstel . **168,** 170
Keuze der veranderlijken . 255
Kleinste functiewaarde . . . 33
Konorski (Ing. B. M.) . . . 257
Krauss (Ing. Fritz) 258
Krimpen van het papier . 29, 256
Kubische kromme . . 155, 208
— nomogrammen . 155, **205**
Kwadratische schaal . . **41,** 43

Laccmann *(Dr.-Ing. Otto)* . 257
Lalanne 2
Landmeten 262
Le Heux (J. W. N.) . . 3, 257
Lengte van een schaal 26, 33, **34**
Lichtdrukken 256
Lichttechniek 263
Lineaire functie 39
— verwantschap 32
Lipka (J.) 257
Literatuur 257
Logarithmen 1

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.
Logarithmenpapier 6, 7
Logarithmische anamorphose 3
— bundel 25
— functie 235
— harp 44, 256
— schaal
1, 3, 21, **41**, 43, 48, 256
— schaaleenheid . . . 44
— verdeeling 44
Logarithmisch net 3
Log. sinus-bundel 25
Log. sinus-schaal 25
Luchtvaart 264
Luckey (P.) 257
Lijnen 13

Machtschalen **41**, 48
Mac Laurin 171
Mallen 256
Manteb 44
Massau 217
Maurice d'Ocagne 3, 241, 257, 258
Mayer (Dr.-Ing. Max.) . . 258
Mechanica 262
Mechanisch opgeteekende betrekking 5
Meetkunde
Analytische — 1
Hoogere — 2
Projectieve — . . **2**, 114, 165
Meetkundige voorstelling . . 5
Meetkundig gemiddelde 48, 118, 202
Menelaos 103, 116, 224
Meteorologie 264
Metrische bundel 13
— coördinaten 2
— schaal . . **11**, 13, 33, 165
Middenwaarde . **48**, 114, 121, 253
Militaire techniek 264
Millimeterpapier 6, 83
Möbius 2
Modulus 34

Napier 1
Nauwkeurigheid . **42**, 53, 78, 256

Bladz.
Net **14**, 16, 62
logarithmisch — 3
regelmatig — **16**, 21
Nevenbetrekkingen . . . 25, 28
Nomografie 3, 4, **5**, 7
taak der — 3, **5**
Nomografische orde . . **55**, 58
Nomogrammen 18
bundel- — . . . 18, 26, 28
cirkel- — 171, 184
kegelsnede- — 55, 155. **165**, 254
kubische — . . . 155, **205**
schaal- — 18
Nomogrammen met gebroken schalen 248
Nomogramvormen . . 56, 57, 61
Normale bereik . . . 253, 254
Notaties 259
Nulpunt 33
Nummer 8

d'Ocagne . . . 3, 241, 257, 258
Omgekeerd kwadratische schaal **41**, 43
Omschrijving 5
Onderdeterminanten . . . 208
Onregelmatige schaal . . . 11
Onvolledige veranderlijken **7**, 8, 26
Oorsprong **11, 33,** 61, 167, 184, 208
Oorspronglijn 61
Opsporen van formules . . 3, 7
Orde (Nomografische) . **55**, 56
Ordinaten 208, 254
Overgangen tusschen voorstellingswijzen 5, **6**
Overgangstypen 8
Overzicht 6, 28

Papier 255
Parabool 174, 176
Pascal 189
Perspectief 39
Perspectiefcentrum . . 114, 115
Perspectieve ligging . . . 39
Pestalozzi 2

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.
Pirani (Prof. Dr. Marcello) . 257
Plücker 2
Poncelet 2
Pool 13
Poolcoördinatenpapier . . 6
Potlood 255
Primaire voorstelling . . . 5, 38
Productdrager 199
Productschaal 201
Projectief 39
— verwante schalen . . 39
Projectieve constructie 39, 44, 182
— Meetkunde . . 2, 114, 165
— schaal 39, 48
— vervorming . . . 2, 114
— vorming . . 165, 173, 198

