OVER DE ACHT SNIJPUNTEN VAN DRIE KWADRATISCHE OPPERVLAKKEN.

W. A. MULLER.

104 hal.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

OVER DE ACHT SNIJPUNTEN VAN DRIE KWADRATISCHE OPPERVLAKKEN.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

J 5177.

V 253.

OVER DE ACHT SNIJPUNTEN VAN DRIE KWADRATISCHE OPPERVLAKKEN.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS, DR. P. C. T. VAN DER HOEVEN, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP DONDERDAG DEN 10DEN JULI 1919 DES NAMIDDAGS TE 3 UUR

DOOR

WILLEM ANNE MULLER,

GEBOREN TE 'S-GRAVENHAGE.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.

DRUKKERIJ MOUTON & Co. — DEN HAAG 1919.

BAT. GENOOTSCHAP VAN K.E.N.W.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.
Tanggal : 28-6-2010
Nomor Induk : 311 //PN-Mus-/10
BIB - ID : 0010-0823018401
ITEM - ID : 0000379765q
Asal : Museum Pusat

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

AAN DE NAGEDACHTENIS VAN MIJN VADER.

AAN MIJN MOEDER.

AAN MIJN OOM.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bij de voltooiing van dit proefschrift betuig ik mijn dank aan allen, die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen, in het bizonder aan U, Hoogleeraren in de faculteit der Wis- en Natuurkunde te Leiden, van wie ik onderwijs mocht ontvangen. Ook de heldere colleges van wijlen Prof. Zeeman gedenk ik met groote dankbaarheid.

Bovenal aan U, Hooggeleerde Van der Woude, Hooggeachte Promotor, ben ik veel dank verschuldigd voor de welwillendheid waarmede Gij de verdere leiding mijner studie op U genomen hebt. Uw voortdurende steun en belangstelling, bij de bewerking van dit proefschrift ondervonden, hebben mij den weg naar de promotie op de aangenaamste wijze geëffend. Aanvaard daarvoor mijn welgemeenden dank en de verzekering mijner blijvende erkentelijkheid.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK I.

Geassocieerde punten.

§ 1. Dat twee vlakke algebraïsche krommen van gelijken graad elkaar in meer punten kunnen snijden dan noodig is om elk der krommen afzonderlijk te bepalen, staat bekend als de paradox van Cramer. Het eenvoudigst voorbeeld wordt geleverd door twee krommen van den derden graad, die negen snijpunten hebben, waaruit schijnt te volgen dat een kubische kromme door negen punten niet bepaald is. Evenzoo leveren twee vlakke krommen van den vierden graad zestien snijpunten, terwijl toch in het algemeen reeds veertien punten voldoende zijn een kromme van den vierden graad te bepalen.

Het ruimte-analogon van de paradox van Cramer wordt gevonden bij de snijding van drie algebraïsche oppervlakken. Terwijl een kubisch oppervlak bepaald is door 19 willekeurige punten, hebben drie zulke oppervlakken 27 punten gemeen. Drie oppervlakken van den vierden graad hebben 64 snijpunten, doch 34 punten kunnen reeds voldoende zijn om een bikwadratisch oppervlak te bepalen. In het algemeen is een oppervlak van den n^{den} graad bepaald door

$$\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1.2.3} - 1$$

punten. Drie zulke oppervlakken kunnen n^3 snijpunten hebben. Als dus

$$n^3 > \frac{(n+1)\ (n+2)\ n+3)}{1.2.3} - 1,$$

dan zal men een voorbeeld hebben van drie algebraïsche oppervlakken die meer punten gemeen hebben dan noodig is om een van hen afzonderlijk geheel te bepalen. Aan de ongelijkheid kan worden voldaan door

$$n > 2,$$

waaruit blijkt dat het ruimte-analogon van de paradox van Cramer voor kwadratische oppervlakken niet bestaat. Een onderlinge afhankelijkheid echter der snijpunten van drie algebraïsche oppervlakken, welke voor $n > 2$ als een noodzakelijkheid verwacht worden moet, bestaat toch ook in het geval dat $n = 2$ is, dus als wij de snijding van drie kwadratische oppervlakken beschouwen.

Daar een kwadratisch oppervlak in het algemeen door negen punten bepaald is, zullen er door acht gegeven punten oneindig veel kwadratische oppervlakken gebracht kunnen worden en het kan hierdoor dan ook geen verwondering wekken dat drie kwadratische oppervlakken elkaar in acht punten kunnen snijden. Wat daardoor echter nog niet onmiddellijk verwacht kan worden, is dat deze acht snijpunten niet van elkaar onafhankelijk zijn. Laten we om dit te bewijzen [1]) drie niet tot eenzelfden

---

[1]) Plücker, Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés (Gergonne's Annales 19 (1828) p. 129 of Plücker, Gesammelte Werke 1 p. 83).

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

bundel behoorende kwadratische oppervlakken beschouwen met vergelijkingen:

$$O_1 = 0, \qquad O_2 = 0 \qquad \text{en } O_3 = 0$$

dan stelt de vergelijking:

$$\varkappa O_1 + \lambda O_2 + \mu O_3 = 0$$

een net van kwadratische oppervlakken voor, welke alle de acht snijpunten der drie beschouwde oppervlakken bevatten. Door nog *twee* gegeven punten is een oppervlak van het net bepaald, want zij zullen aanleiding geven tot twee voorwaardevergelijkingen, waaruit de verhoudingen der drie grootheden $\varkappa$, λ en μ kunnen worden berekend. Daar echter een kwadratisch oppervlak reeds door negen onafhankelijke punten bepaald is, zullen de acht snijpunten niet onafhankelijk van elkaar kunnen zijn. Zij heeten geassocieerd. Zijn zeven der snijpunten bekend, dan is daardoor in het algemeen het achtste volkomen bepaald. [1]) Want als

$$O_1 = 0, \qquad O_2 = 0 \qquad \text{en } O_3 = 0 \,.$$

de vergelijkingen zijn van drie, niet tot eenzelfden bundel behoorende kwadratische oppervlakken, welke door *zeven* gegeven punten gaan, dan stelt wederom de vergelijking

$$\varkappa O_1 + \lambda O_2 + \mu O_3 = 0$$

een net van kwadratische oppervlakken voor, welke alle behalve de gegeven zeven punten ook nog het achtste snijpunt der drie beschouwde oppervlakken bevatten. Dit wordt ook reeds vermeld door Lamé,

[1]) Magnus, Aufgaben und Lehrsätze (1837) p. 287.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

bij wien voor het eerst het begrip van het net voorkomt [1]).

