# ELEMENTAIRE REKENKUNDE

LEERBOEK TEN DIENSTE VAN HET ONDERWIJS AAN KWEEKSCHOLEN

DOOR

W. NIEUWENHUIJSE,
LEERAAR AAN DE RIJKSKWEEKSCHOOL VOOR ONDERWIJZERS EN ONDERWIJZERESSEN TE OOSTBURG.

Ing. f 2,50.
Gec. f 2,75.

FIRMA A. J. BRONSWIJK — OOSTBURG — 1926.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Tan Khunghan
OCK

V-65

# ELEMENTAIRE REKENKUNDE

LEERBOEK TEN DIENSTE VAN HET ONDERWIJS AAN KWEEKSCHOLEN

DOOR

W. NIEUWENHUIJSE,
LEERAAR AAN DE RIJKSKWEEKSCHOOL VOOR ONDERWIJZERS EN ONDERWIJZERESSEN TE OOSTBURG.

FIRMA A. J. BRONSWIJK — OOSTBURG — 1926.

DEP. PEND. & KEBUDAYAAN
PERPUSTAKAAN
DJAKARTA
PERPUSTAKAAN NASIONAL RI

$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{7}{20}$ Opg. dec. breuk, waarin bevat de factoren van de

$\frac{5}{7}$ $\frac{6}{13}$ $\frac{8}{17}$ Eenvoudige repet. br. waarin onderdeel van de

$\frac{7}{12}$ $\frac{3}{35}$ $\frac{11}{70}$ Gem. rep. br. waarin het repetend

$\frac{7}{12} = 0,58\overline{3}$ 2 cijfers repetitum niet, want $\frac{7}{12} = \frac{7}{2^2 \times 3}$

$\frac{7}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 5} = 0,00\overline{437}$ 4 " " "

DRUKKERIJ FIRMA A. J. BRONSWIJK. OOSTBURG

Aantal decimalen } Beide goed kennen!
som
rest.

Party 100 kg
Hoeveel % ingewogen,
die 40 kg niet betaald

96 kg betaald
hoeveel % betaald over
4 % ingewogen
$\frac{40}{9,6}$ % overwicht.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

## VOORBERICHT.

Het leerboek dat hiermee verschijnt, onderscheidt zich van andere werkjes op dit gebied door een eenigszins andere rangschikking der leerstof:

1°. „Verhoudingen" en „Evenredigheden" zijn zoo ver mogelijk naar voren geplaatst.

2°. „Deelbaarheid" is gezet na „Reeksen".

De aanleiding hiertoe is gelegen in het feit, dat eigenschappen van Verhoudingen, Evenredigheden en Reeksen door de leerlingen beter gekend worden dan de eigenschappen der Deelbaarheid. Collega's, die het vak Rekenkunde doceeren, zullen me toegeven, dat de eigenschappen en vraagstukken der Deelbaarheid voor kweekelingen inderdaad lastig zijn.

Bij het samenstellen van dit leerboek heb ik, vooral voor de grondbeginselen, hier en daar geraadpleegd de uitgebreide leerboeken van Prof. SHUH.

Het aantal vraagstukken is niet te groot genomen. Het lijkt me gewenscht, deze alle te laten maken. Den inzenders van de opgaven „Eindexamens Kweekscholen 1925" mijn oprechten dank voor hun moeite. Ten einde het leerboek zoo goed mogelijk aan zijn bestemming te doen beantwoorden, zou ik het zeer op prijs stellen, wanneer gebruikers mij nieuwe examenopgaven wilden toezenden!

Ten slotte rest mij nog mijn hartelijken dank te betuigen aan den Heer J. VAN DER WORP, die mede dit leerboek gelezen heeft en aan wien ik menige belangrijke verbetering te danken heb.

Voor welwillende op- en aanmerkingen houd ik mij aanbevolen.

*W. NIEUWENHUIJSE.*

OOSTBURG, April 1926.

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.
28-6-2010
165/Pan.Museum/10
7205760
00003791054
Museum Pusat

## ERRATA.

Blz. 5, 11e r. v. o., lees: hetgeen.
Blz. 9, lees: 7 6 3 4 (negent. st.)
Blz. 13, lees: q, in plaats van g (viermaal).
Blz. 25, 7e r. v. o., lees: $p \times a \times (b : a)$
Blz. 28, 9e r. v. o., lees: ten opzichte.
Blz. 34, 11e r. v. o., lees: eigenschappen.
5e r. v. o., lees: $(a \neq o)$
Blz. 36, 4e r. v. o., lees: $(\sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{a})^n$
Blz. 40, 9e r. v. o., lees: $\frac{a^n - b^n}{a - b}$
Blz. 43, middenin,
lees: $\sqrt{3 \times 9 + 22} = \sqrt{27 + 22} = \sqrt{49} = 7$.
Blz. 51, 12e r. v. o. : = weggevallen.
Blz. 57, 2e r. v. b., lees: hierboven geven
Blz. 66, 3e r. v. b., lees: hoogstens
Blz. 78, 3e r. v. o., lees: (eig. G 2)
Blz. 90, 4e r. v. b., lees: Dit geval
Blz. 97, 7e r. v. b., lees: een even veelvoud
Blz. 100, 11e r. v. o., lees: $\times$ 4.
Blz. 107, 3e r. v. o., lees: 47.
Blz. 113, 8e r. v. b., lees: 28 en 16.
Blz. 114, middenin: + ____ moet de tweede maal wegvallen.
Blz. 118, 9e en 10e r. v. b.: c.G. en d.G. verwisselen.
Blz. 144, 10e r. v. b., lees: en richt.
Blz. 145, opgave 14, lees: Bepaal de som van 20 termen der nieuwe reeks.
Blz. 147, onderste regel: 3 maal + weggevallen.
Blz. 148, 2e r. v. b.: — moet = worden.
Blz. 153, 15e r. v. b., lees: terwijl de n-de macht.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

## Inleiding.

De *rekenkunde* houdt zich bezig met de leer der *getallen*. In dit leerboek wordt gesproken over drie soorten van getallen: de *geheele* of *natuurlijke*, de *gebroken* en de *onmeetbare* getallen. Het „getal" nul neemt een afzonderlijke plaats in. Deze getallen kunnen gecombineerd worden; dan ontstaan de *verbindingen* of *bewerkingen*.

Door een *bepaling* of *definitie* wordt nauwkeurig aangegeven, waardoor de zaak, waarover men het heeft, zich van andere zaken onderscheidt, zoodat geen verwarring mogelijk is. Een bepaling kan zijn *essentiëel* (Latijn esse = zijn), d.w.z. zij geeft aan, hoe iets „is", of *genetisch* (Grieksch genesis = wording), d.w.z. zij vertelt, hoe iets „ontstaat".

Is eenmaal een zaak gedefiniëerd, dan gaat men verder verschillende *eigenschappen* opsporen, waardoor zij gekenmerkt wordt. Deze eigenschappen worden neergelegd in zoogenaamde *stellingen* of *theorema's*. Die stellingen moeten *bewezen* worden, d.w.z. door een redeneering moet met behulp van voorafgaande bepalingen en (of) eigenschappen de waarheid aangetoond worden.

De gang van het bewijs kan zijn *analytisch* (analyse = ontleding) of *synthetisch* (synthese = samenstelling). Een bewijs is analytisch, wanneer men uitgaat van hegeen bewezen moet worden en terugredeneerend eindelijk stuit op eigenschappen, waarvan de waarheid reeds aangetoond is. Synthetisch noemt men het bewijs, wanneer men, uitgaande van reeds bewezen feiten, verder redeneerend het gestelde aantoont.

Grondwaarheden, die men door ervaring kent, worden *axioma's* genoemd. De rekenkunde steunt op axioma's. Laten we een voorbeeld nemen. Men weet, dat een grootheid A = een grootheid B (een dergelijke uitdrukking heet een *gelijkheid*) en *bovendien*, dat de grootheid B = een grootheid C. Nu besluit men hieruit: de grootheid A = de grootheid C. Dit axioma

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

drukt uit, dat het teeken = *transitief* is (transitief = overdraagbaar).

In het volgende komen nog eenige teekens, die vooraf dienen gekend te worden:

$b < a$, lees: b kleiner dan a,
$a > b$, lees: a grooter dan b,
$a \neq b$, lees: a ongelijk aan b,
} *ongelijkheden.*

Wil men eenige getallen als één getal beschouwd zien of wenscht men de volgorde der bewerkingen te veranderen, dan gebruikt men *haakjes* ( ), *accolades* { }, of *teksthaken* [ ]. Latijn: ad collum = om den hals.

Met betrekking tot Gelijkheden en Ongelijkheden heeft men vele grondwaarheden, waaraan niemand twijfelt en die telkens gebruikt worden. We willen eenige van die „van zelf sprekende" eigenschappen noemen:

*Worden gelijke getallen met hetzelfde getal vermeerderd, dan zijn de uitkomsten weer gelijk, enz.*

*Worden gelijke getallen met hetzelfde getal verminderd, dan zijn de uitkomsten weer gelijk, enz.*

*Worden ongelijke getallen met hetzelfde getal vermeerderd, dan is die uitkomst het grootst, welke ontstaan is door optelling van dat gelijke getal bij het grootste getal.*

*Worden ongelijke getallen met hetzelfde getal verminderd, enz.*

We hebben er slechts eenige aangeduid (er zijn er veel meer!) om den lezer te laten zien, dat in de Rekenkunde vele „voetangels en klemmen" liggen!

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

## De telling. Talstelsels.

§ 1. Wanneer op tafel eenige knikkers liggen, dan kunnen we spreken van een **hoeveelheid** knikkers; elk van de knikkers wordt **een element** van de hoeveelheid genoemd. Bevinden zich ergens eenige lucifers, geldstukken, potlooden, enz., dan kunnen we ook spreken van een hoeveelheid, die dan uit *ongelijksoortige* elementen bestaat, in tegenstelling met onze eerste hoeveelheid, die *gelijksoortige* bevatte.

Wanneer we de elementen van een hoeveelheid willen *tellen*, spreken we de volgende woorden uit: een, twee, drie, vier, enz. Zouden we iemand, die niet aanwezig is, willen duidelijk maken, hoe we geteld hadden, dan zouden we hem kunnen schrijven: We telden aldus: 1, 2, 3, 4, enz." Zoowel de rij woorden als de rij teekens worden **natuurlijke getallen,** kortweg **getallen,** genoemd. Soms maakt men nog onderscheid tusschen *benoemde* en *onbenoemde* getallen. In het eerste geval wordt de naam van de elementen, die geteld zijn, er bij vermeld. Zoo is 7 knikkers een benoemd, 7 daarentegen een onbenoemd getal.

§ 2. Gesteld, we telden de elementen eener hoeveelheid en vonden daarvoor als antwoord zeven honderd zestien. Een ander, die bij onze telling niet aanwezig is geweest, wilde het eveneens doen. Men zou zeggen, het spreekt vanzelf, dat het resultaat in beide gevallen (mits goed geteld!) hetzelfde zal zijn. Toch moet men door een redeneering, berustende op de ervaring, dat het geoorloofd is twee elementen van plaats te doen verwisselen, aantoonen, dat het resultaat inderdaad hetzelfde moet zijn. Dit kunnen we aldus uitdrukken als de hoofdeigenschap van het tellen:

**T. Iedere telling van een hoeveelheid voert tot hetzelfde resultaat.**

§ 3. Stellen we ons voor, dat we een groote hoeveelheid knikkers moeten tellen. Dan zal het raadzaam zijn een zekere regelmaat in acht te nemen, op een bepaalde manier te werk te gaan. We groepeeren de knikkers dan ook tot hoopjes van tien; gesteld, er blijven 7 kn. over, die dus niet meer tot zoo'n hoopje vereenigd kunnen worden. De hoopjes van tien voegen we tien aan tien bij elkaar tot groepen van honderd; gesteld, er

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

blijven 5 hoopjes van tien over. De groepen van honderd vereenigen we tien aan tien tot duizendtallen. Laten we veronderstellen, dat we nu 8 duizendtallen hebben, terwijl er nog 4 groepen van honderd overblijven. Het resultaat van onze telling is derhalve, dat er zijn: 8 duizendtallen, 4 honderdtallen, 5 tientallen en 7 knikkers.

Men heeft afgesproken, dat bij het neerschrijven van een getal de woorden tientallen, honderdtallen, duizendtallen, enz. kunnen weggelaten worden en de gevonden resultaten steeds in dezelfde volgorde (d.w.z. van rechts naar links) neergeschreven worden. Aldus: er zijn 8457 knikkers.

Voor het neerschrijven der getallen hebben we nu slechts een beperkt aantal teekens noodig, cijfers genaamd, n.l. voor de getallen een tot en met negen.

Had men nu b.v. bij het groepeeren der knikkers alle honderdtallen kunnen vereenigen tot duizendtallen, dan had men opgeschreven, dat er geen enkel honderdtal of nul honderdtallen aanwezig waren. Strikt genomen is nul geen getal; het duidt aan, dat een hoeveelheid geen enkel element bevat.

Merken we nog op, dat in 4946 de eerste 4 van links 4 duizendtallen en de andere vier 4 tientallen aanwijst. De *werkelijke waarde* der cijfers is dus resp. 4000 en 40. Men zegt wel eens, dat de *volstrekte waarde* van ieder cijfer 4 is en de *betrekkelijke waarde* resp. 1000 en 10.

§ 4. In de voorgaande § hebben we gesproken over het *tientallig stelsel*. Tien, honderd, duizend, enz. worden de *termen der schaal* genoemd. Niemand zou ons kunnen beletten om een andere groepeering te gebruiken. (Alleen zouden we dan niet in overeenstemming zijn met de gewone schrijfwijze der getallen!) We hadden b.v. groepen van zeven kunnen vormen, deze zeventallen weer tot nieuwe groepen van zeven zeventallen kunnen samen nemen, enz.

Hadden we dan onze schrijfwijze er mee in overeenstemming gebracht, dan zouden we gerekend hebben in het *zeventallig* stelsel. Wanneer we nu telden en daarbij de getallen ook zouden opschrijven, dan zouden we krijgen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, enz. Het is duidelijk, dat het aparte cijfer voor zeven, acht en negen mankeert. Zoo zal men $49 = 7^2$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

(tient. st.) moeten schrijven 100, enz. Nog zij opgemerkt, dat we voor de getallen in het nieuwe stelsel toch weer de namen uit het tient. stelsel gebruiken; we denken nu eenmaal niet anders dan in laatstgenoemd stelsel.

Op dezelfde manier kan men geraken tot het *acht-*, het *vijf-*, het *dertientallig* stelsel. In dit laatste komt men evenwel teekens te kort. Immers tien, elf en twaalf vormen nog weer niet een nieuw dertiental en mogen dus niet geschreven worden als 10, 11 en 12. Dikwijls neemt men hiervoor nieuwe teekens, b.v. t, e, w.

Sporen van een *zestigtallig* stelsel vindt men nog in: de verdeeling van den cirkelomtrek in 360 graden, van een graad in 60 minuten, van een minuut in 60 seconden, afkomstig van de oude Babyloniërs en Assyriërs. Deze rekenden het jaar ook op 360 dagen.

§ 5. Na het voorgaande kunnen we een getal in een „vreemd" talstelsel omvormen tot een getal in het tient. stelsel. Kiezen we 7634 (negent. st.) om dit om te zetten in het tient. st. We merken op, dat er 4 eenheden zijn, 3 negentallen, 6 groepen van $9 \times 9 = 9^2$ en 7 hoopjes van $9 \times 9 \times 9 = 9^3$. We krijgen dan 7634 (negent. st.) $= 7 \times 9^3 + 6 \times 9^2 + 3 \times 9 + 4 = 5620$ (tient. st.)

We hadden ook anders te werk kunnen gaan. Die 7 groepen van $9^3$ kunnen we herleiden tot $9^2$ tallen, samen $63 + 6 = 69$. Deze laatste herleiden we tot 9-tallen; dit worden er $69 \times 9 = 621$, samen met de reeds aanwezige $621 + 3 = 624$. Blijkbaar wordt nu het getal $624 \times 9 + 4 = 5620$. De heele bewerking kunnen we aldus neerschrijven:

| 7 | 6 | 3 | 4 | (tient. st.) |
|---|---|---|---|---|
| $7 \times 9 = 63$ | | | | |
| | $69 \times 9 = 621$ | | | |
| | | $624 \times 9 = 5616$ | | |
| | | | 5620 | (tient. st.) |

§ 6. Omgekeerd kunnen we een getal in het tient. stelsel omvormen tot een getal in een „vreemd" talstelsel. Kiezen we het getal 8764 om dit om te zetten in het negentallig stelsel. Dit getal ligt tusschen $9^5 = 59049$ en $9^4 = 6561$. Er blijkt één $9^4$ tal aanwezig te zijn; over $8764 - 6561 = 2203$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nu is $9^3 = 729$ en derhalve zijn er drie $9^3$ tallen; over $2203 - 3 \times 729 = 16$. Hierbij is geen enkel $9^2$ tal. Wel is er nog één negental bij; over $16 - 9 = 7$. Resultaat: 8764 *(tient. st.)* $= 1 \times 9^4 + 3 \times 9^3 + 0 \times 9^2 + 1 \times 9 + 7 = 13017$ *(negent. st.)*

Een betere methode van omvorming is de volgende: We gaan eerst zien, hoeveel negentallen aanwezig zijn; dit worden er 973 en er blijven 7 eenheden over. Die 973 negentallen vereenigen we tot 108 groepen van $9^2$; er blijft één enkel negental over. We groepeeren nu die 108 $9^2$ tallen tot 12 $9^3$ tallen; geen enkel $9^2$ tal is dan meer aanwezig. Die twaalf $9^3$ tallen zijn nog gelijk aan $1 \times 9^4 + 3 \times 9^3$, zoodat het resultaat wordt: 8764 *(tient. st.)* $= 1 \times 9^4 + 3 \times 9^3 + 0 \times 9^2 + 1 \times 9 + 7 =$ 13017 *(negent. st.)* We kunnen de bewerking aldus neerschrijven:

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 8764 (tient. st.) | = 13017 *(negent. st.)* |
| 9 | 973, rest 7. | |
| 9 | 108, rest 1. | |
| 9 | 12, rest 0. | |
| | 1 , rest 3. | |

§ 7. *Romeinsche Cijfers.*

Bij de schrijfwijze der getallen, zooals we die thans gebruiken, wordt de waarde van een cijfer behalve door zijn vorm ook bepaald door de plaats die het inneemt. Zoo heeft in 4742 de 4 aan de linkerhand de werkelijke waarde 4000, de andere 4 daarentegen de werkelijke waarde 40.

Zoo iets is bij de Romeinsche schrijfwijze niet mogelijk, een X b.v. blijft tien, onafhankelijk van de plaats waar deze staat. Men vindt de waarde van het geheele getal door de waarden der verschillende cijfers op te tellen. Een uitzondering wordt gemaakt voor I, X en C, wanneer die vóór een grootere waarde geplaatst worden; in dit geval toch wordt hun waarde van die van het volgende cijfer afgetrokken.

Eenige getallen volgens de Romeinsche schrijfwijze:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | = 1. | V | = 5. | IX | = 9. |
| II | = 2. | VI | = 6. | X | = 10. |
| III | = 3. | VII | = 7. | XX | = 20. |
| IV | = 4. | VIII | = 8. | XXX | = 30. |

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| XL | = 40, | XC | = 90. | $\overline{\text{M}}$ | = 1000. |
| L | = 50. | C | = 100. | $\overline{\text{XII}}$ | = 12000. |
| LX | = 60. | CC | = 200. | $\overline{\text{XXIII}}$ | = 23000. |
| LXX | = 70. | D | = 500. | $\overline{\text{D}}$ | = 500000. |
| LXXX | = 80. | CM | = 900. | $\overline{\text{X}}$ | = 1000000. |

Zooals men ziet, beteekent een horizontale streep boven een cijfer, dat dit met 1000 vermenigvuldigd wordt. Herleiding van een getal:

$\overline{\text{X}}\,\overline{\text{X}}$ DCXIV DCCXXXII = 2.000.000 + 614.000 + 732 = 2.614.732.

Wanneer men eens nagaat hoe ingewikkeld de schrijfwijze van een getal is (neem b.v. het betrekkelijk kleine getal 888), dan zal het geen verwondering wekken, dat de Romeinen het in de reken- en wiskunde niet zoo ver gebracht hebben.

Zooals we nu die cijfers schrijven, zijn ze niet altijd geweest. B.v. voor duizend schreef men CIↃ, voor vijfhonderd IↃ. In den loop der tijden zijn de cijfers langzamerhand veranderd.

## De optelling.

§ 8. Wanneer a en b resp. het getal elementen van twee hoeveelheden $H_1$ en $H_2$ voorstellen, dan wordt het getal elementen van de nieuwe hoeveelheid, die men verkrijgt door de eerste twee bij elkaar te voegen, **de som** van a en b genoemd, Ook de uitdrukking a + b wordt **som** genoemd, a en b heeten **de termen** van de som.

Het vormen van de som van twee getallen noemt men **optellen.** De **optelling** wordt als de **eerste hoofdverbinding** der getallen aangeduid.

Vanwege het groote belang, dat gelegen is in het goed vast leggen van een definitie vermelden we nog eens kort de

**Bepaling van Som: Onder de som a + b verstaat men het getal elementen, dat verkregen wordt, wanneer twee hoeveelheden, die resp. a en b elementen bevatten, samengevoegd worden.**

§ 9. **O 1. Commutatieve eigenschap der optelling** (eig. der verwisselbaarheid; lat. commutare = verwisselen).

*Te bewijzen:* a + b = b + a.

*Bewijs:* We stellen ons voor, dat we aldus de som van a en b vormen: We tellen de elementen van de eerste hoeveelheid $H_1$

BAC. PERPUSTAKAAN DJAKARTA

door op te noemen de getallen 1, 2, .... tot en met a. Daarna voegen we de elementen van de tweede hoeveelheid $H_2$ bij de reeds aanwezige en gaan door met tellen (dus niet meer beginnen met 1, maar met het op a volgende getal a + 1). We vinden als resultaat a + b. Nu kan men de nieuwe hoeveelheid (somhoeveelheid genoemd) op een andere manier tellen, door te beginnen met $H_2$; 1, 2, 3 .... tot en met b. Daarna zetten we de telling voort over de elementen van $H_1$ (te beginnen met het op b volgende getal b + 1). Het resultaat b + a moet hetzelfde zijn als bij de eerste telling (eig. **T.**)

*Conclusie:* a + b = b + a.

§ 10. Onder (a + b) + c of a + b + c verstaat men het vormen van de som der getallen a en b en daarna het verbinden van een derde getal c met die gevonden som, opnieuw door sommeering of optelling. Dit is tot meerdere getallen uit te breiden. Dikwijls, wanneer men met meer dan 2 getallen te doen heeft, spreekt men van een *gedurige som.*

**Bepaling. Een gedurige som a + b + c + d .... ontstaat, wanneer men bij de som van a en b optelt het getal c, bij die uitkomst d, enz.**

*Opmerking.* Deze definitie is een voorbeeld van een genetische, die van § 8 van een essentieele bepaling.

In het vervolg zullen we alleen van som spreken, zoodat dit ook gedurige som kan beteekenen.

§ 11. **O 2. Associatieve eigenschap der optelling** (eig. der samenneembaarheid; lat. associare = vereenigen).

*Te bewijzen:* (a + b) + c = a + (b + c.)

*Bewijs.* Wanneer we ons voorstellen 3 hoeveelheden, die resp. a, b en c elementen bevatten, dan is het onverschillig, hoe we de somhoeveelheid, door deze drie gevormd, gaan tellen. Het resultaat zal hetzelfde zijn, of we eerst $H_1$ tellen, daarna de telling voortzetten over $H_2$ en ten slotte over $H_3$, óf dat we beginnen met $H_2$, daarna $H_3$ tellen en eindelijk de telling van $H_1$ ~~er aan~~ toevoegen. We kunnen ook zeggen: a, b en c verkeeren in dezelfde omstandigheden, spelen dezelfde rol.

We kunnen de eigenschap tot meer getallen uitbreiden, hetgeen in formule luidt:

a + b + c + d + ..... = a + (b + c + d + ..... .)

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 12. **O 3. Algemeene associatieve eigenschap der optelling:**
$a + b + c + d + e + f + g =$
$a + (b + c) + d + (e + f + g)$.

In woorden: **De som van eenige getallen verandert niet van waarde, wanneer men de termen tot groepen vereenigt en ze door hun som vervangt.**

Van rechts naar links gelezen: *Een som verandert niet van waarde, wanneer men een of meer termen in deelen splitst en als afzonderlijke termen beschouwt.*

*Te bewijzen:* $a + b + c + d + e + f = a + (b + c) + (d + e + f.)$

*Bewijs:* We kunnen ons voorstellen, dat de getallen a tot en met f zijn ontstaan door telling van de hoeveelheden $H_1$ tot en met $H_6$. Nu is het onverschillig, hoe we de groote somhoeveelheid tellen (eig. **T**), of we beginnen met $H_1$, de telling voortzetten over $H_2$ enz., tot we ook alle elementen van $H_6$ hebben meegeteld, of dat we eerst $H_2$ en $H_3$ samenvoegen, bovendien ook $H_4$, $H_5$ en $H_6$ en de telling nu beginnen met $H_1$, daarna voortzetten over de nieuw gevormde tweede hoeveelheid en ten slotte over de nieuw gevormde derde hoeveelheid.

§ 13. **O 4. Algemeene commutatieve eigenschap der optelling:**
$a + b + c + d + e = c + a + d + e + b$.

In woorden: (ook van rechts naar links gelezen): **Een som is onafhankelijk van de volgorde der termen.**

*Te bewijzen:* $a + b + c + d + e = c + a + d + e + b$.

*Bewijs:* We hebben hier een hulpstelling noodig: Twee naast elkaar staande termen mogen verwisseld worden, hetgeen we aldus kunnen bewijzen:

$p + g + r + s + t$
$= p + g + (r + s) + t$ ---------- eig. **O 3.**
$= p + g + (s + r) + t$ ---------- eig. **O 1.**
$= p + g + s + r + t$ ---------- eig. **O 3.**
(van rechts naar links gelezen.)

Deze hulpstelling kunnen we eenige malen toepassen:

$a + b + c + d + e$
$= a + c + b + d + e$
$= c + a + b + d + e$
$= c + a + d + b + c$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$= c + a + d + e + b.$

Hiermee is het gestelde bewezen.

*Opmerkingen:* 1. Strikt noodzakelijk is het niet, om bij **O 3** de som van eenige op elkaar volgende termen te nemen. De in deze § behandelde eigenschap geeft ons het recht om ook de som te nemen van elk willekeurig aantal termen, niet op elkaar volgend.

2. De eigenschappen **O 1** tot en met **O 4** gaan door voor ieder talstelsel; immers, van de bijzondere schrijfwijze der getallen is geen gebruik gemaakt.

3. Het bewijs van eig. **O 4** is gegeven met behulp van voorafgaande eigenschappen. Dit had ook het geval kunnen zijn bij het bewijs van eig. **O 3**. Met het oog op de jonge leerlingen is dit niet gedaan, maar er is een bewijs gegeven, direct steunende op de hoofdeigenschap van het tellen.

§ 14. Bij de uitvoering van de bewerking der optelling kunnen we 3 gevallen onderscheiden:

1°. Optellen van getallen van één cijfer: $7 + 9$.

2°. Optellen van getallen, waarbij er één uit 1 cijfer bestaat, het andere uit meerdere cijfers: $286 + 7$.

3°. Optellen van getallen, uit een willekeurig aantal cijfers bestaande: $286 + 312$.

De eerste 2 gevallen worden uit het hoofd berekend. Alleen op de lagere school zal men nog wel **O 3** toepassen. Men „vult" immers, zoo noodig, het laatste cijfer tot een tiental „aan".

Bij het 3e geval passen we **O 3** toe, zoowel van rechts naar links, als omgekeerd:

$$\begin{array}{r} 286 = 200 + 80 + 6 \\ 312 = 300 + 10 + 2 \\ \hline 500 + 90 + 8 = 598. \end{array}$$

Zoo noodig wordt nogmaals gesplitst om nieuwe tientallen, honderdtallen, enz. te kunnen vormen.

### De aftrekking.

§ 15. Gesteld, er zijn twee getallen a en b gegeven ($b > a$). We willen nu een derde getal zoeken, dat bij a opgeteld, b oplevert. We zouden dit zoo kunnen schrijven: $a +$ een getal $x = b$. Meestal geeft men er dezen vorm aan: $b - a =$ ____. Dit

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

onbekende getal x wordt het **verschil** der getallen a en b genoemd. De uitdrukking b — a wordt eveneens een **verschil** genoemd, b is het **aftrektal**, a de **aftrekker**.

Het zoeken van een verschil van 2 getallen wordt **aftrekken** genoemd. De **aftrekking** wordt als de **tweede hoofdverbinding** der getallen aangeduid.

Blijkens de definitie is aftrekker + verschil = aftrektal. Met behulp van deze bepaling en de eigenschappen der sommen zullen we trachten de verschillende eigenschappen der verschillen aan te toonen. Aangezien a + x = x + a (eig. **O 1**) zou men ook kunnen vragen naar het getal x, waarbij het getal a moet gevoegd worden om b te vinden. Men zou dan hetzelfde resultaat b — a gevonden hebben. We houden ons in het vervolg aan de eerste bepaling.

Aangezien b > a is, heeft a — b voor ons geen zin. Men kan in geen geval zeggen b — a = a — b (tenzij a = b is!), zoodat de aftrekking *geen commutatieve eigenschap* bezit, waarom aftrektal en aftrekker geen gemeenschappelijken naam kunnen hebben.

**Bepaling van Verschil: Onder het verschil b — a verstaat men het getal, dat bij a opgeteld, b oplevert.**

§ 16. **A 1. Een verschil verandert niet van waarde, als men aftrektal en aftrekker met eenzelfde getal vermindert:**

(b + p) — (a + p) = b — a. b > a.

Van rechts naar links gelezen: *Een verschil verandert niet van waarde, als men aftrektal en aftrekker met eenzelfde getal vermeerdert.*

*Te bewijzen:* (b + p) — (a + p) = b — a.

*Bewijs.* We zullen het bewijs geleverd hebben, als we met ons bekende eigenschappen aangetoond hebben, dat aftrekker + verschil = aftrektal. Nu beschouwen we (a + p) als aftrekker en b — a als verschil. Nu heeft (a + p) + (b — a) dezelfde beteekenis als a + p + (b — a), zie de bep. van *gedurige som*. Volgens eig. **O 4** is het geoorloofd de termen in andere volgorde te nemen, derhalve a + p + (b — a) = a + (b — a) + p. Gaan we nu over tot sommeering, dan is volgens de bepaling van *verschil:* a + (b — a) = b, zoodat a + (b — a) + p = b + p, waarmee dan aangetoond is, dat aftrekker + verschil =

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

aftrektal, derhalve het gestelde bewezen is.

We willen nu nog eens het *Te bewijzen* en *Bewijs* in verkorten vorm opschrijven, zooals we dat voortaan zooveel mogelijk zullen doen:

*Te bewijzen:* $(b + p) - (a + p) = b - a$

of: $(a + p) + (b - a) = b + p$ -- bep. **verschil.**

*Bewijs:* $(a + p) + (b - a)$

$= a + p + (b - a)$ ---------- bep. **som.**

$= a + (b - a) + p$ ---------- eig. **O 4.**

$= b + p$ ---------- bep. **verschil.**

§ 17. **A 2. Een verschil wordt met een getal vermeerderd door dit op te tellen bij het aftrektal:**

$(b - a) + p = (b + p) - a$ $\qquad b > a.$

Van rechts naar links gelezen: *Een som wordt met een getal verminderd door een der termen met dat getal te verminderen.*

*Te bewijzen:* $(b - a) + p = (b + p) - a$

of: $a + \{(b - a) + p\} = b + p$ -- bep. **verschil.**

*Bewijs:* $a + \{(b - a) + p\}$

$= a + (b - a) + p$ ---------- eig. **O 3.**

$= \{a + (b - a)\} + p$ ---------- bep. **som**

$= b + p$ ---------- bep. **verschil.**

§ 18. **A 3. Een verschil wordt met een getal vermeerderd door dit af te trekken van den aftrekker:**

$(b - a) + p = b - (a - p)$.

Van rechts naar links gelezen: *Een getal wordt met een verschil verminderd door dat getal te verminderen met het aftrektal en bij die uitkomst den aftrekker op te tellen.*

*Te bewijzen:* $(b - a) + p = b - (a - p)$

of: $(a - p) + \{(b - a) + p\} = b$ - bep. **verschil.**

*Bewijs:* $(a - p) + \{(b - a) + p\}$

$= (a - p) + (b - a) + p$ -------- eig. **O 3.**

$= (a - p) + p + (b - a)$ ------ eig. **O 4.**

$= \{(a - p) + p\} + (b - a)$ ---- bep. **som.**

$= a + (b - a)$ ---- bep. **verschil.**

$= b$ bep. **verschil.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

§ 19. **A 4. Een verschil wordt met een getal verminderd door dit getal af te trekken van het aftrektal.**

$(b - a) - p = (b - p) - a.$

Van rechts naar links gelezen luidt de eigenschap precies hetzelfde.

*Te bewijzen:* $(b - a) - p = (b - p) - a$

of: $p + \{(b - p) - a\} = b - a$ -- bep. **verschil.**

of: $a + [p + \{(b - p) - a\}] = b$ -- bep. **verschil.**

*Bewijs:* $a + [p + \{(b - p) - a\}]$

$= a + p + \{(b - p) - a\}$ ---------- eig. **O 3.**

$= p + [a + \{(b - p) - a\}]$ ---------- eig. **O 2.**

$= p + (b - p)$ ---------- bep. **verschil.**

$= b$ ---------- bep. **verschil.**

§ 20. **A 5. Een verschil wordt met een getal verminderd door dat getal op te tellen bij den aftrekker:**

$(b - a) - p = b - (a + p)$

Van rechts naar links gelezen: *Een getal wordt verminderd met een som door dat getal te verminderen met den eersten term en deze uitkomst met den tweeden.*

*Te bewijzen:* $(b - a) - p = b - (a + p)$

of $(a + p) + \{(b - a) - p\} = b$ -- bep. **verschil.**

*Bewijs:* $(a + p) + \{(b - a) - p\}$

$= a + p + \{(b - a) - p\}$ ---------- bep. **som.**

$= a + [p + \{(b - a) - p\}]$ ---------- eig. **O 2.**

$= a + (b - a)$ ---------- bep. **verschil.**

$= b$ ---------- bep. **verschil.**

§ 21. **A 6. Het verschil van twee sommen is gelijk aan de som der verschillen, die men verkrijgt, wanneer men elken term van den aftrekker aftrekt van een term van het aftrektal:**

$(a + b + c) - (p + q + r) = (a - p) + (b - q) + (c - r)$

Van rechts naar links gelezen: *De som van eenige verschillen is gelijk aan het verschil van de som der aftrektallen en de som der aftrekkers.*

*Te bewijzen:*

$(a + b + c) - (p + q + r) = (a - p) + (b - q) + (c - r)$

of: $(p+q+r) + \{(a-p)+(b-q)+(c-r)\} = a+b+c$ ----

---- bep. **verschil.**



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*Bewijs:*

$(p + q + r) + \{(a - p) + (b - q) + (c - r)\}$
$= p + q + r + (a - p) + (b - q) + (c - r)$ ____ eig. **O 3.**
$= p + (a - p) + q + (b - q) + r + (c - r)$ eig. **O 4.**
$= \{p + (a - p)\} + \{q + (b - q)\} + \{r + (c - r)\}$ eig. **O 3.**
$= a + b + c$ ____ bep. **verschil.**

*Opmerking.* De eigenschappen **A 1** tot en met **A 6** gaan door voor ieder talstelsel; immers, van de bijzondere schrijfwijze der getallen is geen gebruik gemaakt.

§ 22. Bij de aftrekking der getallen kunnen we drie gevallen veronderstellen *(vergelijk met de optelling!)*

1°. Aftrekken van getallen van 1 cijfer: 9 — 4.

2°. Aftrekken van getallen, waarbij de aftrekker uit één cijfer bestaat, terwijl het aftrektal een willekeurig aantal cijfers heeft: 336 — 8.

3°. Aftrekken van willekeurige getallen: 7628 — 3492.

De eerste 2 gevallen worden uit het hoofd berekend, hoewel bij kinderen **A 6** nog wel zal worden toegepast, b.v. $336 - 8 = (330 + 6) - (2 + 6) = (330 - 2) + (6 - 6) = 328$.

Het 3e geval levert een zuivere toepassing van **A 6** op:

$500 + 120$ ____ eig. **O 2.**

$7628 = 7000 + 600 + 20 + 8$
$3492 = 3000 + 400 + 90 + 2$
$4000 + 100 + 30 + 6 = 4136.$

## De Vermenigvuldiging.

§ 23. Vormen we de som van a gelijke getallen b, aldus: $b + b + b +$ ____ $+ b$, dan wordt de uitkomst **het product** der getallen a en b genoemd. Men schrijft dit $a \times b$, ook wel a.b of kortweg ab. Men noemt a den **vermenigvuldiger,** b het **vermenigvuldigtal;** beide getallen zijn de **factoren** van het product $a \times b$.

Het vormen van een product van 2 getallen wordt **vermenigvuldigen** genoemd. De **vermenigvuldiging** heet de **derde hoofdverbinding** der getallen.

Men kan het product $a \times b$ ook definieeren als het getal elementen, dat men verkrijgt, wanneer men a hoeveelheden, elk uit b elementen bestaande, bij elkaar voegt.

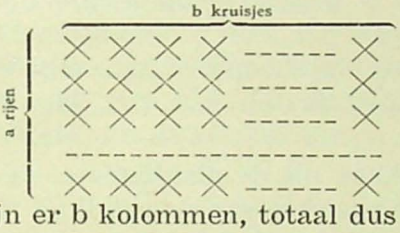
PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

**Bepaling van Product. Onder het product a × b verstaat men de som van a getallen, ieder gelijk aan b.**

§ 24. **V 1. Commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging.**

*Te bewijzen:* a × b = b × a.

*Bewijs.* We schrijven op één rij b kruisjes. We vormen a zulke rijen. Er zijn derhalve a × b kruisjes. We gaan nu de gevormde hoeveelheid op een andere manier tellen. Het resultaat zal hetzelfde zijn (**eig. T**). In de eerste kolom bevinden zich onder elkaar a kruisjes, in de tweede kolom eveneens, enz. Zoo zijn er b kolommen, totaal dus b × a kruisjes. Conclusie: a × b = b × a.




§ 25. **V 2. Een som wordt met een getal vermenigvuldigd door elk der termen met dat getal te vermenigvuldigen en de komende producten samen te tellen:**

p × (a + b + c + d) = pa + pb + pc + pd.

Van rechts naar links gelezen: *De som van eenige producten met denzelfden vermenigvuldiger is gelijk aan het product van den gemeenschappelijken vermenigvuldiger en de som der vermenigvuldigtallen.*

*Te bewijzen:* p × (a + b + c + d) = pa + pb + pc + pd.

*Bewijs:* p × (a + b + c + d)

= (a+b+c+d)+(a+b+c+d)+ ---------- +(a+b+c+d)
p termen. bep. **product.**

= a+b+c+d+a+b+c+d+----------+a+b+c+d **eig. O 3.**

= a+a+ -- +a+b+b+ -- +b+c+c+ -- +c+d+d+ -- +d
p termen p termen p termen p termen
**eig. O 4.**

= (a+a+--+a)+(b+b+--b)+(c+c+--+c)+(d+d+--+d)
**eig. O 3.**

= pa + pb + pc + pd
bep. **product.**

§ 26. **V 3. Een getal wordt met een som vermenigvuldigd**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

**door dat getal met elk der termen van die som te vermenigvuldigen en de komende producten samen te tellen:**

$$(a + b + c + d) \times p = ap + bp + cp + dp.$$

Van rechts naar links gelezen: *De som van eenige producten met hetzelfde vermenigvuldigtal is gelijk aan het product van de som der vermenigvuldigers en het gemeenschappelijke vermenigvuldigtal.*

*Te bewijzen:* $(a + b + c + d) \times p = ap + bp + cp + dp.$

*Bewijs:* $(a + b + c + d) \times p$

$= p \times (a + b + c + d)$ ---------- eig. **V 1.**

$= pa + pb + pc + pd$ ---------- eig. **V 2.**

$= ap + bp + cp + dp$ ---------- eig. **V 1.**

*Opmerking.* **V 2** en **V 3** drukken uit de **distributieve** eigenschap der vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling (lat. distribuere = verdeelen.) Men zegt ook wel, dat de vermenigvuldiging **distributief** is ten opzichte van de optelling.

§ 27. **V 4. Een verschil wordt met een getal vermenigvuldigd door aftrektal en aftrekker met dat getal te vermenigvuldigen en het eerste verschil te verminderen met het tweede:**

$$p \times (b - a) = pb - pa. \qquad (b > a).$$

Van rechts naar links: *Het verschil van twee producten met denzelfden vermenigvuldiger is gelijk aan het product van den gemeenschappelijken vermenigvuldiger en het verschil der vermenigvuldigtallen.*

*Te bewijzen:* $p \times (b - a) = pb - pa.$

*Bewijs:* $p \times (b - a)$

$= \underbrace{(b-a) + (b-a) + (b-a) + \ldots + (b-a)}_{p \text{ verschillen}}$ bep. **product.**

$= \underbrace{(b + b + b + \ldots + b)}_{p \text{ termen}} - \underbrace{(a + a + a \ldots + a)}_{p \text{ termen}}$ -- eig. **A 6.**

$= pb - pa$ ---------- bep. **product.**

§ 28. **V 5. Een getal wordt met een verschil vermenigvuldigd door dat getal met aftrektal en aftrekker te vermenigvuldigen en het eerste product te verminderen met het tweede:**

$$(b - a) \times p = bp - ap.$$

Van rechts naar links: *Het verschil van twee producten met*

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

*hetzelfde vermenigvuldigtal is gelijk aan het product van het verschil der vermenigvuldigers en het gemeenschappelijk vermenigvuldigtal.*

*Te bewijzen:* (b — a) × p = bp — ap.

*Bewijs:* (b — a) × p

= p × (b — a) ---------- eig. **V 1.**

= pb — pa ---------- eig. **V 4.**

= bp — ap ---------- eig. **V 1.**

*Opmerking.* **V 4** en **V 5** vormen samen de **distributieve** eigenschap der vermenigvuldiging ten opzichte van de aftrekking. Ook zegt men wel, dat de vermenigvuldiging **distributief** is ten opzichte van de aftrekking.

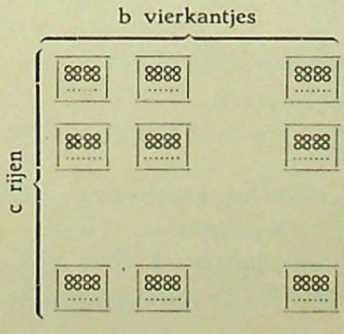
§ 29. Wanneer men neemt het product van de getallen a en b en deze uitkomst vermenigvuldigt met c, dan heeft men het **gedurig product** c × b × a. Dit is tot meerdere getallen uit te breiden. In het vervolg zullen we het woord gedurig weglaten, ook al hebben we te doen met meer dan twee getallen: product zal dus ook gedurig product kunnen beteekenen. In tegenstelling met de optelling wordt de vermenigvuldiging van rechts naar links uitgevoerd gedacht. a wordt de eerste, b de tweede, c de derde factor genoemd.

**Bepaling van gedurig product. Een gedurig product ... d × c × b × a ontstaat, wanneer het product b × a vermenigvuldigd moet worden met c, deze uitkomst met d, enz.**

§ 30. **V 6. Associatieve eigenschap der vermenigvuldiging.**

*Te bewijzen:* c × (ba) = (cb) × a.

*Bewijs:*




In elk vierkantje staan a kringen; in één rij zijn b vierkantjes, totaal in één rij ba kringen. Aangezien er c rijen zijn, heeft men c × (ba) kringen. Tellen we de hoeveelheid op een andere manier, dan is het resultaat hetzelfde. (eig. **T.**)

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Er zijn c rijen, elk van b vierkantjes, totaal cb vierkantjes. Elk vierkantje bevat kringen, samen (cb) $\times$ a kringen.

Conclusie: c $\times$ (ba) = (cb) $\times$ a.

*Opmerking.* Deze eigenschap kunnen we uitbreiden tot meerdere getallen, hetgeen in formule luidt: edcba=(edcb) $\times$ a.

§ 31. **V 7. Algemeene associatieve eigenschap der vermenigvuldiging:** gfedcba = (gfe) d (cb) a.

In woorden: **Een product verandert niet van waarde, wanneer men twee of meer factoren door hun product vervangt.**

Van rechts naar links: *Een gedurig product verandert niet van waarde, als men een of meer factoren in factoren ontbindt.*

*Te bewijzen:* gfdcba = (gfe) d (cb) a.

*Bewijs:* cba = (cb) $\times$ a ---------- eig. **V 6.**

Deze uitkomsten moeten beide met d vermenigvuldigd worden: dcba = d (cb) $\times$ a. Volgens de uitbreiding van **V 6** is nu gfedcba = gfe {dcba} = (gfe) {dcba} = (gfe) d (cb) a.

§ 32. **V 8. Algemeene commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging:** e$\times$d$\times$c$\times$b$\times$a = d$\times$b$\times$e$\times$a$\times$c.

In woorden (ook van rechts naar links gelezen!):

**Een product is onafhankelijk van de volgorde der factoren.**

*Te bewijzen:* e$\times$d$\times$c$\times$b$\times$a = d$\times$b$\times$e$\times$a$\times$c.

*Bewijs:* Voor het bewijs hebben we noodig de *hulpstelling:* In een product is het geoorloofd twee naast elkaar staande factoren te verwisselen. Dit kunnen we aldus aantoonen:

r $\times$ q $\times$ p $\times$ n $\times$ m
= r $\times$ q $\times$ (p $\times$ n) $\times$ m ---------- eig. **V 7.**
= r $\times$ q $\times$ (n $\times$ p) $\times$ m ---------- eig. **V 1.**
= r $\times$ q $\times$ n $\times$ p $\times$ m ---------- eig. **V 7.**

We passen deze hulpstelling eenige malen toe:

e$\times$d$\times$c$\times$b$\times$a = d$\times$e$\times$c$\times$b$\times$a = d$\times$e$\times$b$\times$c$\times$a
= d$\times$b$\times$e$\times$c$\times$a = d$\times$b$\times$e$\times$a$\times$c.

§ 33. Bij het vermenigvuldigen met getallen kunnen we vijf gevallen onderscheiden:

1e geval. Beide factoren bestaan uit één cijfer: 7 $\times$ 9. Deze producten leveren gezamenlijk de „tafels" van vermenigvuldi-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

ging op. In de lagere school worden ze door optelling gevonden en daarna gememoriseerd.