Raakkromme 14, 16, 21
Radeeren 256
Rechte schaal 61, 62
Recht schalenstel . . . 61, 62
Reciprokensom-drager . . 199
Reciprokensom-schaal . . . 201
Reciproke schaal . . . 41, 48
— transformatie 3
Reëele variabele 7, 8
— waarden 7
Regelmatige bundel . 13, 16, 21
— schaal 11, 13, 16, 41, 43, 48
— waaier 13
Regelmatig net 16, 21
— evenwijdig schalenstel . 16
Rekenkundig gemiddelde 48, 120, 202
Rekenliniaal 1, 6, 7, 44
Relatieve bereik . . 30, 42, 53
— nauwkeurigheid . . 42, 53
Reproductie 29, 256

Schaal . . . 3, 10, 11, 13, 63
functie — 11, 13, 16, 28, 33, 36, 43
gebroken — 248
kwadratische — . . . 41, 43
lengte van een — . 26, 33, 34
Bladz.
logarithmische — 1, 3, 21, 41, 43, 48, 256
macht- — 41, 48
metrische — . 11, 13, 33, 165
omgekeerd kwadratische — 41, 43
onregelmatige — . . . 11
projectieve — 39, 48
rechte — 61, 62
reciproke — 41, 48
regelmatige — 11, 13, 16, 41, 43, 48
segmentaire — 41, 43, 46, 202
Schaaldeel 11
Schaaleenheid 44, 256
Schaallengte 26, 33, 34
Schaalnomogram . . 18, 26, 61
Schaalpunt 3, 11
Schaalstok 44
Schalenboekje 256
Schalenstel 14, 16
evenwijdig — . . . 61, 62, 64
gebogen — 154
hulp- — 154, 158, 182
kegelsnede- — . 168, 170
recht — 61, 62
regelmatig evenwijdig — . 16
snijdend — 61, 62, 94
Scheefhoekige assen . . 89, 109
Scheepsbouw . . . , . . 263
Scheiding der veranderlijken 31, 55, 214, 255
Scheidingswaarde 248
Schilling (Prof. Dr. Fr.) . . 257
Schoklitsch (A.) 258
Schwerdt (H.) 14, 257
Schijnbare orde 58
Seco de la Garza (Ricardo) 258
Secundaire voorstellingswijze 5
Seefehlner (E. E.) . . , . 258
Segmentaire schaal 41, 43, 46, 202
Snijdend schalenstel . 61, 62, 94
Snijkromme 14, 16, 36
Sociale wetenschappen . . 264
Somdrager 200

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.
Somschaal 201
Soorten 7, 8
Soortnamen 8
Soortveranderlijke . 7, 8, 25, 26
Soreau (R.) 3, 55, 219, 233, 257
Statistische betrekking . . 8
Steevensz. (Ir. J. M.) . . 3, 258
Steiner 2
Stelling van *Mac Laurin* . . . 171
— — *Menelaos* 103, 116, 224
— — *Pascal* 189
Stelsel betrekkingen . . . 82
Stereometrie 262
Sterrenkunde 262
Stoplijn 238
Stralen 166
Stralenbundel **13**, 63
Strook 12, **13**
Symmetrie van gegevens . . 171
Symmetrische betrekking . . 31

Taak der Nomografie . . . 3, 5
Taalkundige voorstelling . . 5
Tabel 1, 5, 6
Tangenslijn 173
Tangentiëele coördinaten . 3
Tavernier-Gravet 44
Teekendriehoek 255
Teekenen van nomogrammen 255
Teekens 259
Theoretisch afgeleide betrekking 5
— — formule 7
Toegangslijn 239
Toegepaste Mechanica . . 263
Toegevoegde punten . . . 114
Toppunt **13**, 165, 167
Totale bereik 253, **254**
Transformatie 2
duale of reciproke — . . 3
Transversaal 13, 84, 116, 166, 173, 198, 225
Trekken van lijnen 255
Tijdsbepaling 262