§ 2. Het oudste voorbeeld [2]) van geassocieerde punten leveren de hoekpunten van een zesvlak, waarvan telkens vier in één plat vlak liggen (zoogenaamde octogone hexaëder). Om aan te toonen dat deze acht punten geassocieerd zijn, behoeven wij slechts drie niet tot eenzelfden bundel behoorende kwadratische oppervlakken aan te wijzen, welke de acht punten bevatten. En daarvoor kunnen wij de drie paar overstaande zijvlakken kiezen. Is bijvoorbeeld het zesvlak een rechthoekig parallelopipedum met ribben 2a, 2b en 2c en kiezen wij een coördinatenstelsel met oorsprong in het middelpunt van dit zesvlak, dan zijn de vergelijkingen der vlakkenparen:

$$x^2 - a^2 = 0, \quad y^2 - b^2 = 0 \quad \text{en} \quad z^2 - c^2 = 0.$$

Deze drie ontaarde kwadratische oppervlakken behooren niet tot één bundel, want men kan den factor λ niet zoo bepalen dat

$$x^2 - a^2 + \lambda (y^2 - b^2)$$

identiek wordt met

$$z^2 - c^2.$$

Steiner [3]) heeft naar aanleiding van dit voorbeeld (en alleen voor dit bizondere geval) de duale stelling

---

[1]) Lamé, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie (1818) p. 27 en 38.

[2]) Ungenannte (wellicht de redacteur A. L. Crelle), Bemerkung über ein Polyeder (Crelle's Journal 3 (1828) p. 199) en Gergonne, noot bij de verhandeling van Plücker in Gergonne's Annales 19 (1828) p. 133.

[3]) J. Steiner, Anmerkungen zu etc. (Crelle's Journal 3 (1828) p. 205).

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

bewezen: „Alle kwadratische oppervlakken welke raken aan zeven zijvlakken van een achtvlak met zes hoekpunten (hexagone octaëder) raken ook aan het achtste zijvlak."

§ 3. Ludwig Otto Hesse is de eerste geweest, die de onderlinge afhankelijkheid der acht geassocieerde punten nader onderzocht heeft en deze tot uiting heeft gebracht in meetkundige eigenschappen. In de jaren 1838 en 1839 schreef hij zijne verhandeling „De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis" [1]) waarop hij in 1840 promoveerde en welke de stellingen bevat die in dit boekje (hoofdstuk II en III) Eerste en Tweede Stelling van Hesse genoemd zijn. Drie jaar later publiceerde Hesse nieuwe zuiver meetkundige beschouwingen over hetzelfde probleem. Nu bewijst hij zijne Tweede Stelling zonder de Eerste te gebruiken en leidt terloops een Derde Stelling af (zie hoofdstuk V). In zijn later (1855) verschenen verhandeling over de dubbelraaklijnen eener vlakke kromme van den vierden graad treden wederom de geassocieerde punten op (zie hoofdstuk VII) door zijn gebruik van de eigenschap dat de kernkromme van een net van kwadratische oppervlakken op een plat vlak kan worden afgebeeld als een vierdegraadskromme.

Een meer volkomen vertolking van de in Hesse's Tweede Stelling vervatte eigenschap der geassocieerde

---

[1]) Verschenen als „Hesse, De curvis et superficiebus secundi ordinis" in Crelle's Journal 20 (1840) p. 285 = Hesse's Gesammelte Werke. p. 21.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

punten verscheen intusschen (1850), doch onafhankelijk van deze, in Engeland van de hand van Weddle (zie hoofdstuk IV). Het schijnt dat de Stelling van Weddle nimmer aan Hesse bekend is geweest. Ten minste: in 1871 nog, dus enkele jaren voor zijn dood (1874), herhaalde Hesse zijn Tweede Stelling met weliswaar eenigszins gewijzigde zinswendingen, doch zonder wezenlijke verandering. Eerst tusschen 1880 en 1890, in een periode, dat verschillende wiskundigen zich met het probleem der geassocieerde punten bezig hielden, is Weddle's stelling ook op het vasteland van Europa bekend geworden. Wellicht heeft ook Zeuthen haar zelf gevonden als uitbreiding van de Tweede Stelling van Hesse.

Nadat Reye, von Staudt, Sturm en Schroeter de snijding van drie kwadratische oppervlakken met de methoden der projectieve meetkunde bestudeerd hadden en zij daarbij geen nieuwe eigenschappen aan den dag hadden gebracht, heeft bij alle wiskundigen, die zich met het probleem bezig hielden, de lineaire constructie van het achtste geassocieerde punt bij zeven gegeven punten steeds de meeste aandacht gevraagd. De oudste constructies zijn van Hesse afkomstig doch later op verschillende manierèn gewijzigd en verbeterd (zie hoofdstuk VI).

§ 4. Bij deze constructies doet zich de vraag voor in welke gevallen het achtste geassocieerde punt niet bepaald is door zeven gegeven punten. Zonder nog eenige kennis te bezitten van de verdere eigenschappen der geassocieerde punten kunnen we hierover reeds eenig uitsluitsel verkrijgen door op te merken, dat

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

bij de snijding van drie kwadratische oppervlakken, die niet tot eenzelfden bundel behooren, zich de volgende bizondere gevallen kunnen voordoen.

a. Hebben de drie oppervlakken een kubische kromme $\varrho^{(3)}$ gemeen dan kunnen zij verder geen enkel punt meer gemeen hebben, want een uit dat punt getrokken bisecante der $\varrho^{(3)}$ zou op elk der drie oppervlakken gelegen moeten zijn, welke dus tot eenzelfden bundel zouden behooren. Hieruit volgt dat als zeven der punten op een $\varrho^{(3)}$ liggen, voor het achtste elk der punten dier $\varrho^{(3)}$ gekozen kan worden. Hebben de drie oppervlakken een kegelsnede en haar snijdende rechte (dus een ontaarde kubische kromme) gemeen, dan zullen zij om dezelfde reden geen andere snijpunten meer bezitten. Dit blijft ook geldig in het geval, dat de kegelsnede in twee rechten uiteenvalt; de drie oppervlakken hebben dan drie rechten gemeen, waarvan twee door de derde gesneden worden.

b. Hebben de drie oppervlakken geen (eventueel ontaarde) kubische kromme en behalve de hierna te noemen lijnen of punten slechts een eindig aantal punten gemeen, dan kunnen zich nog de volgende bizondere gevallen voordoen.