2e geval. De vermenigvuldiger bestaat uit één cijfer, het vermenigvuldigtal is een willekeurig getal: $7 \times 8264$. Men gaat nu 8264 splitsen in $8000 + 200 + 60 + 4 = 8$ d.t. $+ 2$ h.t. $+ 6$ t.t. $+ 4$. Deze som wordt nu met 7 vermenigvuldigd (eig. **V 2**); antwoord 56 d.t. $+ 14$ h.t. $+ 42$ t.t. $+ 28$. De termen worden gesplitst (eig. **O 3**): 50 d.t. $+ 6$ d.t. $+ 10$ h.t. $+ 4$ h.t. $+ 40$ t.t. $+ 2$ t.t. $+ 20 + 8$ en groepsgewijze vereenigd (eig. **O 3**): 5 t.d.t. $+ 7$ d.t. $+ 8$ h.t. $+ 4$ t.t. $+ 8 = 57848$.

3e geval. De vermenigvuldiger is een term der schaal, het vermenigvuldigtal een willekeurig getal: $1000 \times 8623$. Nu is $1000 \times 8623 = 8623 \times 1000$ (eig. **V 1**) $= 8623$ d.t. $= 8623000$. Dit voert tot de bekende regel: Men vermenigvuldigt een getal met een term der schaal door evenveel nullen achter het getal te plaatsen als de term der schaal heeft.

4e geval. Het vermenigvuldigtal is een willekeurig getal, de vermenigvuldiger een getal van één cijfer, gevolgd door een of meer nullen: $700 \times 2419$. Nu is $700 \times 2419 = 7 \times 100 \times 2419$ (eig. **V 7**) $= 7 \times 241900$ (3e geval) $= 1693300$ (2e geval).

5e geval. Beide factoren zijn willekeurige getallen: $756 \times 2476$. Men gaat aldus te werk: $756 \times 2476 = (700 + 50 + 6) \times 2476 = 700 \times 2476 + 50 \times 2476 + 6 \times 2476$ (eig. **V 3**) $=$ $= 1733200 + 123800 + 14856$ (4e en 2e geval).

| |
|---|
| 2476 |
| 756 |
| 14856 |
| 12380 |
| 17332 |
| 1871856 |

Gewoonlijk worden de gedeeltelijke producten onder elkaar gezet, terwijl men nullen aan de rechterhand weglaat, zooals hiernaast is aangegeven.

Bij andere talstelsels kunnen we dergelijke gevallen onderscheiden; het verschil zit immers alleen in het groepeeren der eenheden.

## De Deeling.

### A. *Opgaande Deelingen.*

§ 34. Gesteld, er zijn twee getallen a en b gegeven ($b > a$). We willen nu een derde getal zoeken, dat met a vermenigvuldigd, b oplevert. We zouden dit aldus kunnen schrijven: $a \times$ een

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

getal x = b. Dikwijls geeft men er dezen vorm aan: b : a =.....
De uitkomst, ook de uitdrukking b : a (ook wel $\frac{b}{a}$ )wordt een **quotient** genoemd, b is het **deeltal**, a de **deeler**.

Het zoeken van het quotient van 2 getallen wordt **deelen** genoemd. De **deeling** wordt als de **vierde hoofdverbinding** der getallen aangemerkt.

Blijkens de definitie is deeler × quotient = deeltal.

Aangezien a × x = x × a (eig. **V 1**) zou men ook hebben kunnen vragen naar het getal x, waarmee a moet vermenigvuldigd worden om b op te leveren. Men zou dan hetzelfde resultaat $\frac{b}{a}$ gevonden hebben.

Evenmin als de aftrekking heeft de deeling een commutatieve eigenschap. b : a is niet gelijk aan a : b (tenzij b = a is!)

Uitdrukkelijk zetten we voorop, dat bij de volgende eigenschappen de deeling „opgaand" is, dus dat er werkelijk een getal x te vinden is, dat aan het gestelde voldoet.

**Bepaling van Quotient: Onder het quotient b : a verstaat men het getal, dat met a vermenigvuldigd, b oplevert.**

Def. voor een verdeelingsdeeling

§ 35. Bij de deeling maakt men onderscheid in 2 soort deelingen, n.l. in *verdeelings-* en *verhoudingsdeeling*. Een voorbeeld moge dit nog duidelijk maken.

*Vraag.* Wanneer vijf jongens 40 cent verdeelen, hoeveel krijgt dan ieder?

*Oplossing.* We zouden dit aldus kunnen schrijven: 5 × .... centen = 40 centen. In anderen vorm opgeschreven: het gevraagde aantal is 40 : 5. Dikwijls gebruikt men hier een „benoemd" getal en zegt men: elke jongen ontvangt 40 centen : 5 = 8 centen. (*Verdeelingsdeeling*).

*Vraag.* Wanneer eenige jongens 40 centen verdeelen en ieder 8 centen ontvangt, hoeveel jongens zijn er dan?

*Oplossing.* We kunnen dit zoo neerschrijven: .... × 8 centen = 40 centen. In anderen vorm: het gevraagde aantal is 40 : 8. Gebruikt men nu benoemde getallen, dan zegt men: het aantal jongens bedraagt 40 cent. : 8 cent. = 5. (*verhoudingsdeeling*).

Het onderscheid is dus het volgende: Bij de verdeelingsdeeling wordt gevraagd naar het onbekende vermenigvuldigtal van

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

het oorspronkelijk product, bij de verhoudingsdeeling naar den onbekenden vermenigvuldiger. Bij de eerste deeling is de deeler altijd een onbenoemd getal! Vatten we de deeling op als een zuivere verbinding van 2 getallen, dan valt het onderscheid in 2 soorten van deelingen weg. In het volgende houden we ons aan de eerst gegeven definitie.

§ 36. **D 1. Een quotient verandert niet van waarde, als men deeltal en deeler door eenzelfde getal deelt:**

$(p \times b) : (p \times a) = b : a.$

Van rechts naar links gelezen: *Een quotient verandert niet van waarde, als men deeltal en deeler met eenzelfde getal vermenigvuldigt.*

*Te bewijzen:* $(p \times b) : (p \times a) = b : a.$

of: $(p \times a) \times (b : a) = p \times b$ ____ bep. **quotient.**

*Bewijs:* $(p \times a) \times (b : a)$

$= p \times a \times (b : a)$ _____ eig. **V 6.**

$= p \times \{a \times (b : a)\}$ _____ bep. **product.**

$= p \times b$ _____ bep. **quotient.**

§ 37. **D 2. Een quotient wordt met een getal vermenigvuldigd door het deeltal er mee te vermenigvuldigen:**

$p \times (b : a) = p \times b : a.$

Van rechts naar links gelezen: *Een product wordt door een getal gedeeld door een der factoren door dat getal te deelen en de uitkomst te vermenigvuldigen met den tweeden factor.*

*Te bewijzen:* $p \times (b : a) = p \times b : a.$

of: $a \times \{p \times (b : a)\} = p \times b$ ____ bep. **quotient.**

*Bewijs:* $a \times \{p \times (b : a)\}$

$= a \times p \times (b : a)$ _____ bep. **product.**

$= p \times d \times (b : a)$ _____ eig. **V 8.**

$= p \times \{a \times (b : a)\}$ _____ bep. **product.**

$= p \times b$ _____ bep. **quotient.**

§ 38. **D 3. Een quotient wordt met een getal vermenigvuldigd door den deeler er door te deelen:**

$p \times (b : a) = b : (a : p)$

Van rechts naar links gelezen: *Een getal wordt door een quo-*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*tient gedeeld door dat getal te deelen door het deeltal en de uitkomst te vermenigvuldigen met den deeler.*

*Te bewijzen:* $p \times (b : a) = b : (a : p)$.

of: $(a : p) \times \{p \times (b : a)\} = b$ ____ bep. **quotient.**

*Bewijs:* $(a : p) \times \{p \times (b : a)\}$

$= (a : p) \times p \times (b : a)$ _____ bep. **product.**

$= p \times (a : p) \times (b : a)$ _____ eig. **V 8.**

$= \{p \times (a : p)\} \times (b : a)$ _____ eig. **V 6.**

$= a \times (b : a)$ _____ bep. **quotient.**

$= b$ _____ bep. **quotient.**

§ 39. **D 4. Een quotient wordt door een getal gedeeld door het deeltal er door te deelen:**

$(b : a) : p = (b : p) : a$.

Van rechts naar links gelezen luidt de eigenschap precies hetzelfde.

*Te bewijzen:* $(b : a) : p = (b : p) : a$.

of: $p \times \{(b : p) : a\} = b : a$ _____ bep **quotient.**

of: $a \times [p \times \{(b : p) : a\}] = b$ __ bep. **quotient.**

*Bewijs:* $a \times [p \times \{(b : p) : a\}]$

$= a \times p \times \{(b : p) : a\}$ _____ bep. **product.**

$= p \times a \times \{(b : p) : a\}$ _____ eig. **V 8.**

$= p \times [a \times \{(b : p) : a\}]$ _____ bep. **product.**

$= p \times (b : p)$ _____ bep. **quotient.**

$= b$ _____ bep. **quotient.**

§ 40. **D 5. Een quotient wordt door een getal gedeeld door den deeler er mee te vermenigvuldigen:**

$(b : a) : p = b : p \times a$.

Van rechts naar links gelezen: *Een getal wordt door een product gedeeld door dat getal door den eersten factor te deelen en de uitkomst door den tweeden factor.*

*Te bewijzen:* $(b : a) : p = b : p \times a$.

of: $(p \times a) \times \{(b : a) : p\} = b$ __ bep. **quotient.**

*Bewijs:* $(p \times a) \times \{(b : a) : p\}$.

$= p \times a \times \{(b : a) : p\}$ _____ eig. **V 6.**

$= a \times p \times \{(b : a) : p\}$ _____ eig. **V 8.**

$= a \times [p \times \{(b : a) : p\}]$ _____ bep. **product.**

$= a \times (b : a)$ _____ bep. **quotient.**

$= b$ _____ bep. **quotient.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 41. **D 6. Het quotient van twee producten is gelijk aan het product van de quotienten, die men verkrijgt, wanneer men elken factor van den deeler deelt op een factor van het deeltal.**

$(c \times b \times a) : (r \times q \times p) = (c : r) \times (b : q) \times (a : p)$.

Van rechts naar links gelezen: *Het product van eenige quotienten is gelijk aan het quotient van het product der deeltallen en het product der deelers.*

*Te bewijzen:* $c \times b \times a : r \times q \times p = (c : r) \times (b : q) \times (a : p)$

of: $(r \times q \times p) \times \{(c : r) \times (b : q) \times (a : p)\} = c \times b \times a$ ------ bep. **quotient.**

*Bewijs:* $(r \times q \times p) \times \{(c : r) \times (b : q) \times (a : p)\}$

$= r \times q \times p \times (c : r) \times (b : q) \times (a : p)$ -------- eig. **V 7.**

$= r \times (c : r) \times q \times (b : q) \times p \times (a : p)$ -------- eig. **V 8.**

$= \{r \times (c : r)\} \times \{q \times (b : q)\} \times \{p \times (a : p)\}$ -- eig. **V 7.**

$= c \times b \times a$ -- bep. **quotient.**

§ 42. Wanneer men de besproken eigenschappen met die van de aftrekking vergelijkt, treft ons de groote overeenkomst. In het volgende staatje zijn de eigenschappen nog eens naast elkaar gesteld ter vergelijking:

| | |
|---|---|
| **A 1.** $(b+p)-(a+p) = b-a$ | **D 1.** $p \times b : p \times a = b : a$. |
| **A 2.** $(b-a)+p = (b+p)-a$ | **D 2.** $p \times (b : a) = p \times b : a$. |
| **A 3.** $(b-a)+p = b-(a-p)$ | **D 3.** $p \times (b : a) = b : (a : p)$ |
| **A 4.** $(b-a)-p = (b-p)-a$ | **D 4.** $(b : a) : p = (b : p) : a$. |
| **A 5.** $(b-a)-p = b-(a+p)$ | **D 5.** $(b : a) : p = b : p \times a$. |
| **A 6.** $(a+b+c)-(p+q+r) = (a-p)+(b-q)+(c-r)$ | **D 6.** $c \times b \times a : r \times q \times p = (c : r) \times (b : q) \times (a : p)$. |

De eigenschappen der quotienten kunnen zelfs onmiddellijk uit die der verschillen afgeleid worden door de volgende wijzigingen:

verschil veranderen in quotient,
aftrektal veranderen in deeltal,
aftrekker veranderen in deeler,
verminderen veranderen in deelen,
vermeerderen veranderen in vermenigvuldigen,
in deelen splitsen veranderen in factoren ontbinden.

§ 43. **D 7. Een som wordt door een getal gedeeld door elk**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

**der termen van die som door dat getal te deelen en de komende quotienten samen te nemen:**

$(a+b+c+d) : p = (a:p)+(b:p)+(c:p)+(d:p)$.

Van rechts naar links gelezen: *De som van eenige quotienten met denzelfden deeler is gelijk aan het quotient van de som der deeltallen en den gemeenschappelijken deeler.*

*Te bewijzen:*

$(a+b+c+d) : p = (a:p)+(b:p)+(c:p)+(d:p)$.

of: $p \times \{(a:p)+(b:p)+(c:p)+(d:p)\} = a+b+c+d$ ____ bep. **quotient.**

*Bewijs:* $p \times \{(a:p) + (b:p) + (c:p) + (d:p)\}$

$= p\times(a:p)+p\times(b:p)+p\times(c:p)+p\times(d:p)$ ______ eig. **V 2.**

$= a + b + c + d$ ______ bep. **quotient.**

*Opmerking.* Deze eigenschap drukt uit, dat de deeling, wat het deeltal betreft, **distributief** is ten opzichte van de optelling.

§ 44. **D 8. Een verschil wordt door een getal gedeeld door aftrektal en aftrekker door dat getal te deelen en het eerste quotient te verminderen met het tweede.**

$(b - a) : p = b : p - a : p.$ $\qquad b > a.$

Van rechts naar links gelezen: *Het verschil van twee quotienten met denzelfden deeler is gelijk aan het quotient van het verschil der deeltallen en den gemeenschappelijken deeler.*

*Te bewijzen:* $(b - a) : p = b : p - a : p.$

of: $p \times (b : p - a : p) = b - a$ __ bep. **quotient.**

*Bewijs:* $p \times (b : p - a : p)$

$= p \times (b : p) - p \times (a : p)$ _____ eig. **V 4.**

$= b - a$ _____ bep. **quotient.**

*Opmerking.* Deze eigenschap drukt uit, dat de deeling, wat het deeltal betreft, **distributief** is ten opzichtte van de aftrekking.

B. *Niet-opgaande deelingen.*

§ 45. *Vraag.* Wanneer vijf jongens 43 centen moeten verdeelen, hoeveel krijgt dan ieder?

*Oplossing.* Het is ons onmogelijk om de hoeveelheid centen in 5 hoopjes te verdeelen, zóó, dat iedere jongen er evenveel krijgt. Aangezien $5 \times 8$ c. $= 40$ c. en $5 \times 9$ c. $= 45$ c. is, kunnen we elke jongen hoogstens 8 centen geven, terwijl er nog 3 centen overblijven.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*Vraag.* Wanneer eenige jongens 43 centen moeten verdeelen en iedere jongen hoogstens 8 centen kan bekomen, hoeveel jongens zijn er dan?

*Oplossing.* Wanneer iedere jongen 8 centen bekomt, moeten we trachten te bepalen, hoe dikwijls we die 8 centen van 43 centen kunnen afnemen. Nu is $5 \times 8$ c. $= 40$ c. en $6 \times 8$ c. $= 48$ c. Er zijn derhalve 5 jongens, terwijl 3 centen overschieten.

In deze vraagstukjes is sprake van niet-opgaande deelingen, resp. verdeelings- en verhoudingsdeeling. We moeten nu voor deze speciale gevallen een andere bepaling geven dan in § 34 het geval was. We zouden dit zoo kunnen doen:

Bij de *verdeelingsdeeling* zoeken we het *grootste* getal elementen („quotient") dat we van een hoeveelheid („deeltal") nog een bepaald aantal malen (dit geeft de „deeler" aan) kunnen afnemen.

Bij de *verhoudingsdeeling* zoeken we het getal („quotient"), dat aanduidt, hoeveel maal we een zeker getal elementen („deeler") *hoogstens* van een hoeveelheid („deeltal") kunnen afnemen.

Wanneer we het deeltal voorstellen door D, den deeler door d, het „quotient" door q en de „rest" door r, dan zal blijkens de definities:

$D = d \times q + r$ (verdeelingsdeeling).
$D = q \times d + r$ (verhoudingsdeeling).

Voor de opgaande deelingen behoeft men dan slechts $r = 0$ te stellen, om tot de definities van § 34 te geraken. Men kan niet willekeurig de eigenschappen **D 1** tot en met **D 8** laten doorgaan voor niet-opgaande deelingen. Als men dat toch wil doen? Dan is men genoodzaakt over te gaan tot de invoering van een nieuw soort getallen, de *gebroken getallen*.

§ 46. In het volgende zullen we verschillende gevallen van de deeling onderscheiden, in overeenstemming met de gevallen der vermenigvuldiging, daarbij op den voorgrond stellende, dat we de deeling opvatten als verdeelingsdeeling (§ 35). Opgaande deelingen worden beschouwd als bijzondere gevallen van niet-opgaande (rest $= 0$).

1e geval. Het deeltal is een getal van één of twee cijfers. deeler en „quotient" bestaan beide uit één cijfer, b.v. 68 : 7.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dit „quotient" moet uit het hoofd bepaald worden. Door de „tafels" van vermenigvuldiging weet men, dat 68 ligt tusschen $7 \times 9 = 63$ en $7 \times 10 = 70$. Het „quotient" is 9, de rest 5.

2e geval. Het deeltal is een willekeurig getal, de deeler bestaat uit één cijfer, het „quotient" uit meer dan één cijfer, b.v. 3649 : 8. Men gaat nu het deeltal feitelijk splitsen in 3 d.t. + 6 h.t. + 4 t.t. + 9 e. Kan men 3 d.t. in 8 gelijke deelen verdeelen? Neen. Daarom voegen we samen: 3 d.t. + 6 h.t. = 36 h.t. Gaat men nu verdeelen (1e geval), dan vindt men als antwoord 4 h.t., terwijl 36 h.t. $- 8 \times 4$ h.t. $= 4$ h.t. niet verdeeld worden. Daarbij voegt men de nog aanwezige 4 t.t. : 4 h.t. + 4 t.t. = 44 t.t. Bij deze verdeeling vindt men als antwoord 5 t.t. (1e geval), terwijl 4 t.t. niet verdeeld worden, waarbij men nog 9 e voegt: 4 t.t. + 9 e = 49 e. Nu is het antwoord nog 6e, over 1e. „Quotient" wordt: 4 h.t. + 5 t.t. + 6e = 456, „rest" 1. Gewoonlijk wordt de bewerking in dezen vorm neergeschreven:

```
8 / 3649 \ 456
  32
  ----
   44
   40
   --
   49
   48
   --
    1
```

3e geval. De deeler is een term der schaal, het deeltal een willekeurig getal, b.v. 87649 : 100. Nu is 87649 = 8 t.d.t. + 7 d.t. + 6 h.t. + 4 t.t. + 9e = 876 h.t. + 49e (eig. **O 3**). Gaat men deze 876 honderdtallen verdeelen, dan is het antwoord 876; de „rest" is 49. Regel: Is de deeler een term der schaal, dan is het „quotient" het getal, dat verkregen wordt door van het deeltal zooveel cijfers te schrappen, als de deeler nullen heeft, terwijl de rest is het getal, door de geschrapte cijfers gevormd (in dezelfde volgorde!)

4e geval. De deeler is een getal, van één cijfer, gevolgd door één of meer nullen, het deeltal en het „quotient" zijn beide willekeurige getallen, b.v. 34754 : 700. Nu is $700 \times 100 = 70000 >$ 34764 en $700 \times 10 = 7000 <$ 34764, zoodat het „quotient" gelegen is tusschen 10 en 100. Men gaat nu probeeren! Nu kan $700 \times 40$ nog van het deeltal worden afgetrokken ($7 \times 4$ kan

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van 34 af!), over: 34764 — 28000 = 6764. Weer zoeken! Men bemerkt, dat 700 × 9 = 6300 hiervan nog afgenomen kan worden (7 × 9 van 67 af!), rest 6764 — 6300 = 464. Gezamenlijk is er afgenomen: 700 × 40 + 700 × 9 = 700 × 49 (eig. V 2). De bewerking komt er aldus uit te zien:

```
700 / 34764 \ 4 .
    2800 .    9
    ------   ---
     6764    49
     6300
    ------
      464
```

De stippen stellen nullen voor, worden in het werktuigelijk deelen weggelaten, terwijl de 9 onmiddellijk achter de 4 wordt gevoegd.

5e geval. Deeltal, deeler en „quotient" zijn alle drie willekeurige getallen, b.v. 632874 : 289. Aangezien 289 × 10000 > 632874 en 289 × 1000 < 632874, zal het „quotient" liggen tusschen 1000 en 10000. Men gaat weer probeeren, hoe groot het is: het is ruim 2000. 632874 — 289 × 2000 = 54874. Dit laatste getal ligt tusschen 289 × 100 en 289 × 200. We trekken er dus 289 × 100 af. Er blijft: 54874 — 28900 = 25974. Dit laatste ligt weer tusschen 289 × 80 = 23120 en 289 × 90 = 26010 (zoeken!) 25974 — 23120 = 2854. Dit getal kan nog verminderd worden met 289 × 9 = 2601. Rest 2854 — 2601 = 253. „'t Quotient" wordt 2000 + 100 + 80 + 9 = 2189.

```
289 / 632874 \ 2 . . .
    578 . . .    1 . .
    -------     ----
     548 . .      8 .
     289 . .      9
    -------     ----
     2597 .     2189
     2312 .
    -------
      2854
      2601
    -------
       253
```

Zelfde opmerking als bij 't vorige geval!

## De Machtsverheffing.

§ 47. Vormen we het product van n *gelijke factoren* a, aldus:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$\underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ factoren}}$, dan schrijven we daarvoor $a^n$ (lees: a tot de macht n). Zulk een vorm wordt een **macht** genoemd: a is het **grondtal** of **basis**, n is de **exponent** van de macht. Het vormen van de macht heet **machtsverheffing**. Deze rekent men niet tot de hoofdverbindingen, evenmin als de omkeeringen: worteltrekking en logarithme-neming.

In het bijzonder dient nog vermeld, dat $a^2$ wel het *vierkant* of het *kwadraat* van a wordt genoemd en men meestal uitspreekt a-kwadraat.

**Bepaling van Macht: Onder de macht $a^n$ verstaat men het product van n getallen, ieder gelijk aan a.**

§ 48. Het levert groot gemak op, wanneer men onmiddellijk het kwadraat van een niet al te groot getal weet.

*Kwadraten der getallen van 1 tot en met 50.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $1^2 = 1$ | $11^2 = 121$ | $21^2 = 441$ | $31^2 = 961$ | $41^2 = 1681$ |
| $2^2 = 4$ | $12^2 = 144$ | $22^2 = 484$ | $32^2 = 1024$ | $42^2 = 1764$ |
| $3^2 = 9$ | $13^2 = 169$ | $23^2 = 529$ | $33^2 = 1089$ | $43^2 = 1849$ |
| $4^2 = 16$ | $14^2 = 196$ | $24^2 = 576$ | $34^2 = 1156$ | $44^2 = 1936$ |
| $5^2 = 25$ | $15^2 = 225$ | $25^2 = 625$ | $35^2 = 1225$ | $45^2 = 2025$ |
| $6^2 = 36$ | $16^2 = 256$ | $26^2 = 676$ | $36^2 = 1296$ | $46^2 = 2116$ |
| $7^2 = 49$ | $17^2 = 289$ | $27^2 = 729$ | $37^2 = 1369$ | $47^2 = 2209$ |
| $8^2 = 64$ | $18^2 = 324$ | $28^2 = 784$ | $38^2 = 1444$ | $48^2 = 2304$ |
| $9^2 = 81$ | $19^2 = 361$ | $29^2 = 841$ | $39^2 = 1521$ | $49^2 = 2401$ |
| $10^2 = 100$ | $20^2 = 400$ | $30^2 = 900$ | $40^2 = 1600$ | $50^2 = 2500$ |

Vergelijk eens met elkaar de kwadraten van de getallen, die samen 50 zijn!

§ 49. **M 1. Een product wordt tot een macht verheven, door elk der factoren tot die macht te verheffen.**

$$(d \times c \times b \times a)^n = d^n \times c^n \times b^n \times a^n.$$

Van rechts naar links gelezen: *Het product van eenige gelijknamige machten (dit zijn machten met denzelfden exponent) is gelijk aan diezelfde macht van het product der grondtallen.*

*Te bewijzen:* $(d \times c \times b \times a)^n = d^n \times c^n \times b^n \times a^n$.

*Bewijs:* $(d \times c \times b \times a)^n$

$= \underbrace{(d \times c \times b \times a) \times (d \times c \times b \times a) \times \ldots\ldots\ldots \times (d \times c \times b \times a)}_{n \text{ factoren}}$ bep. **macht.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$= d \times c \times b \times a \times d \times c \times b \times a \times _____ \times d \times c \times b \times a$ ____eig **V 7.**

$= d \times d \times .. \times d \times c \times c \times .. \times c \times b \times b \times .. \times b \times a \times a \times .. \times a$.. eig. **V 8.**

$= \underbrace{(d \times d \times .. \times d)}_{\text{n factoren}} \times \underbrace{(c \times c \times .. \times c)}_{\text{n factoren}} \times \underbrace{(b \times b \times .. \times b)}_{\text{n factoren}} \times \underbrace{(a \times a \times .. \times a)}_{\text{n factoren}}$ --

eig. **V 7.**

$= d^n \times c^n \times b^n \times a^n$ -- bep. **macht.**

*Opmerking.* Deze eigenschap drukt uit, dat de machtsverheffing **distributief** is ten opzichte van het grondtal.

§ 50. **M 2. Een quotient wordt tot een macht verheven, door deeltal en deeler tot die macht te verheffen:**

$$(b : a)^n = b^n : a^n.$$

Van rechts naar links gelezen: *Het quotient van twee gelijknamige machten is gelijk aan diezelfde macht van het quotient der grondtallen.*

*Te bewijzen:* $(b : a)^n = b^n : a^n$.

*Bewijs:* $(b : a)^n$

$= \underbrace{(b : a) \times (b : a) \times _____ \times (b : a)}_{\text{n factoren}}$ _____ bep. **macht.**

$= \underbrace{(b \times b \times ____ \times b)}_{\text{n factoren}} : \underbrace{(a \times a \times ____ \times a)}_{\text{n factoren}}$ _____ eig. **D 6.**

$= b^n : a^n$ _____ bep. **macht.**

§ 51. **M 3. Het product van eenige machten van hetzelfde grondtal is de macht van dat grondtal, die tot exponent heeft de som der exponenten.**

*Te bewijzen:* $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$.

*Bewijs:* $a^m \times a^n \times a^p$

$= \underbrace{(a \times a \times __ \times a)}_{\text{m factoren}} \times \underbrace{(a \times a \times __ \times a)}_{\text{n factoren}} \times \underbrace{(a \times a \times __ \times a)}_{\text{p factoren}}$ bep. **macht.**

$= \underbrace{a \times a \times ____ \times a \times a \times a \times ____ \times a \times a \times a \times ____ \times}_{\text{m+n+p factoren}}$ ____ eig. **V 7.**

$= a^{m+n+p}$. _____ bep. **macht.**

§ 52. **M 4. Het quotient van twee machten van hetzelfde grondtal is de macht van dat grondtal, die tot exponent heeft het verschil der exponenten van deeltal en deeler:**

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad m > n.$$



PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Van rechts naar links gelezen: *Een macht kan geschreven worden als het quotient van twee machten van hetzelfde grondtal, waarbij het verschil der exponenten van deeltal en deeler gelijk is aan den gegeven exponent.*

*Te bewijzen:* $a^m : a^n = a^{m-n}$.

of: $a^n \times a^{m-n} = a^m$ ---------- bep. **quotient.**

*Bewijs:* $a^n \times a^{m-n}$

$= a^{n+(m-n)}$ ---------- eig. **M 3.**

$= a^m$. ---------- bep. **verschil.**

§ 53. **M 5. De n-de macht van een macht wordt gevonden door den exponent met n te vermenigvuldigen:**

$$(a^p)^n = a^{np}.$$

Van rechts naar links gelezen: *Een macht, waarvan de exponent gelijk is aan het product van twee getallen, kan gevonden worden door het grondtal eerst te verheffen tot een macht, gelijk aan den eersten factor en daarna de uitkomst tot een macht, gelijk aan den tweeden factor.*

*Te bewijzen:* $(a^p)^n = a^{np}$.

*Bewijs:* $(a^p)^n$

$= \underbrace{a^p \times a^p \times \text{------} \times a^p}_{\text{n factoren}}$ ---------- bep. **macht.**

$= a^{p+p+\ldots+p}$ ---------- eig. **M 3.**

$= a^{np}$. ---------- bep. **product.**

§ 54. Strikt genomen, is $a^1$ geen macht (zie bep. van macht). Om bovenstaande eigenschap te doen doorgaan, is men overeengekomen $a^1 = a$ te nemen. Nog zij opgemerkt, dat iedere macht van 1 gelijk aan 1 is: $1^5 = 1^7 = 1^{100} = 1$.

Wil men eig. **M 4** ook laten doorgaan voor $m = n$, dan krijgt men $a^n : a^n = a^0 = 1$. Inderdaad heeft men de beteekenis $a^0 = 1$ aangenomen. $(a = 0)$.

Nog anders wordt het met **M 4**, wanneer we nemen $m < n$. Nemen we als voorbeeld $m = 2$, $n = 5$. Men krijgt dan: $a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$ (zie de *negatieve* getallen in de Algebra). Als men evenwel deeltal en deeler deelt door $a^2$ (eig **D 1** en eig. **M 4**), dan krijgt men: $a^2 : a^5 = 1 : a^3 = \frac{1}{a^3}$. Men moet

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

besluiten: $a^{-3}$ beteekent $\frac{1}{a^3}$ (zie de *negatieve exponenten* in de Algebra).

§ 55. In het algemeen is $a^b \neq b^a$. Slechts in bijzondere gevallen is $a^b = b^a$, n.l. wanneer $a = b = 1$ en wanneer $a = 2$, $b = 4$ (of: $a = 4$, $b = 2$!) : $1^1 = 1^1$ en $2^4 = 4^2$. We kunnen zeggen, dat de *machtsverheffing een niet-commutatieve verbinding* is.

*Evenmin* is zij een *associatieve verbinding:* in het algemeen is $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$. De eerste vorm drukt uit, dat men a eerst tot de macht b moet verheffen en deze uitkomst tot de macht c; de tweede vorm, dat men a tot de macht $b^c$ moet verheffen. Schrijft men $a^{b^c}$ dan bedoelt men den tweeden vorm.

In de vier volgende gevallen zijn de vormen wel aan elkaar gelijk:

1°. als $a = 1$ is : $(1^b)^c = 1^c = 1$ ; $1^{(b^c)} = 1^{\cdots} = 1$.

2°. als $c = 1$ is : $(a^b)^1 = a^b$ ; $(a^1)^b = a^b$.

3°. als $b = c = 2$ is : $(a^2)^2 = a^4$ ; $a^{(2^2)} = a^4$.

4°. als $b = c = 1$ is : $(a^1)^1 = a^1 = a$ ; $a^{(1^1)} = a^1 = a$.

## De Worteltrekking.

§ 56. **Onder de n-de machtswortel uit een getal verstaat men het getal, dat tot de n-de macht verheven, a weer oplevert.** Men schrijft dit $\sqrt[n]{a}$; n wordt de **wortelexponent** genoemd. Blijkens de definitie is $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

In het bijzonder spreekt men van den *vierkantswortel* uit a: dit is het getal, dat in het kwadraat verheven, a weer oplevert. Men schrijft in plaats van $\sqrt[2]{a}$ evenwel $\sqrt{a}$.

Het bepalen van den n-de machtswortel uit een getal wordt **worteltrekking** genoemd. De vierkantsworteltrekking is verreweg van het meeste belang.

§ 57. De *worteltrekking* is een *omgekeerde verbinding* van de machtsverheffing. Stellen we ons voor, dat gegeven zijn de

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

getallen b en c en dat gevraagd wordt een getal x zoodanig te bepalen, dat $x^b = c$, dan kunnen we neerschrijven: $\sqrt[b]{c} = x$.

Zijn daarentegen a en c gegeven en wenscht men een getal y zoodanig te bepalen, dat $a^y = c$, dan wordt naar den onbekenden exponent gevraagd. Men schrijft dit $^a\log c = y$ (lees: de a-logarithme van c is y). Deze *tweede omgekeerde verbinding* van de machtsverheffing wordt logarithme-neming genoemd. (zie verder de Algebra).

§ 58. **W 1. De n-de machtswortel uit een product is gelijk aan het product van de n-de machtswortels uit de factoren:**

$$\sqrt[n]{(d \times c \times b \times a)} = \sqrt[n]{d} \times \sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{a}.$$

Van rechts naar links gelezen: *Het product van eenige gelijknamige wortels (dit zijn wortels met denzelfden wortelexponent) is gelijk aan denzelfden wortel uit het product der grondtallen.*

*Te bewijzen:* $\sqrt[n]{(d \times c \times b \times a)} = \sqrt[n]{d} \times \sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{a}$,

of $(\sqrt[n]{d} \times \sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{a})^n = d \times c \times b \times a$ ---- bep. **wortel.**

*Bewijs:* $(\sqrt[n]{d} \times \sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{a})^n$

$= (\sqrt[n]{d})^n \times (\sqrt[n]{c})^n \times (\sqrt[n]{b})^n \times (\sqrt[n]{a})^n$ ---------- eig. **M 1.**

$= d \times c \times b \times a$ ---------- bep. **wortel.**

§ 59. **W 2. De n-de machtswortel uit een quotient is gelijk aan het quotient van de n-de machtswortels uit deeltal en deeler:**

$$\sqrt[n]{(b : a)} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{a}.$$

Van rechts naar links gelezen: *Het quotient van gelijknamige wortels is gelijk aan denzelfden wortel uit het quotient der getallen achter de wortelteekens.*

*Te bewijzen:* $\sqrt[n]{(b : a)} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{a}$.

of: $(\sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{a})^n = b : a$ ---------- bep. **wortel.**

*Bewijs:* $(\sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{a})^n$

$= (\sqrt[n]{b})^n : (\sqrt[n]{a})^n$ ---------- eig. **M 2.**

$= b : a$ ---------- bep. **wortel.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 60. **W 3. Den n-de machtswortel uit een macht verkrijgt men door den machtsexponent door n te deelen:**

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{p:n} \qquad (p : n \text{ opgaande deeling}).$$

Van rechts naar links gelezen: *Een macht, waarbij de exponent als een quotient geschreven wordt, kan geschreven worden als een wortel uit een macht, waarbij het deeltal machtsexponent en de deeler wortelexponent wordt.*

*Te bewijzen:* $\sqrt[n]{a^p} = a^{p:n}$

of: $(a^{p:n})^n = a^p$ ---------- bep. **wortel.**

*Bewijs:* $(a^{p:n})^n$

$= a^{n(p:n)}$ ---------- eig. **M 5.**

$= a^p$ ---------- bep. **quotient.**

*Opmerking:* Wanneer p : n geen opgaande deeling is, krijgt men te doen met zoogenaamde *gebroken exponenten* (zie verder de Algebra).

§ 61. **W 4. Den n-de machtswortel uit een wortel verkrijgt men, door den wortelexponent met n te vermenigvuldigen:**

$$\sqrt[n]{(\sqrt[p]{a})} = \sqrt[np]{a}.$$

Van rechts naar links gelezen: *De wortel uit een getal a, waarbij de wortelexponent als het product van de getallen n en p wordt geschreven, verkrijgt men door eerst den p-de machtswortel uit a te bepalen en uit die uitkomst den n-de machtswortel te nemen.*

*Te bewijzen:* $\sqrt[n]{(\sqrt[p]{a})} = \sqrt[np]{a}.$

of: $\{\sqrt[n]{(\sqrt[p]{a})}\}^{np} = a$ ---------- bep. **wortel.**

*Bewijs:* $\{\sqrt[n]{(\sqrt[p]{a})}\}^{np}$

$= \left[\{\sqrt[n]{(\sqrt[p]{a})}\}^n\right]^p$ ---------- eig. **M 5.**

$= [\sqrt[p]{a}]^p$ ---------- bep. **wortel.**

$= a$ ---------- bep. **wortel.**

*Opmerking:* Aangezien np = pn (eig. **V 1**) heeft men ook:

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} = \sqrt[pn]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 62. **W 5. Een wortel verandert niet van waarde, als men wortel- en machtsexponent met eenzelfde getal vermenigvuldigt:**

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[bn]{a^{bp}}.$$

Van rechts naar links gelezen: *Een wortel verandert niet van waarde, als men wortel- en machtsexponent door eenzelfde getal deelt.*

*Te bewijzen:* $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[bn]{a^{bp}}$.

of: $(\sqrt[n]{a^p})^{bn} = a^{bp}$ ---------- bep. **wortel.**

*Bewijs:* $(\sqrt[n]{a^p})^{bn}$

$= \{(\sqrt[n]{a^p})^n\}^b$ ---------- eig. **M 5.**
$= \{a^p\}^b$ ---------- bep. **wortel.**
$= a^{bp}$ ---------- eig. **M 5.**

*Opmerking:* De eigenschappen **W 1** tot en met **W 5** gelden slechts, wanneer de worteltrekking „opgaat". Uitdrukkingen als $\sqrt{7}$, $\sqrt[5]{12}$, enz. hebben voor ons geen zin. Wil men ook deze „niet-opgaande worteltrekkingen" gebruiken, dan krijgt men te doen met de *onmeetbare getallen.*

### Bijzondere herleidingen.

§ 63. Wanneer we het product van de som en het verschil van twee getallen moeten bepalen, dan kunnen we dit soms gemakkelijker bepalen dan door de directe vermenigvuldiging. Aldus: ($a > b$ verondersteld).

$(a + b)\ (a - b)$
$= a\ (a - b) + b\ (a - b)$ ---------- eig. **V 3.**
$= (a^2 - ab) + (ab - b^2)$ ---- eig. **V 4** en bep. **macht.**
$= (a^2 + ab) - (ab + b^2)$ ---------- eig. **A 6.**
**(MP. I)** $= a^2 - b^2$ ---------- eig. **V 1.**

In woorden: **Het product van de som en het verschil van twee getallen is gelijk aan het verschil hunner kwadraten.**

Dit kan ons helpen bij uit 't hoofd berekenen van sommige producten, b.v. $42 \times 38$. We zoeken een „mooi getal", dat tusschen beide inligt, hier 40, en schrijven nu: $42 \times 38 = (40 + 2) \times (40 - 2) = 40^2 - 2^2 = 1596$.

Minder in het oog vallend is het gebruik bij het berekenen

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van het kwadraat van een getal in de buurt van een „mooi getal", b.v. $98^2$. Men schrijft:

$$98^2 - 2^2 = (98 + 2)\ (98 - 2) = 100 \times 96 = 9600.$$
$$98^2 = 9600 + 2^2 = 9604.$$

§ 64. Een ander *„merkwaardig product"* is het *kwadraat van een som of een verschil:*

**(MP. II)** $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\ ab.$

**(MP. III)** $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab.$

Men kan dit als volgt aantoonen:

$(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b)$ _____ bep. **macht.**
$= a\ (a + b) + b\ (a + b)$ _____ eig. **V 3.**
$= (a^2 + ab) + (ab + b^2)$ _____ eig. **V 2.**
$= a^2 + ab + ab + b^2$ _____ eig. **O 3.**
$= a^2 + b^2 + 2\ ab$ _____ eig. **O 4** en bep. **product.**

In woorden: **Het vierkant van een som van twee getallen is gelijk aan de som van het kwadraat van het eerste getal, het kwadraat van het tweede getal en het dubbel product der gegeven getallen.**

$(a - b)^2 = (a - b)\ (a - b)$ _____ bep. **macht.**
$= a\ (a - b) - b\ (a - b)$ _____ eig. **V 5.**
$= (a^2 - ab) - (ab - b^2)$ _____ eig. **V 4** en bep. **macht.**
$= \{(a^2 - ab) + ab\} - \{(ab - b^2) + ab\}$ _____ eig. **A 1.**
$= a^2 - (2\ ab - b^2)$ _____ bep. **verschil** en eig. **A 2.**
$= (a^2 + b^2) - \{(2\ ab - b^2) + b^2\}$ _____ eig. **A 1.**
$= a^2 + b^2 - 2\ ab$ _____ bep. **verschil.**

In woorden: **Het vierkant van het verschil van twee getallen is gelijk aan de som hunner kwadraten, verminderd met het dubbelproduct der gegeven getallen.**

Deze producten kan men gebruiken om kwadraten van getallen te berekenen:

$$102^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 2^2 + 2 \times 2 \times 100 = 10404.$$
$$89^2 = (90 - 1)^2 = 90^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 90 = 7921.$$

§ 65. Bij het hoofdrekenen gebruikt men dikwijls nog een derde middeltje. Wil men b.v. berekenen $62 \times 68$, dan zet men de getallen onder elkaar, neemt $6 \times 7 = 42$, $2 \times 8 = 16$ en zet als antwoord op 4216. Dit gaat alleen op, wanneer de aantallen tientallen in beide factoren gelijk zijn, terwijl de laatste cijfers

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

samen 10 zijn. Dit kan men als volgt aantoonen: Noem de getallen $\overline{|ab|}$ en $\overline{|ac|}$, waarbij $b + c = 10$ is. *)

Men kan de getallen ook schrijven $10a + b$ en $10a + c$.

$$(10a + b)\ (10a + c)$$
$$= 10\,a\,(10\,a + c) + b\,(10\,a + c)$$
$$= 10\,a\,.\,10\,a + 10\,a\,.\,c + b\,.\,10\,a + bc$$
$$= 100\,a^2 + 10\,a.\,(c + b) + bc$$
$$= 100\,a^2 + 100\,a + bc$$
$$= (a^2 + a)\,.\,100 + bc$$
$$= a\,(a + 1)\,.\,100 + bc.$$

(Noem de gebruikte eigenschappen!)

Hieruit zien we, dat het aantal honderdtallen gelijk wordt aan $a\,(a + 1)$, terwijl bc (het product van de laatste cijfers der getallen) de laatste 2 cijfers van het product zal vormen.

§ 66. Bij de quotienten hebben we eveneens bijzondere herleidingen, dikwijls *„merkwaardige quotienten"* genoemd, We willen het volgende product berekenen:

$$(a - b)\ (a^{n-1} + a^{n-2}\,b + ____ + ab^{n-2} + b^{n-1}) \qquad (a > b)$$

Dit kunnen we op de volgende manier herleiden:

$$(a - b)\ (a^{n-1} + a^{n-2}\,b + _____ + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$= a(a^{n-1} + a^{n-2}b + __ + ab^{n-2} + b^{n-1}) - b(a^{n-1} + a^{n-2}b + __ + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

eig. **V 5.**

$$= (a^n + a^{n-1}b + __ + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}) - (a^{n-1}b + a^{n-2}b + __ + ab^{n-1} + b^n)$$

eig. **V 2** en eig. **M 3.**

$$= a^n - b^n _____$$ eig. **A 1.**

Hieruit volgt evenwel onmiddellijk, dat **(M.Q. I)** $\dfrac{a^3 - b^n}{a - b}$ een **opgaande deeling** is

In woorden: **Het verschil van twee gelijknamige machten van twee getallen kan „zonder rest" gedeeld worden door het verschil der grondtallen.**

*Opmerking.* Dikwijls zegt men deze stelling korter, aldus: Het verschil van twee gelijknamige machten is *deelbaar* door het verschil der grondtallen. Daarbij hoort de bepaling, wat men onder deelbaar verstaat: *een getal g is deelbaar door een*

*) Het teeken $\overline{|\ |}$, ilatieteeken genaamd, gebruikt men om aan te duiden, dat a, b en c als cijfers moeten opgevat worden!

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*getal n, als* $\frac{g}{n}$ *een opgaande deeling is,* m.a.w. er kan een geheel getal x bepaald worden, zoodanig dat $n \times x = g$ is.

§ 67. Nemen we de grondtallen $a^2$ en $b^2$ $(a > b)$, dan is $(a^2)^n - (b^2)^n = a^{2n} - b^{2n}$ volgens het voorgaande deelbaar door $a^2 - b^2$. Noem het quotient $Q_1$.

$a^{2n} - b^{2n} = (a^2 - b^2) \times Q_1 = (a + b)(a - b) \times Q_1$.

Dan is ook:

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a + b} = Q_1 (a - b),$$ derhalve is

**(M. Q. II)** $\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a + b}$ een **opgaande deeling.**

In woorden: **Het verschil van twee gelijknamige even machten is deelbaar door de som der grondtallen.**

*Opmerking.* Het verschil van twee gelijknamige even machten is eveneens deelbaar door het verschil der grondtallen. Dit is evenwel een bijzonder geval van **(M.Q. I).**

§ 68. Volgens **(M.Q. II)** is $a^{2n} - b^{2n}$ deelbaar door $a + b$, noem het quotient $Q_2$. Dan is

$a (a^{2n} - b^{2n}) = a Q_2 (a + b)$ (1)

$b^{2n} (a + b) = b^{2n} (a + b)$ (2)

Uit (1) en (2) volgt door optelling:

$a (a^{2n} - b^{2n}) + b^{2n} (a + b) = a Q_2 (a + b) + b^{2n} (a + b)$

$= (a Q_2 + b^{2n}) (a + b)$ ---------- eig. **V 2.**

Het eerste lid kunnen we herleiden:

$a (a^{2n} - b^{2n}) + b^{2n} (a + b)$

$= (a^{2n+1} - ab^{2n}) + (ab^{2n} + b^{2n+1})$ ------ eig. **V 2** en eig. **M 3.**

$= (a^{2n+1} + ab^{2n} + b^{2n+1}) - ab^{2n}$ ---------- eig. **A 2.**

$= a^{2n+1} + b^{2n+1}$ ---------- eig. **A 2.**

Derhalve:

$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (aQ^2 + b^{2n}) (a + b)$ Dan is

**(M. Q. III)** $\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a + b}$ een **opgaande deeling.**

In woorden: **De som van twee gelijknamige oneven machten is deelbaar door de som der grondtallen.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

## Algemeene Opmerkingen bij het voorgaande.
## Het getal Nul.

§ 69. Uit het voorgaande is gebleken, dat de optelling, de vermenigvuldiging en de machtsverheffing *rechtstreeksche*, de overige (aftrekking, deeling, worteltrekking en logarithmeneming) *omgekeerde* verbindingen (bewerkingen) van getallen zijn. We kunnen ze aldus naast elkaar zetten:

| *Rechtstreeksche verbindingen.* | *Omgekeerde verbindingen:* |
|---|---|
| *Optelling:* het vormen van de *som* a + b | 1e omkeering: a + x = b.<br>2e omkeering: x + a = b.<br>Beide omkeeringen voeren tot de *aftrekking:* het vormen van het *verschil* b — a. |
| *Vermenigvuldiging:* het vormen van het *product* a × b | 1e omkeering: a × x = b.<br>2e omkeering: x × a = b.<br>De 1e omkeering geeft aanleiding tot de verdeelingsdeeling, de tweede tot de verhoudingsdeeling. Samengevat: men krijgt als omgekeerde verbinding de *deeling*, dit is het bepalen van het *quotient* b : a. |
| *Machtsverheffing:* het vormen van de *macht* $a^n$ | 1e omkeering: $x^n = a$.<br>2e omkeering: $a^x = b$.<br>De 1e omkeering is de *worteltrekking:* het bepalen van $\sqrt[n]{a}$.<br>De 2e omkeering is de *logarithmeneming:* het zoeken van $^a\log b$. |

*Opmerking.* x stelt in al deze gevallen voor het getal, dat bepaald moet worden.