Bladz.
Typen 58
Typische functievergelijkingen 55, 58

Vaes (Ir. F. J.) . . 3, 257, 258
Variabele 7
Veranderlijken 7, 8, 30
combineeren der — . . . 255
gemeenschappelijke — . . 82
keuze der — 254
onvolledige — **7**, 8, 26
scheiding der — 31, **55**, **214**, 255
volledige — **7**, 8
Veranderlijke grootheid . . 7
Vereenvoudigde constructieformules **157**, 159, 162
Vergelijking 1, 3, 5, **30**
— met gescheiden veranderlijken **31**, **32**, 49, 54, 218
— van een lijn 1
Verkorte logarithmische harp 44, **46**
Verkorting der schaaldeelen . 120
Verlenging der schaaldeelen 120
Verloop van een betrekking 6, 28
Verplaatsing van den oorsprong **179**, 219
Vervormde schalen 115
Vervorming . . . 29, 115, 125
analytische — 116
grafische — 116
projectieve — 2, **114**
Verteekening 256
Vierdegraadsvergelijking . . 211
Vierdegraadskromme . . . 211
Vierkantsvergelijking . 166, 189
Vlakke Driehoeksmeting . . 262
Vlakke Meetkunde 262
Vluchtpunt 115, 167, 184
Volgorde van soorten . . . 8
Volledige veranderlijke . **7**, 8
Voorstelling(swijze) . . . 1
algebraïsche — 5
figuurlijke — 6
grafische — 1, 3, 4, 7, **18**, **26**, 62

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

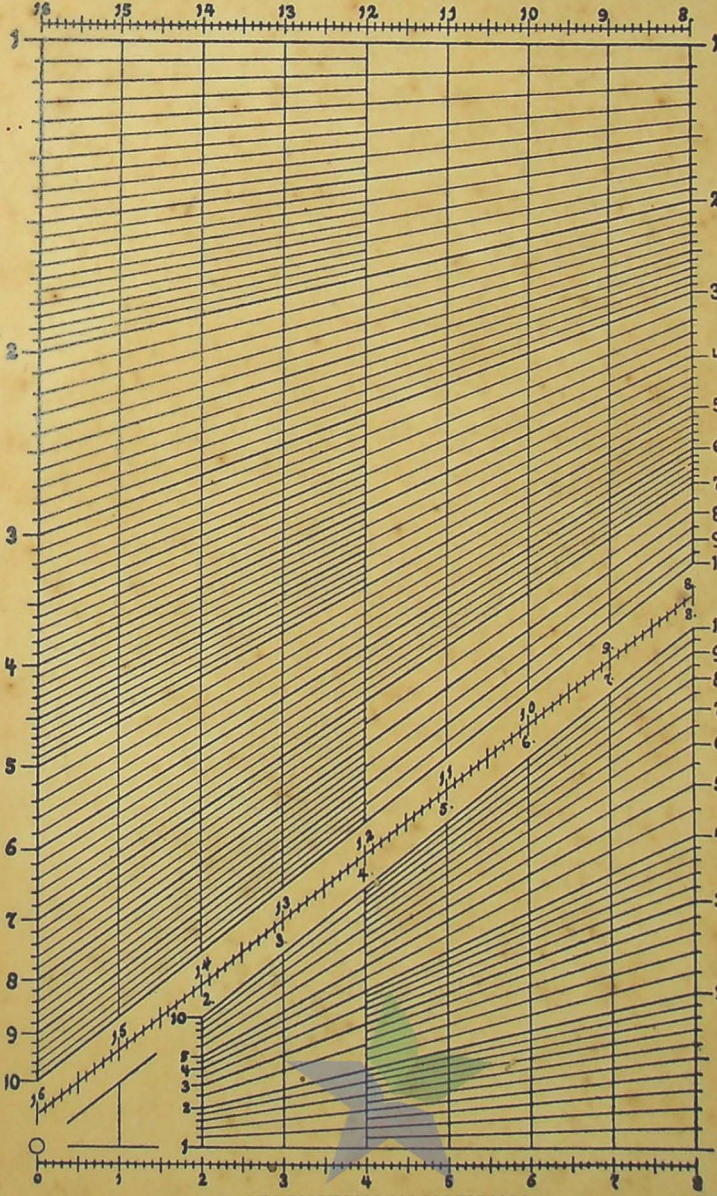
	Bladz.
meetkundige —	5
primaire —	**5**, 38
rekenkundige —	5
secundaire —	5
taalkundige —.	5
Voorstelling van betrekkingen	3, 5, 8
— — vergelijkingen . .	3
— — een veranderlijke .	11
— — een waarde . . .	10
Voorstellingsmiddelen . . .	5
Vouwen van het papier . .	29
Vrije coëfficienten	55
Vrije dubbelschaal	49
Waaier	**13**, 62
regelmatige —	**13**
Waarden . . 8, 10, 33, 62, 254	
geheele —	8
reëele —	7
scheidings- —	248
Waardenstel	**14**, 49, 62
Waarschuwingslijn	239
Warmteleer	263
Waterbouwkunde	263
Wenner (Dr. Fritz) . . .	257
Werkmeister(Prof.Dr.-Ing.P.)	257
Werktuigbouw	263
Woordelijke omschrijving .	5
Wortels van een vierkantsvergelijking	189
— — — derdemachtsververgelijking	207
Zwart-wit-schaal . . .	**26**, 27

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA
PERPUSTAKAAN NASIONAL RI

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Logarithmische harp.

voor schaaleenheden van 2 tot 16 centimeter.