1°. De drie oppervlakken hebben een kegelsnede $k^{(2)}$ gemeen. Dan hebben zij nog twee andere snijpunten, want twee der oppervlakken snijden het derde behalve volgens de gemeenschappelijke $k^{(2)}$ nog volgens twee andere kegelsneden en deze laatste zullen elkaar in twee punten snijden. (De mogelijkheid dat deze laatste kegelsneden zouden ontaarden

PERPUSTAKAAN NASIONAL

en daarbij een rechte gemeen hebben, wordt uitgesloten door de onderstelling dat de drie oppervlakken geen kubische kromme gemeen hebben.)

2e. De drie oppervlakken hebben twee elkaar kruisende rechten gemeen. Zij kunnen nu verder geen snijpunt meer bezitten, want daaruit zou nog een rechte getrokken kunnen worden welke op elk der oppervlakken gelegen is. (Zie het laatste geval onder a.)

3e. De drie oppervlakken hebben een rechte gemeen. Nu snijden zij elkaar bovendien nog in vier punten. Want twee der oppervlakken snijden het derde behalve volgens die rechte ook nog volgens twee kubische ruimtekrommen en deze hebben vier punten gemeen. Hieruit volgt: als drie van acht geassocieerde punten op één rechte liggen, treedt die geheele rechte in de plaats van het achtste punt.

4e. De drie oppervlakken hebben vier in één plat vlak gelegen punten gemeen. Nu hebben ze nog vier punten gemeen welke eveneens in één plat vlak liggen. Want tot het net, dat ze bepalen, moet o.a. behooren het kwadratische oppervlak dat ontaard is in het eerste vlak en in een vlak door drie andere punten gebracht. Het achtste punt kan niet in het eerste vlak liggen, want dan zouden de drie oppervlakken een kegelsnede en dus volgens 1e nog slechts twee punten gemeen hebben. Hieruit volgt dat het achtste punt in het andere vlak gelegen is.

5e. De drie kwadratische oppervlakken hebben zeven punten gemeen, waarvan één (7) op de doorsnede gelegen is van de twee vlakken door telkens

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

drie der andere punten gebracht: de vlakken (1 2 3) en (4 5 6). Nu zal ingevolge het voorgaande ook het achtste punt op die doorsnede gelegen zijn, doch in verband met het onder 1e bewezene, met het andere punt (7) op die doorsnede moeten samenvallen.

Wij kunnen op meer algemeene wijze de onderlinge afhankelijkheid van twee der acht geassocieerde punten nagaan, als de zes overige een vasten stand behouden (Geiser, Sturm). Daarbij worden dan de hierboven verkregen resultaten wederom bereikt (zie hoofdstuk V).

§ 5. Naast de onderzoekingen der Duitsche en Engelsche wiskundigen nemen die van den Franschen meetkundige P. Serret[1]) een geheel afzonderlijke plaats in. Hij stelde een zeer eenvoudige analytische voorwaarde op voor het geassocieerd zijn van acht punten. Serret noemt ook geassocieerd een negental van punten, welke gemeen zijn aan twee kwadratische oppervlakken, en een tiental van punten die op eenzelfde kwadratisch oppervlak liggen. Liggen de tien punten, bepaald door de vergelijkingen:

$$p_1 \equiv x_1 u + y_1 v + z_1 w + q_1 r = 0,$$

. . . . . .

$$p_{10} \equiv x_{10} u + y_{10} v + z_{10} w + q_{10} r = 0,$$

op een kwadratisch oppervlak met vergelijking:

$$0 \equiv a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + \ldots\ldots + a_{34} z q = 0,$$

dan kan men de tien constanten $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_{10}$ zoodanig bepalen, dat de identiteit bestaat:

$$\sum_1^{10} \lambda_i p_i^2 \equiv 0.$$

---

[1]) P. Serret, Géométrie de direction (1869).

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Omgekeerd volgt uit deze identiteit, dat de tien punten op éénzelfde kwadratisch oppervlak gelegen zijn. Want zij levert de tien vergelijkingen.

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_{10} x_{10}^2 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1 z_1 q_1 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_{10} z_{10} q_{10} = 0,$$

welke achtereenvolgens met a_{11}, a_{22}, ... a_{34} vermenigvuldigd en opgeteld de vergelijking:

$$\lambda_1 (a_{11} x_1^2 + \ldots) + \lambda_2 (a_{11} x_2^2 + \ldots) + \ldots + \lambda_{10} (a_{11} x_{10}^2 + \ldots) = 0,$$

dus: $\lambda_1 O(1) + \lambda_2 O(2) + \ldots + \lambda_{10} O(10) = 0$

leveren. Hieruit blijkt dat ook $O(10) = 0$ als:

$$O(1) = O(2) = \ldots\ldots\ldots = O(9) = 0$$

dus de tien punten liggen op hetzelfde kwadratische oppervlak.

Op dezelfde wijze blijkt: als

$$\sum_1^9 \lambda_i p_i^2 \equiv 0$$

dan zal elk kwadratisch oppervlak gebracht door acht der punten ook het negende bevatten (dus de negen punten liggen dan op eenzelfde bikwadratische ruimtekromme der eerste soort). Want nu volgt uit:

$$\lambda_1 O(1) + \lambda_2 O(2) + \ldots\ldots + \lambda_9 O(9) = 0$$

dat $O(9) = 0$

als $O(1) = O(2) = \ldots\ldots = O(8) = 0$

Eindelijk zal de identiteit

$$\sum_1^8 \lambda_i p_i^2 \equiv 0$$

de voorwaarde voor het geassocieerd zijn van acht punten zijn. Immers nu volgt uit

$$\lambda_1 O(1) + \lambda_2 O(2) + \ldots\ldots + \lambda_8 O(8) = 0$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.

dat $$O(8) = 0$$

als $O(1) = O(2) = \ldots\ldots\ldots = O(7) = 0$

De identiteit

$$\sum_1^8 \lambda_i \, p_i^2 \equiv 0$$

is blijkens zijn nagelaten papieren [1]) ook aan Hesse bekend geweest. Zij laat tevens zien, dat door zeven punten het achtste bepaald is. Zijn namelijk de punten 1, 2, ... 7 gegeven, dan kan men uit de tien vergelijkingen, welke uit haar voortvloeien de zeven verhoudingen der coefficiënten $\lambda_1 \ldots \lambda_8$ en de drie verhoudingen der coördinaten $x_8 \; y_8 \; z_8 \; q_8$ oplossen. Dat hierdoor één enkel punt 8 verkregen wordt, volgt daaruit dat drie kwadratische oppervlakken in het algemeen niet meer dan acht punten gemeen kunnen hebben.