§ 70. Wanneer we een rekenkundige vorm hebben, waarin we verschillende verbindingen werkelijk moeten uitvoeren, dan is het lang niet onverschillig in welke volgorde ze uitgevoerd worden. Zoo zal 26 — 4 × 5 gelijk zijn aan 6, wanneer eerst vermenigvuldigd, en gelijk aan 110, als eerst afgetrokken

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

wordt! Men moet dus de goede volgorde kennen. De logarithmeneming kunnen we bij de elementaire berekeningen wel buiten beschouwing laten, terwijl de worteltrekking nog afzonderlijk onze aandacht vraagt. De volgorde wordt dan aldus: Machtsverheffing, Vermenigvuldiging, Deeling, Optelling of Aftrekking. Deze laatste twee in de volgorde, zooals de vorm dat aangeeft, uitgevoerd, wanneer we van links naar rechts gaan. Laten we het volgende voorbeeld nemen: Bereken:

$$3 \times 5^4 : 75 - 236 : 2 \times 59 + 7 \times 8 - 2^3 \times 5.$$

Allereerst worden nu de machtsverheffingen uitgevoerd, daarna de vermenigvuldigingen, enz.:

$$3 \times 625 : 75 - 236 : 2 \times 59 + 7 \times 8 - 8 \times 5 =$$
$$1875 : 75 - 236 : 118 + 56 - 40 =$$
$$25 - 2 + 56 - 40 = 23 + 56 - 40 = 79 - 40 = 39.$$

Bij de worteltrekking geeft men door verlenging van het wortelteeken of door haakjes aan, welke verbindingen eerst moeten uitgevoerd worden, teneinde dubbelzinnigheid te voorkomen:

$$\sqrt{3 \times 9 + 11} = \sqrt{27 + 11} = \sqrt{36} = 6.$$
$$\sqrt{(25 \times 36 : 9)} = \sqrt{(900 : 9)} = \sqrt{100} = 10.$$

In den regel vat men het wel zoo op, dat, wanneer de $\times$teekens aanwezig zijn, men eerst moet worteltrekken en daarna vermenigvuldigen. Schrijft men de factoren aaneen, dan wil men daarmee te kennen geven, dat eerst vermenigvuldigd moet worden. $\sqrt{a \times b \times c}$ en $\sqrt{abc}$ worden na inzetting van $a = 4$, $b = 3$ en $c = 12$, resp.:

$$\sqrt{4 \times 3 \times 12} = 2 \times 3 \times 12 = 72, \text{ en}$$
$$\sqrt{(4 \times 3 \times 12)} = \sqrt{144} = 12.$$

§ 71. Aan de bespreking van de eigenschappen der machten zijn de eigenschappen van sommen, verschillen, producten en quotienten voorafgegaan. We zouden dus kunnen verwachten, dat we eigenschappen zouden krijgen, waarbij òf de exponent òf het grondtal een som, een verschil, een product of een macht is, derhalve 8 eigenschappen en niet 5. Deze eig. zouden dan moeten uitgedrukt worden door formules voor:

1°. $(a + b)^n$
2°. $(a - b)^n$
3°. $(a \times b)^n$
5°. $a^{p+q}$
6°. $a^{p-q}$
7°. $a^{p \times q}$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

4°. $(a : b)^n$ 8°. $a^{p:q}$

Inderdaad komen 3° tot en met 7° in de eigenschappen **M 1** tot en met **M 5** voor, terwijl 8° bij de worteltrekking behandeld is (**W 3**). De eerste twee geven aanleiding tot de zoogenaamde *binomiaalformule van Newton*, die in het Algebra besproken wordt.

§ 72. Nul behoort feitelijk niet tot de „getallen" (zie § 3). Evenwel wordt er geregeld mee gerekend, alsof het wel een natuurlijk getal was. Bepaalde rekenregels worden met nul ingevoerd, om sommige eigenschappen, die men anders onder voorwaarden zou moeten geven, zonder die voorwaarden te laten doorgaan.

Men is overeengekomen $a + 0 = a$ en $0 + a = a$ te nemen, waaruit volgt, dat $a + 0 = 0 + a$, zoodat de commutatieve eigenschap der optelling eveneens geldt voor het geval, dat één der termen nul is; óók als beide nul zijn! Eveneens gaat de associatieve eig. **(O 2)** door: $(a + b) + 0 = a + b = a + (b + 0)$, waardoor ook **O 3** en **O 4** onveranderd doorgaan voor het geval, een of meer der termen nul is.

Uit $0 + a = a$ volgt $a - a = 0$, zoodat de aftrekking $b - a$ doorgaat voor het geval $b = a$. De eigenschappen **A 1** tot en met **A 5** gelden nu voor $b \geqq a$.

Bij de vermenigvuldiging moet men, als voortzetting van hetgeen bij de optelling overeengekomen is,

$a \times 0 = \overbrace{0 + 0 + 0 + \text{------} + 0}^{a \text{ termen}} = 0$ opvatten. Komt men overeen $a \times 0 = 0 \times a$, dan geldt de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging, wanneer er sprake van is, dat een der factoren nul is. $a \times 0 = 0 \times a = 0$ vormt de belangrijke eigenschap, dat een product, waarvan een der factoren nul is, zelf nul is.

In verband met het voorgaande kunnen we zeggen, dat wanneer $a \times$ een getal $x = b$ is en $b > 0$, dat $a \neq 0$ moet zijn. Maar dan zal bij een deeling, waarbij het deeltal grooter dan nul is, de deeler van nul verschillend moeten gedacht worden! Is daarentegen $a = b = 0$, dan kunnen we elk getal als het gevraagde getal x beschouwen. Men drukt dit wel zoo uit, dat $0 : 0$ een onbepaalde deeling is. Tevens kunnen we nog opmerken, dat $0 : a$ steeds nul is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Over het getal nul bij de machtsverheffing werd reeds gesproken (zie § 54.)

## Gebroken Getallen I.

### *A. Gewone Breuken.*

§ 73. Bij de deeling hebben we gesproken van „opgaande" en „niet-opgaande" deelingen. Deze laatste kunnen we vermijden door invoering van een nieuw soort getallen, de *breuken* of *gebroken getallen.* Wanneer b : a een deeling is en we gaan daarvan niet het „quotient" bepalen, maar we laten eenvoudig het quotient in den vorm $\frac{b}{a}$ staan, dan spreken we van een *breuk.* Daarbij wordt b de *teller* en a de *noemer* genoemd.

**Bepaling. Een breuk is een quotient, waarvan de namen deeltal en deeler zijn vervangen door teller en noemer.**

§ 74. Is $\frac{b}{a}$ een „opgaande" deeling, m.a.w. is het „quotient" een geheel getal, dan hebben we te doen met een *oneigenlijke breuk,* bij niet-opgaande deelingen met een *eigenlijke breuk:* $^{8}/_{2}$ en $^{30}/_{3}$ zijn oneigenlijke, $^{7}/_{12}$ en $^{23}/_{18}$ zijn eigenlijke breuken.

Nu kan b nog kleiner zijn dan a, in welk geval we spreken van een *echte breuk;* in het tegenovergestelde geval van een *onechte breuk.* Zoo zijn $^{7}/_{12}$ en $^{10}/_{15}$ echte, en $^{6}/_{6}$ en $^{24}/_{16}$ onechte breuken.

Bij een onechte breuk kunnen we steeds het „quotient" van de deeling bepalen. B.v. bij $\frac{b}{a}$ is het „quotient" q en de „rest" r. Dan is $b = aq + r$, of $\frac{b}{a} = q + \frac{r}{a}$ Is r van nul verschillend (niet-opgaande deeling!) dan is dus $\frac{b}{a}$ geschreven als de som van een geheel getal q en een echte breuk $\frac{r}{a}$ (immers $r < a$). Gebruikt men cijfers, dan wordt eenvoudig het + teeken weggelaten en spreekt men van een *gemengd getal.*
Zoo is $^{54}/_{7} = 7 + {}^{5}/_{7} = 7\ {}^{5}/_{7}$.

Hierbij dient nog opgemerkt te worden, dat het begrip „breuk" op de lagere school in den regel anders ontwikkeld wordt dan hier het geval is. Men vat b.v. $^{3}/_{4}$ op als $3 \times {}^{1}/_{4}$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Men gaat „een geheel" in 4 deelen verdeelen en neemt daarvan 3 partjes. Dit berust dan op: $p \times \frac{b}{a} = \frac{pb}{a}$ (zie beneden).

§ 75. Door een breuk op te vatten als een quotient, kunnen we de eigenschappen van quotienten overnemen voor breuken, met verandering van deeltal in teller en deeler in noemer. Hier volgen ze:

**B 1.** $\frac{nb}{na} = \frac{b}{a}$ **Een breuk verandert niet van waarde, als men teller en noemer door eenzelfde getal deelt.**

**B 2.** $p \times \frac{b}{a} = \frac{pb}{a}$ **Een breuk wordt met een getal vermenigvuldigd door den teller met dat getal te vermenigvuldigen.**

**B 3.** $p \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a : p}$ **Een breuk wordt met een getal vermenigvuldigd door den noemer door dat getal te deelen.**

**B 4.** $\frac{b}{a} : p = \frac{b : p}{a}$ **Een breuk wordt door een getal gedeeld door den teller door dat getal te deelen.**

**B 5.** $\frac{b}{a} : p = \frac{b}{pa}$. **Een breuk wordt door een getal gedeeld door den noemer met dat getal te vermenigvuldigen.**

**B 6.** $\frac{c \times b \times a}{r \times q \times p} = \frac{c}{r} \times \frac{b}{q} \times \frac{a}{p}$. **Een breuk kan geschreven worden als het product van eenige breuken, waarvan de tellers en noemers de resp. factoren van den oorspronkelijken teller en noemer zijn.**

**B 7.** $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ **Een breuk wordt tot de n-de macht verheven door teller en noemer tot die macht te verheffen.**

**B 8.** $\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}$ **De n-de machtswortel uit een breuk is gelijk aan een breuk, die tot teller en noemer resp. de n-de machtswortels uit teller en noemer der oorspronkelijke breuk heeft.**

*Opmerkingen.* 1. Wanneer a : p of b : p een „niet-opgaande" deeling is, wordt de teller (c. q. de noemer) zelf een breuk; men spreekt dan van *een samengestelde breuk.*

2. Sommige eigenschappen worden van rechts naar links

$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+b+c}{n}$

$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

gelezen toegepast. **B 1** luidt dan: *Een breuk verandert niet van waarde, wanneer men teller en noemer met eenzelfde getal vermenigvuldigt.*

**B 6** wordt: *Het product van eenige breuken is gelijk aan een breuk, waarvan de teller gelijk is aan het product der resp. tellers en de noemer gelijk aan het product der resp. noemers.*

§ 76. Eig. **B 1** wordt gebruikt bij het *vereenvoudigen* van breuken. Men zegt van een breuk, dat men ze *vereenvoudigd* heeft, als men ze veranderd heeft in een andere breuk met dezelfde waarde, maar waarvan teller en noemer kleiner geheele getallen zijn dan van de oorspronkelijke. Zoo is de breuk $^9/_{12}$ vereenvoudigd, als men ze schrijft $^6/_8$, maar niet als men ze schrijft $\frac{1^1/_2}{2}$. Hebben teller en noemer geen factor grooter dan 1 gemeen, dan spreekt men van een onvereenvoudigbare breuk.

Een andere toepassing van eig. **B 1** vinden we bij het *gelijknamig* maken van breuken, d.w.z. eenige breuken herleiden tot nieuwe, die allen denzelfden noemer hebben. Heeft men eenmaal de breuken gelijknamig gemaakt, dan passen we bij de optelling eig. **D 7** en bij de aftrekking eig. **D 8** toe. Voorbeelden:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a + b + c}{n}$$

$$\frac{d}{m} - \frac{e}{m} = \frac{d - e}{m}$$

§ 77. Alle eigenschappen van sommen gaan onveranderd door voor het geval de termen breuken zijn. Als voorbeeld kiezen we het bewijs van eig. **O 4.** (Zoo noodig eerst gelijknamig maken!)

*Te bewijzen:* $\frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = \frac{c}{p} + \frac{a}{p} + \frac{b}{p}$

*Bewijs:* $\frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = \frac{a + b + c}{p}$ ---------- eig. **D 7.**

$= \frac{c + a + b}{p}$ ---------- eig. **O 4.** (geh. get.)

$= \frac{c}{p} + \frac{a}{p} + \frac{b}{p}$ ---------- eig. **D 7.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 78. De eigenschappen van verschillen kunnen eveneens bewezen worden, wanneer aftrektal en aftrekker uit breuken bestaan. Ziehier het bewijs voor eig. **A 5.**

*Te bewijzen:* $\left(\frac{x}{n} - \frac{y}{n}\right) - \frac{z}{n} = \frac{x}{n} - \left(\frac{y}{n} + \frac{z}{n}\right)$.

*Bewijs:* $\left(\frac{x}{n} - \frac{y}{n}\right) - \frac{z}{n} = \frac{x-y}{n} - \frac{z}{n}$ ——— eig. **D 8.**

$= \frac{(x - y) - z}{n}$ eig. **D 8.**

$= \frac{x - (y \quad z)}{n}$ ——— eig. **A 5** (geh. get.)

$= \frac{x}{n} - \frac{y + z}{n}$ eig. **D 8.**

§ 79. Bij het vermenigvuldigen van breuken met breuken en van breuken met getallen, worden resp. **B 6** en **B 2** (of **B 3**) toegepast.

Hoe staat het met het vermenigvuldigen met een breuk, b.v. vermenigvuldigen met $\frac{a}{b}$ ? Volgens eig. **B 6** is $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$, maar nu $\frac{a}{b} \times g$ (g een geheel getal.) ? We kunnen ons van de moeilijkheid direct ontslaan door te schrijven $g = \frac{g}{1}$ waaruit volgt: $\frac{a}{b} \times g = \frac{a}{b} \times \frac{g}{1} = \frac{a \times g}{b \times 1} = \frac{a \times g}{b}$. D.w.z. een getal wordt met een breuk vermenigvuldigd door dat getal met den teller te vermenigvuldigen en de uitkomst door den noemer te deelen.

De eigenschappen **V 1** tot en met **V 7** gaan nu ook door voor gebroken getallen. Kiezen we als voorbeeld het bewijs voor eig. **V 1.**

*Te bewijzen:* $\frac{a}{b} \times \frac{p}{g} = \frac{p}{g} \times \frac{a}{b}$.

*Bewijs:* $\frac{a}{b} \times \frac{p}{g} = \frac{a \times p}{b \times q}$ ——— eig. **B 6.**

$= \frac{p \times a}{q \times b}$ ——— eig. **V 1** (geh. get.)

$= \frac{p}{q} \times \frac{a}{b}$ ——— eig. **B 6.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 80. Bij het deelen van breuken door getallen kunnen we met vrucht gebruiken de eigenschappen **B 4** en **B 5.**

Voor het deelen door breuken hebben we noodig een bepaling van het omgekeerde van een getal:

**Onder het omgekeerde of de reciproke waarde van een getal verstaat men het quotient, dat men verkrijgt, als men dat getal op de eenheid deelt.**

Zoo is $\frac{1}{7}$ het omgekeerde van 7, $\frac{1}{a}$ het omgekeerde van a, $\frac{q}{p}$ van $\frac{p}{q}$. Immers $\frac{q}{p} \times \frac{p}{q} = 1$, dus $1 : \frac{p}{q} = \frac{q}{p}$.

§ 81. **B 9. Is bij een quotient de deeler een breuk, dan verkrijgt men de uitkomst, door het deeltal te vermenigvuldigen met het omgekeerde van den deeler.**

*Te bewijzen:* $\frac{p}{q} : \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \times \frac{p}{q}$.

*Bewijs.* We maken hierbij gebruik van een eigenschap, die bij de Vraagstukken over Quotienten bewezen is, n.l.

$(p : q) : (a : b) = p \times b : q \times a$.

Derhalve: $\frac{p}{q} : \frac{a}{b} = p \times b : q \times a$

$= \frac{b \times p}{a \times q}$ ---------- eig. **V 1** (geh. get.)

$= \frac{b}{a} \times \frac{p}{q}$ ---------- eig. **B 6.**

## B. *Tiendeelige Breuken.*

§ 82. **Onder een tiendeelige breuk verstaat men een breuk, waarvan de noemer een macht van 10 is.**

Volgens deze definitie moet men dan b.v. $\frac{7}{10}$ en $\frac{39}{1000}$ als tiendeelige breuken opvatten. Gewoonlijk gebruikt men voor deze breuken een andere schrijfwijze, n.l. 0,7 en 0,039. Men gaat n.l. uit van het idee, dat de betrekkelijke waarde van de cijfers in het tientallig stelsel van links naar rechts steeds tienmaal zoo klein wordt. Wanneer men daaraan vasthoudt, ook na het neerschrijven van de „eenheden", dan zullen de plaatsen rechts daar-



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van achtereenvolgens gereserveerd zijn voor de tiende deelen, honderdste deelen, enz. Door een komma, ook wel een decimaalteeken genoemd, duidt men aan, dat men de eenheden gepasseerd is.

§ 83. De *optelling* en *aftrekking* van decimale getallen komt feitelijk neer op het optellen en aftrekken van gemengde getallen. Daarbij drage men zorg, dat cijfers met dezelfde betrekkelijke waarde onder elkaar komen te staan, hetgeen men bereikt door de komma's onder elkaar te zetten.

§ 84. Gesteld, we moeten het *product* nemen van 2,784 en 65,27. Dan zouden we dit aldus kunnen schrijven: $2{,}784 \times 65{,}27 = \frac{2784}{1000} \times \frac{6527}{100} = \frac{2784 \times 6527}{10^3 \times 10^2} = \frac{18171168}{10^5} = 181{,}71168.$

Dit voert ons tot den bekenden regel:

*Moeten twee decimale getallen met elkaar vermenigvuldigd worden, dan neemt men eerst het product der getallen zonder op de komma's te letten en neemt in de uitkomst zooveel cijfers achter het decimaalteeken als er in de twee factoren samen achter de komma voorkomen.*

§ 85. Nu we de schrijfwijze der tiendeelige getallen kennen, kunnen we iedere *niet-opgaande deeling* zoover voortzetten, als we maar willen. Wanneer we het aantal eenheden van het quotient hebben bepaald, plaatsen we in deeltal en quotient beide een decimaalteeken en gaan onder voortdurend „nullen bijhalen" door met deelen. Voorbeelden:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 317 | 862,0000 | 2,7192__ | 285 | 3128,000 | 10,975____ |
| | 634 | | | 285 | |
| | 2280 | | | 2780 | |
| | 2219 | | | 2565 | |
| | 610 | | | 2150 | |
| | 317 | | | 1995 | |
| | 2930 | | | 1550 | |
| | 2853 | | | 1425 | |
| | 770 | | | 125 | |
| | 634 | | | | |
| | 136 | | | | |

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dikwijls vraagt men het antwoord van een deeling *in eenige decimalen nauwkeurig* te bepalen. Vraagt men b.v. het quotient van de 1e deeling in 3 dec. nauwkeurig, dan is het antwoord 2,719. Men laat dus eenvoudig de cijfers, die na de 9 volgen, weg. Is evenwel het volgende cijfer een 5 of meer dan 5, dan wordt het cijfer, dat zou moeten blijven staan, met 1 verhoogd. B.v. het quotient van de 2e deeling, in 2 decimalen nauwkeurig, is 10,98.

Wanneer het deeltal een decimaal getal is, zal de deeling nu wel geen moeilijkheden meer opleveren. Maar als de deeler een komma bezit? B.v. 1,768 ⁄ 3,26487 ⟍
Men past nu eenvoudig eig. **B 1** toe. Ga deeler en deeltal (noemer en teller!) met 1000 vermenigvuldigen, waardoor de komma uit den deeler verdwijnt en in het deeltal 3 plaatsen naar rechts opschuift, enz.

### C. *Samengestelde Breuken.*

§ 86. Zijn van een breuk teller en noemer op hun beurt (of één van beiden) gebroken getallen, dan spreekt men van een *samengestelde breuk*. Om deze te herleiden, kan men teller en noemer met een zoodanig getal vermenigvuldigen, dat de breuken verdwijnen. B.v.

$$\frac{6\frac{6}{7}}{13\frac{1}{8}} = \frac{8 \times 7 \times \frac{48}{7}}{8 \times 7 \times \frac{105}{8}} \quad \frac{\frac{8 \times 7 \times 48}{7}}{\frac{8 \times 7 \times 105}{8}} = \frac{8 \times 48}{7 \times 105} = \frac{8 \times 16}{7 \times 35} = \frac{128}{245}.$$

Een andere methode is, teller en noemer tot enkelvoudige breuken te herleiden en daarna eig. **B 7** toe te passen:

$$\frac{6\frac{6}{7}}{13\frac{1}{8}} = \frac{\frac{48}{7}}{\frac{105}{8}} = \frac{48}{7} \times \frac{8}{105} = \frac{48 \times 8}{7 \times 105} = \frac{16 \times 8}{7 \times 35} = \frac{128}{245}.$$

Bekortingen in de praktijk, zooals het „wegslaan" van factoren in teller en noemer tegen elkaar, voor men met het eigenlijke vermenigvuldigen begint, kunnen we hier buiten beschouwing laten; de bespreking er van hoort meer thuis in de methodiek van het rekenen.

### Verhoudingen.

§ 87. Behalve als breuken kunnen quotienten nog anders opgevat worden, namelijk als **verhoudingen**. Uitdrukkelijk moe-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

ten we hier voorop zetten, dat we dit alleen kunnen doen met quotienten van „verhoudingsdeelingen", d.w.z. deeltal en deeler moeten benoemde of beiden onbenoemde getallen zijn. Een vorm als 3 gld. : 5 kunnen we dus niet als een verhouding beschouwen.

Zoowel de vorm p : q als het getal, waarmee q moet vermenigvuldigd worden om p op te leveren, wordt dus verhouding genoemd. Om verwarring te voorkomen, zullen we het te zoeken getal aanduiden als het verhoudingsgetal. p wordt de eerste, q de tweede term genoemd. Ook spreekt men wel van voorgaanden en volgenden term.

**Bepaling. Een verhouding is het quotient van een „verhoudingsdeeling", waarbij de namen deeltal en deeler zijn vervangen door eersten en tweeden term.**

§ 88. In verband met onze bepaling kunnen we direct de volgende eigenschappen neerschrijven:

**Vh 1.** $p : q = np : nq$. **Een verhouding verandert niet van waarde, wanneer men beide termen met eenzelfde getal vermenigvuldigt (óf er door deelt!)**

**Vh 2.** $n \times (p : q) = np : q$. **Een verhouding wordt met een getal vermenigvuldigd door den eersten term met dat getal te vermenigvuldigen.**

**Vh 3.** $n \times (p : q) = p : (q : n)$. **Een verhouding wordt met een getal vermenigvuldigd door den tweeden term door dat getal te deelen.**

**Vh 4.** $(p : q) : n = (p : n) : q$. **Een verhouding wordt door een getal gedeeld door den eersten term door dat getal te deelen.**

**Vh 5.** $(p : q) : n = p : n \times q$. **Een verhouding wordt door een getal gedeeld door den tweeden term met dat getal te vermenigvuldigen.**

**Vh 6.**

$(p_3 : q_3) \times (p_2 : q_2) \times (p_1 : q_1) = (p_3 \times p_2 \times p_1) : (q_3 \times q_2 \times q_1)$

**Het product van eenige verhoudingen is gelijk aan de verhouding van het product der voorgaande en dat der volgende termen.**

**Vh 7.** $p_1 : q + p_2 : q = (p_1 + p_2) : q$. **De som van twee of meer verhoudingen met denzelfden tweeden term is gelijk aan de verhouding van de som der voorgaande termen en den gemeenschappelijken volgenden term.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Vh 8. $p_1 : q - p_2 : q = (p_1 - p_2) : q$. **Het verschil van twee verhoudingen met denzelfden tweeden term is gelijk aan de verhouding van het verschil der voorgaande termen en den gemeenschappelijken volgenden term.**

Vh 9. $(p : q)^n = p^n : q^n$. **Een verhouding wordt tot de n-de macht verheven door beide termen tot die macht te verheffen.**

Vh 10. $\sqrt[n]{(p : q)} = \sqrt[n]{p} : \sqrt[n]{q}$. **De n-de machtswortel uit een verhouding is gelijk aan de verhouding van de n-de machtswortels uit de termen.**

## Evenredigheden.

§ 89. **Bepaling. Een meetkundige evenredigheid (kortweg evenredigheid) is een rekenkundige vorm, die uitdrukt de gelijkheid van twee verhoudingen.** (even = gelijk; reden = verhouding).

Dikwijls schrijft men een evenredigheid in dezen vorm:

$a : b = c : d$. (Zie ook § 109.)

a en b zijn de *termen der eerste reden (verhouding)*.

c en d zijn de *termen der tweede reden (verhouding)*.

a en c worden de *voorgaande*, b en d de *volgende* termen genoemd. a en d heeten *uiterste (buitenste)*, b en c *middelste (binnenste)* termen. Men kan ook spreken van den *eersten term, den tweeden*, enz.

§ 90. **E 1. Van een evenredigheid is het product der uiterste termen gelijk aan het product der middelste.**

*Gegeven:* $a : b = c : d$.

*Te bewijzen:* $a \times d = b \times c$.

*Bewijs:* We vermenigvuldigen beide verhoudingen met $b \times d$. waardoor we gelijke uitkomsten behouden.

$(b \times d) \times (a : b) = (b \times d) \times (c : d)$.

$b \times d \times (a : b) = b \times d \times (c : d)$ eig. **V 7.**

$\{(a : b) \times b\} \times d = b \times \{(c : d) \times d\}$ eig. **V 7.**

$a \times d = b \times c$ bep. **quot. (verh. d)**

*Opmerking.* Deze eigenschap is van buitengewoon belang, waarom zij dan ook de **hoofdeigenschap der evenredigheden** wordt genoemd. Ze kan bij tallooze vraagstukken toegepast worden.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 91. **E 2. Wanneer vier getallen zoo gegeven zijn, dat het product van het eerste en vierde getal gelijk is aan het product van het tweede en derde getal, dan vormen deze getallen in diezelfde volgorde een evenredigheid.**

*Gegeven:* $a \times d = b \times c$

*Te bewijzen:* $a : b = c : d$.

*Bewijs:* Deel beide leden der gegeven gelijkheid door $b \times d$, waardoor gelijke uitkomsten verkregen worden.

$a \times d : b \times d = b \times c : b \times d$

$a : b = c : d$. eig. **Vh. 1.**

*Opmerking.* Deze eigenschap wordt het **omgekeerde van de hoofdeigenschap** genoemd. In het algemeen kan men zeggen, dat het *omgekeerde* van een stelling verkregen wordt, wanneer het ~~een~~ in het *Gegeven* en het *Te Bewijzen* staat, met elkaar verwisseld wordt. Laten we een voorbeeld uit de *Planimetrie* nemen:

*Stelling.* Is een driehoek rechthoekig, dan is de zwaartelijn naar de hypotenusa gelijk aan de helft van de schuine zijde.

*Omgekeerde.* Is in een driehoek de zwaartelijn naar de hypotenusa de helft van die lijn, dan is de driehoek rechthoekig.

(De leerling schrijve deze stellingen met Gegeven en Te Bewijzen en geve het Bewijs!)

Evenmin als iedere stelling een omgekeerde heeft, evenmin behoeft het omgekeerde van iedere stelling waar te zijn!

§ 92. **E 3. Men verkrijgt een nieuwe evenredigheid wanneer men:**

a. **de middelste termen verwisselt,**

b. **de uiterste termen verwisselt,**

c. **de middelste termen tot uiterste maakt en de uiterste tot middelste.**

a. *Gegeven:* $a : b = c : d$.

*Te bewijzen:* $a : c = b : d$.

*Bewijs:* Pas op de gegeven evenredigheid de hoofdeigenschap toe: $a \times d = b \times c$. Nu is $b \times c = c \times b$ (eig. **V 1**), dus ook $a \times d = c \times b$. Past men hierop eig. **E 2** toe, dan vindt men: $a : c = b : d$.

Het bewijs van b en c wordt aan den lezer overgelaten.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*Opmerking.* Bij deze bewijzen hebben we gebruik gemaakt van de hoofdeigenschap en haar omgekeerde, omdat ze daarmee in nauw verband staan. Immers **E 2** en **E 3** stellen ons nu in staat om uit de gelijkheid van 2 producten 8 evenredigheden op te schrijven, mits men zorge, dat de factoren van het eene product uiterste en die van het andere product middelste termen worden.

Uit $2 \times 6 = 3 \times 4$ volgen deze evenredigheden:

| | |
|---|---|
| $2 : 3 = 4 : 6$ (1) | $3 : 2 = 6 : 4$ (5) |
| $2 : 4 = 3 : 6$ (2) | $3 : 6 = 2 : 4$ (6) |
| $6 : 3 = 4 : 2$ (3) | $4 : 2 = 6 : 3$ (7) |
| $6 : 4 = 3 : 2$ (4) | $4 : 6 = 2 : 3$ (8) |

Feitelijk vindt men slechts 4 verschillende evenredigheden. De andere 4 zijn ontstaan door de redens met elkaar te verwisselen. Ga dit na!

§ 93. **E 4. Men verkrijgt een nieuwe evenredigheid, wanneer men:**

a. **de voorgaande termen eener evenredigheid met eenzelfde getal vermenigvuldigt of door eenzelfde getal deelt,**

b. **de volgende termen eener evenredigheid met eenzelfde getal vermenigvuldigt of door eenzelfde getal deelt,**

c. **een der uiterste (middelste) termen met een getal vermenigvuldigt en den anderen uitersten (middelsten) term door dat getal deelt.**

a. *Gegeven:* $a : b = c : d$.

*Te bewijzen:* $na : b = nc : d$ en $\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$.

*Bewijs:* In het 1e geval worden beide verhoudingen met eenzelfde getal vermenigvuldigd, waardoor men een gelijkheid van verhoudingen (= evenredigheid) behoudt. In het 2e geval worden beide verhoudingen door eenzelfde getal gedeeld en verkrijgt men eveneens een nieuwe evenredigheid.

Het bewijs van b en c wordt aan den lezer overgelaten. (Schrijf eerst in den goeden vorm!)

§ 94. **E 5. De som van de termen der eerste reden eener evenredigheid staat tot de som van de termen der tweede reden als de eerste term staat tot den derden, of de tweede tot den vierden.**

*Gegeven:* $a : b = c : d$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*Te bewijzen:* (a + c) : (b + d) = a : c.
(a + c) : (b + d) = b : d.

*Bewijs:* Beide leden der evenredigheid worden met 1 vermeerderd, waardoor gelijke uitkomsten worden verkregen:

a : b + 1 = c : d + 1
a : b + b : b = c : d + d : d
(a + b) : b = (c + d) : d — eig. **Vh. 7.**
(a + b) : (c + d) = b : d (1) — eig. **E 3.**

Nu kan men uit de geg. evenr. ook afleiden:
a : c = b : d (2) — eig. **E 3.**

Uit (1) en (2) volgt dan nog:
(a + b) : (c + d) = a : c.

§ 95. **E 6. Het verschil van de termen der eerste reden eener evenredigheid staat tot het verschil van de termen der tweede reden als de eerste term staat tot den derden, of de tweede tot den vierden.**

*Gegeven:* a : b = c : d (a > b)

*Te bewijzen:* (a — b) : (c — d) = a : c.
(a — b) : (c — d) = b : d.

*Bewijs:* Beide leden der oorspr. evenr. worden met 1 verminderd, waardoor gelijke uitkomsten worden verkregen:

a : b — 1 = c : d — 1.
a : b — b : b = c : d — d : d.
(a — b) : b = (c — d) : d ---------- eig. **Vh. 8.**
(a — b) : (c — d) = b : d (1) ---------- eig. **E 3.**

Uit de oorspronkelijke evenredigheid leiden we af:
a : c = b : d (2) ---------- eig. **E 3.**

Uit (1) en (2) volgt dan nog:
(a — b) : (c — d) = a : c.

*Opmerkingen.* 1. Uit a > b moet volgen, dat c > d is. Immers a > b wil zeggen, dat het verhoudingsgetal van a : b grooter dan één is, zoodat dit ook het geval moet zijn met dat van c : d.

2. Is a < b, dan doet men beter om te schrijven in het *Te bewijzen:* (b — a) : (d — c) = a : c of b : d. Om hiertoe te geraken, kan men het gegeven door toepassing van eig. **E 3**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

veranderen in: b : a = d : c en verder het bewijs op dezelfde manier als hierboven te geven.

§ 96. **E 7. De som van de termen der eerste reden eener evenredigheid staat tot de som van de termen der tweede reden gelijk het verschil van de termen der eerste reden staat tot het verschil van de termen der tweede reden.**

*Gegeven:* a : b = c : d.

*Te bewijzen:* (a + b) : (c + d) = (a — b) : (c — d).

*Bewijs:* Uit de oorspronkelijke evenredigheid leiden we af:

(a + b) : (c + d) = a : c ---------- eig. **E 5.**

(a — b) : (c — d) = a : c ---------- eig. **E 6.**

Hieruit volgt: (a + b) : (c + d) = (a — b) : (c — d)

*Opmerking.* Hetgeen bij § 96 gezegd is, geldt ook hier.

§ 97. Door verwisseling der middelste termen en door op de nieuwe evenredigheid resp. de eigenschappen **E 5, E 6** en **E 7** toe te passen, hebben we direct drie nieuwe eigenschappen:

**E 8. De som van de voorgaande termen eener evenredigheid staat tot de som der volgende termen gelijk een voorgaande staat tot zijn volgenden.**

**E 9. Het verschil van de voorgaande termen, enz.**

**E 10. De som van de voorgaande termen eener evenredigheid staat tot de som der volgende termen, gelijk het verschil der voorgaande staat tot het verschil der volgende.**

§ 98. **E 11. De producten van de overeenkomstige termen van twee evenredigheden vormen een nieuwe evenredigheid.**

*Gegeven:* a : b = c : d.

p : q = r : s.

*Te bewijzen:* ap : bq = cr : ds.

*Bewijs:* We nemen de producten van de overeenkomstige verhoudingen.

(a : b) × (p : q) = (c : d) × (r : s).

ap : bq = cr : ds ---------- eig. **Vh. 6.**

§ 99. **E 12. De quotienten van de overeenkomstige termen van twee evenredigheden vormen een nieuwe evenredigheid.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*Gegeven:* $a : b = c : d.$
$p : q = r : s.$

*Te bewijzen:* $\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{c}{r} : \frac{d}{s}.$

*Bewijs:* De verhoudingen vatten we hier weer op als quotienten en nemen het quotient van twee quotienten (zie *Vraagstukken*). We krijgen gelijke uitkomsten!

$(a : b) : (p : q) = (c : d) : (r : s)$

$\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{c}{r} : \frac{d}{s}.$

§ 100. **E 13. Gelijknamige machten van de termen eener evenredigheid vormen een nieuwe evenredigheid.**

*Gegeven:* $a : b = c : d$

*Te bewijzen:* $a^n : b^n = c^n : d^n.$

*Bewijs:* Neem van beide leden der gegeven evenredigheden de n-de macht:

$(a : b)^n = (c : d)^n$

$a^n : b^n = c^n : d^n$ ---------- eig. **Vh. 9.**

§ 101. **E 14. Gelijknamige wortels uit de termen eener evenredigheid vormen een nieuwe evenredigheid.**

*Gegeven:* $a : b = c : d.$

*Te bewijzen:* $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}.$

*Bewijs:* Trek uit beide leden der gegeven evenredigheid den n-de machtswortel.

$\sqrt[n]{(a : b)} = \sqrt[n]{(c : d)}$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$ ---------- eig. **Vh. 10.**

§ 102. Bestaat er een gelijkheid van meer dan twee verhoudingen, dan spreekt men wel van een *aaneengeschakelde evenredigheid.* Algemeene vorm:

$A : a = B : b = C : c = D : d \quad (1)$

Soms schrijft men dit wel aldus:

$A : B : C : D = a : b : c : d. \quad (2)$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Voor het geven van bewijzen moet men den vorm (1) nemen. We zullen nog een eigenschap behandelen.

§ 103. **E 15. De som van de voorgaande en die van de volgende termen eener aaneengeschakelde evenredigheid verhouden zich als een voorgaande en zijn volgende term.**

*Gegeven:* A : a = B : b = C : c = D :d.

*Te bewijzen:* (A + B + C + D) : (a + b + c + d) = A : a.

*Bewijs:* A : a = B : b

(A + B) : (a + b) = A : a (1) ---------- eig. **E 8.**

Nu is A : a = C : c, zoodat men voor (1) kan schrijven:

(A + B) : (a + b) = C : c.

(A + B + C) : (a + b + c) = C : c (2) ------ eig. **E 8.**

Zet nu voor C : c in de plaats D : d, dan wordt (2):

(A + B + C) : (a + b + c) = D : d.

(A + B + C + D) : (a + b + c +d) = D : d (3) eig.**E 8.**

Men kan nu D : d vervangen door A : a, waardoor (3) wordt:

(A + B + C + D) : (a + b + c + d) = A : a.

## Reeksen.

§ 104. **Een reeks is een rij getallen, waarbij elk getal op een bepaalde wijze uit het voorgaande getal wordt afgeleid.**

Het aantal reeksen is onbeperkt groot. Ga na, hoe in de volgende voorbeelden elk getal uit het voorafgaande is afgeleid:

3 , 11 , 35 , 107 , 323 , 971------.

$\frac{1}{1 \times 2}$ , $\frac{1}{2 \times 3}$ , $\frac{1}{3 \times 4}$ , $\frac{1}{4 \times 5}$ , ----------.

We zullen alleen wat nader bezien de *rekenkundige* reeksen, de *meetkundige* reeksen en de reeksen met een *oneindig aantal* termen.

### A. *Rekenkundige Reeksen.*

§ 105. **Bepaling. Een rekenkundige reeks is een reeks, waarvan de getallen (termen) met hetzelfde verschil opklimmen of afdalen.**

Wanneer a — b = b — c of c — b = b — a, dan zegt men,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dat a, b en c een *gedurige rekenkundige evenredigheid* vormen of *gedurig rekenkundig evenredig* zijn.

Men kan dan ook deze definitie van een rekenkundige reeks geven: *Een rekenkundige reeks is een reeks, waarvan steeds 3 op elkaar volgende getallen gedurig rekenkundig evenredig zijn.*

Men spreekt van *opklimmende* en *afdalende* rekenk. reeksen. Dikwijls stelt men den *eersten term* door a voor, den *laatsten term* door l, het *aantal termen* door n, het *constante verschil* door v en de *som van n termen* door $S_n$.

Men kan een opklimmende reeks aldus voorstellen:
a. a + v, a + 2v, ---------- l. Een afdalende reeks wordt
a. a — v, a — 2v, -------.

§ 106. Geeft men de verschillende termen rangnummers, dan is $t_1$ de eerste, $t_2$ de tweede, $t_6$ de zesde term, enz. Men kan nu de termen aldus voorstellen:

| *Opklimmende* Reeksen: | *Afdalende* Reeksen: |
|---|---|
| $t_1 = a.$ | $t_1 = a.$ |
| $t_2 = a + v.$ | $t_2 = a - v.$ |
| $t_3 = a + 2\,v.$ | $t_3 = a - 2\,v.$ |
| $t_6 = a + 5\,v.$ | $t_7 = a - 6\,v.$ |
| $t_{20} = a + 19v.$ | $t_{24} = a - 23\,v.$ |

Zoo doorgaande vindt men voor l (n-den term):

**(R 1)** $l = a + (n - 1)\,v$ of $l = a - (n - 1)\,v$ $\{a > (n - 1)\,v\}$

§ 107. **De som van n termen eener rekenkundige reeks:**

**(R 2)** $S_n = \frac{1}{2}n\,(a + l).$

*Bewijs:* We kunnen de reeks 2 keer opschrijven, aldus:

$S_n = a + (a+v) + (a+2v)$ ---- $+ (l-2v) + (l-v) + l$
$S_n = l + (l-v) + (l-2v)$ ---- $+ (a+2v) + (a+v) + a$

$2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l)$ ------ $+ (a+l) + (a+l) + (a+l)$
$= n \times (a + l).$

Hieruit volgt: $S_n = \frac{1}{2}n\,(a + l).$

*Opmerkingen.* 1. Aan deze formule kan men nog een anderen vorm geven. Men zet voor l in de plaats $a + (n - 1)\,v$ (zie boven). Daardoor gaat zij over in $S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)v\}$.

2. Een der factoren van de laatste formule, dus ook van de eerste, is zeker deelbaar door 2. Immers, is n oneven, dan is (n — 1) even, en derhalve ook 2a + (n — 1) v. Wanneer n

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

even is, dan is natuurlijk direct aan de voorwaarde voldaan.

3. Is n oneven, dan is er een zoogenaamde *middelste* term. Deze is dan gelijk aan de halve som van den eersten en laatsten term, dus $\frac{a + l}{2}$. De som van een reeks met een oneven aantal termen is dus ook gelijk aan $n \times$ *den middelsten term.*

4. De vorm $\frac{a + l}{2}$, behoorende bij de getallen a en l, wordt wel het *rekenkundig middelevenredige* der getallen genoemd.

§ 108. Voegt men tusschen elk tweetal termen eener rekenkundige reeks één of meer termen zoodanig, dat de „oude" en de „nieuwe" termen samen weer een rekenkundige reeks vormen, dan zegt men, dat men termen **geïnterpoleerd** heeft.

Ziehier een getallenvoorbeeld:

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21

Interpoleert men tusschen elk tweetal termen p nieuwe, dan worden er telkens p + 1 nieuwe verschillen gevormd. (Vergelijk dit eens met het aantal afstanden en het aantal boomen tusschen de twee uiterste bij een boomenrij!) Het nieuwe verschil wordt:

**(R 3).** $$v_1 = \frac{v}{p + 1}$$

*B. Meetkundige Reeksen.*

§ 109. **Bepaling. Een meetkundige reeks is een reeks, waarvan elk getal door vermenigvuldiging met een constant getal uit het voorafgaande getal wordt verkregen.**

Wanneer a : b = b : c, dan zegt men, dat a, b en c *gedurig meetkundig evenredig* zijn of een *gedurige meetkundige evenredigheid* vormen. Men kan de definitie dan ook zoo geven: *Een meetkundige reeks is een reeks, waarvan telkens 3 op elkaar volgende getallen gedurig meetkundig evenredig zijn.*

Is dat constante getal, *reden* genaamd, grooter dan 1, dan heeft men een *opklimmende reeks;* is het kleiner dan 1, dan spreekt men van een *afdalende reeks.* Is in het bijzonder de reden gelijk aan 1, dan kan men de rij ook als een rekenkundige reeks met verschil 0 beschouwen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Men stelt dikwijls den *eersten term* voor door a, *den laatsten* door l, *de reden* door r, het *aantal termen* door n en de *som van n termen* door $S_n$.

§ 110. Men kan de termen op de volgende wijze in a, r en n uitdrukken:

$$t_1 = a$$
$$t_2 = ar$$
$$t_3 = ar^2$$
$$t_7 = ar^6$$
$$t_{23} = ar^{22}$$

**(R 4)** $$1 = t_n = ar^{n-1}$$

§ 111. **De som van n termen eener meetkundige reeks:**

**(R 5)** $$S_n = a \times \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad \text{als } r > 1.$$

$$S_n = a \times \frac{1 - r^n}{1 - r}, \quad \text{als } r < 1.$$

$$S_n = n \times a, \qquad \text{als } r = 1.$$

*Bewijs:* Eerste geval: $r > 1$.

$$r \times S_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 ____ + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n$$
$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 ____ + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$(r-1) \times S_n = ar^n - a = a(r^n - 1).$$

$$S_n = a \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Tweede geval: $r < 1$.

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 ____ + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$
$$r \times S_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 ____ + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n$$

$$(1-r) \times S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

$$S_n = a \times \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Derde geval: De reeks bestaat nu uit n gelijke getallen a. De som $S_n$ is dan gelijk aan $n \times a$.

§ 112. Worden tusschen elk tweetal op elkaar volgende termen eener meetkundige reeks nieuwe getallen gevoegd, zoodanig, dat de „oude" en de „nieuwe" termen samen een nieuwe

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

meetkundige reeks vormen, dan zegt men, dat men termen **geïnterpoleerd** heeft.

Ziehier een getallenvoorbeeld:

3 6 12 24 48 96 192 384 768 1536

Interpoleert men tusschen elk tweetal der reeks: a, ar, $ar^2$ ---- $ar^{n-1}$ telkens p termen, dan worden er p + 1 nieuwe redens gevormd (vergelijk dit met hetgeen bij de rekenk. reeks gebeurt!), zoodat de nieuwe reden wordt:

(R 6). $$r_1 = \sqrt[p+1]{r}.$$

*C. Reeksen met een oneindig aantal termen.*

§ 113. Wanneer we de reeks

1, ½, ¼, ⅛, $^1/_{16}$, $^1/_{32}$, ------

onbepaald voortzetten, worden de termen hoe langer hoe kleiner. De som van een onbepaald aantal termen kan men aldus vinden:

$S_2 = 1 + ½ = 2 - ½.$
$S_3 = 1 + ½ + ¼ = 2 - ¼.$
$S_4 = 1 + ½ + ¼ + ⅛ = 2 - ⅛.$
$S_5 = 1 + ½ + ¼ + ⅛ + {}^1/_{16} = 2 - {}^1/_{16}.$
enz.

Hieruit zou men kunnen besluiten:

$$S_n = 2 - t_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Tevens blijkt, dat de som van een aantal termen, hoeveel men er ook neemt, nooit gelijk aan 2 zal worden!

§ 114. We hadden het resultaat uit de voorgaande § wel op een andere manier kunnen vinden. We hebben te doen met een meetkundige reeks. De som van n termen eener afdalende reeks is: $S_n = a \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$ Dit laatste kan men ook aldus schrijven: $S_n = a \times \frac{1}{1 - r} - a \times \frac{r^n}{1 - r}$.

In ons bijzonder geval is a = 1, r = ½. Derhalve:

$S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$; dit is dus in overeenstemming met hetgeen we in § 113 vonden!