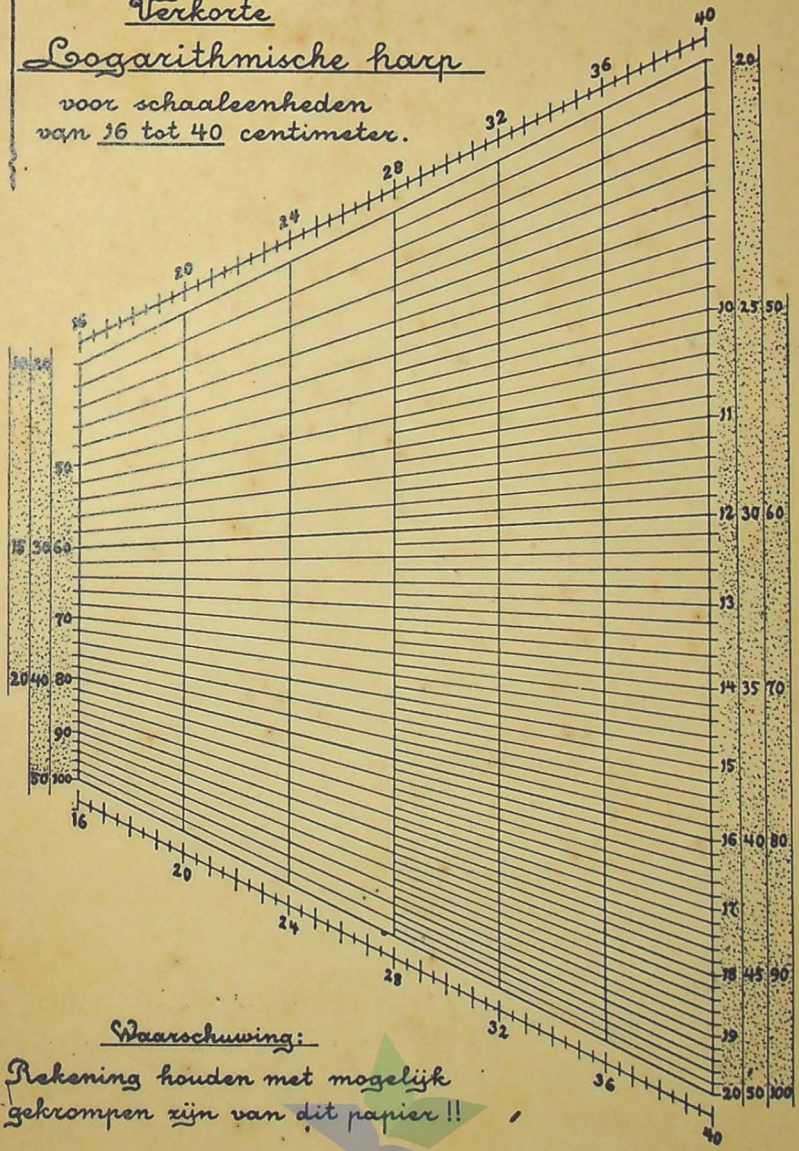
Waarschuwing: Rekening houden met mogelijk gekrompen zijn van dit papier !!

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Verkorte
Logarithmische harp

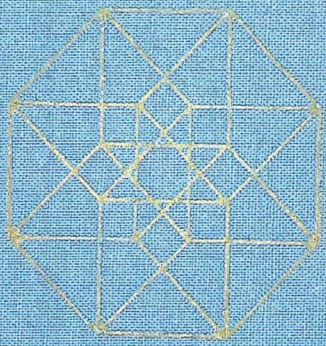
voor schaaleenheden
van 16 tot 40 centimeter.



Waarschuwing:

Rekening houden met mogelijk gekrompen zijn van dit papier !!

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA



BIBLIOTECA NACIONAL