Hoe uit de identiteit op eenvoudige wijze een der stellingen van Hesse wordt verkregen zal in het volgende hoofdstuk blijken.

---

[1]) Über die linearen homogenen substitutionen etc., aus den hinterlassenen Papieren Otto Hesse's mitgeteilt von F. Caspary (Crelle's Journal 99 (1886) p. 110 = Hesse's Ges. Werke p. 663).

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK II.

Eerste Stelling van Hesse.

§ 6. De Eerste Stelling van Hesse luidt:

De hoekpunten van twee poolviervlakken van eenzelfde kwadratisch oppervlak, vormen een systeem van geassocieerde punten [1]).

En omgekeerd: Acht geassocieerde punten op willekeurige wijze in twee viertallen verdeeld, zijn de hoekpunten van twee poolviervlakken van een kwadratisch oppervlak.

Wij willen beginnen den door Hesse [2]) aangegeven weg naar zijne Eerste Stelling met geringe wijziging en aanvulling te volgen.

Om bij een kwadratisch oppervlak met vergelijking $O_1 = 0$ een poolviervlak te bepalen, nemen we een tweede kwadratisch oppervlak met vergelijking $O_2 = 0$ en beschouwen dan het viervlak, dat poolviervlak is van alle kwadratische oppervlakken van den bundel met vergelijking $O_1 + \lambda O_2 = 0$. Dit viervlak wordt gevormd door de toppen der vier kegels, welke in den bundel voorkomen. Zij namelijk

[1]) Hesse, De octo punctis etc. (Crelle's Journal 20 (1840) p. 297 = Hesse's Werke p. 36). Ook: Hesse, Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes 1e Aufl. p. 161, 3e Aufl. p. 197.

[2]) Hesse's Vorlesungen 3e Aufl. p. 181—198.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$O_1 \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}q^2 + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{34}zq = 0$

$O_2 \equiv b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + b_{44}q^2 + 2b_{12}xy + \ldots + 2b_{34}zq = 0,$

dan luidt de vergelijking van den bundel:

$B \equiv (a_{11} + \lambda b_{11})x^2 + \ldots\ldots + 2(a_{34} + \lambda b_{34})zq = 0$

De middelpunten van alle oppervlakken van den bundel worden bepaald door de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta O_1}{\delta x} + \lambda \dfrac{\delta O_2}{\delta x} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\delta O_1}{\delta q} + \lambda \dfrac{\delta O_2}{\delta q} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

welke lineair zijn in de coördinaten en bij elke bepaalde waarde van λ één oplossing van x, y, z, q geven. Het oppervlak is een kegel, als de Hessische determinant nul is:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{12} + \lambda b_{12} & a_{13} + \lambda b_{13} & a_{14} + \lambda b_{14} \\ a_{12} + \lambda b_{12} & a_{22} + \lambda b_{22} & a_{23} + \lambda b_{23} & a_{24} + \lambda b_{24} \\ a_{13} + \lambda b_{13} & a_{23} + \lambda b_{23} & a_{33} + \lambda b_{33} & a_{34} + \lambda b_{34} \\ a_{14} + \lambda b_{14} & a_{24} + \lambda b_{24} & a_{34} + \lambda b_{34} & a_{44} + \lambda b_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(II)}$$

Dit is een vergelijking van den vierden graad in λ, welke in het algemeen vier verschillende wortels zal hebben. (Het geval van gelijke wortels met de gevolgen daarvan laten we buiten beschouwing). Elke wortel bepaalt een kegel van den bundel. Noemen wij hen λ_1, λ_2, λ_3 en λ_4 dan worden de toppen der kegels bepaald uit de volgende vier stellen vergelijkingen, die uit (I) volgen:

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta O_1}{\delta x} + \lambda_1 \dfrac{\delta O_2}{\delta x} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\delta O_1}{\delta q} + \delta_1 \dfrac{\delta O_2}{\delta q} = 0 \end{array}\right| \cdots \left|\cdots\right| \left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta O_1}{\delta x} + \lambda_1 \dfrac{\delta O_2}{\delta x} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\delta O_1}{\delta q} + \lambda_1 \dfrac{\delta O_2}{\delta q} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

Om nu aan te toonen, dat deze toppen de hoekpunten zijn van een viervlak, dat poolviervlak is van elk oppervlak van den bundel, zullen wij de coördinaten noemen: $x_1\ y_1\ z_1\ q_1$ behoorende bij λ_1; x_2, y_2, z_2, q_2 behoorende bij λ_2 enz. Vermenigvuldigen wij het eerste stel vergelijkingen van (III) achtereenvolgens met x_2, y_2, z_2, q_2 en het tweede met x_1, y_1, z_1, q_1, dan ontstaan door optelling de vergelijkingen:

$$x_2 \frac{\delta O_1}{\delta x_1} + y_2 \frac{\delta O_1}{\delta y_1} + \ldots + \lambda_1 \left(x_2 \frac{\delta O_2}{\delta x_1} + y_2 \frac{\delta O_2}{\delta y_1} + \ldots\right) = 0$$

en

$$x_1 \frac{\delta O_1}{\delta x_1} + y_1 \frac{\delta O_1}{\delta y_2} + \ldots + \lambda_2 \left(x_1 \frac{\delta O_2}{\delta x_2} + y_1 \frac{\delta O_2}{\delta y_2} + \ldots\right) = 0$$

Maar $x_2 \dfrac{\delta O_1}{\delta x_1} = x_1 \dfrac{\delta O_1}{\delta x_2}$ enz. dus door aftrekking van de laatste twee vergelijkingen ontstaat:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \left\{ x_2 \frac{\delta O_2}{\delta x_1} + y_2 \frac{\delta O_2}{\delta y_1} + z_2 \frac{\delta O_2}{\delta z_1} + q_2 \frac{\delta O_2}{\delta q_1} \right\} = 0$$