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 115. Bij de onbepaald voortloopende afdalende meetkundige reeks is $S_n = \frac{a}{1 - r} - a \times \frac{r^n}{1 - r}$ een veranderlijk getal. Laat men n steeds grooter worden, dan wordt de breuk $\frac{r^n}{1 - r}$ steeds kleiner (immers $r < 1$). Het verschil tusschen $S_n$ en $\frac{a}{1 - r}$ wordt daardoor ook steeds kleiner en kan zelfs kleiner gemaakt worden dan elke van te voren gekozen willekeurige kleine waarde!

Laten we nog eens de reeks uit § 113 nemen. Hoe groot moet n zijn om $S_n$ minder dan $\frac{1}{1000\,000}$ van 2 te doen verschillen? Dan moet $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{1000\,000}$ en derhalve $2^{n-1} > 1000\,000$. De kleinste macht van 2, grooter dan 1000 000, is $2^{20} = 1048576$. Dan moet $n - 1 = 20$, dus n minstens 21 zijn.

Men kan hetgeen in de eerste alinea besproken is, ook aldus uitdrukken: de limiet van $S_n$ voor een oneindig groote waarde van n is $\frac{a}{1 - r}$. Men schrijft dit: $\lim_{n = \infty} S^n = \frac{a}{1 - r}$. Ook zegt men wel, dat $S_n$ tot $\frac{a}{1 - r}$ nadert bij het oneindig groot worden van n.

**Bepaling. Onder de limiet of grenswaarde van een veranderlijk getal verstaat men een constant getal, waartoe dat veranderlijke getal „nadert" en er op den duur minder van verschilt dan elke van te voren gekozen kleine waarde.**

Wat moet men onder oneindig groot verstaan? Daarmee bedoelt men een waarde, die grooter is dan elke willekeurig gekozen waarde.

§ 116. Beschouwen we nu eens de reeks: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, ----. De termen worden eveneens hoe langer hoe kleiner. Deze kan men nu aldus vereenigen tot groepen:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \text{----} + \frac{1}{16} > 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$
$$\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \text{----} + \frac{1}{32} > 16 \times \frac{1}{32} = \frac{1}{2}.$$

enz.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Men kan steeds nieuwe groepen van termen (al wordt het getal termen van zoo'n groep steeds grooter!) vinden, waarvan de som grooter dan ½ is. Maar dan zal $S_n$ ook niet beneden een bepaald getal kunnen blijven! Men zou ook kunnen zeggen, dat $S_n$ geen limiet heeft.

Is het inderdaad mogelijk om $S_n$ b.v. grooter dan 23 te krijgen? De som van de termen van elke groep is ½ (n.l. de eerste groep met één term!) of grooter dan ½. Zoodra we dus 46 groepen krijgen, zal $S_n$ grooter dan 23 zijn. De aantallen termen van de verschillende groepen vormen een meetkundige reeks: 1, 2, 4, 8, enz. De som van de eerste 46 aantallen is gelijk aan $1 \times \frac{2^{46} - 1,}{2 - 1} = 2^{46} - 1$, zoodat, wanneer n gelijk aan of grooter dan $2^{46} - 1$ is, we zeker weten, dat aan de gestelde voorwaarde is voldaan. Nu is n wel een groot getal (14 cijfers!), maar allerminst oneindig groot.

De onbepaald voortloopende afdalende meetkundige reeks is een zoogenaamde *convergente* of *convergeerende* reeks, die uit deze § is een voorbeeld van een *divergente* of *divergeerende* reeks. Bij de convergeerende reeksen heeft de som van n termen een limiet (al kan men die soms niet eens bepalen!), bij de divergeerende is dat niet het geval. Om te onderzoeken, of een reeks convergeert, ja dan neen, maakt men gebruik van zoogenaamde *convergentiekenmerken*.

## Vierkantsworteltrekking.
## Onmeetbare Getallen.

§ 117. **Onder den vierkantswortel uit een getal g verstaat men het getal, dat tot de tweede macht verheven, het oorspronkelijke getal g weer oplevert.** Men duidt dien wortel aan met $\sqrt{\ }$ g.

De vierkantswortels uit de kwadraten van 1 tot en met 100 bestaan uit 1 cijfer en worden rechtstreeks uit het hoofd bepaald.

Omdat $100 (= 10^2)$ het kleinste kwadraat is, dat uit 3 c. bestaat en $9801 (= 99^2)$ het grootste kwadraat van 4 c., zullen de wortels uit de tusschenliggende tweede machten uit 2 cijfers bestaan. Kiezen we een voorbeeld: $\sqrt{\ } 4489$. Stellen we de cijfers van den wortel resp. voor door a en b dan is $\sqrt{\ } 4489 = 10\,a + b$. Gaan we beide leden der gelijkheid kwadrateeren: $4489 = (10\,a$



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$+ b)^2 = 100\ a^2 + 20\ ab + b^2$. Die $a^2$ honderdtallen moeten dus zeker kunnen afgenomen worden van 44 honderdtallen, m.a.w. a kan hoogsten 6 zijn. Daardoor gaat $100\ a^2 + 20\ ab + b^2$ over in $3600 + 20 \times 6 \times b + b^2$. Hierin moet b nog bepaald worden: $4489 - 3600 = 889 = b\ (20 \times 6 + b)$. Dus moet ruim 120 eenige keeren van 889 afgenomen worden. Dit zal hoogstens 7 maal gaan. Wanneer we nu $b = 7$ probeeren, dan levert dit $7 \times (20 \times 6 + 7) = 889$. 7 is het juiste cijfer. Was dit te veel geweest, dan hadden we moeten *probeeren* met 6, 5, enz. net als bij het deelen. Het antwoord is $60 + 7 = 67$ en de heele bewerking komt aldus te staan:

$$\begin{array}{rl} \surd\ 44\,89 = 67 & \\ 6^2 = 36 & \\ \hline 8\,89 & \\ 7 \times 127 = 8\,89 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

§ 118. Nemen we een getal tusschen 10.000 en 1000.000, b.v. 741321. De wortel hieruit bestaat uit 3 cijfers (waarom ?) Noemen we het cijfer der eenheden b en de rest van het getal, na schrapping van dit cijfer, a. Dan kunnen we den wortel voorstellen door $10\ a + b$. Derhalve zal $741321 = (10\ a + b)^2 = 100\ a^2 + 20\ ab + b^2$ moeten zijn. Die $a^2$ honderdtallen zullen moeten afgenomen kunnen worden van 741321. Dan zal $a^2$ hoogstens aan 7413 gelijk kunnen zijn. We moeten derhalve den wortel uit 7413 bepalen; dezen stellen we gelijk aan $10\ c + d$ (2 cijfers!) Op de manier van de vorige § bepalen we nu de cijfers c en d; deze blijken gelijk te zijn aan 8 en 6. Dus is $a = 86$. Nadat we $a^2 = 86^2 = 7396$ van 7413 hebben afgetrokken, blijft 17 als rest over. Ten slotte zal, daar $100\ a^2 = 739600$ is, b nog bepaald moeten worden uit $20\ ab + b^2 = 1721$. $b \times (20\ a + b) = b \times (1720 + b) = 1721$. Direct zien we nu, dat $b = 1$ is. Anders zou het ook weer probeeren geweest zijn!

Bewerking:

$$\begin{array}{rl} \surd\ 74\,13\,21 = 861 & \\ 8^2 = 64 & \\ \hline 10\,13 & \\ 6 \times 166 = 9\,96 & \\ \hline 17\,21 & \\ 1 \times 1721 = 17\,21 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Uit deze voorbeelden blijkt voldoende, hoe de bewerking wordt met nog grootere getallen.

§ 119. Bij de bewerkingen valt nog het volgende op te merken. Het getal, dat we neerschijven, waarachter nog een cijfer gevoegd wordt en dat daarna nog met dat cijfer vermenigvuldigd moet worden, kan op twee manieren bepaald worden:

1e. We kunnen het dubbele nemen van het reeds gevonden „quotient": 172 (zie vorige §) kan gevonden worden door $2 \times 86$ te nemen.

2e. De factoren van het voorgaande product voegen we samen; den laatsten keer kunnen we 172 vinden door 6 en 166 op te tellen.

Dit laat zich ook in het algemeen aantoonen: 1e. Reeds was gevonden $a = 10\,c + d = 86$. Voor het bepalen van b, moest genomen worden 20 a. Het is duidelijk, dat we dit kunnen doen door $2\,a = 2 \times 86$ te nemen en het laatste cijfer voorloopig nog oningevuld te laten: 172.

2e. Nu was $166 = 20\,c + d$; dit moet vermenigvuldigd worden met d. De som der factoren is $(20\,c + d) + d = 20\,c + 2\,d = 2(10\,c + d) = 2\,a$. Op deze manier vinden we derhalve ook 172!

§ 120. Tot nog toe hebben we ons alleen bezig gehouden met het bepalen van den wortel uit een kwadraat. Hoeveel is evenwel $\sqrt{13}$?

We kunnen al dadelijk zeggen, dat $\sqrt{13}$ *geen geheel getal* zal zijn. Immers, $\sqrt{13}$ is gelegen tusschen $\sqrt{9} = 3$ en $\sqrt{16} = 4$.

$\sqrt{13}$ kan *evenmin een gewone breuk* zijn. Gesteld $\sqrt{13} = \frac{p}{q}$ (onvereenvoudigbare breuk) Bij „Deelbaarheid" wordt bewezen, dat een macht van een onvereenvoudigbare breuk nooit gelijk aan een geheel getal kan zijn. Volgens deze stelling is dan $\frac{p^2}{q^2} = 13$ een onmogelijkheid.

Nu is een decimale breuk een bijzonder soort gewone breuk (met een aparte schrijfwijze!), zoodat $\sqrt{13}$ ook geen decimale breuk kan zijn.

$\sqrt{13}$ wordt **een onmeetbaar getal** genoemd.

Meetbare getallen ... altijd ... als de verhouding v. 2 ... getallen

Wanneer we de bewerking der worteltrekking op 13 toepassen na het schrijven van het decimaalteeken, dan kunnen we door het laatste „quotientcijfer" zoo te laten staan of met 1 te vermeerderen, $\sqrt{}$ 13 insluiten tusschen twee getallen, waarvan het eene kleiner en het andere grooter dan $\sqrt{}$ 13 is. De eerste kolom geeft steeds grooter wordende, de tweede kolom steeds kleiner wordende getallen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | $<$ | $\sqrt{13}$ | $<$ | 4 |
| 3,6 | $<$ | $\sqrt{13}$ | $<$ | 3,7 |
| 3,60 | $<$ | $\sqrt{13}$ | $<$ | 3,61 |
| 3,605 | $<$ | $\sqrt{13}$ | $<$ | 3,606 |
| 3,6055 | $<$ | $\sqrt{13}$ | $<$ | 3,6056 |
| 3,60555 | $<$ | $\sqrt{13}$ | $<$ | 3,60556 |
| 3,605551 | $<$ | $\sqrt{13}$ | $<$ | 3,605552 |

enz.

Gewoonlijk bepaalt men dergelijke wortels tot eenige decimalen nauwkeurig op de gewone manier van de worteltrekking. Zoo is $\sqrt{13}$, tot in 5 decimalen nauwkeurig, gelijk aan 3,60555.

§ 121. Een ander voorbeeld van een onmeetbaar getal is het getal $\pi$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3,1 | $<$ | $\pi$ | $<$ | 3,2 |
| 3,14 | $<$ | $\pi$ | $<$ | 3,15 |
| 3,141 | $<$ | $\pi$ | $<$ | 3,142 |
| 3,1415 | $<$ | $\pi$ | $<$ | 3,1416 |
| 3,14159 | $<$ | $\pi$ | $<$ | 3,14160 |
| 3,141592 | $<$ | $\pi$ | $<$ | 3,141593 |
| 3,1415926 | $<$ | $\pi$ | $<$ | 3,1415927 |
| 3,14159265 | $<$ | $\pi$ | $<$ | 3,14159266 |
| 3,141592653 | $<$ | $\pi$ | $<$ | 3,141592654 |
| 3,1415926535 | $<$ | $\pi$ | $<$ | 3,1415926536 |

enz.

§ 122. We zullen de onmeetbare getallen nog eens wat nader beschouwen. We willen eens een scheiding maken in het gebied der geheele en gebroken getallen (samen *meetbare getallen* genoemd), b.v. op deze manier: De meetbare getallen worden verdeeld in twee groepen; de eerste bevat alle getallen, ge-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

lijk aan of kleiner dan 5, de tweede bestaat uit de overige getallen. Die twee groepen worden wel *klassen* genoemd en we zeggen, dat we door middel van het getal 5 *een snede van Dedekind* in het gebied der meetbare getallen hebben aangebracht. We kunnen nu het volgende opmerken:

1e. Elk meetbaar getal zal tot een dier klassen behooren, òf tot de groep der kleinere getallen A, òf tot de tweede groep B. B.v. 3 behoort tot A, $14^1/_7$ daarentegen tot B.

2e. Elk getal uit klasse B is grooter dan elk getal (willekeurig genomen) uit klasse A.

3e. Klasse B heeft noch een grootste, noch een kleinste getal. Klasse A daarentegen heeft een grootste getal, n.l. 5, evenwel geen kleinste.

§ 123. We zouden ook wel een andere snede kunnen aanbrengen. We verdeelen de getallen (meetbare) in twee groepen: klasse A bevat alle getallen $< 7$, klasse B alle getallen, $\geqq 7$. De eerste twee opmerkingen van de vorige § blijven dan gelden. Maar nu heeft A noch een grootste, noch een kleinste getal, B daarentegen een kleinste getal (n.l. 7), maar geen grootste.

§ 124. Een nieuwe snede van Dedekind brengen we aldus aan:

Klasse A bevat de getallen, waarvan het kwadraat kleiner dan 13 is.

Klasse B vereenigt de getallen, waarvan het vierkant grooter dan 13 is.

We kunnen nu het volgende opmerken:

1e. *Elk meetbaar getal zal tot een dier klassen behooren!* Immers, er is geen meetbaar getal te vinden, waarvan het kwadraat juist gelijk is aan 13 (zie § 120), zoodat het òf tot A, òf tot B behoort.

2e. *Elk getal uit klasse B is grooter dan elk willekeurig getal uit A.* Gesteld b.v., dat $b_1$ (uit B) $< a_1$ (uit A) was! Dan zou $b_1^2 < a_1 b_1$ en $a_1 b_1 < a_1^2$ zijn, waaruit zou volgen: $b_1^2 < a_1^2$. Dit is onmogelijk, want $b_1^2 > 13$ en $a_1^2 < 13$.

3e. *Klasse A bevat geen grootste, klasse B geen kleinste ge-*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*tal!* Veronderstel, dat zich in A een getal $a_1$ bevindt, waarvan het kwadraat heel weinig van 13 verschilt. Dan moet men altijd een getal $a_1 + x$ kunnen vinden, waarvoor geldt: $a_1 + x > a_1$ en $(a_1 + x)^2 < 13$. Dan moet $a_1^2 + 2a_1x + x^2 < 13$ zijn. Wanneer x een getal kleiner dan 1 moet zijn, hetgeen we gerust kunnen veronderstellen, dan geldt $x^2 < x$. Wanneer we nu x zoo kunnen bepalen, dat $a_1^2 + 2a_1x + x < 13$ is, dan is zeker aan het gestelde voldaan! Dan moet $2a_1x + x < 13 - a_1^2$ zijn, of: $x(2a_1 + 1) < 13 - a_1^2$, dus: $x < \frac{13 - a_1^2}{2a + 1}$.

Aangezien $13 > a_1^2$, laat zich altijd een zoodanig getal x bepalen (hoe klein x ook mag zijn!); maar dan vindt men ook altijd in klasse A een getal $a_1 + x > a$, m.a.w. A bevat geen grootste getal.

De leerling toone nu op dezelfde manier aan, dat klasse B geen kleinste getal bevat.

**Het getal, dat noch tot klasse A, noch tot klasse B behoort, is het getal, waarvan het kwadraat juist gelijk aan 13 is. Dit wordt aangegeven door $\sqrt{13}$. We moeten $\sqrt{13}$ opvatten als een symbool, waarvan geldt: $(\sqrt{13})^2 = 13$.** De kolommen uit § 120 vormen de klassen A en B, waardoor $\sqrt{13}$ hoe langer hoe nauwer wordt ingesloten!

Om misverstand te voorkomen, moeten we hier opmerken, dat de vierkantswortels niet de eenige onmeetbare getallen vormen; zie slechts $\pi$ uit § 121. Ook dergelijke vormen als $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[7]{15}$, enz., in het algemeen $\sqrt[n]{a}$, wanneer zich geen meetbaar getal $\sqrt[n]{a}$ laat bepalen, waarvoor geldt $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

§ 125. Vormen als $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ en $\sqrt{11} - \sqrt{7}$ worden resp. *som* en *verschil* genoemd. Men moet dergelijke vormen weer als symbolen opvatten: Er laat zich geen meetbaar getal bepalen, dat gelijk zou zijn aan de som van eenige onmeetbare getallen! Evenmin kan men een vorm als $\sqrt{11} - \sqrt{7}$ door een meetbaar getal vervangen. Men moet dergelijke vormen laten staan. Misschien kan er gevraagd worden de som of het verschil in eenige decimalen nauwkeurig te bepalen. Men begint dan elk der vormen in eenige decimalen te berekenen en handelt

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dan verder, of men te doen heeft met meetbare getallen. Het werken met dergelijke (onnauwkeurige) getallen geeft aanleiding tot verkorte bewerkingen, die verder onbesproken blijven.

§ 126. Nu we $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{12}$, enz. als symbolen hebben leeren opvattten, waarvoor geldt $(\sqrt{3})^2 = 3$, $(\sqrt[3]{7})^3 = 7$, $(\sqrt[5]{12})^5 = 12$, kunnen we de eigenschappen **W 1** tot en met **W 5** geldig verklaren voor alle, ook „niet-opgaande" worteltrekkingen. De gang van het bewijs blijft dan precies hetzelfde, zoodat de opmerking van § 62 nu verder achterwege kan blijven.

§ 127. Nog een stelling willen we hier bespreken, die wel toepassing vindt bij het Hoofdstuk „Wortelvormen" uit de Algebra.

**Stelling. Wanneer twee rekenkundige vormen, beide bestaande uit een meetbaar en een onmeetbaar gedeelte, aan elkaar gelijk zijn, dan zullen de meetbare gedeelten uit de gelijkheden aan elkaar gelijk zijn, en evenzoo de onmeetbare gedeelten.**

*Gegeven:* $a + \sqrt{b} = x + \sqrt{y}$.

*Te bewijzen:* $a = x$ en $\sqrt{b} = \sqrt{y}$.

*Bewijs:* Verminder beide leden der gelijkheid met $\sqrt{b} + x$ (of $x + \sqrt{b}$):

$$\begin{array}{rrrr} a + \sqrt{b} & = x + \sqrt{y} \\ \sqrt{b} + x = x & + \sqrt{b} \\ \hline a - x = & \sqrt{y} - \sqrt{b}. \end{array}$$

Nu kan een vorm als $\sqrt{y} - \sqrt{b}$ niet gelijk zijn aan een meetbaar getal (zie § 125), en daar $a - x$ als het verschil van twee meetbare getallen zeker meetbaar is, moet hieruit volgen: $\sqrt{y} - \sqrt{b} = 0$, m.a.w. $\sqrt{y} = \sqrt{b}$. Daaruit volgt eveneens: $a - x = 0$, derhalve $a = x$, waarmee het gestelde bewezen is.

## Deelbaarheid.

§ 128. **Bepalingen. Wanneer b : a een „opgaande deeling" is, dan zegt men, dat b door a deelbaar is.**

**Is b : a een „niet-opgaande deeling", maar de rest b.v. r ($r < a$), dan zegt men, dat b niet deelbaar is door a.**

Dat b deelbaar door a is, kan men nog op andere manieren zeggen:

*b is een veelvoud van a.*
*a is een deeler van b.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De grootste deeler van een getal is het getal zelf, de kleinste is 1.

Is het product van twee deelers van een getal gelijk aan het getal zelf, dan worden die deelers *complementaire deelers* genoemd.

*Opmerking.* Wanneer hier en in het vervolg gesproken wordt van een getal, dan wordt steeds een *natuurlijk*, dus *geen gebroken* of *onmeetbaar*, getal bedoeld, tenzij het tegendeel uitdrukkelijk mocht gezegd worden.

§ 129. **Dh 1. Zijn eenige getallen deelbaar door eenzelfde getal, dan is ook hun som daardoor deelbaar.**

*Gegeven:* a is deelbaar door p.
b is deelbaar door p.
c is deelbaar door p.

*Te bewijzen:* a + b + c is deelbaar door p.

*Bewijs:* Het gegeven kunnen we ook in dezen vorm schrijven:

$$\begin{aligned} a &= x \times p \\ b &= y \times p \\ c &= z \times p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b + c &= x \times p + y \times p + z \times p \\ &= (x + y + z) \times p \end{aligned}$$ ---- eig. V 3.

Dit laatste drukt uit, dat a + b + c deelbaar is door p.

*Opmerking.* In het bijzonder kan men een veelvoud van een getal beschouwen als de som van eenige (gelijke!) getallen. Men kan derhalve zeggen:

1/ *Is een getal deelbaar door p, dan is ook een willekeurig veelvoud van dat getal deelbaar door p.* Anders: $k \times a = k \times k \times p$.

2/ *Een deeler van een getal is ook een deeler van een veelvoud van dat getal.* Of:

3/ *Een veelvoud van een getal is ook een veelvoud van een deeler van dat getal.*

§ 130. **Dh 2. Zijn twee getallen deelbaar door eenzelfde getal, dan is ook hun verschil daardoor deelbaar.**

*Gegeven:* b is deelbaar door p.
a is deelbaar door p. } b > a.

*Te bewijzen:* b — a is deelbaar door p.

*Bewijs:* Het gegeven kunnen we ook in dezen vorm schrijven:

$$b = y \times p$$
$$a = x \times p$$

$$b - a = y \times p - x \times p$$
$$= (y - x) \times p \quad \text{---------- eig. V 5.}$$

Dit beteekent, dat b — a deelbaar door p is.

§ 131. **Dh 3. Is van twee getallen het eene wel en het andere niet deelbaar door een zeker getal, dan is ook hun som daardoor niet deelbaar.**

*Gegeven:* a is deelbaar door p.
b is niet deelbaar door p.

*Te bewijzen:* a + b is niet deelbaar door p.

*Bewijs:* We kunnen het gegeven in dezen vorm neerschrijven:

$$a = x \times p$$
$$b = y \times p + r \quad (r \neq 0,\ r < p).$$

$$a + b = x \times p + (y \times p + r)$$
$$= (x \times p + y \times p) + r \quad \text{---------- eig. O 2.}$$
$$= (x + y) \times p + r \quad \text{---------- eig. V 3.}$$

Dit laatste drukt uit, dat a + b niet deelbaar door p is.

§ 132. **Dh 4. Is van twee getallen het eene wel en het andere niet deelbaar door een zeker getal, dan is ook hun verschil daardoor niet deelbaar.**

Eerste Geval.

*Gegeven:* b is niet deelbaar door p.
a is deelbaar door p
} b > a.

*Te bewijzen:* b — a is niet deelbaar door p.

*Bewijs:* Het gegeven schrijven we in dezen vorm:

$$b = y \times p + r \qquad (r \neq 0,\ r < p).$$
$$a = x \times p$$

$$b - a = (y \times p + r) - x \times p$$
$$= (y \times p - x \times p) + r \quad \text{---------- eig. A 2.}$$
$$= (y - x) \times p + r \quad \text{---------- eig. V 5.}$$

Dit laatste drukt uit, dat b — a niet deelbaar is door p, maar

bij deeling door p dezelfde rest overlaat als het getal, dat niet deelbaar is door p.

Tweede Geval.

*Gegeven:* b is deelbaar door p.
a is niet deelbaar door p. } b > a

*Te bewijzen:* b — a is niet deelbaar door p.

*Bewijs:* Het gegeven schrijven we in dezen vorm:

$b = y \times p$
$a = x \times p + r \qquad (r \neq 0, r < p).$

$b - a = y \times p - (x \times p + r).$
$= (y \times p - x \times p) - r$ ---------- eig. **A 5.**
$= (y - x) \times p - r$ ---------- eig. **V 5.**
$= \{(y - x - 1) + 1\} \times p - r$ ---------- bep. **verschil.**
$= (y - x - 1) \times p + p - r$ ---------- eig. **V 3.**

Nu is $p - r > 0$, zoodat dit laatste uitdrukt, dat b — a niet deelbaar is door p.

§ 133. In het algemeen kan men zeggen, dat men het tegengestelde van een stelling krijgt, wanneer men hetgeen men bewijzen moet en een der gegevens ontkent. Zoo zijn de eigenschappen Dh 3 en Dh 4 voorbeelden van tegengestelde stellingen, resp. van de eigenschappen Dh 1 en Dh 2.

---

§ 134. *Is het getal d zoowel een deeler van a als van b, dan wordt d een gemeene deeler van a en b genoemd.* De grootste van de gemeene (gemeenschappelijke!) deelers wordt de *Grootste Gemeene Deeler* (afgekort G.G.D.) der getallen genoemd. Dit begrip kan men natuurlijk uitbreiden tot meer dan twee getallen.

In het bijzonder kan de G.G.D. gelijk zijn aan een der getallen zelf, wanneer n.l. het andere (of de andere getallen) een veelvoud (veelvouden) van dat getal is (zijn).

*Is de G.G.D. van twee getallen 1, dan noemt men ze onderling ondeelbaar of relatief priem.* Hebben evenwel de getallen nog andere gemeene deelers dan 1, dan worden ze *onderling deelbaar* genoemd.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 135. **G 1. De G.G.D. van twee getallen is dezelfde als die van het kleinste en het verschil van een der getallen en een willekeurig veelvoud van het andere.**

*Gegeven:* De getallen a en b , $b > a$

*Te bewijzen:* De G.G.D. van a en b is gelijk aan den G.G.D. van a en $b - p \times a$ $b > p \times a$.

*Bewijs.* We willen dit leveren in twee tempo's:

1e. Alle gemeene deelers van a en b zijn ook gemeene deelers van a en $b - p \times a$.

2e. Alle gemeene deelers van a en $b - p \times a$ zijn ook gemeene deelers van a en b.

1e. Zij x een gemeene deeler van a en b, dan is x ook een deeler van $p \times a$ (eig. **Dh 1**) en derhalve ook van $b - p \times a$ (eig. **Dh 2**). We kunnen dus zeggen, dat x een gemeene deeler is van a en $b - p \times a$.

2e. Zij y een gemeene deeler van a en $b - p \times a$, dan is y zeker een deeler van $p \times a$ (eig. **Dh 1**) en derhalve ook van $(b - p \times a) + p \times a = b$ (eig. **Dh 1** en bep. **verschil**). We mogen dan zeggen, dat y een gemeene deeler is van a en b.

Nu we aangetoond hebben, dat de getallenparen $a \frown b$ en $a \frown b - p \times a$ dezelfde stellen gemeene deelers hebben, mogen we aannemen, dat ze ook denzelfden G.G.D. hebben.

§ 136. Bovenstaande eigenschap kan ons helpen bij het zoeken van den G.G.D. van twee getallen. We willen dezen bepalen voor de getallen 32 en 78.

```
32 / 78 \ 2
     64
    ----
    14 / 32 \ 2
         28
        ----
         4 / 14 \ 3
             12
            ----
             2 / 4 \ 2
                 4
                ---
                 0
```

We deelen 32 op 78 en vinden als rest 14. Volgens eig. **G 1** kunnen we nu zeggen, dat de G.G.D. van 32 en 78 dezelfde is als van 32 en 14. We deelen nu de gevonden rest op den eersten deeler, enz. Zoo doorgaande stuiten we eindelijk op een „opgaande" deeling. Door bovenstaande redeneering eenige malen te geven, vinden we, dat de G.G.D. van 32 en 78 dezelfde is als van 2 en 4. Nu is de G.G.D. van deze laatste twee

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

gelijk aan 2 zelf, dat dan ook de G.G.D. van 32 en 78 is.

De opvolgende quotienten vormen samen den *betrekkingswijzer* der getallen 32 en 78. Dikwijls geeft men er dezen vorm aan {2, 2, 3, 2}. Uit den betrekkingswijzer en den G.G.D. kan men door „terugwerken" de oorspronkelijke getallen bepalen, uit den betrekkingswijzer alleen de verhouding.

Nog dient opgemerkt, dat het laatste wijzergetal niet 1 kan zijn. Immers, dit zou er op wijzen, dat deeler en rest van de voorlaatste deeling gelijk zouden zijn. Maar dan moet men het voorlaatste quotient met één vermeerderen!

§ 137. De redeneering van § 135 bij het bewijs van eig. **G 1** kan toegepast worden op de getallenparen a $\supset$ b en a $\supset$ p $\times$ a — b. (Ga dit na!) Dit levert ons een middel om het zoeken van den G.G.D. soms aanmerkelijk te bekorten. Men neemt dan in daarvoor gunstige gevallen het quotient één meer dan men bij het gewone deelen kan doen en bepaalt het verschil tusschen den aftrekker (die nu te groot geworden is!) en het aftrektal om zoodoende een kleine rest te verkrijgen. Zie onderstaande voorbeelden:

Manier van § 135.

96 / 156 \ 1
96
60 / 96 \ 1
60
36 / 60 \ 1
36
24 / 36 \ 1
24
G.G.D.: 12 / 24 \ 2

Verkorte bewerking.

96 / 156 \ 2
192
36 / 96 \ 3
108
G.G.D.: 12 / 36 \ 3
36
0

Nog zij opgemerkt, dat de quotienten van de „verkorte bewerking" niet meer de wijzergetallen zijn!

Men zal deze verkorte bewerking steeds kunnen uitvoeren, als de rest grooter uitvalt dan de helft van den deeler!

§ 138. **G 2. De gemeene deelers van twee getallen zijn ook deelers van hun G.G.D.**

*Gegeven:* d is een gemeene deeler van a en b.

*Te bewijzen:* d is een deeler van den G.G.D. van a en b.

*Bewijs:* We kunnen dit aantoonen door uit te gaan van het zoeken van den G.G.D. (§ 136.) Wanneer d een deeler is van a en b, dan is d ook een deeler van de eerste „rest". Men kan deze redeneering voortzetten en vindt ten slotte, dat d ook een deeler is van den deeler der laatste deeling, d.i. van den G.G.D. der getallen.

*Opmerking.* Volgens § 129 geldt ook het omgekeerde!

§ 139. **G 3. Worden twee getallen beide met eenzelfde getal vermenigvuldigd, dan wordt ook hun G.G.D. daarmee vermenigvuldigd.**

*Gegeven:* De getallen a, b en p. $b > a$.

*Te bewijzen:* De G.G.D. van $p \times a$ en $p \times b$ is ~~dezelfde als van a en b.~~ die van a en b.

*Bewijs:* Wanneer we den G.G.D. gaan bepalen, dan is het eerste quotient b.v. q. De eerste rest wordt dan $b - q \times a$.

Nu is $p \times (b - q \times a) = p \times b - p \times q \times a$ (eig. **V 4**) $=$ $p \times b - q \times p \times a$ (eig. **V 8**). Omgekeerd drukt deze gelijkheid uit, dat, wanneer deeltal en deeler met p vermenigvuldigd worden, het quotient q onveranderd blijft en de rest p maal zoo groot wordt. Zet men bovenstaande redeneering voort, dan vindt men ten slotte, dat ook de laatste deeler, d.i. de G.G.D. der getallen, met p vermenigvuldigd is.

§ 140. **G 4. Worden twee getallen beide door eenzelfde getal gedeeld, dan wordt ook hun G.G.D. daardoor gedeeld.**

*Gegeven:* De getallen a, b en p. $b > a$.

*Te bewijzen:* De G.G.D. van $a : p$ (opgaande deeling!) en $b : p$ (idem) is dezelfde als van a en b.

*Bewijs:* Zij bij het bepalen van den G.G.D. het eerste wijzergetal q. De eerste rest is dan $b - q \times a$. Nu is $(b - q \times a) : p = b : p - q \times a : p$ (eig. **D 8**) $= b : p - q \times (a : p)$ (eig. **D 2**) Deze gelijkheid drukt evenwel ook uit, dat, wanneer deeltal en deeler door p gedeeld worden, het quotient q onveranderd blijft en de rest door p gedeeld wordt. Dit zal het geval zijn met alle opvolgende resten, tenslotte ook met den laatsten deeler, d.i. de G.G.D. der gegeven getallen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 141. **G 5. Worden twee getallen beide door hun G.G.D. gedeeld, dan zijn de komende quotienten onderling ondeelbaar.**

*Gegeven:* G. is de G.G.D. van a en b.

$$a = x \times G \text{ en } b = y \times G.$$

*Te bewijzen:* x en y zijn onderling ondeelbaar.

*Bewijs:* We willen eens twee veronderstellingen maken:

1e. x en y hebben een gemeenen deeler d , $d > 1$.

2e. x en y hebben maar een gemeenen deeler, n.l. 1.

In het eerste geval kan men voor a b.v. schrijven $x = p \times d$ en voor y, $y = q \times d$. Dan is $a = x \times G = (p \times d) \times G = p \times (d \times G)$ (eig. **V 6**) en $b = y \times G = (q \times d) \times G = q \times (d \times G)$ (eig. **V 6**). Dan hebben a en b een gemeenen deeler $d \times G$, die grooter dan G is. Maar dit is in strijd met het gegeven, zoodat dit geval onmogelijk is. Derhalve moet het tweede geval waar zijn, m.a.w. x en y zijn onderling ondeelbaar.

*Opmerking.* Dit bewijs is een voorbeeld van een indirect bewijs of een bewijs uit het ongerijmde. Daarbij gaat men alle denkbare gevallen bekijken en tracht aan te toonen, dat ze alle op één na onmogelijk zijn. Dit eene geval is dan het juiste; meestal plaatst men dat achteraan.

§ 142. **G 6. Is een product van twee getallen deelbaar door een getal, dat onderling ondeelbaar is met een der factoren, dan is de andere factor door dat getal deelbaar.**

*Gegeven:* $b \times a$ is deelbaar door p.

a is onderling ondeelbaar met p.

*Te bewijzen:* b is deelbaar door p.

*Bewijs.* Het bewijs kan gemakkelijk geleverd worden, wanneer we het tweede gegeven in den juisten vorm zetten:

De G.G.D. van a en p is 1 (bep. uit § 134).

De G.G.D. van $b \times a$ en $b \times p$ is b (eig. **G 3**).

Nu is $b \times a$ deelbaar door p (gegeven!) en $b \times p$ is als veelvoud van p zeker deelbaar door p. Derhalve is p een gemeene deeler van $b \times a$ en $b \times p$, dus ook een deeler van hun G.G.D., d.i. van b (eig. **G 1**), waarmee het gestelde bewezen is.

*Opmerking.* Deze eigenschap wordt wel de *Hoofdeigenschap der Deelbaarheid* genoemd.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 143. **G 7. Wanneer twee getallen onderling ondeelbaar en beide deelers van een derde getal zijn, dan is dit laatste deelbaar door het product der eerste twee getallen.**

*Gegeven:* a en b zijn onderling ondeelbaar.
a en b zijn deelers van c.

*Te bewijzen:* c is deelbaar door b $\times$ a.

*Bewijs.* Wanneer a een deeler is van c, dan kan men dit in dezen vorm schrijven: $c = x \times a$ (1). Nu is $c = x \times a$ deelbaar door b (gegeven!), terwijl a onderling ondeelbaar is met b (gegeven!), zoodat x door b deelbaar moet zijn (eig. **G 6**). Men kan dit b.v. schrijven $x = y \times b$. Daardoor gaat (1) over in $c = y \times b \times a$, hetgeen uitdrukt, dat c deelbaar is door b$\times$a.

*Opmerking.* Deze eigenschap is tot meerdere getallen uit te breiden.

§ 144. **G 8. Wanneer een getal onderling ondeelbaar is met twee getallen afzonderlijk, dan is het ook onderling ondeelbaar met het product dier getallen.**

*Gegeven:* c is onderling ondeelbaar met a.
c is onderling ondeelbaar met b.

*Te bewijzen:* c is onderling ondeelbaar met b $\times$ a.

*Bewijs.* We willen eens deze twee veronderstellingen bekijken:
1e. c en b $\times$ a zijn onderling deelbaar.
2e. c en b $\times$ a zijn onderling ondeelbaar.

In het eerste geval zouden c en b $\times$ a een gemeenen deeler hebben, b.v. d ($d > 1$). Dan zou b $\times$ a deelbaar zijn door d. Maar a en d zijn onderling ondeelbaar, immers een gemeene deeler van a en d zou een gemeene deeler zijn van a en c (een veelvoud van d). Dit is in strijd met het gegeven. Hieruit zou dan volgen, dat b deelbaar is door d (eig. **G 5**); d zou dan een deeler moeten zijn van b en c, hetgeen in strijd is met het gegeven: b en c zijn o. o.

De eerste veronderstelling voert tot een ongerijmdheid, zoodat de tweede waar moet zijn.

§ 145. **G 9. De G.G.D. van twee getallen verandert niet, als men één dier getallen vermenigvuldigt met een getal, dat onderling ondeelbaar is met het andere.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*Gegeven:* p is onderling ondeelbaar met a.

*Te bewijzen:* De G.G.D. van a en b is dezelfde als van a en p $\times$ b.

*Bewijs:* Wanneer d de G.G.D. van a en b is, dan kunnen we schrijven $a = x \times d$ en $b = y \times d$, waarbij x en y onderling ondeelbaar zijn (eig. **G 5**). Nu zijn a en p ond. ondeelbaar, zoodat ook p en x geen gemeenen deeler kunnen hebben. We kunnen dus neerschrijven:

x en p zijn ond. ond.
x en y zijn ond. ond. } x en p $\times$ y zijn ond. ond. (eig. **G 8**).

Dit laatste schrijven we in dezen vorm:

De G.G.D. van x en p $\times$ y is 1.

De G.G.D. van d $\times$ x en d $\times$ p $\times$ y is d (eig. **G 3**).

Nu is $d \times x = x \times d$ (eig. **V 1**) $= a$ en $d \times p \times y = p \times d \times y$ (eig. **V 8**) $= p \times b$, zoodat hiermee het gestelde bewezen is.

§ 146. **G 10. Zijn twee getallen onderling ondeelbaar, dan zijn ook twee willekeurige machten onderling ondeelbaar.**

*Gegeven:* a en b zijn onderling ondeelbaar.

*Te bewijzen:* $a^m$ en $b^n$ zijn onderling ondeelbaar.

*Bewijs:*

| | |
|---|---|
| De G.G.D. van a en b is 1. | (gegeven!) |
| De G.G.D. van $a^2$ en b is 1. | (eig. **G 9**) |
| De G.G.D. van $a^3$ en b is 1. | (eig. **G 9**) |
| ---------- | |
| De G.G.D. van $a^m$ en b is 1. | (eig. **G 9**) |
| De G.G.D. van $a^m$ en $b^2$ is 1. | ( „ ) |
| De G.G.D. van $a^m$ en $b^3$ is 1. | ( „ ) |
| ---------- | |
| De G.G.D. van $a^m$ en $b^n$ is 1. | ( „ ) |

---

§ 147. *Bevat een getal geen andere deelers dan één en zichzelf, dan wordt het een ondeelbaar getal of een priemgetal genoemd.*

Elk priemgetal bevat dus slechts 2 deelers, elk deelbaar getal bevat minstens 3 deelers. Het getal 1 neemt een aparte plaats in: het wordt niet tot de priemgetallen en ook niet tot de deelbare getallen gerekend.

*Priemgetallen zijn onderling ondeelbaar!*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Van elk priemgetal kan gezegd worden, dat het onderling ondeelbaar is met elk getal, dat kleiner dan dat priemgetal is.

§ 148. Om te onderzoeken, welke priemgetallen er beneden zekere grens liggen, b.v. beneden 100, zou men kunnen beginnen met op te schrijven de getallen tot en met 100. Evenwel, men kan weglaten de tweevouden *(even getallen)*, behalve den priemfactor 2. Aldus:

2, 3, 5, 7, *9*, 11, 13, *15*, 17, 19, *21*, 23, *25*, *27*, 29, 31, *33*, *35*, 37, *39*, 41, 43, *45*, 47, *49*, *51*, 53, *55*, *57*, 59, 61, *63*, *65*, 67, *69*, 71, 73, *75*, *77*, 79, *81*, 83, *85*, *87*, 89, *91*, *93*, *95*, 97, *99*.

Men kan nu beginnen te schrappen de 3-vouden, te beginnen met $3^2$ *(immers 3 is een priemgetal, 2 $\times$ 3 is weggelaten!)*. Daarna is de beurt aan de 5-vouden, te beginnen met $5^2$ *(5 is een priemgetal, 2 $\times$ 5 en 4 $\times$ 5 zijn weggelaten, 3 $\times$ 5 is geschrapt bij de 3-vouden)*. Vervolgens schrapt men de 7-vouden, aanvangende met $7^2$ *(geef de reden op!)*. Men zou nu moeten nemen de 11-vouden, beginnend met $11^2$ *(reden?)*. Maar $11^2 > 100$. Evenzoo zijn de kwadraten der volgende priemgetallen grooter dan 100. Men kan dus veilig aannemen, dat de overgebleven getallen ondeelbaar zijn.

Bovenstaande manier voor het zoeken der ondeelbare getallen wordt de *zeefmethode van Eratosthenes* genoemd.

§ 149. *Lijst der priemgetallen beneden 1000.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 79 | 191 | 311 | 439 | 577 | 709 | 857 |
| 3 | 83 | 193 | 313 | 443 | 587 | 719 | 859 |
| 5 | 89 | 197 | 317 | 449 | 593 | 727 | 863 |
| 7 | 97 | 199 | 331 | 457 | 599 | 733 | 877 |
| 11 | 101 | 211 | 337 | 461 | 601 | 739 | 881 |
| 13 | 103 | 223 | 347 | 463 | 607 | 743 | 883 |
| 17 | 107 | 227 | 349 | 467 | 613 | 751 | 887 |
| 19 | 109 | 229 | 353 | 479 | 617 | 757 | 907 |
| 23 | 113 | 233 | 359 | 487 | 619 | 761 | 911 |
| 29 | 127 | 239 | 367 | 491 | 631 | 769 | 919 |
| 31 | 131 | 241 | 373 | 499 | 641 | 773 | 929 |
| 37 | 137 | 251 | 379 | 503 | 643 | 787 | 937 |
| 41 | 139 | 257 | 383 | 509 | 647 | 797 | 941 |
| 43 | 149 | 263 | 389 | 521 | 653 | 809 | 747 |
| 47 | 151 | 269 | 397 | 523 | 659 | 811 | 953 |
| 53 | 157 | 271 | 401 | 541 | 661 | 821 | 967 |
| 59 | 163 | 277 | 409 | 547 | 673 | 823 | 971 |
| 61 | 167 | 281 | 419 | 557 | 677 | 827 | 977 |
| 67 | 173 | 283 | 421 | 563 | 683 | 829 | 983 |
| 71 | 179 | 293 | 431 | 569 | 691 | 839 | 991 |
| 73 | 181 | 307 | 433 | 571 | 701 | 853 | 997 |



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 150. **P 1. De rij der priemgetallen is onbegrensd.**

*Bewijs.* Gesteld, er was een grootste priemgetal, b.v. p. Dan moeten we aantoonen, dat er een ondeelbaar getal, grooter dan p bestaat. We nemen daartoe het product van alle priemgetallen $\leq$ p en noemen dat P: $P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \text{----} \times p$. Nu kunnen we omtrent het getal $P + 1$ twee veronderstellingen maken:

1e. $P + 1$ is een ondeelbaar getal.

2e. $P + 1$ is deelbaar.

In het eerste geval is reeds aan het gestelde voldaan, immers $P + 1$ is zeker grooter dan p.

In het tweede geval kunnen we in ieder geval zeggen, dat P en $P + 1$ onderling ondeelbaar zijn. Immers een gemeene deeler d, zal ook een deeler van hun verschil zijn (eig. **Dh 2**), d.i. 1; derhalve kan d niet grooter dan 1 zijn, hetgeen aangeeft de onderlinge ondeelbaarheid. Wanneer dus $P + 1$ deelbaar is, dan is het niet door één der factoren van P, maar door een priemgetal, dat grooter dan p is, waarmee eveneens het gestelde aangetoond is!

*Opmerkingen.* 1. Men had hier het getal $P + 1$ kunnen vervangen door $P - 1$ en het bewijs op dezelfde manier geven.

2. Deze stelling wordt wel *Stelling van Euclides* genoemd naar dengene, die ze het eerst bewezen heeft.

§ 151. De getallen $P + 1$ en $P - 1$ van de vorige § kunnen zoowel deelbaar als ondeelbaar uitvallen.

Zie onderstaand lijstje:

$2+1 = 3$ (priem)

$2\times3+1 = 7$ (priem) $\quad 2\times3-1 = 5$ (priem)

$2\times3\times5+1 = 31$ (priem) $\quad 2\times3\times5-1 = 29$ (priem)

$2\times3\times5\times7+1 = 211$ (priem) $\quad 2\times3\times5\times7-1 = 209 = 11\times19$

$2\times3\times5\times7\times11+1 = 2311$ (priem)

$2\times3\times5\times7\times11-1 = 2309$ (priem)

$2\times3\times5\times7\times11\times13+1 = 30031 = 59\times509.$

$2\times3\times5\times7\times11\times13-1 = 30029$ (priem).

§ 152. **P 2. Wanneer een product deelbaar is door een priemgetal, dan is minstens één der factoren er door deelbaar.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*Gegeven:* d × c × b × a is deelbaar door 't priemgetal p.

*Te bewijzen:* Minstens één der factoren is deelbaar door p.

*Bewijs:* We kunnen voor d × c × b × a schrijven d × cba. Nu is òf d deelbaar door p (in welk geval aan het gestelde is voldaan!) òf d is niet deelbaar door p, hetgeen hier wil zeggen onderling ondeelbaar met p. Immers, men zou nog kunnen veronderstellen, dat d en p een factor gemeen hadden, zonder dat nog d door p deelbaar zou zijn. Maar dit is hier uitgesloten, aangezien p een priemgetal is, dus geen andere deelers dan 1 en p bevat! Is evenwel d ond. ond. met p, dan moet cba door p deelbaar zijn (eig. **G 6**). Nu kan men weer beredeneeren, dat òf c òf ba deelbaar door p moet zijn. In het laatste geval is òf b òf a deelbaar door p.