In de onderstelling dat λ_1 en λ_2 ongelijke wortels zijn van de vergelijking (II) is hiermede gevonden:

$$x_2 \frac{\delta O_2}{\delta x_1} + y_2 \frac{\delta O_2}{\delta y_1} + z_2 \frac{\delta O_2}{\delta z_1} + q_2 \frac{\delta O_2}{\delta q_1} = 0$$

Evenzoo:

$$x_2 \frac{\delta O_1}{\delta x_1} + y_2 \frac{\delta O_1}{\delta y_1} + z_2 \frac{\delta O_1}{\delta z_1} + q_2 \frac{\delta O_1}{\delta q_1} = 0$$

Op gelijke wijze kan elk tweetal stellen van (III)

PERPUSTAKAAN NASIONAL

behandeld worden, waaruit volgt: (als m en n twee verschillende van de getallen 1, 2, 3 en 4 beteekenen)

$$x_m\left\{\frac{\delta O_1}{\delta x_n} + \varkappa \frac{\delta O_2}{\delta x_n}\right\} + \ldots + q_m\left\{\frac{\delta O_1}{\delta q_n} + \varkappa \frac{\delta O_2}{\delta q_n}\right\} = 0 \quad \text{(IV)}$$

of in woorden:

het poolvlak van het punt $(x_m\ y_m\ z_m\ q_m)$, ten opzichte van een willekeurig oppervlak met vergelijking $O_1 + \varkappa O_2 = 0$ uit den bundel met vergelijking $O_1 + \lambda O_2 = 0$, gaat door het punt $(x_n\ y_n\ z_n\ q_n)$, en omgekeerd. Dus: de vier punten $(x_1\ y_1\ z_1\ q_1)$ . . . . . $(x_4\ y_4\ z_4\ q_4)$ zijn de hoekpunten van een viervlak, dat poolviervlak is van elk oppervlak van den bundel.

Omgekeerd geldt ook: Als vier punten de hoekpunten zijn van een poolviervlak van twee verschillende kwadratische oppervlakken, dus ingevolge (IV) van elk oppervlak van den bundel, door die twee oppervlakken bepaald, dan zijn zij tevens de toppen der vier kwadratische kegels, welke de doorsnede der gegeven kwadratische oppervlakken gemeen hebben.

§ 7. Opdat een kwadratisch oppervlak met vergelijking

$$\Phi \equiv d_{11}\,x^2 + d_{22}\,y^2 + \ldots\ldots + 2d_{34}\,zq = 0$$

door de hoekpunten gaat van één willekeurig poolviervlak van het oppervlak met vergelijking

$$O_1 \equiv a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + \ldots\ldots + 2\,a_{34}\,zq = 0,$$

moet de betrekking bestaan:

$$d_{11}\,A_{11} + d_{12}\,A_{12} + d_{22}\,A_{22} + \ldots\ldots\ldots = 0$$

als A_{11} enz. de minoren zijn van den Hessischen determinant $D \equiv \Sigma \pm a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$.

Een poolviervlak van het oppervlak met verge-

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

lijking $O_1 = 0$ bepalen wij met behulp van een tweede oppervlak $O_2 = 0$. Samen bepalen deze het kegeltoppenviervlak, welks coördinaten uit (III) gevonden worden. Elk tweetal vergelijkingen van (I) bepaalt een kwadratisch oppervlak, waarvan de vergelijking gevonden wordt door eliminatie van λ. Aldus vindt men zes kwadratische oppervlakken Ψ, die om het poolviervlak beschreven zijn:

$$\Psi_1 \equiv \frac{\delta O_1}{\delta x} \cdot \frac{\delta O_2}{\delta y} - \frac{\delta O_1}{\delta y} \cdot \frac{\delta O_2}{\delta x} = 0$$

. . . . . .

$$\Psi_6 \equiv \frac{\delta O_1}{\delta z} \cdot \frac{\delta O_2}{\delta q} - \frac{\delta O_1}{\delta q} \cdot \frac{\delta O_2}{\delta z} = 0$$

Dus zal:

$$\Psi \equiv c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \ldots\ldots + c_6 \Psi_6 = 0$$

de vergelijking zijn van een kwadratisch oppervlak dat om een poolviervlak van O_1 is beschreven. Tevens stelt deze vergelijking $\Phi = 0$ het meest algemeene kwadratisch oppervlak voor dat door de vier hoekpunten gaat, want zij bevat nog 5 willekeurige constantenverhoudingen terwijl er tusschen $\Psi_1, \Psi_2 \ldots\ldots \Psi_6$ geen lineaire betrekking bestaat. Dit laatste blijkt onmiddellijk door aan O_1 en O_2 een eenvoudigen vorm te geven, bijvoorbeeld door te nemen:

$$O_1 \equiv a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 q^2 \text{ en}$$

$$O_2 \equiv b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 z^2 + b_4 q^2.$$

Uitgewerkt is de vergelijking $\Phi = 0$ van de gedaante:

$$\Phi \equiv d_{11} x^2 + d_{22} y^2 + \ldots\ldots + 2\, d_{34} zq = 0.$$

Een betrekking tusschen de coefficienten a (van $O_1 = 0$) en d (van $\Phi = 0$) wordt nu gevonden door gebruik te maken van de betrekkingen:

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$$D = \sum_{1}^{1=4} A_{1l}\, a_{1l} \text{ en } 0 = \sum_{1}^{1=4} A_{ml}\, a_{1l}.$$

Zij $O_2 \equiv b_{11}\, x^2 + b_{22}\, y^2 + \ldots\ldots + 2b_{34}\, zq$.