§ 153. **P 3. Een getal is op slechts één manier in priemfactoren te ontbinden.**

*Bewijs.* Gesteld, we hebben getal g ontbonden in priemfactoren, aldus g = ------ d × c × b × a. Veronderstel, dat we op een tweede manier gekomen waren tot deze ontbinding g = ------ × s × r × q × p. We zouden dan de conclusie mogen trekken: ------ ×d×c×b×a = ------ ×s×r×q×p. Aangezien g b.v. deelbaar is door a, mogen we op grond van eig **P 2** er toe besluiten, dat minstens een der factoren, b.v. r, door a deelbaar moet zijn. Maar a en r zijn beide priemfactoren, zoodat a = r moet zijn. Na deeling van beide leden door a = r, blijft er over ------ d × c × b = ------ s × q × p. Een dergelijke redeneering kunnen we houden om aan te toonen, dat b gelijk moet zijn aan een der factoren van ------ s × q × p, b.v. gelijk aan s. Na deeling van beide leden door b = s, volgt ---- d × c = ---- s × q, enz. Hieruit blijkt, dat elke factor van ---- d × c × b × a gelijk moet zijn aan één der factoren van ---- s × r × q × p.

*Opmerkingen.* 1. Deze stelling wordt wel de *Fundamenteelstelling der Deelbaarheid* genoemd.

2. Wordt in het vervolg gesproken over een getal in factoren ontbinden, dan wordt daar steeds mee bedoeld in priemfactoren ontbinden.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 154. Wanneer a een deelbaar getal is, dan kan ons gevraagd worden naar de priemfactoren van dat getal. We kunnen dan beginnen met a door de opvolgende priemgetallen 2, 3, 5, enz. te deelen, of met behulp van kenmerken van deelbaarheid (zie het volgende Hoofdstuk) te onderzoeken, door welke van die priemgetallen a deelbaar is. Gesteld, a is deelbaar door $p_1$. Dan kunnen we schrijven $a = p_1 \times a_1$. Dan is $a_1$ òf zelf een priemgetal, òf een deelbaar getal. We kunnen dan weer onderzoeken, door welk priemgetal $a_1$ deelbaar is, b.v. door $p_2$. Dan schrijven we: $a = p_1 \times a_1 = p_1 \times p_2 \times a_2$, enz. Ten slotte zullen we stuiten op een getal $a_n$, dat zelf een priemgetal is $(p_n)$ We kunnen dan opschrijven: $a_n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \text{-----} \; p_n$. De gelijke priemfactoren kunnen dan nog vereenigd worden. Getallenvoorbeeld:

| | |
|---|---|
| 2 | 216216 = $2^3 \times 3^3 \times 7 \times 11 \times 13$ |
| 2 | 108108 |
| 2 | 54054 |
| 3 | 27027 |
| 3 | 9009 |
| 3 | 3003 |
| 7 | 1001 |
| 11 | 143 |
| 13 | 13 |
| | 1 |

§ 155. Wanneer bij het onderzoek blijkt, dat het getal „voorloopig" ondeelbaar blijkt te zijn, hoe ver moet het onderzoek dan voortgezet worden? Het getal 997 b.v. blijkt niet deelbaar te zijn door de getallen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Het volgende priemgetal is 37, maar nu is $37^2 > 997$. Gesteld, dat we nu nog eens een priemgetal $p_1$ zouden kunnen vinden, grooter dan 37, dat op 997 deelbaar was. Dan zou $997 = p_1 \times b$ zijn. Nu is òf b een priemgetal òf een deelbaar getal, te ontbinden in priemfactoren. Veronderstellen we het eerste, dan zal b zeker niet gezocht moeten worden onder de priemgetallen tot en met 37; maar dan zou toch zeker wel gelden $p_1 \times b > 37 \times 37$, dus zooveel te meer $p_1 \times b > 997$. Dit is natuurlijk onmo-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

gelijk. Ook wanneer b deelbaar zou zijn, krijgen we een dergelijk resultaat.

We kunnen ons onderzoek staken, wanneer we terecht gekomen zijn bij een priemgetal, waarvan het vierkant grooter is dan het te onderzoeken getal, wanneer deelingen door kleinere priemgetallen geen resultaten opleverden!

§ 156. **P 4. Wanneer een getal deelbaar is door een ander getal, dan bevat het eerste alle factoren van het laatste getal met denzelfden of hoogeren exponent.**

*Gegeven:* c is deelbaar door a.

*Te bewijzen:* c bevat alle factoren van a met denzelfden of hoogeren exponent.

*Bewijs.* Wanneer c door a deelbaar is, dan kunnen we daarvoor b.v. schrijven: $c = b \times a$. Wanneer we nu zoowel c, als b en a in factoren ontbonden denken, dan zullen aan beide kanten van het gelijkteeken dezelfde factoren en wel van elke factoren hetzelfde aantal staan (eig. **P 3**). Een factor p, die in a voorkomt, zal dus ook in c voorkomen met denzelfden exponent, misschien wel met hoogeren exponent. Immers het aantal factoren p kan vermeerderd worden met de eventueele van b.
Maar dat is met iederen factor het geval, zoodat hiermee het gestelde bewezen is!

§ 157. Na het voorgaande kunnen we hier een tweede methode aangeven voor het zoeken van den G.G.D. van eenige getallen. We hebben ze daartoe te ontbinden in priemfactoren en dan toe te passen deze stelling:

**P 5. Zijn eenige getallen in factoren ontbonden, dat bevat de G.G.D. dier getallen alle gemeenschappelijke factoren met den kleinsten exponent, waarmee ze in één der getallen voorkomen.**

*Gegeven:* $a = p_1^3 \times p_2^2 \times p_3 \times p_4^5$.
$b = p_1^2 \times p_2 \times p_3^4 \times p_4 \times p_5^2$.
$c = p_1^4 \times p_3^2 \times p_4^4$.

*Te bewijzen:* De G.G.D. van a, b en c is $p_1^2 \times p_3 \times p_4$.

*Bewijs:* Het is duidelijk, dat $p_1^2 \times p_3 \times p_4$ deelbaar zal zijn op elk der getallen afzonderlijk (eig. **P 4**), dus een gemeene deeler

dier getallen is. Het is evenwel onmogelijk er nog een factor aan toe te voegen, aangezien dan eig. **P 4** niet meer zou opgaan, derhalve $p_1^2 \times p_3 \times p_4$ is de G.G.D.

---

§ 158. *Een getal, dat zoowel een veelvoud van a als van b is, wordt een gemeen veelvoud van a en b genoemd.* Het kleinste van al de gemeene veelvouden wordt het *Kleinste Gemeene Veelvoud* (K.G.V.) dier getallen genoemd. Men zou het ook aldus kunnen zeggen: het K.G.V. van a en b is het kleinste getal, waarop a en b beide deelbaar zijn. Dit begrip is natuurlijk tot meerdere getallen uit te breiden.

§ 159. **K 1. Het K.G.V. van twee getallen is gelijk aan het product van hun G.G.D. en de quotienten, die men verkrijgt, als men beide getallen door hun G.G.D. deelt.**

*Gegeven:* G is de G.G.D. van a en b.
K. is het K.G.V. van a en b.
$a = x \times G$.
$b = y \times G$.

*Te bewijzen:* $K = x \times y \times G$.

*Bewijs.* Aangezien K zoowel door a als door b deelbaar is, kunnen we neerschrijven $K = p \times a = p \times x \times G$ en $K = q \times b = q \times y \times G$, waaruit volgt $p \times x \times G = q \times y \times G$ (1) en na deeling van beide leden door G: $p \times x = q \times y$ (2). Volgens eig. **G 5** zijn x en y onderling ondeelbaar. Hieruit volgt, dat p deelbaar door y moet zijn (eig. **G 6**), b.v. $p = c \times y$. Evenzoo moet volgens eig. **G 6** q deelbaar door x zijn, b.v. $q = d \times x$. Hierdoor gaat (2) over in $c \times y \times x = d \times x \times y$. Wil men nu het kleinste der gemeene veelvouden hebben, dan dient men $c = d = 1$ te nemen. Maar dan wordt immers $p = y$ en $q = x$, zoodat $K = x \times y \times G$ is.

§ 160. **K 2. Het product van twee getallen is gelijk aan het product van hun G.G.D. en hun K.G.V.**

*Gegeven:* G is de G.G.D. van a en b.
K is het K.G.V. van a en b.

*Te bewijzen:* $a \times b = G \times K$.

Ander Bew.
Stel $a = x \times y^2 \times z^3 \times v^6$
St. $b = y^5 \times z^2 \times v^6$
K.G.V. $= y^5 x \times y^{2-} \times z^3 \times v^6$
G.G.D. $= y^2 \times z^2 \times v^6$

alle fact. met de kl. exp. komen voor in de G.G.D. alle fact. met de hoogste exp. in K.G.V. fact. met gelijke exp. in de G.G.D. = K.G.
Dus alle fact. van a en b komen voor in K.G.V. = de G.G.D.

*Bewijs.* Volgens de voorgaande stelling is, wanneer $a = x \times G$ en $b = y \times G$ is, $K = x \times y \times G$. Men heeft derhalve: $a \times b = x \times G \times y \times G = G \times (x \times y \times G)$ (eig. **V 7**) $= G \times K$, waarmee het gestelde bewezen is.

*Opmerking.* Let wel, dat deze stelling slechts voor twee getallen geldt.

§ 161. **K 3. De gemeene veelvouden van twee getallen zijn veelvouden van hun K.G.V.**

*Gegeven:* V is een gemeen veelvoud van a en b.
K is het K.G.V. van a en b.

*Te bewijzen:* V is een veelvoud van K.

*Bewijs.* Wanneer we het bewijs van eig. **K 1** nog eens nagaan, dan blijkt het, dat een gemeen veelvoud dezen vorm heeft $c \times y \times x \times G$ of $d \times x \times y \times G$. Om het kleinste der gemeene veelvouden te vinden, hebben we $c = d = 1$ genomen. Nemen we evenwel $c = d = 2$ of gelijk aan welk ander getal ook, dan zullen we steeds verkrijgen een veelvoud van $x \times y \times G = K$, waarmee het gestelde aangetoond is.

§ 162. **K 4. Vermenigvuldigt men van twee getallen een dier getallen, met een getal, dat onderling ondeelbaar is met het andere, dan wordt het K.G.V. dier getallen er ook mee vermenigvuldigd.**

*Gegeven:* a is onderling ondeelbaar met c.
K is het K.G.V. van a en b.
$K^1$ is het K.G.V. van a en $c \times b$.

*Te bewijzen:* $K^1 = c \times K$.

*Bewijs.* Het product der getallen was eerst $b \times a = G \times K$. Het product wordt $c \times b \times a = G^1 \times K^1$. Hieruit volgt $G^1 \times K^1 = c \times G \times K$. Volgens eig. **G 9** is $G^1 = G$. Maar dan is $K^1 = c \times K$, m.a.w. het K.G.V. der oorspronkelijke getallen is met c vermenigvuldigd.

§ 163. **K 5. Zijn eenige getallen in factoren ontbonden, dan bevat het K.G.V. dier getallen alle factoren met den grootsten exponent, waarmee ze in een der getallen mochten voorkomen.**

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*Gegeven:* $a = p_1^3 \times p_2^2 \times p_3 \times p_4^5$
$b = p_1^2 \times p_2 \times p_3^4 \times p_4 \times p_5^2$.
$c = p_1^4 \times p_3^2 \times p_4^4$.

*Te bewijzen:* Het K.G.V. van a, b en c is $p_1^4 \times p_2^2 \times p_3^4 \times p_4^5 \times p_5^2$.

*Bewijs:* Een gemeen veelvoud van de drie getallen moet alle priemfactoren dier getallen bevatten met denzelfden of hoogeren exponent (eig. **P 4**). Nu we te maken hebben met het kleinste gemeene veelvoud, nemen we natuurlijk den exponent van elken factor zoo klein mogelijk, dus van $p_1$ vier, enz.

§ 164. Eigenschap **K 2** doet ons nog een ander middel aan de hand om het K.G.V. van twee getallen te bepalen, wanneer n.l. de getallen niet gemakkelijk in factoren te ontbinden zijn. Door deeling bepalen we eerst den G.G.D. der getallen en deelen dien G.G.D. op het product der getallen. Het quotient is dan immers het K.G.V.

---

§ 165. **Wanneer een getal g in factoren ontbonden is, aldus $g = 2^a \times 3^b \times 7^c$, dan is:**

**1e. het aantal deelers van g:** $A = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$

**2e. de som van alle deelers van g:** $S = \frac{2^{a+1}-1}{2-1} \times \frac{3^{b+1}-1}{3-1} \times \frac{7^{c+1}-1}{7-1}$.

**3e. het product van alle deelers:** $P = g^{\frac{1}{2}A}$

*Bewijs.* 1e. We willen in regelmatige volgorde de deelers van g opschrijven, op deze manier beginnend:

1, 2, $2^2$, $2^3$, $2^4$ _____ $2^a$ ——————> a + 1 deelers.

Deze rij deelers gaan we vermenigvuldigen met 3, $3^2$, $3^3$ ____ $3^b$, aldus:

| | |
|---|---|
| $3, 3\times2, 3\times2^2, 3\times2^3, 3\times2^4$ _____ $3\times2^a$ | b rijen |
| $3^2, 3^2\times2, 3^2\times2^2, 3^2\times2^3, 3^2\times2^4$ ____ $3^2\times2^a$ | |
| ---------- | |
| $3^b, 3^b\times2, 3^b\times2^2, 3^b\times2^3, 3^b\times2^4$ ____ $3^b\times2^a$ | |

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Zoowel de deelers van de eerste rij als van de gevonden b nieuwe rijen worden vermenigvuldigd met $7, 7^2, 7^3 _____ 7^c$:

c vakken

$7,\quad 7\times 2,\quad 7\times 2^2,\quad 7\times 2^3,\quad 7\times 2^4 _____ 7\times 2^a$
$7\times 3, 7\times 3\times 2, 7\times 3\times 2^2, 7\times 3\times 2^3, 7\times 3\times 2^4 ____ 7\times 3\times 2^a$
$7\times 3^2, 7\times 3^2\times 2, 7\times 3^2\times 2^2, 7\times 3^2\times 2^3, 7\times 3^2\times 2^4 __ 7\times 3^2\times 2^a$
---
$7\times 3^b, 7\times 3^b\times 2, 7\times 3^b\times 2^2, 7\times 3^b\times 2^3, 7\times 3^b\times 2^4 ____ 7\times 3^b\times 2^b$

b + 1 rijen

---
---
---

$7^c\quad 7^c\times 2,\quad 7^c\times 2^2,\quad 7^c\times 2^3,\quad 7^c\times 2^4 _____ 7^c\times 2^a$
$7^c\times 3, 7^c\times 3\times 2, 7^c\times 3\times 2^2, 7^c\times 3\times 2^3, 7^c\times 3\times 2^4 \ldots 7^c\times 3\times 2^a$
$7^c\times 3^2, 7^c\times 3^2\times 2, 7^c\times 3^2\times 3^2, 7^c\times 3^2\times 2^3, 7^c\times 3^2\times 2^4 \ldots 7^c\times 3^2\times 2^a$
---
$7^c\times 3^b\times, 7^c\times 3^b\times 2, 7^c\times 3^b\times 2^2, 7^c\times 3^b\times 2^3, 7^c\times 3^2\times 2^4 \ldots 7^c\times 3^2\times 2^a$

b + 1 rijne

Op deze wijze zijn alle deelers gevonden. Men heeft nu totaal c + 1 vakken. Elk der vakken bestaat uit b + 1 rijen, ieder weer van a + 1 deelers. Het aantal deelers is derhalve

$$(c + 1)(b + 1)(a + 1) = (a + 1)(b + 1)(c + 1).$$

We hebben er hier de voorkeur aan gegeven, om met bekende priemgetallen te werken en niet met $p_1$, $p_2$, enz., teneinde verwarring zooveel mogelijk te voorkomen.

2e. De som van de deelers der eerste rij bedraagt $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ____ + 2^a = \frac{2^{a+1} - 1}{2 - 1}$ (Zie de formule **R 5** bij de Meetkundige Reeksen). Al deze deelers werden vermenigvuldigd resp. met $3, 3^2, 3^3 ____ 3^b$; hun som dus ook. Van het 1e vak bedraagt de som derhalve: $(1 + 3 + 3^2 + ____ + 3^b) \times$ de som der 1e rij $= \frac{3^{b+1} - 1}{3 - 1} \times \frac{2^{a+1} - 1}{2 - 1}$. Ten slotte heeft men de verschillende nieuwe vakken gevonden door de deelers van het 1e vak resp. met $7, 7^2, 7^3 ____ 7^c$ te vermenigvuldigen.

Men zet nu voor de som:

$(1 + 7 + 7^2 + ____ 7^c) \times$ de som der deelers van 't 1e vak $=$

$$\frac{7^{c+1} - 1}{7 - 1} \times \frac{3^{b+1} - 1}{3 - 1} \times \frac{2^{a+1} - 1}{2 - 1} =$$

$$\frac{2^{a+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{3^{b+1} - 1}{3 - 1} \times \frac{7^{c+1} - 1}{7 - 1}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

3e. Wanneer alle exponenten van de priemfactoren even zijn, dan kunnen we het getal g aldus neerschrijven:
$g = (2^{1/2a} \times 3^{1/2b} \times 7^{1/2c}) \times (2^{1/2a} \times 3^{1/2b} \times 7^{1/2c})$.
Dan is g derhalve een kwadraatgetal. Dit getal schakelen we voorloopig uit.

Bij elk getal, dat geen kwadraat is, kunnen de deelers 2 aan 2 genomen worden zoodanig, dat hun product gelijk is aan het getal zelf (de z.g. complementaire deelers!). Dit aantal paren is derhalve $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{2} = \frac{1}{2}A$. Minstens één der getallen a, b en c is oneven (anders zou het getal een kwadraat zijn, zie boven!), waaruit volgt, dat minstens één der factoren $a + 1$, $b + 1$ en $c + 1$ door 2 deelbaar is. $\frac{1}{2}A$ is dan een geheel getal. We kunnen dus gerust zeggen, dat het product van alle deelers P gelijk is aan $g^{1/2A}$.

Wanneer g een kwadraat is, dan is het aantal deelers oneven. Er kunnen dan wel paren complementaire deelers gevonden worden, maar één blijft er over, n.l. $\sqrt{g}$. Nu is het product van 2 complementaire deelers gelijk aan $g = (\sqrt{g})^2$. Wanneer we nu vormen het product van alle deelers van g, dan blijkt het aantal factoren $\sqrt{g}$ juist gelijk te zijn aan het aantal deelers van g, zoodat we voor dit bijzonder geval kunnen schrijven: $P = (\sqrt{g})^A$.

§ 166. Pythagoras en zijn leerlingen hielden zich veel bezig met de leer der getallen. Zij noemden een getal *gebrekkig, volkomen* of *overmatig*, naar gelang de som zijner deelers kleiner dan, gelijk aan of grooter dan het getal zelf was. (Bij die deelers werd het getal zelf niet meegerekend). Voorbeelden van volkomen getallen zijn: 6, 28, 496, 8128. In totaal kent men er negen, welke alle even zijn.

*Vriendschapsgetallen* worden die getallen genoemd, waarbij de som der deelers van het eene getal gelijk is aan het andere getal. Voorbeeld: 220 en 284. (Bij de bepaling der deelers moet het getal zelf weer worden uitgeschakeld).

## Kenmerken van Deelbaarheid.

§ 167. *Een kenmerk van deelbaarheid is een middel om te*

*onderzoeken, of een getal deelbaar is door een ander getal, zonder rechtstreeksche deeling.* Dit wil dus nog niet zeggen, dat men op een gemakkelijker manier dan door directe deeling tot de al of niet deelbaarheid zal kunnen besluiten!

Men onderscheidt 5 groepen van kenmerken:

1e. voor deelers in het g-tallig stelsel, die deelbaar zijn op g of machten van g, b.v. in het tientallig stelsel voor 2, 5, 8, 625, enz;

2e. voor deelers in het g-tallig stelsel, die deelbaar zijn op g of een macht van g, verminderd met 1, b.v. in het tientallig stelsel voor 3, 9, 333, enz;

3e. voor deelers in het g-tallig stelsel, die deelbaar zijn op g of een macht van g, vermeerderd met 1, b.v. in het tientallig stelsel voor 11, 101, 13 (deeler van 1001), enz;

4e. met behulp van de „Periodes van Resten", te gebruiken voor alle mogelijke deelers;

5e. door middel van aftrekking en optelling, te gebruiken in het g-tallig stelsel voor deelers, onderling ondeelbaar met g, b.v. in het tientallig stelsel voor 7, 13, 17, enz.

## EERSTE GROEP.

§ 168. We veronderstellen, dat het getal d enkel factoren van g bevat en dat de kleinste macht van g, waarop d deelbaar is, $g^n$ is. We kunnen dan het getal, waarvan we de deelbaarheid door d willen onderzoeken (natuurlijk geschreven in het g-tallig stelsel!) splitsen in twee deelen: Het 1e deel bestaat uit het getal, gevormd door n cijfers aan de rechterhand; het tweede deel is de rest van het getal, gevolgd door n nullen. Nn bestaat het tweede deel uit de som van veelvouden van $g^n$, van $g^{n+1}$, van $g^{n+2}$, enz., zoodat we dit deel kunnen beschouwen als een veelvoud van $g^n$, dus ook van d (Opmerkingen bij eig. **Dh 1**). Is nu het eerste deel eveneens deelbaar door d, dan kan men op grond van eig. **Dh 1** tot de deelbaarheid van het geheele getal door d besluiten. Is daarentegen het eerste deel niet deelbaar door d, dan leert eig. **Dh 3** ons, dat het geheele getal niet deelbaar is door d. We komen tot deze conclusie:

*Is de kleinste macht van g, waarop een getal d deelbaar is, $g^n$, dan zal een getal in het g-tallig stelsel geschreven,*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*door d deelbaar zijn, als aan de rechterhand minstens n nullen staan, of wanneer het getal, gevormd door de laatste n cijfers, een d-voud is.*

*Opmerking.* Wil men het zoo zeggen, dat een getal, gevormd door één of meer nullen, door ieder willekeurig getal a deelbaar is, en dat mag men feitelijk op grond van $a \times 0 = 0$, dan kan het gedeelte: „als aan de rechterhand minstens n nullen staan, of" vervallen!

§ 169. In het bijzonder kan het voorgaande kenmerk toegepast worden voor een deeler in het tientallig stelsel. Nemen we als voorbeeld den deeler 8. De kleinste macht van 10, waarop 8 deelbaar is, is $10^3 = 1000$. Direct mogen we nu zeggen:

*In het tientallig stelsel is een getal deelbaar door 8, als het getal, gevormd door de 3 cijfers aan de rechterhand, deelbaar is door 8.*

Wanneer een getal d gelijk is aan $2^m \times 5^n$ $(m > n)$, dan is de kleinste macht van 10, waarop d deelbaar is, $10^m$. Immers $10^m = (2 \times 5)^m = 2^m \times 5^m$. Nu kan d op geen kleiner macht van 10 deelbaar zijn dan op $10^m$ (eig. **P 4**). We hebben d slechts met $5^{m-n}$ te vermenigvuldigen om tot $10^m$ te geraken. Dit levert ons het volgende algemeene kenmerk voor het tientallig stelsel:

*Een getal is deelbaar door $2^m \times 5^n$ $(m > n)$, als het getal, gevormd door de m cijfers aan de rechterhand, deelbaar is door $2^m \times 5^n$.*

*Opmerking.* Is $m < n$, dan behoort in het bovenstaande „m cijfers" natuurlijk door „n cijfers" vervangen te worden.

(En als $m = n$?)

## TWEEDE GROEP.

§ 170. Bij deze groep maken we gebruik van (M. Q. I): $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ is een „opgaande" deeling. In het bijzonder geldt dus $\frac{g^n - 1}{g - 1}$ is een opgaande deeling. Men kan dit ook aldus neerschrijven: $g^n - 1$ is een $(g - 1)$voud. Dan geldt natuurlijk: $g^n =$ een $(g - 1)$voud $+ 1$. Dit gaat door voor elke geheele waarde van n.

$a^m - b^n$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nemen we nu een getal, in het g-tallig stelsel geschreven, b.v. $\overline{|abcde|}$ dan kunnen we aldus te werk gaan: $\overline{|abcde|} = e + d \times g + c \times g^2 + b \times g^3 + a \times g^4$.

$e =$ $e$

$d \times g = d \times \{\text{een } (g-1)\text{voud} + 1\} = \text{een } (g-1) \text{ voud} + d$

$c \times g^2 = c \times \{\text{een } (g-1)\text{voud} + 1\} = \text{een } (g-1) \text{ voud} + c$

$b \times g^3 = b \times \{\text{een } (g-1)\text{voud} + 1\} = \text{een } (g-1) \text{ voud} + b$

$a \times g^4 = a \times \{\text{een } (g-1)\text{voud} + 1\} = \text{een } (g-1) \text{ voud} + a$

---

$e+d\times g+c\times g^2+b\times g^3+a\times g^4$

$= \text{een } (g-1)\text{voud} + (e+d+c+b+a)$

$\overline{|abcde|} = \text{een } (g-1)\text{voud} + (e+d+c+b+a)$

Dit resultaat kunnen we aldus uitdrukken:

*Is een getal in het g-tallig stelsel geschreven, dan is het gelijk aan een (g—1)voud, vermeerderd met de som zijner cijfers.*

Blijkt het nu, dat deze som deelbaar is door g — 1, dan kan men op grond van eig. **Dh 1** tot de deelbaarheid van het getal $\overline{|abcde|}$ door g — 1 besluiten. Is evenwel deze som niet deelbaar door g — 1, dan zegt eig. **Dh 3** ons, dat ook $\overline{|abcde|}$ niet door g — 1 deelbaar is.

We komen nu tot deze belangrijke eigenschap: *Is een getal in het g-tallig stelsel geschreven, dan is het al of niet door g — 1 deelbaar, naar gelang de som zijner cijfers al of niet door g — 1 deelbaar is.*

§ 171. Het voorgaande kunnen we in het bijzonder toepassen op den deeler 9 uit het tientallig stelsel. We mogen nu direct zeggen:

*In het tientallig stelsel is elk getal gelijk aan een 9-voud, vermeerderd met de som zijner cijfers.* Dit levert ons onmiddellijk het volgende kenmerk van deelbaarheid voor 9:

*Een getal is al of niet deelbaar door 9, naar gelang de som zijner cijfers al of niet door 9 deelbaar is.*

Ditzelfde kenmerk geldt ook voor 3, als deeler van 9.

§ 172. We willen thans een kenmerk zoeken voor een getal, dat gelijk is aan, of zelf weer een deeler van een willekeurige macht van g, verminderd met 1.

Wanneer we in (**M.Q. I**) invullen $a = g^v$ en $b = 1$, dan gaat

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dit over in $\frac{(g^p)^n - 1}{g^p - 1}$ is een opgaande deeling. Nu is $(g^p)^n = g^{n \times p}$. We kunnen dus zeggen, dat $g^{n \times p} - 1$ een $(g^p - 1)$voud is, dus $g^{n \times p}$ een $(g^p - 1)$voud + 1. Dit drukt uit, dat elke macht van g, waarvan de exponent een p-voud is, gelijk is aan een $(g^p - 1)$voud vermeerderd met 1. Nemen we een macht van g, waarvan de exponent geen p-voud is, b.v. $g^{kp+a}$ $(a < p)$, dan kunnen we daarvoor schrijven $g^{kp+a} = g^a \times g^{kp} = g^a \times$ {een $(g^p - 1)$voud + 1} = een $(g^p - 1)$voud + $g^a$.

We beginnen nu het getal, dat we voor den deeler $g^p - 1$ willen onderzoeken, te verdeelen in groepen van p cijfers, vanaf de rechterhand. Dan zal de volstrekte waarde van het cijfer aan de rechterhand in iedere groep een macht van g zijn, waarvan de exponent een p-voud is! Laat $|\overline{a, a_2 \ldots a_p}|$ zoo'n groep van p cijfers zijn, b.v. de 5e groep. Dan is de werkelijke waarde van deze groep $|\overline{a, a_2 \ldots a_p}| \times 9^{4p}$. Aangezien $g^{4p}$ een $(g^p - 1)$voud + 1 is (zie boven!), zal de werkelijke waarde van de groep zijn een $(g^p - 1)$voud, vermeerderd met $|\overline{a, a_2 \ldots a_p}|$ Voor iedere groep is aan te toonen, dat ze gelijk is aan een $(g^p - 1)$voud, vermeerderd met de groep, als getal op zichzelf beschouwd.

We komen nu tot deze eigenschap:

*Verdeelen we 'n getal, in het g-tallig stelsel geschreven, vanaf de rechterhand te beginnen, in groepen van p cijfers, dan is het getal gelijk aan een $(g^p - 1)$voud, vermeerderd met de som dezer als afzonderlijke getallen beschouwde groepen.*

Dit levert ons direct een algemeen kenmerk op. Is de som dezer groepen een $(g^p - 1)$voud, dan is het oorspronkelijke getal een $(g^p - 1)$voud (eig. **Dh 1**). Is dit niet het geval, dan is ook het oorspronkelijke getal geen $(g^p - 1)$voud. (eig. **Dh 3**).

Neemt men nu $p = 1$, dan komt men op het kenmerk van § 170, hetgeen dus een bijzonder kenmerk is van het meer algemeene uit deze §.

§ 173. Passen we het voorgaande toe op het tientallig stelsel, b.v. voor den deeler $999 = 10^3 - 1$. We mogen nu direct zeggen: Verdeelen we een getal, vanaf de rechterhand te beginnen, in groepen van 3 cijfers, dan is het getal gelijk aan een 999voud, vermeerderd met de som dezer groepen, als afzonderlijke getallen beschouwd.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Is nu bovenbedoelde som deelbaar door 999, dan is dit ook het geval met het oorspronkelijke getal (eig. **Dh 1**). In het tegenovergestelde getal kan men er toe besluiten, dat het getal niet door 999 deelbaar is (eig. **Dh 3**).

Het behoeft nauwelijks opgemerkt te worden, dat dit kenmerk ook geldt voor alle deelers van 999, in het bijzonder voor 27 en 37.

Het voorgaande is uit te breiden tot $10^n - 1$, in welk geval begonnen moet worden met het verdeelen van het getal in groepen van n cijfers, enz.

§ 174. Het kenmerk van 9 voor het tientallig stelsel levert een bruikbaar middel op om bewerkingen te controleeren, de z.g. „negenproef." Zijn b.v. de factoren van een product, resp. een 9-voud + 5 en een 9-voud + 6, dan zal de uitkomst een 9-voud + 5 × 6 moeten zijn. Immers $(9a + 5) \times (9a + 6) = 9a \times (9a + 6) + 5 \times (9a + 6) = 81\,a^2 + 54a + 45a + 5 \times 6$ = een 9-voud + 5 × 6. Wanneer de uitkomst een 9-voud + 30 blijkt te zijn, is de kans zeer groot, dat de vermenigvuldiging goed uitgevoerd is; absolute zekerheid levert de „negenproef" evenwel niet (waarom niet?).

Ook bij optelling, aftrekking, enz. kan men met succes de „negenproef" toepassen.

## DERDE GROEP.

§ 175. Bij deze groep willen we gebruik maken van **(M.Q. II)** en **(M.Q. III)**.

Vullen we in (M.Q. II) in: a = g en b = 1, dan gaat dit over in: $\frac{g^{2n}-1}{g+1}$ is een opgaande deeling. Dit laat zich herleiden tot: $g^{2n}$ is een $(g+1)$voud + 1. (1).

Substitueeren (= in de plaats stellen) we a = g en b = 1 in **(M.Q. III)**, dan is het resultaat: $\frac{g^{2n+1}+1}{g+1}$ is een opgaande deeling, hetgeen zich laat herleiden tot: $g^{2n+1}$ is een $(g+1)$voud − 1. (2).

De resultaten (1) en (2) kunnen aldus uitgedrukt worden:

*Elke even macht van g is een $(g+1)$voud + 1; elke oneven macht is een $(g+1)$voud − 1.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nemen we nu een getal, in het g-tallig stelsel geschreven, b.v. $|abcdef|$, dan is:

$$|abcdef| = f + e \times g + d \times g^2 + c \times g^3 + b \times g^4 + a \times g^5$$

$f =$ $f$

$e \times g = e \times \{\text{een } (g+1)\text{voud} - 1\} = \text{een } (g+1)\text{voud} - e$

$d \times g^2 = d \times \{\text{een } (g+1)\text{voud} + 1\} = \text{een } (g+1)\text{voud} + d$

$c \times g^3 = c \times \{\text{een } (g+1)\text{voud} - 1\} = \text{een } (g+1)\text{voud} - c$

$b \times g^4 = b \times \{\text{een } (g+1)\text{voud} + 1\} = \text{een } (g+1)\text{voud} + b$

$a \times g^5 = a \times \{\text{een } (g+1)\text{voud} - 1\} = \text{een } (g+1)\text{voud} - a$

---

$f + e \times g + d \times g^2 + c \times g^3 + b \times g^4 + a \times g^5 = \text{een } (g+1)\text{voud} + f - e + d - c + b - a.$

$$|abcdef| = \text{een } (g+1)\text{voud} + (f + d + b) - (e + c + a).$$

Dit kunnen we aldus uitdrukken:

*Is een getal in het g-tallig stelsel geschreven, dan is het gelijk aan een (g+1)voud, vermeerderd met de som der cijfers op „oneven rang" en verminderd met de som der cijfers op „even rang."*

Blijkt nu, dat de som der cijfers op „oneven rang" (O) verminderd met de som der c. op „even rang" 0 of een (g+1)voud is, dan kan men weer op grond van eig. **Dh 1** besluiten tot de deelbaarheid van het getal door g+1. In het tegenovergestelde geval is natuurlijk het oorspronkelijke getal niet deelbaar door g+1 (eig. **Dh 3**).

§ 176. Het voorgaande kunnen we onmiddellijk toepassen op het tientallig stelsel voor den deeler 11.

*Een getal is gelijk aan een 11-voud, vermeerderd met de som der cijfers op „oneven rang" en verminderd met de som der cijfers op „even rang".*

We krijgen dit kenmerk voor 11: *Een getal is deelbaar door 11, als de som der cijfers op „oneven rang" (O) verminderd met de som der cijfers op even rang (E) een 11-voud is.* (**Dh1** en **Dh 3**).

Is $O < E$, dan kan men O met een zoodanig 11-voud vermeerderen, dat de aftrekking O — E mogelijk wordt.

Dit kenmerk kan dienen als controlemiddel bij bewerkingen; men spreekt dan van de „elf-proef." Een combinatie van elf- en negenproef geeft een zeer goede controle!

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 177. Evenals bij de Tweede Groep kunnen we aan het behandelde van § 175 een uitbreiding geven. Daartoe vullen we in **(M.Q. II)** en **(M.Q. III)** in: $a = g^p$ en $b = 1$, waardoor we krijgen:

$\frac{g^{2np} - 1}{g^p + 1}$ is een opgaande deeling: $g^{2np}$ = een $(g^p+1)$voud$+1$.

$\frac{g^{(2n+1)p} + 1}{g^p + 1}$ is een opgaande deeling: $g^{(2n+1)p}$ = 'n $(g^p+1)$voud$-1$.

*Elke macht van g, waarvan de exponent een oneven veelvoud van p is, is gelijk aan een $(g^p + 1)$voud $+ 1$.*

*Elke macht van g, waarvan de exponent een oneven veelvoud van p is, is gelijk aan een $(g^p + 1)$voud $- 1$.*

We beginnen met het getal, dat we voor den deeler $g^p + 1$ willen onderzoeken, te verdeelen in groepen van p cijfers, aan de rechterhand te beginnen. Dan zal de volstrekte waarde van het cijfer aan de rechterhand in iedere groep een macht van g zijn, waarvan de exponent een p-voud is! Deze exponent is dan een even veelvoud van p, wanneer de groep een oneven plaats inneemt; de exponent is een oneven veelvoud van p, als de groep een even plaats inneemt.

Daaruit volgt dan (ga nog eens na de redeneering van § 172), dat het getal gelijk is aan een $(g^p+1)$voud, vermeerderd met de som der getallen op oneven plaatsen en verminderd met de som der getallen op even plaatsen.

Door ons weer op de eig. **Dh 1** en **Dh 3** te beroepen, komen we tot deze conclusie, dat het oorspronkelijke getal een $(g^p+1)$voud is of niet, naar gelang het verschil van bovenbedoelde twee sommen een $(g^p+1)$voud is, ja dan neen.

$p = 1$ levert ons nu ook weer het bijzonder kenmerk van § 175.

§ 178. Het voorgaande direct toepassend op het tientallig stelsel, hebben we nu een kenmerk, b.v. voor $10001 = 10^4 + 1$.

*Begin het getal vanaf de rechterhand in groepen van 4 cijfers te verdeelen. Het getal is nu een 10001-voud vermeerderd met de som der getallen op oneven plaatsen en verminderd met de som der getallen op even plaatsen, enz.* —



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

## VIERDE GROEP.

§ 179. De termen van de Meetkundige Reeks a, ar, $ar^2$, $ar^3$, __ worden achtereenvolgens door een getal d gedeeld. Van de daarbij ontstane „resten" kan het volgende opgemerkt worden:

1e. Het aantal verschillende resten is hoogstens d, de rest 0 meegerekend.

2e. Zoodra men d + 1 verschillende termen door d gedeeld heeft, moeten minstens twee resten gelijk zijn.

3e. Elke term wordt bij de Meetkundige Reeks op een bepaalde manier (vermenigvuldigen met r) uit den voorafgaanden term afgeleid. Hieruit volgt, dat ook de rest, die bij dezen term behoort, uit de voorgaande rest op dezelfde manier wordt afgeleid (n.l. vermenigvuldigen met r, zoonoodig na vermindering met een d-voud).

4e. Wanneer twee resten hetzelfde zijn, zullen derhalve ook de daarop volgende resten gelijk zijn.

5e. Zoodra er een rest terugkeert (en dat moet eenmaal gebeuren, zie 2e), keeren de daarop volgende resten in dezelfde volgorde terug.

Deze terugkeerende resten vormen een zoogenaamde *periode van resten* voor den deeler d.

§ 180. Passen we het voorgaande toe op deze Meetkundige Reeks: g, $g^2$, $g^3$, $g^4$ ____, dan blijft de redeneering hetzelfde. Maar dan zullen ook de opvolgende termen der schaal van het g-tallig stelsel voor een bepaalden deeler d een periode van resten vormen, die zelfs met de eerste rest kan aanvangen.

Deze periodes geven, onverschillig welken deeler het betreft, kenmerken van deelbaarheid, al mogen sommige dan ook practisch van heel weinig belang zijn. Deze groep bevat de meest algemeene kenmerken!

§ 181. Willen we nu een kenmerk van deelbaarheid voor 13 in het tientallig stelsel zoeken, dan bepalen we de resten, die ontstaan bij deeling van de opvolgende termen der schaal (waarbij we ook 1 rekenen, omdat $10^0 = 1$ is, zie o.a. § 54) door 13.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Deze resten zijn: 1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, 10, 9 ____ (de rij der resten is nu gemakkelijk voort te zetten!). Nemen we nu een getal, b.v. 7632184, dan is:

$$
\begin{aligned}
4 &= 4 \times 1 \\
80 &= 8 \times (\text{een 13-voud} + 10) = \text{een 13-voud} + 8 \times 10 \\
100 &= 1 \times (\text{een 13-voud} + 9) = \text{een 13-voud} + 1 \times 9 \\
2000 &= 2 \times (\text{een 13-voud} + 12) = \text{een 13-voud} + 2 \times 12 \\
30000 &= 3 \times (\text{een 13-voud}) + 3) = \text{een 13-voud} + 3 \times 3 \\
600000 &= 6 \times (\text{een 13-voud} + 4) = \text{een 13-voud} + 6 \times 4 \\
7000000 &= 7 \times (\text{een 13-voud} + 1) = \text{een 13-voud} + 7 \times 1
\end{aligned}
$$

$$
7632184 = \text{een 13-voud} + (4\times1+8\times10+1\times9+2\times12+3\times3+6\times4+7\times1).
$$

*Op grond van eig.* **Dh 1** *kan men nu besluiten, dat het oorspronkelijke getal deelbaar is door 13, wanneer de som der aldus gevormde producten deelbaar is door 13. Is bedoelde som niet door 13 deelbaar, dan is ook het oorspronkelijke getal niet door 13 deelbaar, volgens eig.* **Dh 3.**

§ 182. De kenmerken uit de Eerste, Tweede en Derde Groep kunnen ook met behulp van Periodes van Resten worden afgeleid. Als voorbeeld voor de Eerste Groep nemen we den deeler 8 (zie § 169). Deelen we de opvolgende termen der schaal (waarbij ook 1 gerekend!) door 8, dan zijn de resten: 1, 2, 4, 0, 0, 0, ____. Stellen we nu het cijfer der eenheden voor door E, dat der tientallen door T en dat der honderdtallen door H, dan is het duidelijk, dat een getal alleen dan door 8 deelbaar zal zijn, als E + 2T + 4H een 8-voud is. Tellen we hierbij op 8T + 96H (een 8-voud!), dan kunnen we zeggen, dat de deelbaarheid van 't oorspronkelijk getal afhangt van de deelbaarheid door 8 van E + 10T + 100H en dat is juist het getal van 3 cijfers aan de rechterhand!

§ 183. Voor de Tweede Groep kiezen we den deeler 999, (zie § 173). De resten worden nu 1, 10, 100, 1, 10, 100, enz. — Derhalve zal de deelbaarheid van 't getal door 999 afhangen van de deelbaarheid door 999 van (E + 10T + 100H) + (D + 10TD + 100 HD) + ____, dat is juist van de som der getallen,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

die men verkrijgt door het getal van de rechterhand af in groepen van 3 cijfers te verdeelen!

Zie voor de beteekenis van E, T, ____ de vorige §.

§ 184. Het kenmerk voor 10001 behoort thuis in de Derde Groep (§ 178). De opvolgende resten worden: 1, 10, 100, 1000, 10000, 9991, 9901, 9001, 1, 10, 100, enz. Het te onderzoeken getal is derhalve een 10001-voud, vermeerderd met E + 10T + 100H + 1000D + 10000TD + 9991 HD + 9901 M + 9001 TM + HM + 10DM + 100HDM + ____ = E + 10T + 100H + 1000D + (10001—1)TD + (10001—10)HD + (10001—100) M + (10001 — 1000)TM + HM + 10DM + 100HDM ____ = een 10001-voud + (E + 10T + 100H + 1000D) — (TD + 10HD + 100M + 1000TM) + (HM + 10DM + 100HDM + 1000B) — ____ __ .

Dit levert hetzelfde kenmerk als in § 178.

## VIJFDE GROEP.

§ 185. Deze groep kenmerken algemeen behandelen, zoodanig, dat de kenmerken in het tientallig stelsel slechts bijzondere gevallen zijn van die in het g-tallig stelsel, is hier eenigszins moeilijk, aangezien hier gebruik gemaakt wordt van de bijzondere eigenschappen der verschillende eindcijfers. We bepalen ons daarom alleen tot het tientallig stelsel.

Kiezen we als voorbeeld den deeler 7 en als te onderzoeken getal 472864. Wanneer we 21 maal het cijfer der eenheden (een 7-voud!) van dit getal aftrekken, houden we over 472864 — 21 $\times$ 7 = 472780 = 10 $\times$ 47278. Is nu het oorspronkelijke getal deelbaar door 7, dan zal, omdat 10 ond. ond. is met 7, het getal 47278 door 7 deelbaar zijn (eig. **G 6**). Het omgekeerde is eveneens waar; toepassing van de eigenschap **Dh 1.** Mocht het oorspronkelijke getal niet door 7 deelbaar geweest zijn, dan is dit evenmin het geval met 47278; terwijl hier tevens het omgekeerde weer geldt (Ga na de eig. die noodig zijn!).

We zijn er nu wel van overtuigd, dat de deelbaarheid van 472864 staat of valt, om zoo te zeggen, met de deelbaarheid van 47278 door 7. Dezelfde bewerking (n.l. het eindc. met 21 vermenigvuldigen, aftrekken en door 10 deelen!) passen we nog

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

eenige malen toe, waarna we ten slotte op 28 terecht komen. 28 is een 7-voud: terugredeneerende vinden we, dat ook 472864 een 7-voud moet zijn. De bewerking komt er aldus uit te zien:

$$\begin{array}{rr} & 472864 \\ 21 \times 4 = & 84 \\ \hline & 472780 \\ 21 \times 8 = & 168 \\ \hline & 47110 \\ 21 \times 1 = & 21 \\ \hline & 4690 \\ 21 \times 9 = & 189 \\ \hline & 280 \end{array}$$

§ 186. Juist het feit, dat hier telkens vermenigvuldigd wordt met een veelvoud van 7, dat op een 1 eindigt, doet hier telkens op het eind van den aftrekker een zelfde cijfer als bij het aftrektal ontstaan. Daardoor komt er op het eind een 0 te staan. Het deelen door 10 is nu mogelijk, daar de deeler onderling ondeelbaar is met 10. Vandaar onze beperking in § 167.

Intusschen, het kenmerk kan eenigszins vereenvoudigd worden. We vinden hetzelfde getal 47278, wanneer tweemaal het cijfer der eenheden van de rest van het getal wordt afgetrokken en dit is telkens het geval! (Ga dit na!)

We kunnen dit laatste in het algemeen voor den deeler 7 wel beredeneeren. Zij het cijfer der eenheden b en de rest van het getal a, dan kunnen we het oorspronkelijke getal voorstellen door 10 a + b en het getal, dat na de bewerking ontstaat, door a — 2 b. We moeten nu aantoonen, dat de bewerking verder met dit laatste kan worden voortgezet:

1e geval: 10a+b = een 7-voud. omgekeerde: a—2b=een 7-voud

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10a+b | = een 7-voud. | a—2b | = een 7-voud. |
| 21b | = een 7-v. (eig **Dh 1**) | 10×(a—2b) | = een 7-v. (eig **Dh 1**) |
| 10a—20b | = een 7-v. (eig **Dh 2**) | 10a—20b | = een 7-v. (eig. **V 4**) |
| 10×(a—2b) | = een 7-v. (eig. **V 5**) | 21b | = een 7-v. (eig **Dh 1**) |
| a—2b | = een 7-v. (eig. **G 6**) | 10a+b | = een 7-v. (eig **Dh 1**) |

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

2e geval: $10a+b$ = een 7-v. $+c$; omgekeerde: $a-2b$ = 'n 7-v. $+d$

| | |
|---|---|
| $10a+b$ = een 7-voud $+ c$ | $a-2b$ = een 7-voud $+ d$ |
| $21b$ = een 7-voud | $10\times(a-2b)$ = een 7-voud $+ d_1$ |
| (eig. **Dh 1**) | (eig. **P 4**) |
| $10a-20b$ = een 7-voud $+ c$ | $10a-20b$ = een 7-voud $+ d_1$ |
| (eig. **Dh 4**) | (eig. **V 4**) |
| $10\times(a-2b)$ = een 7-voud $+ c$ | $21b$ = een 7-voud |
| (eig. **V 5**) | (eig. **Dh 1**) |
| $a-2b$ = een 7-voud $+ c_1$ | $10a+b$ = een 7-voud $+ d_1$ |
| (eig. **P 4**) | (eig. **Dh 3**) |
| $c$ en $c_1$ beide $< 7$ en $\neq 0$. | $d$ en $d_1$ beide $< 7$ en $\neq 0$. |

De bewerking, eenigszins bekort, komt nu aldus te staan:

```
472864 |
   8   |
-------|
47278  |
  16   |
-------|
4714   | – deelbaar door 7
   2   |
-------|
469    |
  18   |
-------|
28     |
```

*Opmerking.* Gesteld, dat het laatste getal bij deeling door 7 een rest overlaat, dan behoeft die rest niet dezelfde te zijn als het oorspronkelijke getal bij deeling door 7.