Beschouw een der functies Ψ, bijvoorbeeld:

$$\Psi_1 \equiv \frac{\delta O_1}{\delta x} \cdot \frac{\delta O_2}{\delta y} - \frac{\delta O_1}{\delta y} \cdot \frac{\delta O_2}{\delta x}.$$

Hierin is:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\delta O_1}{\delta x} \cdot \frac{\delta O_2}{\delta y} = b_{12}\, x \frac{\delta O_1}{\delta x} + b_{22}\, y \frac{\delta O_1}{\delta x} + b_{23}\, z \frac{\delta O_1}{\delta x} + b_{24}\, q \frac{\delta O_1}{\delta x}$$

en evenzoo:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\delta O_1}{\delta y} \cdot \frac{\delta O_2}{\delta x} = b_{11}\, x \frac{\delta O_1}{\delta y} + b_{12} y \frac{\delta O_1}{\delta y} + b_{13} z \frac{\delta O_1}{\delta y} + b_{14} q \frac{\delta O_1}{\delta y}$$

Vervangt men:

x^2 (of xx) door A_{11}, xy door A_{12} enz., dan wordt:

$$\tfrac{1}{2}\, x \frac{\delta O_1}{\delta x} = a_{11}\, A_{11} + a_{12}\, A_{12} + a_{13}\, A_{13} + a_{14}\, A_{14} = D \text{ en}$$

$$\tfrac{1}{2}\, y \frac{\delta O_1}{\delta y} = a_{11}\, A_{21} + a_{12}\, A_{22} + a_{13}\, A_{23} + a_{14}\, A_{24} = 0. \text{ Enz.}$$

Door deze substitutie gaat $\frac{1}{4}\, \Psi_1$ over in:

$$b_{12}\, D - b_{12}\, D$$

en dus wordt identiek nul. Op dezelfde wijze blijken ook de andere functies $\Psi_2 \ldots\ldots \Psi_6$ nul te worden door deze substitutie, waarmede de betrekking bewezen is:

$$d_{11}\, A_{11} + d_{12}\, A_{12} + \ldots\ldots + d_{34}\, A_{34} = 0.$$

Hierin komen de coefficienten van het te hulp genomen oppervlak O_2 natuurlijk niet meer voor.

§ 8. In uitbreiding van het voorgaande kunnen wij de voorwaarden afleiden waaraan de coefficienten van de vergelijking $\Phi = 0$ moeten voldoen, opdat het

door deze vergelijking bepaalde oppervlak beschreven is om één bepaald poolviervlak van het kwadratisch oppervlak met vergelijking $O_1 = 0$, dus gaat door 4 punten. Wij zullen dan 4 voorwaarden moeten vinden. Om uit de oneindig veel poolviervlakken van het oppervlak O_1 één te kiezen, nemen wij een tweede bepaald kwadratisch oppervlak met vergelijking $O_2 = 0$ en beschouwen het viervlak P_{12} dat poolviervlak is van alle kwadratische oppervlakken van den bundel met vergelijking $O_1 + \lambda O_2 = 0$. Opdat het oppervlak Φ gaat door de hoekpunten van een willekeurig poolviervlak van een willekeurig oppervlak (λ willekeurig) uit den bundel moeten de coefficienten d voldoen aan de betrekking:

$$d_{11} C_{11} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad (V)$$

waarin de getallen C de minoren zijn van den Hessischen determinant van den bundel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & a_{14} + \lambda b_{14} \\ a_{12} + \lambda b_{12} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{13} + \lambda b_{13} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{14} + \lambda b_{14} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & a_{44} + \lambda b_{44} \end{vmatrix}$$

en dus van de gedaante:

$$C_{kl} \equiv E_{kl} + E'_{kl}\,\lambda + E''_{kl}\,\lambda^2 + E'''_{kl}\,\lambda^3,$$

namelijk van den derden graad in den parameter λ. Moet nu het oppervlak Φ beschreven zijn om het ééne bepaalde poolviervlak P_{12}, dat bij alle oppervlakken van den bundel behoort, dan moet aan de voorwaarde (V) voldaan worden bij elke willekeurige waarde van λ, zoodat de voorwaarde $\Sigma d_{kl} C_{kl} = 0$ overgaat in vier voorwaarden:

$$\Sigma d_{kl} E_{kl} = 0, \Sigma d_{kl} E'_{kl} = 0, \Sigma d_{kl} E''_{kl} = 0 \text{ en } \Sigma d_{kl} E'''_{kl} = 0 \quad (VI.)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Moet het oppervlak Φ bovendien om een tweede poolviervlak P_{13} beschreven zijn, dat bepaald is met den bundel $O_1 + \mu O_3 = 0$ dan vinden we nog vier voorwaarden:

$\Sigma d_{kl} F_{kl} = 0$, $\Sigma d_{kl} F'_{kl} = 0$, $\Sigma d_{kl} F''_{kl} = 0$ en $\Sigma d_{kl} F'''_{kl} = 0$ (VII).

Het feit dat het oppervlak Φ moet voldoen aan de acht voorwaardevergelijkingen van (VI) en (VII) schijnt in overeenstemming met de voorwaarde dat het door acht punten moet gaan. Echter: in werkelijkheid bevatten de vergelijkingen niet acht doch slechts zeven voorwaarden, want de eerste vergelijking van (VI):

$$\Sigma d_{kl} E_{kl} = 0$$

is identiek met de eerste van (VII). Immers men vindt E_{kl} door $\lambda = 0$ en F_{kl} door $\mu = 0$ te stellen, waaruit blijkt:

$$E_{kl} \equiv F_{kl} \equiv A_{kl}.$$

Het kwadratisch oppervlak met vergelijking $\Phi = 0$ is dus slechts aan zeven lineaire voorwaardevergelijkingen onderworpen om te voldoen aan den eisch door deze acht bepaalde punten te gaan. De coefficienten van de vergelijking $\Phi = 0$ zullen nog aan twee voorwaarden te onderwerpen zijn, m. a. w. de vergelijking stelt een net van kwadratische oppervlakken voor. Alle oppervlakken Φ welke door zeven hoekpunten der viervlakken P_{12} en P_{13} gaan, bevatten ook het achtste punt. Die acht hoekpunten vormen dus een systeem van geassocieerde punten. Voor de viervlakken P_{12} en P_{13} hebben we geheel willekeurige poolviervlakken van O_1 kunnen kiezen. Dus geldt algemeen:

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

„De hoekpunten van twee willekeurige poolviervlakken van een kwadratisch oppervlak vormen een systeem van geassocieerde punten."

§ 9. Om het omgekeerde van de Eerste Stelling van Hesse te bewijzen beschouwen we de acht snijpunten $(x_1\ y_1\ z_1\ q_1)$ . . . . . $(x_8\ y_8\ z_8\ q_8)$ van drie kwadratische oppervlakken. Opdat vier willekeurig uit deze acht gekozen punten $(x_1\ y_1\ z_1\ q_1)$ . . . . . $(x_4\ y_4\ z_4\ q_4)$ hoekpunten zijn van een poolviervlak van een oppervlak met vergelijking $O = 0$, moet voldaan zijn aan

$$x_1\frac{\delta O}{\delta x_2} + y_1\frac{\delta O}{\delta y_2} + z_1\frac{\delta O}{\delta z_2} + q_1\frac{\delta O}{\delta q_2} = 0$$

(namelijk het poolvlak van punt 1 gaat door punt 2) enz., dus aan zes betrekkingen:

$$x_k\frac{\delta O}{\delta x_1} + y_k\frac{\delta O}{\delta y_1} + z_k\frac{\delta O}{\delta z_1} + q_k\frac{\delta O}{\delta q_1} = 0 \quad \text{(VIII)}$$

waarin voor k en l twee verschillende der cijfers 1, 2, 3 en 4 te nemen.