§ 187. *Algemeene Regel. Heeft men te doen met een deeler, onderling ondeelbaar met 10, dan kan men op de volgende manier te werk gaan: Zoek een veelvoud van dien deeler, dat op 1 eindigt. Trek nu zooveel maal het cijfer der eenheden van de rest van het oorspronkelijke getal af, als het aantal tientallen van genoemd veelvoud bedraagt. Ga dezelfde bewerking toepassen op het getal, dat men verkregen heeft, net zoo lang, tot men een getal vindt, waarvan men de deelbaarheid direct kan zien. Dit laatste getal is dan tegelijk met het oorspronkelijke getal al of niet deelbaar door genoemden deeler.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 188. We kunnen voor deelers, ond. ond. met 10, eveneens kenmerken door middel van optelling vinden. Nemen we daartoe het getal 34876 en den deeler 17. We zoeken nu een veelvoud van 17, dat op een 9 eindigt, b.v. 119. Wanneer we nu 119 maal het cijfer der eenheden (een 17-voud!) bij het oorspronkelijke getal optellen, krijgen we $34876 + 119 \times 6 = 35590$. We kunnen nu ons verder bezig houden met 3559. Geef daartoe een zelfde redeneering als in § 185! Deze bewerking wordt opnieuw op 3559 toegepast, enz., tot we terecht komen bij een getal, waarvan we direct kunnen zeggen, of het door 17 deelbaar is of niet. Bewerking:

$$
\begin{array}{rl}
 & 34876 \\
119 \times 6 = & 714 \\
\hline
 & 35590 \\
119 \times 9 = & 1071 \\
\hline
 & 4630 \\
119 \times 3 = & 357 \\
\hline
 & 820
\end{array}
$$

— niet deelbaar door 17

§ 189. We kunnen ook deze bewerking iets verkorten. Wanneer 12 maal het cijfer der eenheden bij de rest van het getal wordt gevoegd, krijgen we telkens hetzelfde resultaat als nu. Ga dit na!

Het voorgaande kan weer algemeen aangetoond worden. Zij het cijfer der eenheden b en de rest van het getal a, dan moet $10a + b$ tegelijk met $a + 12b$ deelbaar zijn door 17. Geef nu dezelfde redeneering als in § 186.

De verkorte bewerking komt er nu aldus uit te zien:

$$
\begin{array}{r}
34876 \\
72 \\
\hline
3550 \\
108 \\
\hline
463 \\
36 \\
\hline
82
\end{array}
$$

— niet deelbaar door 17

Bij dit kenmerk, door middel van optelling, is minder gauw in te zien, dat we feitelijk telkens door 10 kunnen deelen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Wanneer we 119 maal het cijfer der eenheden bij het getal voegen, krijgen we 120 maal datzelfde cijfer, vermeerderd met zooveel tientallen, als de rest van 't getal aangeeft; vandaar, dat we een tienvoud krijgen!

Nog kunnen we er bijvoegen, dat dezelfde opmerking als bij § 186 geldt.

§ 190. *Algemeene Regel. Wil men voor een deeler, onderl. ondeelbaar met 10, een kenmerk door middel van optelling zoeken, dan bepaalt men eerst een veelvoud van dien deeler, dat op 9 eindigt. Vermeerder nu het cijfer der tientallen van dat veelvoud met 1 en tel zooveel maal het cijfer der eenheden van dat te onderzoeken getal bij de rest van dat getal op. Zet deze bewerking voort, tot men een getal vindt, waarvan onmiddellijk te zien is, of het al of niet door dien deeler deelbaar is. Dan is dit tegelijk waar voor het oorspronkelijke getal.*

§ 191. Nu we aan het eind van onze beschouwingen omtrent de kenmerken van deelbaarheid gekomen zijn, willen we nog dit opmerken. Wat hun practische bruikbaarheid betreft, is het toepassen van de kenmerken der Eerste Groep en van enkele der Tweede en Derde Groep (b.v. voor 9, 3, 11) loonend. Wat de Vierde en Vijfde Groep aangaat, men kan dikwijls veel eenvoudiger de rest door rechtstreeksche deeling bepalen dan een kenmerk te gebruiken. Neem b.v. den deeler 13. Voordat men volgens de Vierde of Vijfde Groep een kenmerk, dat men wil gebruiken, heeft toegepast, heeft men door deeling al lang de rest bepaald. Vandaar onze opmerking bij het begin van § 167.

---

§ 192. **Stelling van Fermat. Wanneer p een priemgetal is en a niet deelbaar door p, dan is $a^{p-1} - 1$ een p-voud.**

**Bewijs:** We schrijven de volgende a-vouden op:

a, 2a, 3a, 4a, ..... (p — 1) a (1). Wanneer we achtereenvolgens deze a-vouden door p deelen, zullen er p — 1 resten zijn. We merken daarbij op:

1e. Alle resten zijn kleiner dan p.

2e. Geen der resten is 0. Immers van een getal, b.v. ka, is a niet deelbaar door p; k is $<$ p en aangezien p een priemgetal is, zullen ook k en p onderling ondeelbaar zijn. Maar dan is natuurlijk p ond. ondeelbaar met k a (eig. **G 8**). Derhalve zal ka : p geen opgaande deeling zijn!

3e. Er zullen geen twee resten aan elkaar gelijk zijn. Veronderstel eens,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dat dit wel zoo was, dat b.v. $k_1a$ en $k_2a$ bij deeling door p beide r tot rest overlieten. Dan zou men kunnen neerschrijven ($k_2 < k_1$):

$$k_1a = x \times p + r$$
$$k_2a = y \times p + r$$
$$(k_1 - k_2)a = (x - y) \times p \text{ (eig. V 5)}.$$

Dit beteekent evenwel, dat $(k_1 - k_2)$ a deelbaar door p is, maar $k_1 - k_2$ is zeker $<$ p, zoodat $(k_1 - k_2)$ a een der a-vouden van rij(1) moet zijn. Dit is onmogelijk, zie 2e.

We kunnen dus veilig aannemen, dat de p — 1 resten moeten zijn 1, 2, 3, 4 ..... p — 1. Ze behoeven evenwel niet in deze volgorde voor te komen!

Wanneer we twee getallen, b.v. $m = m_1 \times p + r_1$ en $n = n_1 \times p + r_2$ met elkaar vermenigvuldigen, krijgen we tot uitkomst: mn = een p-voud $+ r_1 r_2$ (Ga dit na!) Dit is tot meer dan twee getallen uit te breiden. Gaan we nu de a-vouden van rij (1) met elkaar vermenigvuldigen, dan zal de uitkomst zijn: een p-voud + 1×2×3×4 ..... × (p—1) = een p-voud + (p — 1) ! (2). Dit laatste wordt uitgesproken: p — 1 faculteit. Maar het product van de a-vouden is eveneens a×2a×3a×4a ..... × (p—1)a = $(p - 1) ! a^{p-1}$ (3). Uit (2) en (3) volgt:

$(p - 1) ! a^{p-1}$ = een p-voud + (p — 1)!

$(p - 1) ! a^{p-1}$ — (p — 1) ! = een p-voud.

$(p - 1) ! \{a^{p-1} - 1\}$ = een p-voud.

Nu is p ond. ond. met elk der factoren van (p — 1) !, derhalve ook met (p — 1) ! Maar dan moet volgens eig. **G 6** $a^{p-1} - 1$ door p deelbaar zijn, waarmee de stelling aangetoond is.

§ 193. We willen eens een onderzoek instellen naar het aantal getallen, niet grooter dan n en onderling ondeelbaar met n. Laten we eerst een voorbeeld nemen: de getallen, niet grooter dan 12 en ond. ond. met 12, zijn: 1, 5, 7, 11, in totaal 4. Men schrijft nu $\varphi$ (12) = 4; spreek uit: phi 12 = 4. In het algemeen kan men zeggen: **Onder $\varphi$ (n) verstaat men het aantal getallen niet grooter dan n en onderling ondeelbaar met n.** In plaats van $\varphi$ (n) zegt men ook wel: indicator van n.

Hoeveel bedraagt $\varphi$ (1)? 1 heeft slechts één deeler, die volgens de bepaling van onderling ondeelbaarheid relatief priem is met 1. Derhalve is $\varphi$ (1) = 1. Hieruit blijkt, dat men in de definitie van $\varphi$ (n) niet kan zetten kleiner dan n, om $\varphi$ (1) niet uit te sluiten.

§ 194. **Formule voor $\varphi$ (n): Wanneer $n = 3^a \times 5^b \times 7^c$, dan is $\varphi$ (n) = n $(1 - 1/7)$ $(1 - 1/5)$ $(1 - 1/3)$.**

**Bewijs.** We denken ons alle getallen van 1 tot en met n opgeschreven; 1, 2, 3, 4 ..... n. Nu gaan we schrappen de 3-vouden: 3, 6, 9 ..... $\frac{n}{3} \times 3$. Dit zijn er in totaal $\frac{n}{3}$. Er blijven dan nog $n - \frac{n}{3} = n(1 - 1/3$ getallen over.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Hiervan moeten nu weer de 5-vouden geschrapt worden. Dit zouden er, indien er niets was geschrapt, $\frac{n}{5}$ zijn. Nu zijn er evenwel al bij de geschrapte 3-vouden nog getallen geweest, door 5 deelbaar, n.l. $\frac{n}{3} : 5 = \frac{n}{5 \times 3}$.

Totaal gaan dus van (1) maar af: $\frac{n}{5} - \frac{n}{5 \times 3} = \frac{n}{5}(1 - 1/3)$.

We houden dan over $n(1 - 1/3) - \frac{n}{5}(1 - 1/3) = (n - \frac{n}{5})(1 - 1/3) = n(1 - 1/5)(1 - 1/3)$ getallen (2).

Eenvoudiger komen we tot (2), wanneer we opmerken, dat bij een regelmatig in elkaar gezette rij van a getallen er $\frac{a}{5}$ getallen zullen zijn, deelbaar door a. Bij de getallen van (1) zullen zijn $\frac{n}{5}(1-1/3)$ getallen, deelbaar door 5, zoodat nog overblijven $n(1-1/3) - \frac{n}{5}(1-1/3) = n(1-1/5)(1-1/3)$ getallen (2).

Thans is de beurt aan de 7-vouden. Bij de regelmatig in elkaar gezette rij getallen (2) zullen nog zijn $\frac{n}{7}(1 - 1/5)(1 - 1/3)$ getallen, deelbaar door 7. Er blijven nu over: $n(1 - 1/5)(1 - 1/3) - \frac{n}{7}(1 - 1/5)(1 - 1/3) = (n - \frac{n}{7})(1 - 1/5)(1 - 1/3) = n(1 - 1/7)(1 - 1/5)(1 - 1/3)$ getallen (3).

De getallen van (3) zullen niet deelbaar zijn door 3, 5 en 7, m.a.w. ze zijn onderling ondeelbaar met n, zoodat we kunnen neerschrijven:

$$\varphi(n) = n(1-1/7)(1-1/5)(1-1/3).$$

Opmerkingen. 1. Teneinde de redeneering voor den leerling iets gemakkelijker te maken, zijn hier 3, 5 en 7 genomen in plaats van de priemfactoren $p_1$, $p_2$, enz.

2. In het bijzonder geldt voor het priemgetal p: $\varphi(p) = p(1 - \frac{1}{p}) = p - 1$.

§ 195. **Stelling van Euler. Is een getal a onderling ondeelbaar met n, dan is $a^{\varphi(n)} - 1$ deelbaar door n.**

**Bewijs.** Wanneer $n_1, n_2, n_3 \ldots\ldots n_\varphi$ de getallen zijn, niet grooter dan n en onderling ondeelbaar met n, dan schrijven we op de rij getallen:

$$n_1 a,\ n_2 a,\ n_3 a,\ \ldots\ldots\ n_\varphi a.$$

We kunnen nu dezelfde redeneering houden als bij het Theorema van Fermat en van de resten bij deeling door n opmerken:

1e. Alle resten zijn kleiner dan n.

2e. Geen der resten is 0.

3e. Er zullen geen twee resten aan elkaar gelijk zijn. (Geef de redeneering!)

We krijgen nu:

$n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots n_\varphi \times a^{\varphi(n)} =$ een n-voud $+ n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots n_\varphi$.

$n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots n_\varphi \times a^{\varphi(n)} - n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots n_\varphi =$ een n-voud.

$n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots n_\varphi \times (a^{\varphi(n)} - 1) =$ een n-voud.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nu is elk der factoren $n_1$, $n_2$, $n_3$ ..... $n_\varphi$ onderling ondeelbaar met n, zoodat $a^{\varphi(n)} - 1$ deelbaar door n moet zijn, waarmee het gestelde aangetoond is.

**Opmerking.** Wanneer n een priemgetal is, wordt $\varphi(n) = n - 1$, waarmee we terecht gekomen zijn bij het Theorema van Fermat, dat dus niets anders is als een bijzonder geval van de Stelling van Euler.

§ 196. Terloops, in § 192, is reeds opgemerkt, wat men onder (p — 1)! verstaat. **Met n! bedoelt men het product der getallen 1, 2, 3 ..... tot en met n.** Nu kan er gevraagd worden, hoeveel priemfactoren p er in n! voorkomen. We willen daartoe eerst eens een getallenvoorbeeld nemen: Gevraagd met welke exponent de factor 3 in 50! voorkomt.

Wanneer we de getallen 1 tot en met 50 opschrijven, dan komen daaronder voor 16 getallen, deelbaar door 3. Immers drie is het kleinste en $48 = 16 \times 3$ het grootste 3-voud, dat aanwezig is.

Men schrijft nu wel eens: er zijn $[{}^{50}/_{3}]$ getallen, deelbaar door 3. Met $[{}^{50}/_{3}]$ bedoelt men dan het aantal „geheelen" van het quotient, hetgeen in ons geval het natuurlijk getal 16 is. Bij deze getallen heeft men er evenwel nog, die deelbaar zijn door 9, die dus zeker 2 factoren 3 bevatten en wel $3\times3$, $6\times3$, $9\times3$, $12\times3$, $15\times3$, totaal dus 5 getallen of $[{}^{16}/_{3}]$ getallen. Men heeft bij deze 5 get. er nog een, n.l. $9\times3$, dat zelfs 3 factoren 3 bevat. Men zou dus kunnen zeggen, dat $[{}^{5}/_{3}] = 1$ getal 3 factoren 3 heeft. Het aantal factoren 3, in 50! voorkomende, bedraagt $[{}^{50}/_{3}] + [{}^{16}/_{3}] + [{}^{5}/_{3}] = 22$.

§ 197. Uit hetgeen hier gezegd is omtrent den factor 3, blijkt reeds, hoe men moet handelen met den willekeurigen factor p. Men bepaalt eerst $\left[\frac{n}{p}\right]$, zij dit $q_1$. Dan heeft men $q_1$ getallen, die minstens één factor p bevatten. Nu zijn daarbij nog $\left[\frac{q_1}{p}\right] = q_2$ getallen, deelbaar door $p^2$. Het aantal getallen, dat minstens 3 factoren p heeft, zal zijn $\left[\frac{q_2}{p}\right] = q_3$, enz. Men gaat telkens p deelen op het vorige aantal, tot ten slotte het aantal „geheelen" van het quotient 0 is. Zoo is b.v. (zie de vorige §) $[\frac{1}{3}] = 0$.

De exponent, waarmee p voorkomt in n, wordt wel aangegeven door $\mathfrak{E}(n)$; spreekt uit: epsilon n. In het voorgaande is besproken de

**Formule van Legendre:** $\mathfrak{E}(n) = q_1 + q_2 + q_3 \ldots\ldots + q_k$, **waarbij** $q_1 = \left[\frac{n}{p}\right]$, $q_2 = \left[\frac{q_1}{p}\right]$, **enz.... en**

$q_{k+1} = q_{k+2} = \ldots\ldots = 0$.

Ter illustratie diene nog, dat:

$50! = 2^{47} . 3^{22} . 5^{12} . 7^{8} . 11^{4} . 13^{3} . 17^{2} . 19^{2} . 23^{2} . 29 . 31 . 37 . 41 . 43 . 47$.

§ 198. **Stelling. (a+b)! is deelbaar door a! b!**

**Bewijs.** Een willekeurige factor p komt voor in (a+b)! met den ex-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

ponent $\mathfrak{E}(a+b) = \left[\frac{a+b}{p}\right] + \left[\frac{q_1}{p}\right] + \left[\frac{q_2}{p}\right] + \ldots\ldots$ en in a! en b! resp. met den exponent:

$$\mathfrak{E}(a) = \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{q_1'}{p}\right] + \left[\frac{q_2'}{p}\right] + \ldots\ldots \text{ en}$$

$$\mathfrak{E}(b) = \left[\frac{b}{p}\right] + \left[\frac{q_1''}{p}\right] + \left[\frac{q_2''}{p}\right] + \ldots\ldots$$

Nu kan men zeggen, dat $\left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{b}{p}\right]$ hoogstens gelijk is aan $\left[\frac{a+b}{p}\right]$ eerder kleiner. Neem maar eens een getallenvoorbeeld: $[{}^{12}/_{5}] + [{}^{14}/_{5}] < [{}^{26}/_{5}]$. Dit nu zal gelden ook voor de opvolgende quotienten. Maar dan kunnen we ook zeggen, dat de exponent van p in a! b! hoogstens gelijk is aan, eerder kleiner is dan de exponent van p in (a+b)! Volgens eig. **P 4** drukt dit laatste uit, dat (a+b)! deelbaar is door a! b!

Aan (a+b)! kunnen we ook dezen vorm geven: $a!\ \underbrace{(a+1)\ (a+2)\ldots(a+b)}_{b \text{ getallen}}$

Derhalve gaat de genoemde stelling over in: (a+1) (a+2) ... (a+b) is deelbaar door b! Het product van b op elkaar volgende getallen is deelbaar door b! Dit is dus een aanmerkelijke uitbreiding van: Het product van n op elkaar volgende getallen is deelbaar door n. (Zie vraagstukken).

## Gebroken Getallen II.

§ 199. *Bepaling. Een onvereenvoudigbare breuk is een breuk, waarvan teller en noemer onderling ondeelbaar zijn.*

**B 10. Is een onvereenvoudigbare breuk gelijk aan een andere breuk, dan zijn teller en noemer van de laatste veelvouden van teller en noemer der eerste breuk.**

*Gegeven:* $\frac{a}{b}$ is een onvereenvoudigbare breuk. $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$

*Te bewijzen:* p is een veelvoud van a.
q is een veelvoud van b.

*Bewijs.* Met behulp van eig. **B 1** kunnen we neerschrijven: $\frac{a}{b} = \frac{q \times a}{q \times b}$ en $\frac{p}{q} = \frac{b \times p}{b \times q}$, waaruit volgt:

$$\frac{q \times a}{q \times b} = \frac{b \times p}{b \times q}.$$

Nu is $q \times b = b \times q$ (eig. **P 1**), zoodat we hieruit mogen besluiten: $q \times a = b \times p$ (1). We kunnen nu zeggen, dat $b \times p$ deelbaar is door a; a is evenwel ond. ond. met b (gegeven!), zoodat p door a deelbaar moet zijn (eig. **G 6**). Op eenzelfde manier toont men aan, dat b door q deelbaar is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Stelt men $p = x \times a$ en zet men dit in (1), dan krijgt men: $q \times a = b \times x \times a$. Na deeling van beide leden door a, vindt men $q = b \times x = x \times b$. We kunnen derhalve zeggen, dat p en q *gelijknamige* veelvouden, resp. van a en b zijn.

§ 200. Willen we een gewone breuk tot een decimale herleiden, dan voeren we eenvoudig de bewerking van deelen uit. Hierbij kunnen zich 3 verschillende gevallen voordoen:

1e. We krijgen een *eindigende* decimale breuk; neem als voorbeelden $^{17}/_{625}$, $^{15}/_{16}$ en $^{33}/_{10}$.

2e. Bij de deeling merken we op, dat de cijfers van het quotient na de komma *alle* terugkeeren in regelmatige volgorde. De deeling is niet-opgaand en we spreken van *een zuiver repeteerende breuk;* neem als voorbeeld $^{6}/_{13}$.

3e. Bij de deeling keeren sommige cijfers in regelmatige volgorde terug; een of meer cijfers, die juist achter het decimaalteeken staan, repeteeren niet. We hebben nu te doen met een *gemengd repeteerende* breuk; neem als voorbeeld $^{5}/_{28}$.

§ 201. **B 11. Elke onvereenvoudigbare breuk, waarvan de noemer een of meer factoren 2 of (en) 5 bevat, is te herleiden tot een eindigende decimale breuk.**

*Gegeven:* $\frac{T}{2^a\ 5^b}$ is een onvereenvoudigbare breuk; $a > b$.

*Te bewijzen:* $\frac{T}{2^a\ 5^b}$ levert bij herleiding een eindigende decimale breuk.

*Bewijs:* Een gewone breuk kan als een decimale geschreven worden, wanneer de noemer een macht van 10 is. Omdat $10 = 2 \times 5$ is, bevat elke macht van 10 evenveel factoren 2 als 5. Vermenigvuldigen we den noemer nu met $5^{a-b}$ $(a > b)$, dan wordt deze gelijk aan een macht van 10, aldus: $5^{a-b} \times 2^a\ 5^b = 2^a\ 5^{b+(a-b)} = 2^a\ 5^a = 10^a$ Om de breuk dezelfde waarde te doen behouden, moet de teller eveneens met $5^{a-b}$ vermenigvuldigd worden, zoodat deze wordt $5^{a-b} \times T$. Thans is de nieuwe breuk als een decimale te schrijven! Maar een dergelijke bewerking is immers met iedere breuk, waarvan de noemer slechts factoren 2 of (en) 5 bevat, te verrichten!

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

We kunnen ook nog iets zeggen, omtrent het aantal cijfers achter de komma, het aantal „decimalen". Immers, iedere breuk, waarvan de noemer een macht van 10 is, kan als een decimale breuk geschreven worden en bevat zooveel cijfers achter de komma, als de noemer nullen heeft, mits de teller zelf niet een nul aan de rechterhand heeft! B.v. $\frac{31}{10.000}$ heeft 4 cijfers achter het decimaalteeken. De noemer zal in het door ons behandelde geval a nullen krijgen. Heeft de decimale breuk nu ook a „decimalen"? De nieuwe teller $5^{a-b} \times T$ kan geen nul aan de rechterhand hebben. Immers, in dat geval zou hij minstens één factor 2 en één factor 5 moeten bevatten. Maar T zal geen factor 2 hebben (ond. ond. met $2^a$ $5^b$), zoodat ook de nieuwe teller geen factor 2 zal hebben. We mogen dus gerust zeggen, dat er a cijfers achter de komma zullen verschijnen.

In het algemeen kan men zeggen, dat iedere onvereenvoudigbare breuk met factoren 2 of (en) 5 in den noemer bij herleiding zooveel cijfers achter de komma zal geven, als de hoogste exponent der factoren 2 en 5 is.

§ 202. **B 12. Elke onvereenvoudigbare breuk, waarvan de noemer onderling ondeelbaar is met 10, zal bij herleiding geven een zuiver repeteerende breuk.**

*Gegeven:* $\frac{a}{b}$ is een onvereenvoudigbare breuk.
b is onderling ondeelbaar.

*Te bewijzen:* $\frac{a}{b}$ geeft bij herleiding een zuiver repeteerende breuk.

*Bewijs:* Voor een eenvoudige redeneering kiezen we een voorbeeld, b.v. de breuk $^6/_{13}$. Willen we deze tot een decimale breuk herleiden, dan deelen we 13 op 6. Na invoering van het decimaalteeken zullen de deeltallen feitelijk worden 60, 600, 6000, 60000, enz. Betreffende de resten, die bij voortgezette deeling ontstaan, kunnen we eenzelfde redeneering geven als bij de „Periode van Resten":

1e. Er kunnen hoogstens 13 verschillende resten zijn (nul meegerekend).

2e. Heeft men 14 resten bepaald, dan moeten er minstens 2 gelijk zijn.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

3e. De resten worden ieder afzonderlijk op dezelfde wijze uit de voorgaande rest bepaald, n.l. de voorafgaande rest wordt met 10 vermenigvuldigd en daarna met een zoo groot mogelijk veelvoud van 13 verminderd.

4e. Op onderling gelijke resten zullen weer onderling gelijke resten volgen.

5e. Komt dus een rest terug, dan keeren alle daaropvolgende resten in dezelfde volgorde terug.

6e. Bij gelijke resten behooren dezelfde quotientcijfers, zoodat ook deze in dezelfde volgorde zullen weerkeeren.

Nog even willen we iets omtrent de rest „nul" opmerken. De opvolgende deeltallen zullen geen van alle den factor 13 bevatten, zoodat van een opgaande deeling geen sprake kan zijn en de rest nul dus uitgesloten moet worden. Om aan de algemeene redeneering geen afbreuk te doen, wordt dit hier pas vermeld.

Het is thans de vraag, of de eerste rest en daarmee het 1e quotientcijfer terugkomt.

```
13 / 6,000     \ 0,461----
     52
    ---
     80
     78
    ---
     20
     13
    ---
      7
```

Veronderstel, dat de rest 7 eens terugkeerde. Dan zou 7 de rest zijn van een aftrekking, waarvan het aftrektal een nul en de aftrekker noodzakelijk een 3 aan de rechterhand heeft. Wanneer we nu onder de veelvouden van 13, ontstaan door vermenigvuldiging van 13 met de cijfers 1 tot en met 9, zoeken naar een veelvoud, dat op een 3 eindigt, dan blijkt dit alleen met $1 \times 13$ het geval te zijn (genoemde veelvouden eindigen op *verschillende* cijfers!), zoodat het voorafgaande aftrektal $7+13 = 20$ en de rest 2 moet zijn geweest, evenals de eerste keer!

Dat de voorafgaande resten steeds dezelfde moeten zijn, is een gevolg hiervan, dat alle genoemde veelvouden verschillende eindcijfers moeten hebben. Veronderstel eens, dat twee veelvouden hetzelfde eindcijfer hadden, b.v. $x \times 13$ en $y \times 13$ ($x$ en $y$ beide $< 10$), dan zou hun verschil $(x - y) \times 13$ op een

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

nul moeten eindigen en dus deelbaar door 10 moeten zijn. Maar 13 is onderling ondeelbaar met 10, zoodat x — y deelbaar door 10 zou moeten zijn (eig. G 6). Dit is nu onmogelijk, immers x en y zijn beide kleiner dan 10, dus hun verschil is zeker $< 10$. Een dergelijke redeneering kan men altijd houden betreffende deelers, onderling ondeelbaar met 10.

Wanneer nu alle voorafgaande resten terugkeeren, zal dat ook het geval moeten zijn met de eerste rest, d.i. 6. Maar dan keeren ook alle quotientcijfers in dezelfde volgorde terug. Deze regelmatig terugkeerende rij 4 6 1 5 3 8 wordt een *periode* genoemd.

§ 203. **B 13. Elke onvereenvoudigbare breuk, waarvan de noemer behalve andere factoren één of meer factoren 2 of (en) 5 bevat, geeft bij herleiding een gemengd repeteerende breuk, waarvan zooveel cijfers achter het decimaalteeken niet repeteeren, als de hoogste van de exponenten der factoren 2 en 5 bedraagt.**

*Gegeven:* $\frac{a}{b}$ is een onvereenvoudigbare breuk.

b bevat o.a. 2 factoren 2.

*Te bewijzen:* $\frac{a}{b}$ geeft bij herleiding een gemengd repeteerende breuk met 2 niet repeteerende cijfers achter de komma.

*Bewijs:* Voor een eenvoudige redeneering kiezen we een voorbeeld, n.l. de breuk $^5/_{28}$. Door deeling van 28 op 5 vinden we weer de opvolgende quotientcijfers. Door eenzelfde redeneering als bij de voorafgaande eigenschap toonen we aan, dat er een repeteerende breuk moet ontstaan. Het is alleen maar de vraag, of de periode direct na de komma begint. We schrijven de deeling eens op:

Te bew. voor $\frac{5}{28}$
I rep. br.
II cijfers repet. niet
III na 't 2e cijfer een zuiver rep.
IV Het laatste cijfer van de per. kan niet gelijk zijn aan 't laatste cijfer van het niet rep. gedeelte / anders zou de periode vroeger begonnen.

28 / 5,0 0 0 0 \ 0,1 7 8 5

| | |
|---|---|
| 28 | |
| 220 | |
| 196 | |
| 240 | |
| 224 | + |
| 160 | |
| 140 | − |
| 20 | |

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Feitelijk moeten we 28 achtereenvolgens deelen op 5, 50, 500, 5000, enz. Nu passen we een eigenschap der deelbaarheid toe, n.l. **G 1**, aldus:

| deeltal | deeler | | deeler | | rest |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 en 28 | ‹—— | G.G.D. = 1 | ——› | 28 en | 5 |
| 50 en 28 | ‹—— | G.G.D. = 2 | ——› | 28 en | 22 |
| 500 en 28 | ‹—— | G.G.D. = 4 | ——› | 28 en | 24 |
| 5000 en 28 | ‹—— | G.G.D. = 4 | ——› | 28 en | 24. |

enz.

De G.G.D. van de nu volgende paren blijft steeds 4. Maar daaruit volgt dan tevens, dat de eerste twee resten 5 en 22 (met de daarbij behoorende quotientcijfers!) niet meer terugkeeren.

Maar hiermee is nu nog niet gezegd, dat 24 *wel* zal terugkeeren! Evenwel, we moeten feitelijk na de tweede aftrekking 28 achtereenvolgens deelen op 240, 2400, 24000, enz. Nu is $^{24}/_{28} = {}^{6}/_{7}$ en deze laatste breuk levert bij herleiding een *zuiver* repeteerende breuk, zoodat 24 de eerst terugkeerende rest zal zijn (eig. **B 12**).

Ons rest alleen nog maar aan te toonen, dat het laatste cijfer der periode niet gelijk kan zijn aan het laatste niet-repeteerende cijfer. Immers in dat geval zou de periode één cijfer vroeger beginnen! Keert de rest 24 terug, dan is daaraan voorafgegaan een aftrekker, eindigend op een 6. Dit kan geweest zijn 196 (= 7 × 28) of 56 (= 2 × 28). Toen de rest 24 het eerst verscheen, ging daaraan ook vooraf een aftrekker, op 6 eindigend, n.l. 196. Maar de tweede maal kan de aftrekker niet 196 zijn, immers, dat zou wijzen op 196+24 = 220, dus op een voorafgaande rest 22 (die niet terug kan keeren!); de aftrekker moet dan wel 56 zijn. Nu wijzen de aftrekkers 196 en 56 op verschillende quotientcijfers!

§ 204. Bij het voorgaande hebben we gewone breuken tot decimale (eindigende, zuiver en gemengd repeteerende) omgevormd. Omgekeerd kunnen we nu vragen naar de gewone breuk, waaruit de decimale breuk ontstaan is. We noemen deze de *voortbrengende* breuk. Voor een eindigende decimale breuk levert dit geen moeilijkheden, deze is direct als een gewone breuk te schrijven. Bij de repeteerende breuken krijgen we nog 2 stellingen.



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 205. **B 14. Een zuiver repeteerende breuk heeft tot voortbrengende breuk een gewone breuk, waarvan de teller gelijk is aan de periode, terwijl de noemer uit zooveel negens bestaat, als het aantal cijfers der periode bedraagt.**

*Gegeven:* de zuiver repeteerende breuk $0,\dot{3}\,6\,\dot{8}$.

*Te bewijzen:* de voortbrengende breuk is $^{368}/_{999}$.

*Bewijs:* De zuiver repeteerende breuk $0,\dot{3}\,6\,\dot{8}$ kunnen we opvatten als een oneindig voortloopende afdalende meetkundige reeks:

$$0,\dot{3}\,6\,\dot{8} = 0,368\,368\,368\,368 \text{ ----------}$$
$$= \frac{368}{10^3} + \frac{368}{10^6} + \frac{368}{10^9} + \frac{368}{10^{12}} + \text{ ----------}.$$

Nu is $\lim_{n=\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$. Deze wordt hier:

$$\frac{368}{10^3} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10^3}} = \frac{368}{10^3} \times \frac{10^3}{10^3-1} = \frac{368}{999}. + \text{ --------}$$

De limiet is hier de voortbrengende breuk! Deze zal nooit bereikt worden, hoe ver we het uitschrijven der perioden ook voortzetten!

§ 206. **B 15. Een gemengd repeteerende breuk heeft tot voortbrengende breuk een gewone breuk, waarvan de teller gelijk is aan het getal, gevormd door de niet-repeteerende cijfers, gevolgd door eenmaal de periode, verminderd met het getal, gevormd door de niet-repeteerende cijfers, terwijl de noemer bestaat uit zooveel negens als er cijfers repeteeren, gevolgd door evenveel nullen, als er cijfers niet repeteeren.**

*Gegeven:* de gemengd repeteerende breuk $0,28\dot{7}13\dot{4}$.

*Te bewijzen:* de voortbrengende breuk is $\frac{287134-28}{999900}$.

*Bewijs:* We kunnen de breuk weer opvatten als een reeks, aldus:

$$0,28\dot{7}13\dot{4} = \frac{28}{10^2} + \frac{7134}{10^6} + \frac{7134}{10^{10}} + \frac{7134}{10^{14}} + \text{ ----------}.$$

Nu is, als we $\frac{28}{10^2}$ even weglaten, het overblijvende gedeelte

$0,28\dot{7}13\dot{4} = 0,28\dot{7}13\dot{4}\,7134$ enz.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

weer een oneindig voortloopende afdalende meetkundige reeks; hiervan is

$$\lim_{n = \infty} S_n = \frac{7134}{10^6} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^4}} = \frac{7134}{10^6} \times \frac{10^4}{10^4 - 1} = \frac{7134}{999900}$$

De voortbrengende breuk zal gelijk zijn aan:

$$\frac{28}{10^2} + \frac{7134}{999900} = \frac{28 \times 9999 + 7134}{9999 \times 10^2} = \frac{28 \times (10^4 - 1) + 7134}{9999 \times 10^2}$$

$$= \frac{280000 - 28 + 7134}{9999 \times 10^2} = \frac{287134 - 28}{999900}.$$

§ 207. Bij het voorafgaande hebben we liever getallenvoorbeelden genomen dan letters voor de getallen. Dit beteekent een afwijking van den algemeenen regel, in dit leerboek gevolgd, om zoo algemeen mogelijk te werk te gaan. De groote moeilijkheden, die zich bij een meer algemeene manier van behandeling voordoen, worden nu eenigszins vermeden. Dit moge ter verontschuldiging dienen.

Met geringe wijzigingen kunnen de voorgaande redeneeringen toegepast worden op het g-tallig stelsel. Men krijgt dan herleiding van gewone tot g-deelige breuken en omgekeerd, waarbij de rol van „10" door het nieuwe grondtal g wordt vervuld.

### Onze maten, gewichten en munten.

§ 208. In vroeger eeuwen was er van eenheid van maat en gewicht geen sprake. Ieder land, ja soms iedere streek had zijn bepaalde maten. Reeds in 1673 had onze beroemde landgenoot Christiaan Huygens voorgesteld de lengte van den secondeslinger ($\pm$ 1 M.) als eenheid van maat in te voeren, evenwel zonder succes. Aan dezen onhoudbaren toestand is een einde gemaakt omstreeks het jaar 1800. Aan de Franschen komt de eer toe, aan de beschaafde wereld een nieuw stelsel, berekend op de eischen van het moderne wereldverkeer, geschonken te hebben. Onder leiding van de Fransche geleerden Méchain en Delambre werd gemeten de lengte van den meridiaan van Duinkerken tot Barcelona. (Beide steden op ruim 2° O.L. van Greenwich, verschil in breedte ongeveer 10°). Deze afstand werd uitgedrukt in een toenmalig gebruikte Fransche maat, de toise. Men kon nu den

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

omtrek van de aarde berekenen, aangenomen, dat deze een cirkel is. Het veertig millioenste deel van dezen omtrek werd Meter genoemd en als eenheid voor een nieuw stelsel aangenomen. Later, bij nauwkeuriger waarnemingen, bleek deze omtrek iets meer dan 40.000.000 M. te zijn, maar toch behield men de eenmaal aangenomen lengte als eenheid.

Men bewaart den origineelen Meter in de Staatsarchieven van Frankrijk. Ons land bezit daarvan een copie, vervaardigd van platina—iridium en bewaard in de Technische Hoogeschool te Delft.

Direct heeft men daaruit afgeleid een gewicht: het kilogram. Dit is het gewicht van 1 $dM^3$ zuiver water bij 4° C. Ook daarvan bezit ons land een copie. De eenheid van gewicht is het gewicht van genoemd kilogram in het luchtledige.

§ 209. *Lengtematen.*

De eenheid is de Meter. Men gebruikt 4 veelvouden: Myria-Meter (afgekort M.M. = 10000 M.), Kilo-Meter (K.M. = 1000 M.), Hecto-Meter (H.M. = 100 M.) en Deca-Meter (D.M. = 10 M.) Bovendien nog 3 onderdeelen: deci-Meter (d.M. = 0.1 M.), centi-Meter (c.M. = 0.01 M.) en milli-Meter (m.M. = 0.001 M.).

Hieronder volgen nog eenige andere lengtematen:

1 El = 69 c.M.
1 Amsterdamsche voet = 28 c.M.
1 Rijnlandsche voet = 31 c.M.
1 Vaam = 1,68 M. (dieptemaat) = 6 voet.
1 Knoop = 15,43 M.
1 Kabellengte = 120 vaam = 220 M.
1 Zeemijl = 1852 M.
1 Geographische mijl = 4 zeemijlen = $^1/_{15}$° van een meridiaan = 7407 M.
1 Uur gaans = 3 zeemijlen = $^1/_{20}$° van een meridiaan = 5556 M.
1 Engelsche Mijl = 1609 M.
1 Engelsche Zeemijl = 1852 M.
1 Yard = 3 voet = 91,4 c.M. (Eng.)
1 Voet = 12 duim = 30,5 c.M. (Eng.)
1 Duim = 25,4 m.M. (Eng.)

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1 Paal (Java) = 1507 M.
1 Paal (Sumatra) = ¼ geogr. mijl = 1 zeemijl.
1 Werst = 1067 M. (Rusland).
1 Toise = 1,949 M.

§ 210. *Vlaktematen.*

Als vlaktematen gebruikt men de vierkanten van de wettige lengtematen, derhalve: M.M²., K.M²., H.M². D.M²., M.², d.M²., c.M², m.M². Daarnaast zijn de volgende ook wettige maten: Hecto Are (H.A. = H.M²), Are (A. = D.M²) en centi Are (c.A. = M²).

Ziehier nog eenige andere maten:
1 Bunder = 1 H.A.
1 Morgen = 8516 M² (Rijnland).
1 Gemet = ± 0,4 H.M² = 300 vierk. roeden.
1 Vierk. geogr. mijl = ± 55 K.M².

§ 211. *Inhoudsmaten.*

Voor inhoudsmaten is de eenheid de liter (afgekort L.) Veelvouden: K.L., H.L., D.L.; onderdeelen: d.L., c.L., m.L. Tevens kan men er voor nemen de kuben van de wettige lengtematen (M³, d.M³, c.M³). 't Verband tusschen deze twee soorten: 1 d.M³ = 1 L. Voor sommige stoffen zijn nog in gebruik de Stère (afgekort S. = M³) met onderdeelen en veelvouden.

Eenige andere namen:

1 Mud = 1 H.L.
1 Schepel = 1 D.L.
1 Kop = 1 L.
1 Maatje = 1 d.L.
1 Vingerhoed = 1 c.L.
1 Anker = 44 flesschen.
1 Ton (binnenschepen) = 1 M³
1 Ton (zeeschepen) = 2.83 M³
*Ruimtematen.*

§ 212. *Gewichten.*

Men onderscheidt de volgende gewichten: K.G., H.G., D.G., G., d.G., c.G. en m.G.

Andere namen:

1 Pond = ½ K.G.
1 Ons = 1 H.G.
1 Lood = 1 D.G.
1 Wichtje = 1 G.
1 Picol = ± 61½ K.G.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 213. *Verband tusschen inhoudsmaten en gewichten:*

1 S. ——› 1 $M^3$ —› 1 K.L.
1 d.S. ——————› 1 H.L.
1 c.S. ——————› 1 D.L.
1 m.S. ——› 1 d.$M^3$ ——› 1 L. zuiver water ——› 1 K.G.
1 d.L. zuiver water ——› 1 H.G.
1 c.L. zuiver water ——› 1 D.G.
1 c.$M^3$ —› 1 m.L. zuiver water ——› 1 G.
1 c.G.
1 d.G.
1 m.$M^3$ zuiver water ——————› 1 m.G.

§ 214. De volgende maten en gewichten worden in het dagelijksch leven werkelijk gebruikt:

*Lengtematen:* dubbele, enkele en halve D.M.; dubbele, anderhalve, enkele en halve M.; dubbele en enkele d.M.

*Ruimtematen:* halve D.S., dubbele en enkele S. (wisse).

*Inhoudsmaten* voor *droge* waren: dubbele, enkele en halve H.L.; dubbele, enkele en halve D.L.; dubbele, enkele en halve L.; dubbele, enkele en halve d.L. Deze maten hebben den cilindervorm; de hoogte is nagenoeg gelijk aan de middellijn van het grondvlak.

*Inhoudsmaten* voor *natte* waren: halve H.L.; dubbele, enkele en halve D.L.; dubbele, enkele en halve L.; dubbele, enkele en halve d.L.; dubbele en enkele c.L. Bij de hooge vochtmaten is de hoogte ongeveer 2 maal de middellijn van het grondvlak, bij de lage vochtmaten zijn deze afmetingen even groot.

*Gewichten:* 50, 25, 20, 10, 5, 2 en 1 K.G.; 5, 2 en 1 H.G.; 5, 2 en 1 D.G.; 5, 2 en 1 G.; 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2 en 1 m.G. (apotheek).

Hoewel niet direct in verband staande met het metriek stelsel, vermelden we nog even de volgende:

*Papiermaten:* 1 Baal = 10 Riem; 1 Riem = 20 Boek; 1 Boek = 24 Vel.

De maten en gewichten moeten van tijd tot tijd *geijkt* worden, d.w.z. hun afmeting of gewicht wordt vergeleken met de juiste eenheden. De ijker voorziet daarna de goedgekeurde maten en

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

gewichten van een stempel. Het is verboden waren te verkoopen met maten en gewichten, die niet van het laatste merk voorzien zijn.

*Munten.*

§ 215. In Nederland zijn in gebruik de volgende munten:

a. die, welke wettig betaalmiddel zijn tot *elk* bedrag, n.l. het gouden tientje, het gouden vijfje, de rijksdaalder, de gulden en de halve gulden;

b. die, welke wettig betaalmiddel zijn tot een *beperkt* bedrag. Zij worden *pasmunten* genoemd: het kwartje, het dubbeltje, het stuivertje, de halve stuiver, de cent en de halve cent.

Niemand is verplicht zilveren pasmunt tot een hooger bedrag dan *f* 10.—, nikkelen pasmunt tot een hooger bedrag dan *f* 1.— en bronzen pasmunt tot een hooger bedrag dan *f* 0.25 aan te nemen.

Men spreekt wel van *standpenningen*, d.z. munten, die wettig betaalmiddel zijn tot elk bedrag en vrij aan 's Rijks Munt mogen aangemunt worden: het gouden tientje en het gouden vijfje.

Munten, die niet vrij aangemunt mogen worden, maar toch wettig betaalmiddel zijn tot elk bdrag, worden wel *teekenmunten* genoemd: de rijksdaalder, de gulden en de halve gulden.

§ 216. Ons muntstelsel werd het eerst geregeld bij de wet van 1816 en later herhaaldelijk gewijzigd. Men had eerst den z.g. *dubbelen standaard*, d.w.z. er waren gouden en zilveren munten, die beide vrij mochten worden aangemunt. In 1847 werd de gouden standpenning ingetrokken en kregen we den *enkelen* standaard.

Wegens de daling van den zilverprijs (ongeveer 1870) werd de vrije aanmunting geschorst, zoodat we noch den enkelen, noch den dubbelen standaard hadden. Tegenwoordig spreekt men van den *hinkenden* standaard, omdat er tweeërlei standpenningen zijn, n.l. van goud en van zilver, waarvan alleen de eerste voor rekening van particulieren mogen worden aangemunt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 217.

| *Munten.* | *Gehalte.* | *Gewicht.* | *Middellijn.* |
|---|---|---|---|
| Gouden tientje | 0,900 | 6,72 G. | 22,5 m.M. |
| Gouden vijfje | | 3,36 G. | 18 m.M. |
| Rijksdaalder | 0,945 | 25 G. | 38 m.M. |
| Gulden | | 10 G. | 28 m.M. |
| Halve gulden | | 5 G. | 22 m.M. |
| Kwartje | 0,640 | 3,575 G. | 19 m.M. |
| Dubbeltje | | 1,4 G. | 15 m.M. |
| Stuivertje | 0,250 nikkel<br>0,750 koper | 4.5 G. | 18 m.M. |
| Halve stuiver | 0,950 koper | 4 G. | 23,5 m.M. |
| Cent | 0,040 koper | 2½ G. | 19 m.M. |
| Halve cent | 0,010 zink | 1¼ G. | 14 m.M. |

§ 218. Als betaalmiddel tot elk bedrag hebben we nog de *bankbiljetten*, uitgegeven door de Nederlandsche Bank, van 10, 25, 40, 60, 100, 200, 300 en 1000 gulden. Teneinde aan de schaarschte van zilvergeld tegemoet te komen, heeft de Nederlandsche regeering in de mobilisatiejaren uitgegeven de nog steeds bestaande *zilverbons* van een rijksdaalder en een gulden, die eveneens wettig betaalmiddel tot elk bedrag zijn.

### Uit de Geschiedenis der Rekenkunde.

Tot diep in de Middeleeuwen gebruikte men in Europa het Romeinsche cijferstelsel voor het schrijven der getallen. De tegenwoordige cijferteekens zijn van Indischen oorsprong, door de Arabieren gewijzigd (het woord cijfer is afkomstig van het Arabische woord as-sifr) en daarna over de toenmalig bekende wereld verbreid (± 1300). Het teeken voor nul is het laatst uitgevonden.

Wat het schrijven der *gewone breuken* aangaat, men heeft het eerst gewerkt met zoogenaamde stambreuken, dit zijn breuken met den teller 1. Bij de oude Egyptenaren werden ze voorgesteld door eenvoudig den noemer neer te schrijven en er een stip boven te plaatsen. De oude Grieken schreven van een breuk in den regel den teller met één accent, daarna den noemer 2 keer, telkens met twee accenten; bij stambreuken werd de

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

teller weggelaten en de noemer slechts éénmaal geschreven. De oude Hindoes schreven de gewone breuken, zooals wij dat nu doen, met weglating van de breukstreep evenwel.

De schrijfwijze van de decimale breuken danken we aan *Simon Stevin* (1548—1620), den leermeester van Prins Maurits. In zijn geboortestad Brugge heeft men een monument voor hem opgericht. Stevin zag het groote voordeel, dat de schrijfwijze der tiendeelige getallen met zich meebrengt. Alleen had hij nog een tamelijk ongelukkige schrijfwijze. B.v. 12,3456 werd geschreven:

1 2 ⓪ 3 ① 4 ② 5 ③ 6 ④ of 1 $\overset{⓪}{2}$ $\overset{①}{3}$ $\overset{②}{4}$ $\overset{③}{5}$ $\overset{④}{6}$

Een schrijfwijze, die toen ook wel in zwang was, was deze: $123'4''5'''6''''$. Eerst later kwam men op het idee eenvoudig de plaats der eenheden aan te geven met een stip boven de lijn, aldus $12\dot{3}456$, welke schrijfwijze in den grond van de zaak dezelfde is als onze tegenwoordige.

De teekens voor de verschillende verbindingen (bewerkingen) werden na invoering van de Indisch-Arabische cijfers, door verschillende personen in de 15e, 16e en 17e eeuw uitgevonden en in gebruik genomen: $+ \quad - \quad \times \quad . \quad : \quad \surd$.

Hier mogen nog eenige aanteekeningen omtrent eenige beroemde rekenkundigen in dit boek genoemd, volgen:

*Pythagoras* (6e eeuw voor Chr.) stichtte te Croton in Zuid-Italië een soort orde, waarvan de leden aan allerlei regels gebonden waren. Wat uitvindingen van eenig belang aangaat, deze werden alle toegeschreven aan den grooten meester (de beroemde stelling uit de Vlakke Meetkunde!). Het „getal" was datgene, waartoe alles teruggebracht kon worden: de harmonie in de muziek (intervallen!) en in de natuur. Vandaar hun groote studie op het gebied der getallenleer: over gebrekkige, volkomen en overmatige getallen werd reeds gesproken, evenzoo over vriendschapsgetallen. Men sprak van kwadraten en langwerpige getallen; de laatste waren die getallen, die niet in twee gelijke factoren konden ontbonden worden. Een getal, dat het product was van drie priemfactoren, werd een lichaamsgetal genoemd. Drie getallen, waarvan het kwadraat van het grootste gelijk is aan de som van de kwadraten der andere, heeten Pythagorische

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

getallen: 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17; enz. Zoo werden de Pythagoriërs vanzelf tot de onmeetbare getallen gebracht.

Het werk van *Euclides* (± 300 voor Chr.) te Alexandrië ligt vooral op het gebied der meetkunde. Hij schreef de beroemde „Elementen", bestaande uit 13 boeken. Dit werk doet zijn invloed gelden tot op dezen dag; immers in de gewone leerboeken wordt behandeld de zoogenaamde Euclidische meetkunde, berustende op het axioma der evenwijdige lijnen. Toch vindt men in de „Elementen" wel getallenleer: zoo wordt bewezen, dat de rij der priemgetallen onbegrensd is.

*Erathostenes* (± 200 voor Chr.) was een Grieksch geleerde, eveneens te Alexandrië. De zeefmethode van E. om de priemgetallen te zoeken, werd reeds besproken. Hij moet niet alleen een geleerde op wiskundig, maar ook op taalkundig en astronomisch gebied geweest zijn.

*Fermat* (1601—1665) was een rekenkundige bij uitnemendheid. Hij was een Fransch ambtenaar te Toulouse, die zijn vrijen tijd besteedde aan de beoefening der wiskunde. Hij had de gewoonte zijn bewijzen omtrent stellingen niet mee te deelen, hoogstens er eenige kantteekeningen bij te zetten. Het Theorema van Fermat werd reeds behandeld. Bekend is de volgende historische anecdote: Op zekeren dag vroeg pater Mersenne hem naar de deelers van 100895598169 en nog dienzelfden dag antwoordde Fermat, dat het getal het product is van de priemgetallen 112303 en 898423. Fermat moet dus methoden gekend hebben om groote getallen snel in factoren te ontbinden!

Een der geniaalste wiskundigen der moderne tijden is *Euler* (1707—1783) geweest. Hij werd in Bazel geboren en werd professor in de wiskunde te St. Petersburg, met een tusschenpooze te Berlijn. Men vertelt van hem, dat hij de laatste 17 jaar van zijn leven blind was, hetgeen niet belette, dat hij zich toch bleef wijden aan de wiskundestudie. Vooral op 't gebied der Hoogere Wiskunde heeft Euler reuzenarbeid verricht. Wat de getallenleer aangaat, hij heeft verschillende onbewezen stellingen van Fermat aangetoond en tevens een uitbreiding aan het bekende Theorema gegeven.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*Legendre* (1752—1833) was een Fransch geleerde, die in zijn „Théorie des Nombres" alles, wat toen bekend was in de rekenkunde, stelselmatig ordende.

Met *Gauss* (1777—1855), een Duitscher, is hij de grondlegger der moderne getallenleer.

---

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$\sqrt{2} = 2^3 \times 3^2$

$1 \times 2 \times 3 \cdots \times 999 \times 1000 = 1000!$

500 even get.
250 vier
125 achtig.
62

| | |
|---|---|
| 500 | fact 2 |
| 250 | " 2 |
| 125 | " 2 |
| 62 | " 2 |
| 31 | " 2 |
| 15 | " 2 |
| 7 | " 2 |
| 3 | " 2 |
| 1 | " 2 |

994 fact. 2

$1 \times 2 \times 3 \cdots \times 999 \times 1000 = 1000!$

333 get met minstens 1 fact 3: 333 fact 3
111 " " " 2 " 3 : 111 " 3
37 " " " 3 " 3 : 37 " 3
12 " " " 4 " 3 : 12 " 3
4 " " " 5 " 3 : 4 " 3
1 " " 6 " 3 : 1 " 3

498 fact. 3

$1 \times 2 \times 3 \cdots \times 999 \times 1000 = 1000!$

166 fact. 3
55 " 3
18 " 3
6 " 3
2 " 3

247 fact 3

$\frac{1 \times 2 \times 3 \cdots \times 999 \times 1000}{\sqrt{2}^{\cdots}} = \frac{2^{500} \times 3^{249} \times 5^{\cdots}}{\sqrt{2}^{\cdots}}$

$\sqrt{2} = 2^3 \times 3^2$

$2^{125} = 2^{37} \times 3^{250}$

Het antw. is dus $\sqrt{2}^{125}$

# VRAAGSTUKKEN.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 1 — § 8.

Eig. T. *Iedere telling van een hoeveelheid voert tot hetzelfde resultaat.*

1. De opvolgende termen der schaal heeten: tien, honderd, duizend, tienduizend, honderdduizend, millioen, tien millioen, honderd millioen, milliard, tien milliard, honderd milliard, billioen (millioen van de 2e orde), enz.

Spreek nu uit de volgende getallen:

763284, 560074, 3200004840, 70070070070070.

2 Schrijf met cijfers:

vier duizend acht en veertig;
negen en negentig duizend negen en negentig;
acht milliard drie en negentig duizend zestien;
elf billioen honderd veertig duizend drie honderd dertig.

3. Omvorming van getallen:

7682 (tient. st.) = _____ (zevent. st.)
9628 (tient. st.) = _____ (dertient. st.)
5834 (tient. st.) = _____ (viert. st.)
99846 (tient. st.) = _____ (negent. st.)

4. Idem:

2846 (negent. st.) = _____ (tient. st.)
73t85 (elft. st.) = _____ (tient. st.)
$2724_{0}$ (achtt. st.) = _____ (tient. st.)
3210 (viert. st.) = _____ (tient. st.)

5. 2864 (negent. st.)+3214 (vijft. st.)+2917 (twaalft. st.) = _____ (tient. st.)
3456 (zevent. st.)+3456 (negent. st.)+3456 (dertient. st.) = _____ (tient. st.)

6. Hoeveel getallen van 1 cijfer heeft men in het tient. stelsel? Hoeveel get. zijn er, die met 1 of 2 cijfers geschreven worden? Hoeveel getallen van 2 cijfers zijn er dus? Tracht het aantal getallen van zes cijfers te bepalen.

7. Dezelfde vragen van no. 6 voor het zeventallig stelsel. Het antwoord geven in het tientallig stelsel.

8. Schrijf de volgende getallen op de gewone manier:

XCVIII. CCCLXIII. MDCLXI.
$\overline{\text{CCLX}}\text{DV}$. $\overline{|\text{X}|}\ \overline{|\text{X}|}$ DCXVI CIII.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

9. Schrijf de volgende getallen met Romeinsche cijfers: 776, 8153, 576302, 183183, 2384888.

---

§ 8 — § 15.

Eig. **O 1.** *Commutatieve eigenschap der optelling.*
Eig. **O 2.** *Associatieve eigenschap der optelling.*
Eig. **O 3.** *Algemeene associatieve eigenschap: De som van eenige getallen verandert niet van waarde, wanneer men de termen tot groepen vereenigt en ze door hun som vervangt.*
Eig. **O 4.** *Algemeene commutatieve eigenschap: Een som is onafhankelijk van de volgorde der termen.*

1. Welke eigenschappen zijn bij de volgende herleidingen gebruikt?

37+64+52+36+63+48 = 37+63+64+36+52+48 =
(37+63)+(64+36)+(52+48) = 100+100+100 = 300.
263+524+737 =
200+63+524+700+37 = 200+700+63+37+524 =
200+700+100+524 = 1524.

2. Bereken uit het hoofd:

225+642+675+458 =
7+120+800+73+3000 =
230+1200+570+238+62+700 =

3. Herleid:

726+352+864+926 = _____ (elft. st.)
336+726+308+277 = _____ (negent. st.)
246+204+525+666 = _____ (zevent. st.)
9ew+529+8t9+427 = _____ (dertient. st.)

4. Bereken uit het hoofd:

26+ 52+23+ 55+47+31 = _____ (achtt. st.)
53+ 21+33+ 56+68+37 = _____ (negent. st.)
t4+176+46+292+2t+18 = _____ (twaalft. st.)
51+224+33+16+34+443 = _____ (zevent. st.)

§ 15 — § 23.

Eig. **A 1.** *Een verschil verandert niet van waarde, als men*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*aftrektal en aftrekker met eenzelfde getal vermindert.*

Eig. **A 2.** *Een verschil wordt met een getal vermeerderd door dit op te tellen bij het aftrektal.*

Eig. **A 3.** *Een verschil wordt met een getal vermeerderd door dit af te trekken van den aftrekker.*

Eig. **A 4.** *Een verschil wordt met een getal verminderd door dit getal af te trekken van het aftrektal.*

Eig. **A 5.** *Een verschil wordt met een getal verminderd door dit getal op te tellen bij den aftrekker.*

Eig. **A 6.** *Het verschil van twee sommen is gelijk aan de som der verschillen, die men verkrijgt, wanneer men elken term van den aftrekker aftrekt van een term van het aftrektal.*

1. Noem de gebruikte eigenschappen bij de volgende herleidingen:

479 — 289 = 490 — 300 = 190.
597 — 217 = 580 — 200 = 380.
146 — 84 + 38 = 284 — 84 = 200.
596 — 154 — 42 = 596 — 196 = 400.
(529+376+251)—(101+126+229) =
(529—229)+(376—126)+(251—101)= 300+250+150=700
(120—107)+(380—93)+(400—150) =
(120+380+400)—(107+93+150) = 900—350 = 550.

2. Bereken uit het hoofd:
357—117 =
512—350—12 =
736—544+44 =
(72+68+496)—(22+46+18) =
(419—33)+(870—37)+(581—430) =
596—128+104 =

3. Bepaal de volgende verschillen:
2864— 932 = _____ (elft. st.)
7213—5624 = _____ (achtt. st.)
2397—1t3e = _____ (dertient. st.)
5123—2404 = _____ (zest. st.)
429e—2645 = _____ (twaalft. st.)
2340—1402 = _____ (vijft. st.)



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

4. Bewijs:

$$a - b - c + d - e = (a + d) - (b + c + e)$$

Breng deze eigenschap in woorden.

5. Bewijs:

$$(p - q) - (r - s) = (p + s) - (q + r)$$

Tracht deze eigenschap in woorden te brengen.

6. $(p - q) + (r - s) = (p - s) + (r - q)$

Als bij opg. 5.

7. Van een „aftrekking" is de som van aftrektal, aftrekker en „verschil" 200. De aftrekker is 26 meer dan het „verschil". Bepaal de aftrekking.

8. Van 2 getallen is de som s en het verschil v. Druk de getallen in s en v uit.

§ 23—§ 34.

Eig. V 1. *Commutatieve eigensch. der vermenigvuldiging.*

Eig. V 2. *Een som wordt met een getal vermenigvuldigd, door elk der termen van die som met dat getal te vermenigvuldigen en de komende producten samen te tellen.*

Eig. V 3. *Een getal wordt met een som vermenigvuldigd, enz.*

Eig. V 4. *Een verschil wordt met een getal vermenigvuldigd, door aftrektal en aftrekker met dat getal te vermenigvuldigen en het eerste product te verminderen met het tweede.*

Eig. V 5. *Een getal wordt met een verschil vermenigvuldigd, enz.*

Eig. V 6. *Associatieve eigenschap der vermenigvuldiging.*

Eig. V 7. *Algemeene associatieve eigenschap: Een product verandert niet van waarde, wanneer men twee of meer factoren door hun product vervangt.*

Eig. V 8. *Algemeene commutatieve eigenschap: Een product is onafhankelijk van de volgorde der factoren.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1. Noem de gebruikte eigenschappen:

$24 \times 102 = 24 \times (100+2) = 24 \times 100 + 24 \times 2 = 2448.$

$26 \times 97 = 26 \times (100-3) = 26 \times 100 - 26 \times 3 = 2522.$

$8 \times 16 \times 125 = 16 \times 8 \times 125 = 16 \times 1000 = 16000.$

$199 \times 56 = (200-1) \times 56 = 200 \times 56 - 1 \times 56 = 11144.$

$4 \times 16 \times 25 \times 625 = 4 \times 25 \times 16 \times 625 = 100 \times 10000 = 1000000.$

$302 \times 48 = (300+2) \times 48 = 300 \times 48 + 2 \times 48 = 14496.$

2. Bereken uit het hoofd:

| | | |
|---|---|---|
| $99 \times 76 =$ | $24 \times 199 =$ | $4 \times 7 \times 25 =$ |
| $98 \times 81 =$ | $55 \times 201 =$ | $4 \times 11 \times 175 =$ |
| $102 \times 63 =$ | $46 \times 999 =$ | $88 \times 125 =$ |
| $1001 \times 26 =$ | $624 \times 1001 =$ | $28 \times 25 =$ |

3. Maak de „tafels van vermenigvuldiging" voor 6 en 7 in het achttallig stelsel.

Eveneens voor 4 en 9 in het twaalftallig stelsel.

4. Bereken:

| | |
|---|---|
| $286 \times 346 =$ | (negent. st.) |
| $204 \times 527 =$ | (achtt. st.) |
| $7te \times 2e4 =$ | (twaalft. st.) |
| $267 \times 314 =$ | (elft. st.) |

5. Geef de volledige redeneering voor: $5 \times 6 = 6 \times 5$.

6. Toon aan: $p \times (a-b+c-d) = p \times a - p \times b + p \times c - p \times d$.

7. Toon aan:

$(a+b+c)\ (p+q+r) = ap+aq+ar+bp+bq+br+cp+cq+cr.$

8. Bij een vermenigvuldiging, waarvan de vermenigvuldiger 246 is, plaatst men de gedeeltelijke producten onder elkaar (zonder „in te springen"), waardoor de uitkomst 81198 te klein wordt. Bereken het vermenigvuldigtal.

9. Men vermeerdert beide factoren van een product met 1. Hoeveel wordt het product meer? Noem de getallen a en b.

10. Twee getallen, waarvan het eene 2 maal zoo groot is als het andere worden beide met 1 vermeerderd. Daardoor wordt het product 655 grooter. Welke getallen zijn dat?

11. Men vermindert beide factoren van een product met 1 Hoeveel wordt het product minder? Noem de getallen weer a en b.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

12. Twee getallen, die 300 verschillen, worden beide met 3 verminderd; het product wordt daardoor 1599 minder. Welke getallen zijn het?

13. Wanneer is een product gelijk aan nul? Bereken, wat x moet zijn om de volgende producten nul te maken:
x (x—3); (x—6) (x—12); x (x—1) (x—2).

## § 34 — § 47.

Eig. D 1. *Een quotient verandert niet van waarde, als men deeltal en deeler door eenzelfde getal deelt.*

Eig. D 2. *Een quotient wordt met een getal vermenigvuldigd, door het deeltal er mee te vermenigvuldigen.*

Eig. D 3. *Een quotient wordt met een getal vermenigvuldigd, door den deeler er door te deelen.*

Eig. D 4. *Een quotient wordt door een getal gedeeld, door het deeltal er door te deelen.*

Eig. D 5. *Een quotient wordt door een getal gedeeld, door den deeler er mee te vermenigvuldigen.*

Eig. D 6. *Het quotient van twee producten is gelijk aan het product van de quotienten, die men verkrijgt wanneer men elken factor van den deeler deelt op een factor van het deeltal.*

Eig. D 7. *Een som wordt door een getal gedeeld door elk der termen van die som door dat getal te deelen en de komende quotienten samen te tellen.*

Eig. D 8. *Een verschil wordt door een getal gedeeld, door aftrektal en aftrekker door dat getal te deelen en het eerste quotient te verminderen met het tweede.*

1. Noem de gebruikte eigenschappen:
$1875 : 75 = 625 : 25 = 25.$
$720 : 4 : 36 = 20 : 4 = 5.$
$15 \times (120 : 30) = 120 : 2 = 60.$
$832 : 8 = 800 : 8 + 32 : 8 = 100 + 4 = 104.$
$72 \times 12 \times 75 : 9 \times 4 \times 25 = 8 \times 3 \times 3 = 72.$
$15 \times (120 : 30) = 1800 : 30 = 60.$
$96 : 3 : 8 = 96 : 24 = 4.$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$864 : 9 = 900 : 9 - 36 : 9 = 100 - 4 = 96.$
$575 : 25 = 2300 : 100 = 23.$

2. Bereken uit het hoofd:

$56 \times 625 \times 80 : 125 \times 7 \times 16 =$

| | |
|---|---|
| $796 : 4 =$ | $(900 : 4) : 25 =$ |
| $636 : 12 =$ | $(816 : 17) : 8 =$ |
| $4 \times (525 : 21) =$ | $5 \times (645 : 15) =$ |

3. Bepaal de volgende quotienten:

| | |
|---|---|
| $11144 : 26 =$ | (achtt. st.) |
| $13131 : 37 =$ | (twaalft. st.) |
| $31014 : 54 =$ | (zest. st.) |
| $12034 : 47 =$ | (elft. st.) |

4. Geef de volledige redeneering voor:
$3 \times (48 : 6) = 48 : (6 : 3).$

5. **Toon aan: $(a : b) : (p : q) = a \times q : b \times p$.**
**Breng deze eigenschap in woorden!**

6. Toon aan: $(a : b) : (p : q) = (a : p) : (b : q)$

7. Toon aan: $[\{a \times b : c\} : d] \times e = a \times b \times e : d \times c$.
Synthetisch bewijs!

8. Van een opgaande deeling is de som van deeler, deeltal en quotient 875. De deeler is 9. Bepaal die deeling.

9. Van een opgaande deeling is de deeler 26 en het verschil van deeltal en quotient 750. Bepaal die deeling.

10. Vermenigvuldigt men bij een opgaande deeling den deeler met 4 en vermeerdert men het deeltal met 780, dan blijft het quotient 30. Bepaal die deeling.

11. Vermindert men bij een opgaande deeling den deeler met 4 en vermenigvuldigt men het deeltal met 2, dan wordt het quotient 135, dit is 3 maal zoo groot als eerst.
Bepaal de oorspronkelijke deeling.

12. Van een deeling, waarvan het quotient geen nul bevat, zijn de aftrekkers 1575, 675 en 900. De rest is 34. Bereken het deeltal.

*Examen M.U.L.O.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

13. Van een deeling zijn de opvolgende aftrekkers 326, 2282, 1630, 652, 2608, 1304 en de rest 272. Bepaal het deeltal. Kunt ge ook den deeler bepalen?

14. Men deelt een getal door 7, rest 5. Het quotient deelt men door 11, rest 4. Wat zal de rest zijn, wanneer men het oorspronkelijke getal door $7 \times 11 = 77$ deelt?

15. Men deelt een getal door 5, rest 4. Het quotient deelt men door 12, rest 7. Het nieuwe quotient deelt men weer door 13, rest 9. Wat zal de rest zijn, wanneer men het oorspronkelijke getal deelt door $5 \times 12 \times 13 = 780$?

## § 47 — § 56.

Eig. **M 1.** *Een product wordt tot een macht verheven, door elk der factoren tot die macht te verheffen.*

Eig. **M 2.** *Een quotient wordt tot een macht verheven door deeltal en deeler tot die macht te verheffen.*

Eig. **M 3.** *Het product van eenige machten van hetzelfde grondtal is de macht van het grondtal, die tot exponent heeft de som van de exponenten der factoren.*

Eig. **M 4.** *Het quotient van twee machten van hetzelfde grondtal is de macht van dat grondtal, die tot exponent heeft het verschil der exponenten van deeltal en deeler.*

Eig. **M 5.** *De n-de macht van een macht wordt gevonden, door den exponent met n te vermenigvuldigen.*

1. Schrijf als machten van 3: 9, 243, $81^2$, $27^4$.

2. Bereken:
$2^3 \times 5^8 \times 7^3 : 2^2 \times 5^3 \times 7^2 =$
$4^3 \times 25^4 \times 9^7 : 2^4 \times 5^2 \times 3^6 =$
$625^2 \times 16^2 \times 3^3 =$

3. Bepaal het verschil van $3^4$ en $4^3$, van $5^2$ en $2^5$, van $4^2$ en $2^4$.

4. Uit hoeveel cijfers bestaan de kwadraten der getallen van 1 tot en met 9? van 10 tot en met 99? van 1001 tot en met 9999?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 56 — § 63.

Eig. **W 1.** *De n-de machtswortel uit een product is gelijk aan het product van de n-de machtswortels uit de factoren.*

Eig. **W 2.** *De n-de machtswortel uit een quotient is gelijk aan het quotient van de n-de machtswortels uit deeltal en deeler.*

Eig. **W 3.** *De n-de machtswortel uit een macht verkrijgt men, door den machtsexponent door n te deelen.*

Eig. **W 4.** *De n-de machtswortel uit een wortel verkrijgt men, door den wortelexponent met n te vermenigvuldigen.*

Eig. **W 5.** *Een wortel verandert niet van waarde, als men wortel- en machtsexponent met eenzelfde getal vermenigvuldigt.*

1. Bereken: $\sqrt[3]{3^8}$, $\sqrt[3]{8^4}$, $\sqrt[12]{27^8}$, $\sqrt[4]{(a+b)^8}$.

2. Bereken: $\sqrt{(16 \times 25 \times 169)} =$
$\sqrt[3]{(27 \times 343 \times 1331)} =$
$\sqrt[5]{(16 \times 250 \times 81 \times 75)} =$

3. Bereken: $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125} =$
$\sqrt{16} \times \sqrt{25} =$
$\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{3125} =$

4. Toon aan: $\sqrt[5]{(\sqrt[3]{a})} = \sqrt[3]{(\sqrt[5]{a})}$.

§ 63 — § 74.

**M. P. I.** $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$.

**M. P. II.** $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

**M. P. III.** $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

**M. Q. I.** $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ *is een opgaande deeling.*

**M. Q. II.** $\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a + b}$ *is een opgaande deeling.*

**M. Q. III.** $\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a + b}$ *is een opgaande deeling.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1. Bereken uit het hoofd:

| | | |
|---|---|---|
| $29 \times 31 =$ | $56 \times 64 =$ | $81 \times 79 =$ |
| $18 \times 22 =$ | $41 \times 39 =$ | $76 \times 84 =$ |
| $48 \times 52 =$ | $92 \times 88 =$ | $93 \times 107 =$ |
| $67 \times 73 =$ | $96 \times 104 =$ | $128 \times 132 =$ |

2. Bereken uit het hoofd:

| | | |
|---|---|---|
| $55^2 =$ | $52 \times 58 =$ | $51 \times 59 =$ |
| $75^2 =$ | $33 \times 37 =$ | $77 \times 73 =$ |
| $95^2 =$ | $24 \times 26 =$ | $64 \times 66 =$ |
| $125^2 =$ | $19 \times 11 =$ | $92 \times 98 =$ |

3. Bereken de volgende kwadraten:

$99^2$, $98^2$, $97^2$, $96^2$, $95^2$.
$101^2$, $102^2$, $103^2$, $104^2$, $105^2$.

4. Bereken, zoo eenvoudig mogelijk:

$(18 + 7)^2 - (18^2 + 7^2) =$
$(62 + 6)^2 - (62^2 + 6^2) =$
$76^2 - 24^2 =$ $81^2 - 19^2 =$

5. Bewijs, dat de kwadraten van twee getallen, waarvan de som 50 is, een 100-voud verschillen.

6. De kwadraten van twee getallen, die samen 100 zijn, verschillen eveneens een 100-voud. Toon dat aan!

§ 74 — § 87.

Eig. **B 1.** *Een breuk verandert niet van waarde, als men teller en noemer door eenzelfde getal deelt.*

Eig. **B 2.** *Een breuk wordt met een getal vermenigvuldigd door den teller er mee te vermenigvuldigen.*

Eig. **B 3.** *Een breuk wordt met een getal vermenigvuldigd door den noemer er door te deelen.*

Eig. **B 4.** *Een breuk wordt door een getal gedeeld door den teller er door te deelen.*

Eig. **B 5.** *Een breuk wordt door een getal gedeeld door den noemer er mee te vermenigvuldigen.*

Eig. **B 6.** *Een breuk kan geschreven worden als het product van eenige breuken, waarvan de tellers gelijk zijn aan de factoren van den teller en de noemers gelijk aan de factoren van den noemer der eerste breuk.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Eig. **B 7.** *Een breuk wordt tot de n-de macht verheven, door teller en noemer tot die macht te verheffen.*

Eig. **B 8.** *De n-de machtswortel uit een breuk is gelijk aan een nieuwe breuk, waarvan de teller gelijk is aan den n-de machtswortel uit den teller en de noemer gelijk aan den n-de machtswortel uit den noemer der eerste breuk.*

Eig. **B 9.** *Is bij een quotient de deeler een breuk, dan verkrijgt men de uitkomst door het deeltal te vermenigvuldigen met het omgekeerde van den deeler.*

1. Een breuk heeft de waarde $\frac{5}{8}$. De som van teller en noemer is 52. Welke is die breuk?

2. Een breuk heeft de waarde $\frac{2}{3}$. Het verschil van teller en noemer is 6. Welke is die breuk?

3. Wanneer men van een echte breuk den teller met 4 vermenigvuldigt en den noemer met 90 vermeerdert, blijft de waarde der breuk hetzelfde. Welke is die breuk, als het verschil van teller en noemer 5 is?

4. Wanneer men van een echte breuk den teller met 10 vermindert en den noemer door 3 deelt, blijft de waarde hetzelfde. De som van teller en noemer is 63. Welke is die breuk?

5. Een breuk behoudt dezelfde waarde, wanneer men den teller met 2 vermenigvuldigt en den noemer met 28 vermeerdert. Eveneens is dat het geval, wanneer men den noemer door 4 deelt en den teller met 9 vermindert. Welke breuk wordt bedoeld?

6. Iemand deelt zeker gteal door $\frac{3}{4}$ en vermenigvuldigt datzelfde getal met $\frac{2}{5}$. De uitkomsten verschillen 70. Bereken dat getal.

7. Als men een zekere breuk door $\frac{5}{6}$ deelt en ook met $\frac{5}{6}$ vermenigvuldigt, verschillen 't quotient en 't product $\frac{22}{135}$. Welke breuk wordt bedoeld?

8. Van een breuk is de som van teller en noemer 30. Vermeerdert men den teller met 1 en vermindert men den noemer met 1, dan wordt de waarde der breuk $\frac{2}{3}$. Welke is de oorspronkelijke breuk?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

9. Van een breuk is de som van teller en noemer 50. Vermeerdert men den teller met 5 en vermindert men den noemer met 3, dan wordt de waarde der breuk $^6/_7$. Welke breuk wordt bedoeld?

10. Van een breuk is het verschil van teller en noemer 13. Men vermeerdert beide met 12, waardoor de waarde der breuk $^2/_3$ wordt. Welke breuk?

11. Van een echte breuk is het verschil tusschen noemer en teller 9. Vermindert men den teller met 5 en vermeerdert men den noemer met 4, dan wordt de waarde $^1/_3$. Bereken de breuk.

12. Herleid:

$$\frac{3\frac{3}{4}}{12}\ ,\ \frac{7\frac{1}{5}}{18}\ ,\ \frac{12\frac{1}{2}}{15}\ ,\ \frac{8}{13\frac{3}{5}}\ ,\ \frac{12}{5\frac{1}{7}}.$$

13. Eveneens:

$$\frac{1\frac{1}{6}}{4\frac{1}{7}}\ ,\ \frac{3\frac{1}{4}}{4\frac{1}{3}}\ ,\ \frac{5\frac{1}{8}}{8\frac{1}{5}}\ ,\ \frac{5\frac{5}{6}}{7\frac{7}{8}}\ ,\ \frac{2\frac{1}{3}}{1\frac{3}{4}}.$$

14. Tel samen:

$$\frac{4}{2\frac{1}{2}}\ ,\ \frac{7\frac{1}{2}}{5}\ ,\ \frac{6\frac{1}{4}}{3\frac{3}{4}}\ ,\ \frac{4\frac{1}{6}}{3\frac{1}{8}}\ \text{en}\ \frac{6\frac{1}{4}}{4\frac{1}{6}}.$$

15. Bereken:

$$\left(\frac{3\frac{3}{8}}{12\frac{3}{8}} : \frac{0{,}1125}{56\frac{1}{4}}\right) \times \left(\frac{1\frac{1}{8}}{6} \times \frac{0{,}6}{\frac{9}{10}}\right) =$$

16. Herleid:

$$\frac{\frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{5}} + \frac{4\frac{1}{2}}{6} - \frac{2\frac{2}{7}}{6\frac{3}{7}} : \frac{2\frac{2}{3}}{1\frac{2}{3}}}{1\frac{15}{64} + \frac{\frac{7}{8}}{1\frac{1}{7}} - \left(\frac{2\frac{1}{6}}{2\frac{1}{4}} - \frac{7\frac{3}{5}}{18}\right)} =$$

17. Bereken:

$$\{(10{,}8 + 13{,}5 - 6{,}3) \times 2\tfrac{1}{4} + {}^{21}/_{40} + 12{,}3\} : 2\tfrac{1}{4} =$$

§ 87 — § 104.

Eig. **Vh. 1.** *Een verhouding verandert niet van waarde, als men beide termen door eenzelfde getal deelt.*

Eig. **Vh. 2.** *Een verhouding wordt met een getal vermenigvuldigd door den eersten term er mee te vermenigvuldigen.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Eig. **Vh. 3.** *Een verhouding wordt met een getal vermenigvuldigd, door den tweeden term er door te deelen.*

Eig. **Vh. 4.** *Een verhouding wordt door een getal gedeeld, door den eersten term er door te deelen.*

Eig. **Vh. 5.** *Een verhouding wordt door een getal gedeeld, door den tweeden term er mee te vermenigvuldigen.*

Eig. **Vh. 6.** *Een verhouding kan geschreven worden als het product van eenige verhoudingen, waarvan de eerste termen gelijk zijn aan de factoren van den voorgaanden term en de tweede termen gelijk aan de factoren van den volgenden term der eerste verhouding.*

Eig. **Vh. 7.** *De som van eenige verhoudingen met denzelfden tweeden term is gelijk aan een nieuwe verhouding, waarvan de eerste term gelijk is aan de som der voorgaande termen en de tweede term gelijk aan den gemeenschappelijken volgenden term.*

Eig. **Vh. 8.** *Het verschil van twee verhoudingen met denzelfden tweeden term is gelijk aan een nieuwe verhouding, waarvan de eerste term gelijk is aan het verschil der voorgaande termen en de tweede term gelijk aan den gemeenschappelijken volgenden term.*

Eig. **Vh. 9.** *Een verhouding wordt tot de n-de macht verheven, door beide termen tot de n-de macht te verheffen.*

Eig. **Vh. 10.** *De n-de machtswortel uit een verhouding is gelijk aan een nieuwe verhouding, waarvan de eerste term gelijk is aan den n-de machtswortel uit den voorgaanden term en de tweede term gelijk aan den n-de machtswortel uit den volgenden term der eerste verhouding.*

Eig. **E 1.** **Hoofdeigenschap der evenredigheden:** *Het product der buitenste termen is gelijk aan het product der binnenste.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Eig. **E 2.** **Omgekeerde van de hoofdeigenschap:** *Zijn vier getallen zóó gegeven, dat het product van het eerste en vierde getal gelijk is aan het product van het tweede en derde getal, dan vormen die getallen in die volgorde een evenredigheid.*

Eig. **E 3.** *Men verkrijgt een nieuwe evenredigheid, wanneer men:*

*a. de middelste termen verwisselt,*
*b. de uiterste termen verwisselt,*
*c. de middelste termen tot uiterste maakt en de uiterste tot middelste.*

Eig. **E 4.** *Men verkrijgt een nieuwe evenredigheid, wanneer men:*

*a. de voorgaande termen met eenzelfde getal vermenigvuldigt of door eenzelfde getal deelt,*
*b. de volgende termen met eenzelfde getal vermenigvuldigt of door eenzelfde getal deelt,*
*c. een der uiterste (middelste) termen met een getal vermenigvuldigt en den anderen uitersten (middelsten) term door dat getal deelt.*

Eig. **E 5.** *De som van de termen der eerste reden staat tot de som van de termen der tweede reden gelijk de eerste term staat tot den derden of de tweede tot den vierden.*

Eig. **E 6.** *Het verschil van de termen der eerste reden staat tot het verschil van de termen der tweede reden gelijk de eerste term staat tot den derden of de tweede tot den vierden.*

Eig. **E 7.** *De som van de termen der eerste reden staat tot de som van de termen der tweede reden gelijk het verschil van de termen der eerste reden staat tot het verschil van de termen der tweede reden.*

Eig. **E 8.** *De som van de voorgaande termen, enz.*

Eig. **E 9.** *Het verschil van de voorgaande termen, enz.*

Eig. **E 10.** *De som van de voorgaande termen staat tot de som van de volgende termen gelijk het verschil van de voorgaande termen tot het verschil der volgende.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Eig. **E 11.** *De producten van de overeenkomstige termen van twee evenredigheden vormen een nieuwe evenredigheid.*

Eig. **E 12.** *De quotienten van de overeenkomstige termen van twee evenredigheden vormen een nieuwe evenredigheid.*

Eig. **E 13.** *Gelijknamige machten van de termen eener evenredigheid vormen een nieuwe evenredigheid.*

Eig. **E 14.** *Gelijknamige wortels uit de termen eener evenredigheid vormen een nieuwe evenredigheid.*

Eig. **E 15.** *De som van de voorgaande en die van de volgende termen eener aaneengeschakelde evenredigheid verhouden zich als een voorgaande en zijn volgende term.*

1. Herleid:

$12 : 5+26 : 5 =$ $\quad$ $7 : 5+12 : 7 =$

$33 : 8-15 : 8 =$ $\quad$ $24 : 11+33 : 8 =$

$a : b+7c : b =$ $\quad$ $a : b- p : q =$

$a : q+4b : q =$ $\quad$ $7a : n+8b : m =$

Welke eigenschappen werden gebruikt?

2. Herleid:

$(7 : 8)\times(5 : 6) =$ $\quad$ $(45 : 7) : 9 =$

$7\times(12 : 21) =$ $\quad$ $(45 : 3\frac{1}{4}) : 8 =$

$13\times(37 : 26) =$ $\quad$ $(65 : 2)^3 =$

Welke eigenschappen worden gebruikt?

3. Vermeerder elk der volgende verhoudingen met 3:

$20 : 3$ , $\quad 7 : 8$ , $\quad p : q$ , $\quad 3a : \frac{1}{b}$ .

4. Leid uit $3 \times 6 = 2 \times 9$ verschillende evenredigheden af.

5. Wanneer twee evenredigheden drie *overeenkomstige* termen gelijk hebben, zijn de overige ook gelijk. Bewijs dat.

Is de toevoeging overeenkomstige noodzakelijk?

6. Bereken x uit: $8\frac{1}{4} : 9\frac{1}{6} = 4\frac{1}{5} : x$.

Pas de hoofdeigenschap eerst toe, nadat ge de evenredigheid hebt vervangen door een andere met de kleinst mogelijke geheele getallen. *Ex. Mulo.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

7. Los x op uit de volgende evenredigheden:
a. met behulp van de hoofdeigenschap,
b. zonder de hoofdeigenschap te gebruiken (herleiden tot de gedaante 1 : 1 = a : x).

$(x+6) : (x+3) = (x+2) : (x+\frac{1}{2})$.
$(2x+8) : (3x-3) = (4x-12) : (6x-27)$.

8. *Gegeven:* $(a-c) : (b-d) = a : b$.
*Te bewijzen:* $a : b = c : d$.

9. *Gegeven:* $(2a+3b) : (2c+3d) = a : c$.
*Te bewijzen:* $a : b = c : d$.

10. *Gegeven:* $ab : cd = (a+b)^2 : (c+d)^2$.
*Te bewijzen:* $a : b = c : d$.

11. *Gegeven:* $a : b = c : d$.
*Te bewijzen:* 1e. $(2a+3b) : (2c+3d) = (a-4b) : (c-4d)$
2e. $(5a+4c) : (5b+4d) = (a-2c) : (b-2d)$

12. Tracht het omgekeerde van no. 11 aan te toonen!

13. *Gegeven:* $a : b = c : d$.
*Te bewijzen:* $\frac{a-3b}{4a-5b} : \frac{a+3b}{4a+5b} = \frac{c-3d}{4c-5d} : \frac{c+3d}{4c+5d}$.

14. *Gegeven:* $a : b = c : d$.
*Te bewijzen:* $\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right) : \left(\frac{2}{c}+\frac{1}{d}\right) = \left(\frac{3}{a}-\frac{4}{b}\right) : \left(\frac{3}{c}-\frac{4}{d}\right)$.

15. *Gegeven:* $a : b = c : d$ en $p : q = r : s$.
*Te bewijzen:* $\frac{a+2b}{3p+q} : \frac{a-2b}{3p-q} = \frac{c+2d}{3r+s} : \frac{c-2d}{3r-s}$.

16. Van een evenredigheid is de som van de termen der eerste reden 55, die van de termen der tweede reden 22 en het verschil der voorgaande termen 18.
Bepaal die evenredigheid.

17. Van een evenredigheid is de som der voorgaande termen 60, de som van alle termen 87 en het product van de termen der eerste reden 720. Welke evenredigheid wordt bedoeld?

18. Van welke evenredigheid verhouden de termen der eerste reden zich als 5 : 8, is het product der uiterste termen 320 en is de verhouding der binnenste termen als 4 : 5?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

19. Van een evenredigheid is de 3e term $1\frac{1}{3}$ maal zoo groot als de eerste term, het verschil der volgende termen is 5 en de som der middelste termen is 23. Welke is die evenredigheid?

20. Van een evenredigheid is het product der voorgaande termen 18, het product van alle termen 576 en het verschil van de termen der tweede reden 2. Bepaal die evenredigheid.

21. *Gegeven:* $a : b : c = A : B : C$ (Voor bewijzen omzetten!)
*Te bewijzen:* $(a^2+b^2+3c^2) : (A^2+B^2+3C^2) = a^2 : A^2$.

22. *Gegeven:* $a : b : c = A : B : C$.
*Te bewijzen:* $(a+4b-5c) : (A+4B-5C) =$
$(3a+5b-6c) : (3A+5B-6C)$.

23. *Gegeven:* $a : b : c = A : B : C$.

$$\left(\frac{3}{a}+\frac{5}{b}-\frac{6}{c}\right) : \left(\frac{3}{A}+\frac{5}{B}-\frac{6}{C}\right) = A : a.$$

In het voorgaande zijn met evenredigheden steeds bedoeld meetkundige evenredigheden. De toevoeging meetkundige geschiedt, omdat men (vooral vroeger!) ook nog andere evenredigheden onderscheidt.

Wanneer de volgende gelijkheden bestaan:

$a_1 : b_1 = c_1 : d_1$ (1)
$a_2 - b_2 = c_2 - d_2$ (2)
$(a_3-b_3) : (c_3-d_3) = a_3 : d_3$ (3)

dan wordt (1) een *meetkundige*, (2) een *rekenkundige* en (3) een *harmonische* evenredigheid genoemd.

Wanneer in 't bijzonder de middelste termen gelijk zijn, spreekt men van *gedurige evenredigheden*.

B.v. $a_1 : x_1 = x_1 : b_1$ ——→ ged. meetk. evenr.
$a_2 - x_2 = x_2 - b_2$ ——→ ged. rekenk. evenr.
$(a_3 - x_3) : (x_3 - b_3) = a_3 : b_3$ - - -→ ged. harm. evenr.

Berekening leert, dat:

$$x_1 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \text{ en } x_3 = \frac{2 a_3 b_3}{a_3 + b_3}.$$

Men noemt $x_1$, $x_2$ en $x_3$ resp. de meetkundig, de rekenkundig en de harmonisch middelevenredige van twee getallen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bewijs nu de volgende eigenschappen:

24a. De rekenkundig middelevenredige (R.M.E.) van twee getallen a en b is grooter dan de meetkundig middelevenredige (M.M.E.).

24b. De meetkundig middelevenredige is grooter dan de harmonisch middelevenredige (H.M.E.) van 2 getallen.

25. De M.M.E. van 2 getallen a en b is meetkundig middelevenredig tusschen de R.M.E. en de H.M.E.

26. Teeken een lijn en pas daarop af AB = a en BC = b. Construeer op AC als middellijn een halven cirkel er richt in B een loodlijn op AC op, die den cirkel snijdt in D. Verbind nu D met het midden M van AC en trek BF ⊥ DM.

Bewijs, dat BD = $\sqrt{ab}$, DM = $\frac{1}{2}(a + b)$ en DF = $\frac{2\,ab}{a + b}$.

Bewijs nu ook 24a, 24b en 25 meetkundig!

§ 104 — § 117.

**R1.** $l = a+(n-1)v$, of $l = a-(n-1)v$.

**R2.** $S_n = \frac{1}{2}\, n\, (a + l)$.

**R3.** $v_1 = \frac{v}{p + 1}$.

**R4.** $l = t_n = ar^{n-1}$.

**R5.** $S_n = a \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$, als $r > 1$.

$S_n = a \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, als $r < 1$.

$S_n = n \times a$ , als $r = 1$.

**R6.** $r_1 = \sqrt[p+1]{r}$.

Voor een onbepaald voortloopende afdalende meetkundige reeks geldt: limiet $_{n = \infty}\ S_n = \frac{a}{1 - r}$

1. Bepaal $t_7$, $t_{12}$, $t_p$, van de reeks 1, 4, 7, 10, _____
Eveneens van 5, $4^2/_3$, $4\frac{1}{3}$, _____

2 Bepaal de som van de eerste 15 termen der reeks 12, 17, 22, _____. Eveneens de som van de eerste p termen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

3. Bepaal de som der getallen tusschen 300 en 3000, die deelbaar zijn door 13.

4. Bepaal de som van alle getallen tusschen 200 en 700, die noch door 5, noch door 7 deelbaar zijn.

5. Bepaal de som van alle getallen tusschen 500 en 5000, die op een 7 eindigen.

6. Van een reeks is $t_5 = 5$ en $t_{11} = 6$. Bepaal $t_{23}$ en de som van de eerste 23 termen.

7. Wat ontstaat er, wanneer men de overeenkomstige termen van 2 opklimmende rek. reeksen, van 2 afdalende rek. reeksen, van een afdalende en een opklimmende reeks samentelt?

8. De termen van een rek. reeks, waarvan $t_1 = 7$ en $v = 3$, telt men op bij de overeenkomstige termen van een reeks, waarvan $t_{14} = 39$ en $t_6 = 23$. Bepaal de som van 50 termen der nieuwe reeks.

9. In bovengenoemde formules werd s uitgedrukt in n, a en l. Tracht nu a uit te drukken in n, s en l. Eveneens in s, n en v.

10. Druk n uit in a, s en l. Welke betrekking bestaat er tusschen l, n en v?

11. Van een rek. reeks is de som der eerste 3 termen 21 en die der laatste drie 297. Bepaal hieruit den middelsten term. Wanneer $t_1 = 5$, bepaal dan de som der reeks.

12. Van de reeks 5, 10, 15, _____ is de som van eenige termen 360. Hoeveel termen worden er genomen?

13. Bepaal van de reeks 1, $\frac{3a}{b}$, $\frac{6a - b}{b}$, _____ $t_6$, ook $t_{33}$ en $t_n$.

14. Tusschen elke twee termen der reeks 12, 18, 24, _____ interpoleert men 2 nieuwe termen. Bepaal de som van 20 termen op elkaar deelt?

15. Van een rekenkundige reeks is de eerste term 8, het verschil 4 en de som der termen 176. Tusschen de termen dezer reeks interpoleert men telkens twee termen. Bepaal de som der nieuwe reeks. *Ex. Mulo.*



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

16. Bij de reeks 300, 294, ____ 66 interpoleert men tusschen elk tweetal termen één nieuwen term. Bepaal de som der nieuwe reeks.

---

17. Bepaal van 2, 6, 18, _____ $t_6$, $t_9$, $t_n$.
Eveneens van deze reeks ½, $^1/_6$, $^1/_{18}$. _____ $t_5$ $t_7$, $t_p$.

18. Van een meetk. reeks is $t_7 = 192$ en $t_9 = 768$. Bepaal r en a.

19. Van een meetk. reeks is $t_2 = {}^1/_{10}$ en $t_5 = {}^1/_{80}$. Bepaal $t_{10}$, ook $t_k$.

20. Bepaal de som van de eerste 6 termen der reeks 1536, 768, _____.

21. Bepaal de som van de eerste 7 termen de reeks ¼, $^1/_{12}$, $^1/_{36}$, _____.

22. Van een meetkundige reeks is $t_1 = p$ en $t_2 = q$. Wat is de reden? Bepaal $t_7$.

23. Men schrijft op de reeks a, $ar_1$, $ar_1^2$, $ar_1^3$, _____ en daaronder de reeks b, $br_2$, $br_2^2$, $br_2^3$, _____. Wanneer men de overeenkomstige termen met elkaar vermenigvuldigt, ontstaat opnieuw een meetkundige reeks! Bepaal de nieuwe reden. Wat verkrijgt men, wanneer men de overeenkomstige termen op elkaar deelt?