Moeten ook de andere vier punten de hoekpunten zijn van een poolviervlak, dat is toegevoegd aan hetzelfde oppervlak O, dan moeten nóg zes betrekkingen bestaan:

$$\left.\begin{aligned} x_5\frac{\delta O}{\delta x_6} + \ldots\ldots = 0 \\ x_5\frac{\delta O}{\delta x_7} + \ldots\ldots = 0 \\ x_6\frac{O}{\delta x_7} + \ldots\ldots = 0 \end{aligned}\right\} \text{(IX}a\text{)}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$$\left.\begin{aligned} x_8 \frac{\delta O}{\delta x_5} + \ldots\ldots = 0 \\ x_8 \frac{\delta O}{\delta x_6} + \ldots\ldots = 0 \\ x_8 \frac{\delta O}{\delta x_7} + \ldots\ldots = 0 \end{aligned}\right\} \text{(IX}b\text{)}.$$

De vergelijkingen (VIII) en (IX) leveren te zamen twaalf lineaire vergelijkingen, terwijl een kwadratisch oppervlak aan niet meer dan negen voorwaarden onderworpen kan worden. Nu zijn echter de acht gegeven punten niet onafhankelijk van elkaar, doch geassocieerd. Zeven kunnen willekeurig gekozen worden, dan zal daardoor het achtste bepaald zijn. Denken wij de punten 1 tot en met 7 willekeurig aangenomen, dan kan het oppervlak met vergelijking $O = 0$ voldoen aan de vergelijkingen (VIII) en (IXa). Kiezen wij daarna een punt $(\xi_8\ \eta_8\ \zeta_8\ \pi_8)$ zoodanig, dat het aan de vergelijkingen (IXb) voldoet, (m.a.w. dat het met de punten 5, 6 en 7 een poolviervlak vormt toegevoegd aan O) dan is dit tevens het achtste geassocieerde punt. Want volgens het voorgaande gaan alle kwadratische oppervlakken Φ, welke door zeven hoekpunten van twee poolviervlakken van het kwadratisch oppervlak O gaan, ook door het achtste punt. Dus het punt $(\xi_8\ \eta_8\ \zeta_8\ \pi_8)$ is gemeen aan alle kwadratische oppervlakken van het net, dat bepaald wordt door de zeven punten $1, \ldots\ldots 7$, dus moet het het achtste geassocieerde punt zijn. Wij hebben nu uit de acht geassocieerde punten willekeurig vier beschouwd als de hoekpunten van een poolviervlak

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

en daarna uit de overblijvende vier wederom willekeurig een drietal gekozen. Dus: acht geassocieerde punten, op willekeurige wijze in twee viertallen verdeeld, zijn de hoekpunten van twee poolviervlakken van een kwadratisch oppervlak.

§ 10. In het voorgaande is een poolviervlak P van een kwadratisch oppervlak O ingevoerd als het kegeltoppenviervlak van een bundel, waartoe ook O behoort. Vervolgens werden de voorwaarden opgezocht waar aan een ander kwadratisch oppervlak Φ moest voldoen om beschreven te zijn om het poolviervlak P. Feitelijk berust de eerste stelling van Hesse geheel op de eigenschap, dat als een kwadratisch oppervlak Φ beschreven is om een poolviervlak van een ander kwadratisch oppervlak O, een simultaaninvariant van beide nul is.[1]) Is namelijk

$$O \equiv a_{11}\, x^2 + \ldots + 2a_{12}\, x\, y + \ldots\ldots = 0$$

en $$O' \equiv a'_{11}\, x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

dan stelt $O + \lambda O' = 0$ een bundel van kwadratische oppervlakken voor, wiens discriminant van den 4^{den} graad in λ is en voorgesteld kan worden door den vorm

$$\lambda^4 \Delta + \lambda^3 \Theta + \lambda^2 \Phi + \lambda \Theta' + \Delta'.$$

Hierin is:

$$\Theta \equiv a'_{11} A_{11} + a'_{22} A_{22} + a'_{33} A_{33} + a'_{44} A_{44} + 2\, a'_{12} A_{12} + \\ + 2\, a'_{13} A_{13} + 2\, a'_{14} A_{14} + 2\, a'_{23} A_{23} + 2\, a'_{24} A_{24} + 2\, a'_{34} A_{34}$$

en $$\Theta' \equiv a_{11} A'_{11} + a_{22} A'_{22} + \ldots\ldots$$

Is het coordinatenviervlak een poolviervlak van het oppervlak met vergelijking $O = 0$, dan is

[1]) Zie bijv. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes I, 4e Aufl. p. 327.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$a_{12} = a_{13} = \ldots\ldots = a_{34} = 0$ dus

$$O \equiv a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 q^2 = 0.$$

Dan wordt:

$\Theta \equiv a'_{11}\, a_2\, a_3\, a_4 + a'_{22}\, a_1\, a_3\, a_4 + a'_{33}\, a_1\, a_2\, a_3 + a'_{44}\, a_1\, a_2\, a^3$

en $\Theta' \equiv a_1 A'_{11} + a_2 A'_{22} + a_3 A'_{33} + a_4 A'_{44}$.

Hieruit blijkt dat $\Theta = 0$, als $a'_{11} = a'_{22} = a'_{33} = a'_{44} = 0$, dus als het oppervlak met vergelijking $O' = 0$ om het coordinatenviervlak beschreven is. Evenzoo is $\Theta' = 0$ als $A'_{11} = A'_{22} = A'_{33} = A'_{44} = 0$ dus als het oppervlak met vergelijking $O' = 0$ in het coordinatenviervlak beschreven is. Door verwisseling der beide oppervlakken blijkt, dat evenzeer $\Theta' = 0$ als O beschreven is om een poolviervlak van O'.