24. Van een meetk. reeks van 7 termen is de som der eerste drie termen 13 en de som der laatste drie 1053. Bepaal hieruit de reden en daarna de som van alle termen.

25. Van een meetk. reeks is $t_1 + t_4 = 45$ en $t_5 + t_8 = 720$. Bepaal nu r en $t_{12}$.

26. Van een meetk. reeks van 4 termen is $r = ⅓$ en het product van alle termen 944784. Bepaal hieruit a en de som der reeks.

27. Van een meetk. reeks van 7 termen is het product van alle termen $^{128}/_{2187}$. Bereken den middelsten term.

28. Bij een meetk. reeks heeft men de grootheden a, l, r, n, s. Tracht r uit te drukken in a, l en n. Eveneens a in s, r en n, ook s in r, l en a.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

29. Interpoleer tusschen elk tweetal op elkaar volgende getallen 2 termen: 8, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{512}$, _____. Interpoleer telkens 1 term 6, 150, 3750, _____.

30. Van een meetkundige reeks van 9 termen is de middelste term 768 en de tweede 12. Men interpoleert één term tusschen elke twee termen dier reeks. Bepaal de som der nieuwe reeks.

*Ex. Mulo.*

31. Bij de reeks 3, 12, ____ 3072 interpoleert men telkens 1 term. Bepaal de som der nieuwe reeks.

---

32. Bepaal de som van 20 termen der reeks 3, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$ -- Bepaal de limiet van $S_n$ voor $n = \infty$.

33. Van een oneindig voortloopende meetk. reeks is $r = \frac{1}{4}$ en $\lim_{n=\infty} S_n = 6\frac{2}{3}$. Bepaal $t_3$.

34. Van een oneindig voortloopende meetk. reeks is $a = \frac{1}{2}$ en $\lim_{n=\infty} S_n = \frac{3}{4}$. Bepaal $t_5$.

35. Van de divergente reeks 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ____ heeft men zooveel termen genomen, dat $S_n > 20$. Hoe groot moet n minstens zijn?

36. Tracht $\lim_{n=\infty} S_n$ te vinden voor de reeks

$$\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}, \ldots\ldots\ldots$$

door aldus te splitsen $\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$.

37. Tracht, eveneens door splitsing, te vinden $\lim_{n=\infty} S_n$ voor:

$$\frac{5}{1 \times 3}, \frac{5}{3 \times 5}, \frac{5}{5 \times 7}, \frac{5}{7 \times 9}, \ldots\ldots$$

38. Bepaal $\lim_{n=\infty} S_n$ van de reeks:

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{2}{7^3} \quad \frac{5}{7^4} \quad \frac{2}{7^5} \quad \frac{5}{7^6} + \text{----------}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 117 — § 128.

1. Bepaal: $\sqrt{1369}$, $\sqrt{390625}$, $\sqrt{94249}$.

2. Volgens welke eigenschap is $\sqrt[np]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}$?

Bepaal nu $\sqrt[4]{707281}$, $\sqrt[8]{429981696}$.

3. Bereken tot in 2 decimalen nauwkeurig:
$\sqrt{17}$, $\sqrt{312}$, $\sqrt{50024}$.

4. Staan er factoren voor het wortelteeken, dan moeten deze eerst achter het wortelteeken gebracht worden. De worteltrekking het laatst uitvoeren! Bereken nu: $2\sqrt{7}$, $\frac{1}{2}\sqrt{33}$, $\sqrt{7} \times \sqrt{45}$, alle tot in 3 decimalen nauwkeurig!

5. $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 =$ $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})^2 =$
$(\sqrt{11} - \sqrt{3})\ (\sqrt{11} + \sqrt{3}) =$

6. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}\ (\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})\ (\sqrt{7} - \sqrt{5})} =$ (2 dec. nauwk.)

7. Herleid: $\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ (3 dec. nauwkeurig)

Zie verder voor „Wortelvormen" de Algebra.

§ 128 — § 199. Deelbaarheid

Eig. **Dh. 1.** *Zijn eenige getallen deelbaar door eenzelfde getal, dan is ook hun som daardoor deelbaar.*

Eig. **Dh. 2.** *Zijn twee getallen deelbaar door eenzelfde getal, dan is ook hun verschil daardoor deelbaar.*

Eig. **Dh. 3.** *Is van twee getallen het eene wel en het andere niet deelbaar door een zeker getal, dan is ook hun verschil daardoor niet deelbaar.*

Eig. **Dh. 4.** *Is van twee getallen het eene wel en het andere niet deelbaar door een zeker getal, dan is ook hun verschil daardoor niet deelbaar.*

Eig. **G 1.** *De G.G.D. van twee getallen is dezelfde als die van het kleinste en het verschil van een der getallen en een willekeurig veelvoud van het andere.*

Eig. **G 2.** *De gemeene deelers van twee getallen zijn ook deelers van hun G.G.D.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Eig. **G 3.** *Worden twee getallen met eenzelfde getal vermenigvuldigd, dan wordt ook hun G.G.D. daarmee vermenigvuldigd.*

Eig. **G 4.** *Worden twee getallen door eenzelfde getal gedeeld, dan wordt ook hun G.G.D. daardoor gedeeld.*

Eig. **G 5.** *Worden twee getallen beide door hun G.G.D. gedeeld, dan zijn de komende quotienten onderling ondeelbaar.*

Eig **G 6.** *Is een product van twee getallen deelbaar door een getal, dat onderling ondeelbaar is met een der factoren, dan is de andere factor door dat getal deelbaar.* **(Hoofdeigenschap der Deelbaarheid.)**

Eig. **G 7.** *Wanneer 2 getallen onderling ondeelbaar en beide deelers van een derde getal zijn, dan is dit laatste deelbaar door het product der eerste twee getallen.*

Eig. **G 8.** *Wanneer een getal onderling ondeelbaar is met twee getallen afzonderlijk, dan is het ook onderling ondeelbaar met het product dier getallen.*

Eig. **G 9.** *De G.G.D. van twee getallen verandert niet, als men een dier getallen vermenigvuldigt met een getal, dat onderling ondeelbaar is met het andere.*

Eig. **G 10.** *Zijn twee getallen onderling ondeelbaar, dan zijn ook twee willekeurige machten onderling ondeelbaar.*

Eig. **P 1.** *De rij der priemgetallen is onbegrensd.* **(Stelling van Euclides).**

Eig. **P 2.** *Wanneer een product deelbaar is door 'n priemgetal, dan is minstens één der factoren er door deelbaar.*

Eig. **P 3.** *Een getal is slechts op één manier in priemfactoren te ontbinden.* **(Fundamenteelstelling der Deelbaarheid).**

Eig. **P 4.** *Wanneer een getal deelbaar is door een ander getal, dan bevat het eerste alle factoren van het*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

*laatste getal met denzelfden of hoogeren exponent.*

Eig. P 5. *Zijn eenige getallen in factoren ontbonden, dan bevat de G.G.D. dier getallen alle gemeenschappelijke factoren met den kleinsten exponent, waarmee ze in één der getallen voorkomen.*

Eig. K 1. *Het K.G.V. van twee getallen is gelijk aan het product van hun G.G.D. en de quotienten, die men verkrijgt, als men beide getallen door hun G.G.D. deelt.*

Eig. K 2. *Het product van twee getallen is gelijk aan het product van hun G.G.D. en hun K.G.V.*

Eig. K 3. *De gemeene veelvouden van twee getallen zijn veelvouden van hun K.G.V.*

Eig. K 4. *Vermenigvuldigt men van twee getallen een dier getallen met een getal, dat onderling ondeelbaar is met het andere, dan wordt het K.G.V. dier getallen er ook mee vermenigvuldigd.*

Eig. K 5. *Zijn eenige getallen in factoren ontbonden, dan bevat het K.G.V. dier getallen alle factoren met den grootsten exponent, waarmee ze in één der getallen mochten voorkomen.*

*Wanneer een getal g in factoren ontbonden is, aldus:*

$$g = 2^a \times 3^b \times 7^c, \text{ dan is:}$$

*1e. het aantal deelers van g:* $A = (a+1)\ (b+1)\ (c+1)$.

*2e. de som van alle deelers van g:* $S = \frac{2^{a+1}-1}{2-1} \times \frac{3^{b+1}-1}{3-1} \times \frac{7^{c+1}-1}{7-1}$.

*3e. het product van alle deelers:* $P = g^{1/2A}$.

**Stelling van Fermat:** Wanneer p een priemgetal is en a niet deelbaar door p, dan is $a^{p-1}-1$ een p-voud

**Formule voor $\varphi$ (n).** Wanneer $n = 3^a \times 5 \times 7^c$, dan is $\varphi(n) = (1-1/7)\ (1-1/5)\ (1-1/3)$.

**Stelling van Euler.** Is een getal a onderling ondeelbaar met n, dan is $a^{\varphi(n)}-1$ deelbaar door n.

**Formule van Legendre.** $\xi(n) = q_1 + q_2 + q_3 \ldots\ldots\ldots + q_k$.

waarbij $q_1 = \left[\frac{n}{p}\right]$, $q_2 = \left[\frac{q_1}{p}\right]$, enz., en

$q_{k+1} = q_{k+2} = \ldots = 0$.

$(a+b)!$ is deelbaar door $a!\ b!$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1. Hoe stelt men voor: een even getal, een oneven getal, een drievoud, een vijfvoud + 2, een getal, dat door 6 en 7 deelbaar is?

2. Van twee getallen is het eene een 13-voud + 6, het andere een 13-voud + 5. Wat weet ge van het product?

3. Een getal is een 7-voud + 2. Wat kunt ge zeggen van het vierkant? Wat van de derde macht?

4. Er is gegeven, dat p — q en r — s beide deelbaar zijn door d. Bewijs, dat ook pr — qs deelbaar is door d.

5. Toon de volgende eigenschappen aan:
De G.G.D. van a en b is dezelfde als van a en a + b.
De G.G.D. van a en b is dezelfde als van a en a — b.
De G.G.D. van a en b is dezelfde als van a en na + b.

6. Wat gebeurt er met den G.G.D. van twee getallen, wanneer deze tot dezelfde macht verheven worden?
Wat gebeurt er, wanneer uit beide getallen (zoo mogelijk) denzelfden wortel getrokken wordt?

7. Tracht eig. **G 10** indirect te bewijzen!

8. Bewijs: de G.G.D. van twee getallen verandert niet, als men een dier getallen deelt door een factor, die ond. ond. is met het andere getal.

9. Van twee onderling ondeelbare factoren is de som ond. ond. met het product. Bewijs dat.

10. Van twee getallen is de som 1190 en de betrekkingswijzer {4, 3, 2, 6}. Bepaal die getallen.

11. Van twee getallen is het verschil 188 en de betrekkingswijzer {5, 1, 2, 3}. Bepaal die getallen.
Kan een wijzergetal 0 zijn?

12. Een meetkundige reeks bestaat uit geheele getallen. Het getal p is onderling ondeelbaar met den tweeden term der reeks. Bewijs, dat p onderling ondeelbaar is met alle termen.

13. *Gegeven:* 13a + 9b is deelbaar door 117.
*Te bewijzen:* a is een 9-voud, b is een 13-voud. (*Oppassen!*)

14. *Gegeven:* 7p — 15q is deelbaar door 105.
*Te bewijzen:* p is een 15-voud, q is een 7-voud.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

15. Geef de volledige redeneering voor:
Wanneer $56 \times 3468$ deelbaar is door 17, dan moet 3468 door 17 deelbaar zijn (56 en 17 ond. ond.!)

16. Wanneer $3a + 5$ een 13-voud is, is $2a - 1$ het ook. Bewijs dat.
Aanwijzing: Eerst met 13 vermeerderen, daarna door 3 deelen, enz. Noem de gebruikte eigenschappen!

17. Bewijs op dezelfde manier als in no. 16:
Wanneer $2a + 5$ een 7-voud is, dan is $3a + 4$ door 7 deelbaar.

18. Van twee getallen zijn zoowel de som als het verschil door 9 deelbaar. Wat weet ge van die getallen?

---

19. Zoek door ontbinding in factoren den G.G.D. en het K.G.V. der volgende getallen: 1350, 12936, 75460.

*Ex. Mulo.*

20. Bepaal het K.G.V. van:
$25^3 \times (6^3)^2 \times 99$.
$44 \times 8^3 \times (10^2)^3$.
$9^4 \times 10^3 \times 11^2$.

*Ex. Mulo.*

21. De G.G.D. van 84 en 32 is ____.
Wat is de G.G.D. van $7 \times 84$ en 32? van $7 \times 84$ en $7 \times 32$? van 84 en $7 \times 32$? Hoe staat het met het K.G.V. in deze drie gevallen?

22. De G.G.D. van twee getallen is 26, het K.G.V. 910. Bepaal die getallen.

23. Het product van twee getallen is 69300, hun K.G.V. 2310. Welke getallen worden bedoeld?

24. Van twee getallen is de som 160 en het K.G.V. 300. Welke getallen zijn dat?

25. De G.G.D. van a en b is 10, van b en c 13. Bepaal den G.G.D. van ac en b.

26. De G.G.D. van a en b is 20, het K.G.V. is 140. Wat is de G.G.D. van $a^2$ en $b^2$, wat het K.G.V.?

27. De G.G.D. van twee getallen is ook de G.G.D. van de som en het K.G.V. der getallen. Bewijs dat.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

28. Bewijs eig. K 2 met behulp van eig. K 5 en eig. P 5.

---

29. Geef kenmerken van deelbaarheid in het twaalftallig stelsel voor 2, 3, 6, elf, honderd drie en veertig.

30. Idem in het elftallig stelsel voor 2 en 5.

31. Vul bij de volgende getallen voor de stippen cijfers in, zoodanig dat

5716 .2 deelbaar wordt door 8,
3203 .4 deelbaar wordt door 11,
13 .65 . deelbaar wordt door 45,
5 .03 .2 deelbaar wordt door 36,
1 .456 . deelbaar wordt door 72.

32. Onderzoek met de negenproef of $2^{16} - 1 = 65436$ is. Onderzoek het eveneens met de elfproef. En toch _____.

33. De m-de macht van 10 laat bij deeling door 7 tot rest 3, terwijl de n-de macht van 10 een 7voud + 5 is. Wat is de rest bij deeling van de m+n-de macht van 10 door 7?

34. Bepaal de rest bij deeling van $5^{100}$ door 11.

35. Geef de volledige redeneering van het volgende: De termen eener rekenkundige reeks geven bij deeling door een getal een „periode van resten".

36. Een getal van 2 cijfers is deelbaar door 11. Voegt men tusschen beide cijfers een 3, dan blijft het deelbaar door 11. Welk getal werd genomen?

37. Geef een „kenmerk door aftrekking" voor 23.
Eveneens een „kenmerk door optelling" voor 37.

38. Bepaal een kenmerk voor 7 in het twaalftallig stelsel met behulp van de „periode van resten".

39. Geef de volledige redeneering voor het kenmerk voor 11 in het tientallig stelsel.

40. 74 a 65 b 59 is een 88-voud + 7. Welke waarden kunnen a en b hebben? *Ex. Mulo.*

41. Vul van 3 .457 . de ontbrekende cijfers in, zoodanig dat het getal deelbaar wordt door 88. *Ex. Mulo.*

42. Vervang de stippen in het getal 8 . .991 . door cijfers

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

zoo, dat het deelbaar wordt door 792. Licht uw antwoord toe.
*Ex. Mulo.*

43. Indien men een getal van 3 cijfers van 999 aftrekt en de rest en den aftrekker naast elkaar plaatst tot een getal van 6 cijfers, dan is dit laatste deelbaar door 27 en 37.
Men vraagt het bewijs.

44. Zet men naast een getal van 3 cijfers datzelfde getal nog eens, dan is het komende getal deelbaar door 7, 11 en 13. Bewijs dit.

45. Een getal van 6 cijfers, waarvan het laatste cijfer een 6 is, geeft bij deeling door 37 tot rest 22. Bepaal de rest der deeling, als men de 6 vooraan zet.

46. Men heeft een getal, dat op een 7 eindigt. Plaatst men de 7 vooraan, dan wordt het getal 5 maal zoo groot. Bepaal het eerste getal.

---

47. Bepaal het aantal, de som en het product der deelers van 480.

48. Het aantal deelers van $2^3 . 3^5$ is _____.
Bepaal het aantal deelers van $2^3 . 3^5 x$.
Drie gevallen veronderstellen!

49. Bepaal het aantal deelers van $x\ y\ 2^2 . 3^4$ $(x \neq y)$.

50. Bepaal het aantal factoren 3 uit 50!

51. Wanneer een getal op een nul eindigt, is het deelbaar door _____. Bepaal, op hoeveel nullen 30! eindigt.

52. Van twee op elkaar volgende getallen is het eene____, het andere ____. Van drie op elkaar volgende getallen is er zeker een door 3 deelbaar. Bewijs.

53. **Van n op elkaar volgende getallen is er [illegible] één door n deelbaar. Bewijs dit!**

54. Toon aan, dat $n^3 - n$ steeds deelbaar is door 6. Waardoor wordt dit product deelbaar, als n oneven is?

55. Bewijs, dat $n(n+1)(5n+4)$ steeds deelbaar is door 6.

56. Geef de volledige redeneering voor: $12^6 - 1$ is deelbaar door 7.

57. Hoeveel bedraagt $\varphi(84)$ en $\varphi(13)$?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

58. Geef de volledige redeneering voor: $7^8-1$ is deelbaar door 24.

59. Schrijf de $\varphi$ (48) getallen op, niet grooter dan 48 en ond. ond. met 48.

§ 199 — § 207.

Eig. **B 10.** *Is een onvereenvoudigbare breuk gelijk aan een andere breuk, dan zijn teller en noemer van de laatste veelvouden van teller en noemer der eerste breuk.*

Eig. **B 11.** *Elke onvereenvoudigbare breuk, waarvan de noemer een of meer factoren 2 of (en) 5 bevat, is te herleiden tot een eindigende decimale breuk.*

Eig. **B 12.** *Elke onvereenvoudigbare breuk, waarvan de noemer onderling ondeelbaar is met 10, zal bij herleiding geven een zuiver repeteerende breuk.*

Eig. **B 13.** *Elke onvereenvoudigbare breuk, waarvan de noemer behalve andere factoren één of meer factoren 2 of (en) 5 bevat, geeft bij herleiding een gemengd repeteerende breuk, waarvan zooveel cijfers achter het decimaalteeken niet repeteeren, als de hoogste van de exponenten der factoren 2 en 5 bedraagt.*

Eig. **B 14.** *Een zuiver repeteerende breuk heeft tot voortbrengende breuk een gewone breuk, waarvan de teller gelijk is aan de periode, terwijl de noemer uit zooveel negens bestaat als het aantal cijfers der periode bedraagt.*

Eig. **B 15.** *Een gemengd repeteerende breuk heeft tot voortbrengende breuk een gewone breuk, waarvan de teller gelijk is aan het getal, gevormd door de niet-repeteerende cijfers, gevolgd door eenmaal de periode, verminderd met het getal, gevormd door de niet-repeteerende cijfers, terwijl de noemer bestaat uit zooveel negens als er cijfers repeteeren, gevolgd door zooveel nullen, als er cijfers niet repeteeren.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1. Men schrijft op alle echte breuken met den noemer 18. Welke leveren bij herleiding eindigende, welke zuiver, welke gemengd repeteerende breuken?

2. Geef aan, welke van de volgende breuken de grootste is: 0,813 ; 0,813 ; 0,813 ; 0,813.

3. Geef de volledige redeneering voor: $^5/_{13}$ geeft bij herleiding een *repeteerende* breuk.

4. In het twaalftallig stelsel heeft men de volgende breuken neergeschreven: $^7/_9$, $^4/_{13}$, $^{11}/_{36}$, $^{13}/_{25}$.
Welke leveren opgaande, welke zuiver, welke gemengd repeteerende twaalfdeelige breuken?

5. Herleid alle echte breuken met den noemer 7 tot repeteerende breuken. Wat merkt ge omtrent de periodes op?

6. Heeft men een zuiver repeteerende breuk, met 3 cijfers in de periode, herleid tot een onvereenvoudigbare gewone breuk, dan is de noemer een deeler van ------. Welke noemers leveren periodes van 3 cijfers?

7. Dezelfde opgave als no. 6 voor 6 cijfers in de periode.

8. Is 't priemgetal p de noemer van een onvereenvoudigbare breuk, dan is 't aantal cijfers der periode p—1 of een deeler van p—1. (*Fermat*).

9. Gaat men van een *stambreuk* de periode met den noemer vermenigvuldigen, dan zal het laatste cijfer een 9 zijn! Bepaal het laatste cijfer der periode bij herleiding van $^1/_{13}$, $^1/_7$, $^1/_{23}$.

10. Wanneer de noemer van een gewone breuk, welke bij herleiding een gemengd repeteerende breuk oplevert, geen factor 5 bevat, zullen het laatste niet-rep. cijfer en het laatste cijfer der periode 5 verschillen! Toon dat aan. Hoe is dat bij een breuk, waarvan de noemer wel een factor 5 bevat?

11. Is $\frac{A}{B}$ de voortbrengende breuk van 0,$\overline{536}$, dan kan men zich voorstellen dat men de repeteerende breuk heeft gekregen door deeling ------. Wat zal de rest zijn na de 3e aftrekking? Leid hieruit af $\frac{A}{B} = \frac{536}{999}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

12. Toon op dezelfde manier aan, dat $\frac{A}{B} = \frac{8274 - 82}{9900}$, wanneer $\frac{A}{B} = 0,\ 827\overline{4}$ is.

13. $0,\overline{4} = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \text{----------}$

$0,\overline{2} = \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \text{----------}$

op

$\frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \text{----------} = 0,\overline{6}.$

Eenvoudiger kan men dit resultaat verkrijgen, door zooveel cijfers van beide breuken op te schrijven, dat bij optelling een periode ontstaat! Bereken, zonder eerst tot gewone breuken te herleiden:

$0,\overline{25} + 0,\overline{82}$ $\qquad$ $0,\overline{176} + 2,\overline{37} + 5,\overline{2}$

$0,\overline{978} + 0,\overline{297}$ $\qquad$ $0,\overline{209} + 3,\overline{120} + 5,\overline{7}$

14a. Telt men op bovenstaande manier samen een zuiver repeteerende en een eindigende decimale breuk, dan vindt men als antwoord $0,891\overline{46}$. Welke breuken heeft men genomen?

b. Het verschil van een zuiver repeteerende en een eindigende decimale breuk is $0,31\overline{594}$. Wat is 't aftrektal, wat de aftrekker?

## Algemeene Herhaling.

(*Eenige dezer opgaven zijn ontleend aan vroegere hoofdakteexamens, of er naar bewerkt*).

1. Bewijs, dat het verschil der kwadraten van twee oneven getallen steeds door 4 deelbaar is.

2. $\dfrac{7,375 - (1\frac{1}{2} \times 1\,{}^{18}/_{54} - {}^{20}/_{48}) + 4,125 : 2\frac{1}{4}}{1\,{}^{24}/_{36} \times 4,625 : {}^{154}/_{77}} =$

*Ex. Mulo.*

3. Van 2 getallen is de G.G.D. 5 en het K.G.V. 180. Bepaal den G.G.D. en het K.G.V. hunner kwadraten.

4. Bewijs, dat $n(n+1)(n+2)(11n+9)$ steeds deelbaar is door 24.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

5. Toon aan: $\frac{5a - 4b + 5c + 3d}{p} = \frac{5a}{p} - \frac{4b}{p} + \frac{5c}{p} + \frac{3d}{p}$.

Breng deze eigenschap in woorden.

6. Op het 1e vak van een schaakbord legt men 1 graankorrel, op het 2e vak 2 graankorrels, op het 3e vak 4, enz.

Hoeveel graankorrels zou men in totaal noodig hebben?

In werkelijkheid vertegenwoordigt dit een reusachtige hoeveelheid graan!

7. $\frac{(3\frac{3}{4} + 5\frac{5}{6} - 2\frac{1}{12} : 3\frac{1}{3}) : 4\frac{3}{8}}{\frac{3}{14} + 2\frac{6}{7}} =$

*Ex. Mulo.*

8. Van een meetkundige reeks van 7 termen is de laatste term het kwadraat van den middelsten. Indien de som der eerste 4 termen, gedeeld door de som der laatste 4 termen 27 is, vraagt men de som der reeks.

9. Wanneer is $36^{n+1} \times 729^n$ een 3de macht?

10. *Gegeven:* A : B = C : D.

*Te bewijzen:* $(pA^2 \pm qB^2) : (rA^2 \pm sB^2) = (pC^2 \pm qD^2) : (rC^2 \pm sD^2)$.

11. Het aantal deelers van een volkomen vijfdemacht laat bij deeling door 5 één tot rest over. Bewijs dit en tracht meer dergelijke eigenschappen op te sporen.

12. Van twee getallen is het verschil $3\frac{1}{5}$ maal in hun som begrepen, terwijl het verschil hunner kwadraten 145 is. Bepaal die getallen.

13. Wat is c in: (a+b) : (b+c) = (a—b) : (b—c), zoo van a en b de rekenkundig middelevenredige 41 en de meetkundig middelevenredige 40 is?

14. Van twee onderling ondeelbare getallen is het verschil onderling ondeelbaar met hun product. Bewijs dit.

15. $\frac{3\frac{3}{4}\text{ D.G.}}{0{,}375\text{ K.G.}} + \frac{12{,}25\text{ K.M.}^2}{245\text{ A}} + \frac{300\text{ M}^3}{\ldots\ldots\text{ S}} - \frac{3\frac{7}{8}\text{ D.L.}}{38{,}75\text{ d.L.}} = 515\frac{1}{10}$.

*Ex. Mulo.*

16. Van zeker getal is de som der deelers, met inbegrip van 1 en het getal zelf, 3720. Het getal is $2^x \cdot 5^2 \cdot 7$. Bereken het getal.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

17. Iemand heeft naar orde van grootte opgeschreven alle getallen, die gelegen zijn tusschen 100 en 2000 en bij deeling door 7 de rest 3 overlaten. Hij wischt de eerste 10 en de laatste 10 getallen uit. Hoeveel bedraagt de som der overblijvende getallen?

18. Bereken x tot in 5 decimalen nauwkeurig, als gegeven is:

$$\sqrt{\pi} : \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \tfrac{1}{5}\sqrt{5} : \frac{1}{x}\sqrt{x}.$$

(*Kwadrateeren!*)

19. P is een getal, uit een even aantal cijfers bestaande. Q is een getal, bestaande uit dezelfde cijfers, maar in omgekeerde volgorde. Bij deeling door 11 laat P a tot rest over. Wat zal de rest zijn, als men Q door 11 deelt?

20. Van een oneindig voortloopende, afd. meetk. reeks is de eerste term 7. Als men tusschen 2 opeenvolgende termen 2 nieuwe interpoleert, is de limiet van de som der nieuwe reeks 14. Wat is de limiet van de som der oorspronkelijke reeks?

21. Op hoeveel nullen eindigt het quotient, dat men verkrijgt, als men 100! deelt door de som der getallen 1 tot en met 100?

22. Bepaal de meetkundig, de rekenkundig en de harmonisch middelevenredige der getallen 25 en 36. Rechtstreeks uit de gedurige evenredigheden afleiden!

23. Van twee getallen is de betrekkingswijzer {1, 1, 1, 12} en hun product 4800. Bepaal die getallen.

24. De eerste term eener rekenkundige reeks is 7 en haar som 2620. Interpoleert men 4 termen tusschen elke 2 opeenvolgende, dan is de som der nieuwe reeks 12838. Bepaal de oorspronkelijke reeks.

25. Het K.G.V. van twee getallen, 't eene even en 't andere oneven, is 1092. Het K.G.V. van hun som en hun verschil is 1235. Welke zijn die getallen?

Aanwijzing: Stel de getallen $x \times G$ en $y \times G$, enz.

26. Van een evenredigheid is de som van de termen der eerste reden 11, de som van alle termen 55, de derde term 12 en het product der buitenste termen 96.

Bepaal die evenredigheid.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

27. Bepaal lim. $S_n$ voor de reeks:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{2}{5^5} + \frac{3}{5^6} + \frac{1}{5^7} + \frac{2}{5^8} + \frac{3}{5^9} + \text{----} \qquad n=\infty$$

28. Deelt men twee getallen door hun G.G.D., dan zijn zoowel de som als het verschil onderling ondeelbaar met het product dier quotienten. Bewijs dit.

29. *Gegeven:* 7 p — 13 q is deelbaar door 91.

*Te bewijzen:* p is een 13-voud, q is een 7-voud.

30. *Gegeven:* a : b = c : d, ac = 32, bd = 72 en a : d = 1 : 3. Bepaal de termen.

31. Tusschen a en b twee getallen te interpoleeren, zoodat een rekenkundige reeks ontstaat.

32. De som van een breuk en haar omgekeerde is grooter dan twee. Bewijs dit.

33. *Gegeven:* a : b = c : d.

*Vul in:* $3a : \frac{b}{2} = \sqrt{c} : \text{----}$

34. $^7/_3 + {}^7/_4 = {}^7/_3 \times {}^7/_4$. Onder welke voorwaarde geldt: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

35. Onder den G.G.D. van eenige breuken verstaat men de grootste breuk, die op alle gegeven breuken een geheel aantal malen begrepen is. Geef een overeenkomstige definitie van het K.G.V. van eenige breuken. Bepaal nu den G.G.D. en het K.G.V. van $^7/_9$ en $^5/_7$.

36. *Gegeven:* a : b = c : d.

*Te bewijzen:* $(p\sqrt{a} - q\sqrt{b}) : (p\sqrt{c} - q\sqrt{d}) = \sqrt[4]{ab} : \sqrt[4]{cd}$.

37. Als a en b ond. ond. zijn, dan zijn ook ond. ond.: a en a ± b, b en a ± b, terwijl de G.G.D. van a+b en a—b òf 1 òf 2 is. Bewijs dit.

*Aanwijzing:* Maak gebruik van eig. **G 1.**

38. Noemt men het product van 5 op elkaar volgende getallen (mits zich daaronder niet 1 bevindt!) P, dan zijn P+2, P+3, P+4 en P+5 alle deelbaar!

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bewijs dit. Zoek nu 6 op elkaar volgende getallen, die alle deelbaar zijn.

39. Wat is grooter: $^{13}/_{12}$ of $\frac{13 + n}{12 + n}$? Hoe groot moet men n nemen om de breuk minder dan $^{1}/_{1000}$ van 1 te doen verschillen?

40. Laat in een figuur zien: $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$.

41. Van 2 getallen a en b is de G.G.D. = G en het K.G.V. = V. Schrijf a, b, G en V in den vorm eener evenredigheid.

42. Bereken x uit: $\sqrt{x} : 4 = \sqrt{(x+16)} : 6^2/_3$. Geen hoofdeigenschap gebruiken.

43. De breuken $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ zijn beide onvereenvoudigbaar. Wanneer zal de som van die breuken een geheel getal zijn?

44. *Gegeven:* a en b zijn beide een p-voud. Wat weet ge van a+b, a—b, a×b en a : b?

45. Onder welke voorwaarde geldt: a : b = c : d en (a+d) : (b+c) = 1 : 1 ?

46. Van een meetkundige reeks van 9 termen is het verschil van den 9den en den 1sten term 59040. De som van den 5-den en den 1sten term is 738.
Bepaal a en r. *Ex. Mulo.*

47a. Van meer dan 2 getallen is het product gelijk aan het product van hun G.G.D. en K.G.V., als een ondeelb. factor nooit in meer dan één dier getallen voorkomt. Bewijs.

b. Van meer dan 2 getallen is het product grooter dan het product van hun G.G.D. en K.G.V., zoodra een ondeelbare factor in meer dan één dier getallen voorkomt. Bewijs.

c. Leid hieruit af: Van meer dan 2 getallen is het product dan en dan alleen gelijk aan het product van den G.G.D. en het K.G.V., als die getallen twee aan twee onderling ondeelbaar zijn.

48. Elk viervoud is het verschil van twee kwadraten. Bewijs.
*Aanwijzing:* Stel het viervoud 4 ab en beschouw dit als het verschil van $(a+b)^2$ en $(a-b)^2$, enz.

49. *Gegeven:* $\overline{|fedcba|}$ = een 13-voud.
*Te bewijzen:* $\overline{|cbafed|}$ = een 13-voud.



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

50. Van een evenredigheid is de som der voorgaande termen 36 en die der volgende 48. Het product van de termen der 2de reden is 588. Welke is die evenredigheid? *Ex. Mulo.*

51. De som der cijfers van een getal bedraagt 31. Het getal, gevormd door de laatste drie cijfers, is 483. Wat is de rest bij deeling door 24?

52. Van een rekenkundige reeks van 13 termen is de som 585. Hoeveel termen moet men tusschen elke twee opeenvolgende termen van deze reeks interpoleeren om een rekenkundige reeks te krijgen, waarvan de som 1665 is?

*Ex. Mulo.*

## Eindexamens Kweekscholen 1925.

1. $(20a+5b+35c) : 5 =$ ____ of ____ of ____.

Zet het antwoord er achter en breng de eigenschap in woorden. Hoe luidt de overeenkomstige eigenschap voor een product? Pas deze eigenschap toe op $20a \times 5b \times 35c : 5 =$ ____ of ____ of ____.

Bewijs nu de eerste van deze beide eigenschappen.

2. Een opgaande deeling heeft tot quotient 278. Men vermenigvuldigt den deeler met 3 en vermindert het deeltal met 2750. Nu is het quotient 56. Welke deeling is dat?

3. Van een meetkundige reeks van 7 termen is de laatste term gelijk aan de tweede macht van den middelsten, terwijl de som der laatste 4 termen 27maal op de som der eerste 4 termen begrepen is. Bepaal de som van alle termen van deze reeks.

4. Bereken in 4 decimalen nauwkeurig de waarde van

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}.$$

5. Van een evenredigheid is de som van de termen der eerste reden 40, de som van de voorgaande termen 33 en de som van alle termen 88. Bepaal die evenredigheid.

6. Van een evenredigheid is de som der voorgaande termen 64, de som der volgende termen 72 en de som der eerste drie termen 109. Welke evenredigheid is bedoeld?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

7. De termen der 1e reden van een meetk. evenredigheid staan tot elkaar als 3 : 4. De som der uiterste termen is 32 en die der middelste 34½. Welke is die evenredigheid?

8. Van een evenredigheid is de som der voorgaande termen ⅓ van de som der volgende termen. De eerste term is 6 grooter dan de derde term, de volgende termen verhouden zich als 0,0642857 tot 0,0385714.
Welke is die evenredigheid?

9. Van een evenredigheid is de som der termen 292, de som van de termen der eerste reden is 73 en het product der voorgaande termen is 1875. Welke is die evenredigheid?

10. Van welke evenredigheid is het product der uiterste termen 995328, de som der volgende termen 2320 en de 2e term = $1^{11}/_{16}$ maal den derden term?

11. Van een evenredigheid is de som van de termen der eerste reden 19, de som der uiterste termen 79, de som der middelste termen 35. Bepaal die evenredigheid.

12. Van een evenredigheid hebben de voorgaande termen als betrekkingswijzer {4, 1, 2, 2}. De eerste term is 208 meer dan de derde, terwijl de som van alle termen 960 bedraagt. Welke is die evenredigheid?

13a. Bepaal de rekenkundig middelevenredige tusschen de getallen a en b. Eveneens de meetkundig middelevenredige en de harmonisch middelevenredige tusschen dezelfde getallen.

b. Bewijs, dat de M.M.E. kleiner is dan de R.M.E. en grooter dan de H.M.E.

Bewijs het voorgaande ook door een figuur.

14. Gegeven: $a : b = c : d$.
Leid hieruit af: $(4\sqrt{a} - 3\sqrt{b}) : (4\sqrt{c} - 3\sqrt{d}) = \frac{1}{3}\sqrt{a} : \frac{1}{3}\sqrt{c}$.

15. Herleid $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) : (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{c}) : (\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{c})$
tot de gedaante $a : b = c : d$.

16. Gegeven: $a : p = b : q = c : r$.
Te bewijzen: $(a^2 - ab) : (b^2 - c^2) = (p^2 - pq) : (q^2 - r^2)$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

17. Gegeven: $a : b = c : d = e : f = g : h = i : k$.

Te bewijzen: $\sqrt[3]{ma^2c} : \sqrt[3]{mb^2d} = \sqrt[4]{peg^2i} : \sqrt[4]{pfh^2k}$.

18. Bewijs, dat uit $a : b = c : d$ volgt:

$(a^2b - 3ac^2) : (b^3 - 3ad^2) = (a^2 + 5c^2) : (b^2 + 5d^2)$

19. Wanneer $\frac{3a4}{43a} = \frac{3}{4}$, bepaal dan met toepassing van eigenschappen der evenredigheden, welk zelfde cijfer in beide eerste getallen is weggelaten. De hoofdeigenschap mag niet worden gebruikt. De toegepaste eigenschappen kort aangeven.

20. Los x op uit de evenredigheid:

$(x + 6\frac{1}{2})^2 : (x - 6\frac{1}{2})^2 = 1{,}7424 : \frac{121}{900}$.

21. Als gegeven is $a : b = c : d$, bewijs dan dat $(a+b) : (c+d) = a : c = b : d$. Als nu $a : b > c : d$ was, was dan ook $(a+b) : (c+d) > a : c$ en $(a+b) : (c+d) > b : d$?

22. Bepaal x in:

$$\frac{112}{x+1} : \frac{343}{x+2} = (x+1) : (x+2)$$

Noem de toegepaste eigenschappen volledig op.

Geen algebraïsche oplossing door middel van een vergelijking.

23. Men vermeerdert het tweevoud, het drievoud, het viervoud en het zesvoud van een getal respectievelijk met 7, 6, 8 en 4. De vier uitkomsten vormen in die volgorde een evenredigheid. Bereken dat getal:

a. met behulp van de hoofdeigenschap der evenredigheden,

b. zonder van de hoofdeigenschap der evenr. gebruik te maken.

24. Als men den teller en noemer eener onverkleinbare breuk vermindert met $\frac{5}{6}$ van den noemer, verkrijgt men een breuk, die $2\frac{1}{7}$ maal zoo groot is als de oorspronkelijke. Welke is die breuk?

25. De breuk $\frac{a}{b}$ is een echte breuk.

Bewijs, dat $\frac{a+m}{b+m}$ grooter is dan $\frac{a}{b}$ en tot 1 nadert, als m nadert tot oneindig.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

26. Bereken:

$$\frac{\left(\frac{3\frac{1}{8}}{16\frac{1}{4}} + \frac{2\frac{13}{16}}{8\frac{1}{8}}\right) \times 1385{,}25 : 9{,}235}{0{,}153846 : 0{,}285714}$$

27. $3{,}5^3 + (1\,{}^1/_6 : {}^{70}/_{303} + 1{,}9 + 1{,}428571) \times 3{,}5 - \\ - \{(2\,{}^1/_6 + 3\tfrac{1}{2} - {}^6/_{35}) \times 12{,}25 + 3{,}883\} =$

28. $\dfrac{\dfrac{34^2 - 16^2}{63^2 - 37^2} \times \dfrac{10^3(10^4 - 1)}{10^3 + 10}}{1\frac{19}{26}} - \dfrac{82{,}857142}{1{,}428571} =$

29. Gegeven is, dat $\frac{a}{b}$ onvereenvoudigbaar is. Toon aan, dat $\frac{a+b}{ab}$ dan ook onvereenvoudigbaar is. Is $\frac{b-a}{b+a}$ te vereenvoudigen?

30. Als de som van twee onvereenvoudigbare breuken een geheel getal is, zijn die breuken gelijknamig. Bewijs dat.

31. Als men bij den teller en den noemer eener echte breuk eenzelfde getal optelt, dan wordt de waarde der breuk grooter. Bewijs.

32. Als a een geheel getal is, is $a^5 - a$ deelbaar door 30. Bewijs dat. Waardoor is het deelbaar, als a oneven is?

33. Bewijs, dat de 5e macht van een getal steeds op hetzelfde cijfer eindigt als het getal zelf.

34. Het gedurig product van 4 op elkaar volgende even getallen is deelbaar door 384. Bewijs dit.

35. Als a een heel getal is $> 1$, dan is $a^4(a^4 - 1)^3$ deelbaar door 54000. Bewijs dit.

36. Te bewijzen: Als men de derde macht van een even getal vermindert met 4 maal dat getal, is de rest deelbaar door 48

37. Een getal van drie cijfers wordt van 999 afgetrokken. Achter het verschil plaatst men het oorspronkelijke getal, waardoor een getal van zes cijfers ontstaat, dat door 621 deelbaar is. Bepaal het aantal en de som van alle waarden, die het oospronkelijke getal kan hebben.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

38. Een getal van 6 cijfers heeft op de plaats der honderdduizendtallen een 5. Men plaatst dit cijfer rechts van de andere cijfers. Het getal, dat nu ontstaat is 153 □ 47 minder dan het oorspronkelijke getal. Bepaal eerst het onbekende cijfer en daarna het oorspronkelijke getal.

39. Bewijs, dat $(n^3—n) \times (n^2—4)$ door 120 deelbaar is, als n een geheel getal is.

40. Bepaal de rest, als men $3^{40}$ door 7 deelt.

41. Een getal van 3 cijfers wordt van 999 afgetrokken, zoodat een rest van 3 cijfers overblijft. Plaatst men die rest achter het oorspronkelijke getal, dan ontstaat een getal, dat deelbaar is door 1161. Wat weet ge van het oorspronkelijke getal?

42. Bewijs, dat $a^3—a$ steeds door 6 deelbaar is. Waardoor is die vorm deelbaar, als a een oneven getal is?

43. Als a en b onderling ondeelb. zijn, wat kan dan de G.G.D. zijn van $a+b$ en $a^2—ab+b^2$?

44. Van twee getallen is de betrekkingswijzer {7, 2, 4} en het product 15075. Welke zijn die getallen?

45. Gegeven: De G.G.D. van A en B is gelijk aan 15.
Wat kan de G.G.D. zijn van $A^2$ en $B^3$?

46. Van 2 getallen is de betrekkingswijzer {1, 2, 1, 3} en de G.G.D. 25. Bereken deze getallen.

47. Van 2 getallen is de som 90 en het K.G.V. 200. Bepaal die getallen.

48. De G.G.D. van 2 getallen is p. Wat is de G.G.D. van de som en het K.G.V. der getallen?

49. Om den G.G.D. van de getallen p, q en s te vinden, gaat men als volgt te werk: men deelt het kleinste dezer getallen, bijv. s, op p en q, waarbij men de resten a en b vindt. Bewijs, dat de G.G.D. van a, b en s ook de G.G.D. van p, q en s is.

50. De G.G.D. van twee getallen is 84 en hun K.G.V. 83160. Welke zijn deze getallen, als de G.G.D. 37 maal in hun verschil is begrepen?

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

51. Indien de G.G.D. van a en b 17 is, wat kan de G.G.D. zijn van 30×a en 42×b?

Volledig beredeneeren, met duidelijke onderscheiding der verschillende gevallen.

52. Bewijs, dat de G.G.D. van 2 getallen niet verandert, als men een dier getallen deelt door een getal, dat ond. ond. is met het andere getal. Verandert het K.G.V. ook?

53. Een getal van 2 cijfers wordt van 99 afgetrokken en het verschil rechts van het eerste getal geplaatst, zoodat een getal van 4 cijfers ontstaat, dat deelbaar blijkt te zijn door 209. Wat weet ge van het oorspronkelijke getal?

1926.

54. Van een meetkundige reeks van 9 termen is de middelste term 768 en de tweede 12. Men interpoleert één term tusschen elke twee termen dier reeks. Bepaal de som van de termen der nieuwe reeks.

55. Wanneer a een *oneven* getal is, dan is $a^3$—a deelbaar door 24. Bewijs dit.

56. Als 't getal A geen deeler is van 't getal B en we deelen A op B, dan blijft er een zekere rest R over. Bewijs, dat A en B dezelfde — niet meer en niet minder — gemeene deelers hebben als A en R.

57. Er zijn drie getallen a, b en c. Deelt men het kleinste (c) op a, dan is de rest p; deelt men c op b, dan is de rest q. Bewijs, dat de G.G.D. van a, b en c dezelfde is als die van p, q en c.

58. Als van een getal het cijfer der eenheden plus 10 maal de som der overige cijfers deelbaar is door 15, dan is het geheele getal deelbaar door 15. Bewijs dat, met behulp van (abcd).

Tracht ook een bewijs te geven door gebruik te maken van de kenmerken voor 3 en voor 5.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bk 14e som 4

## INHOUD.


Voorbericht.
Errata.
Inleiding.
De telling. Talstelsels. ---------- 7
De optelling. ---------- 11
De aftrekking. ---------- 14
De vermenigvuldiging. ---------- 18
De deeling. ---------- 23
De machtsverheffing. ---------- 31
De worteltrekking. ---------- 35
Bijzondere herleidingen. ---------- 38
Algemeene Opmerkingen bij het voorgaande.
Het getal Nul. 42
Gebroken Getallen I. ---------- 45
Verhoudingen. ---------- 51
Evenredigheden. ---------- 53
Reeksen. ---------- 59
Vierkantsworteltrekking. Onmeetbare Getallen. ------ 65
Deelbaarheid. ---------- 71
Kenmerken van Deelbaarheid. ---------- 90
Gebroken Getallen II. ---------- 108
Onze maten, gewichten, munten. ---------- 115
Uit de Geschiedenis der Rekenkunde. ---------- 120
Vraagstukken. ---------- 125


1. Als x met 3 een 35-voud is +18 is, hoeveelste dan de rest, als we x met 3 door 35 delen?

2. Schrijft men rechts 7 tot getal van 4 cijfers, noemt dat getal, dan is 't nieuwe getal dan 8 cijfers en 137-voud 1001 = 137 vd

3. Een getal van 2 cijfers is een 11-vd + 7. Verwisselt men de cijfers, dan is 't nieuwe getal een 11-vd + 8.?

4. Als 't getal is 6 meer dan 37-vd is, dan is ook het getal 5 en 6 meer dan 37-vd. (999 = 27 vd)

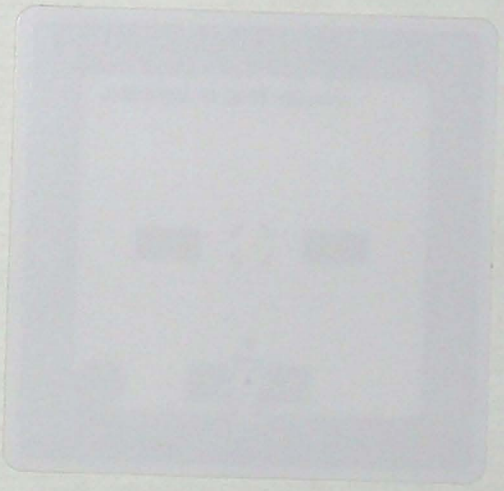
PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Pro 198/99

ZAILANI
TGL: 12-8-98



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