Denk nu het coordinatenviervlak zij zoo bepaald, dat de vergelijking $O' = 0$ overgaat in

$$O' \equiv x^2 + y^2 + z^2 + q^2 = 0$$

en beschouw een tweede kwadratisch oppervlak met vergelijking

$$\Phi \equiv a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + \ldots\ldots + 2a_{34}\, zq = 0.$$

Dan is:

$$\Theta' \equiv a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}.$$

want $A'_{11} = A'_{22} = A'_{33} = A'_{44} = 1$ terwijl de overige minoren nul zijn.

Is Φ beschreven om een poolviervlak van O', dan is $\Theta' = 0$. Brengt men het oppervlak Φ bovendien nog door drie hoekpunten van het coördinatenviervlak (dat eveneens een poolviervlak is van O', dan zal daardoor $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ zijn en dus, omdat $\Theta' = 0$, ook $a_{44} = 0$ zijn, d.w.z. het oppervlak Φ gaat ook door het vierde hoekpunt van het coördinatenviervlak, waarmede bewezen is dat de acht hoekpunten der twee

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

poolviervlakken van eenzelfde kwadratisch oppervlak een systeem van geassocieerde punten vormen.

§ 11. In geheel anderen vorm is een analytisch bewijs van Hesse's Eerste Stelling gegeven door Burnside[1]), die een symmetrische uitdrukking heeft gegeven voor de coördinaten van het achtste punt bij zeven gegeven punten. Hij neemt vier der zeven punten als hoekpunten aan van het coördinatenviervlak. De overige drie punten mogen gegeven zijn door de coördinaten $x_5\, y_5\, z_5\, q_5$, $x_6\, y_6\, z_6\, q_6$ en $x_7\, y_7\, z_7\, q_7$. Beschouw nu de vergelijkingen, welke vervat zijn in:

$$\begin{Vmatrix} xx_5 & xx_6 & xx_7 & x_6x_7 & x_7x_5 & x_5x_6 \\ yy_5 & yy_6 & yy_7 & y_6y_7 & y_7y_5 & y_5y_6 \\ zz_5 & zz_6 & zz_7 & z_6z_7 & z_7z_5 & z_5z_6 \\ qq_5 & qq_6 & qq_7 & q_6q_7 & q_7q_5 & q_5q_6 \end{Vmatrix} = 0 \qquad (X)$$

Hiermede is bedoeld dat elke determinant van vier rijen en kolommen uit dezen matrix gevormd, nul is. Er kunnen uit den matrix 15 zulke determinanten worden gevormd, doch van de aldus verkregen 15 vergelijkingen zijn er slechts 3 (want $6 - 4 + 1$) van elkaar onafhankelijk. De drie vergelijkingen:

$$\begin{vmatrix} xx_5 & x_6x_7 & x_7x_5 & x_5x_6 \\ yy_5 & y_6y_7 & y_7y_5 & y_5y_6 \\ zz_5 & z_6z_7 & z_7z_5 & z_5z_6 \\ qq_5 & q_6q_7 & q_7q_5 & q_5q_6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} xx_6 & x_6x_7 & x_7x_5 & x_5x_6 \\ yy_6 & y_6y_7 & y_7y_5 & y_5y_6 \\ zz_6 & z_6z_7 & z_7z_5 & z_5z_6 \\ qq_6 & q_6q_7 & q_7q_5 & q_5q_6 \end{vmatrix} = 0$$

en

$$\begin{vmatrix} xx_7 & x_6x_7 & x_7x_5 & x_5x_6 \\ yy_7 & y_6y_7 & y_7y_5 & y_5y_6 \\ zz_7 & z_6z_7 & z_7z_5 & z_5z_6 \\ qq_7 & q_6q_7 & q_7q_5 & q_5q_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad (XI)$$

[1])W. Burnside, On the coordinates of the eighth point common to a system of quadrics through seven given points (Mess. of Mathem. 33 (1904) p. 127).

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

zijn lineair in x, y, z, q dus bepalen de verhoudingen van deze grootheden, d.w.z een punt S.

Beschouw nu de drie kwadratische oppervlakken met vergelijkingen:

$$\begin{vmatrix} xx_6 & xx_7 & x_6x_7 & x_7x_5 \\ yy_6 & yy_7 & y_6y_7 & y_7y_5 \\ zz_6 & zz_7 & z_6z_7 & z_7z_5 \\ qq_6 & qq_7 & q_6q_7 & q_7q_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} xx_7 & xx_5 & x_7x_5 & x_5x_6 \\ yy_7 & yy_5 & y_7y_5 & y_5y_6 \\ zz_7 & zz_5 & z_7z_5 & z_5z_6 \\ qq_7 & qq_5 & q_7q_5 & q_5q_6 \end{vmatrix} = 0$$

en

$$\begin{vmatrix} xx_5 & xx_6 & x_5x_6 & x_6x_7 \\ yy_5 & yy_6 & y_5y_6 & y_6y_7 \\ zz_5 & zz_6 & z_5z_6 & z_6z_7 \\ qq_5 & qq_6 & q_5q_6 & q_6q_7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(XII)}$$

Elk van deze oppervlakken is beschreven om het coördinatenviervlak (want de termen met x^2, y^2, z^2 en q^2 ontbreken) en gaat bovendien door de punten 5, 6 en 7. Ook moeten aan de vergelijkingen (XII) voldoen de coördinaten van het punt S, welke uit (XI) volgden, zoodat dit punt S juist het achtste punt is dat de drie kwadratische oppervlakken gemeen hebben [1]). De vergelijkingen vervat in (X) drukken echter uit dat de punten 5, 6, 7 en S de hoekpunten zijn van een poolviervlak van een kwadratisch oppermet vergelijking

$$\begin{vmatrix} x^2 & x_6x_7 & x_7x_5 & x_5x_6 \\ y^2 & y_6y_7 & y_7y_5 & y_5y_6 \\ z^2 & z_6z_7 & z_7z_5 & z_5z_6 \\ q^2 & q_6q_7 & q_7q_5 & q_5q_6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(XIII)}$$

[1]) De coordinaten van het achtste punt zijn ook bepaald door K. Rohn Zie Berichte über die Verhandl. de K. Sachsische Gesellschaft der Wiss. 60 (1908) p. 275: Beiträge zur Bestimmung des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiten Grades. Rohn leidt tevens de coördinaten af in het bizondere geval dat zes der punten bepaald zijn als de snijpunten van een kubische ruimtekromme met een kwadratisch oppervlak.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Dat bijvoorbeeld het poolvlak van 5 door 8 gaat blijkt uit de eerste der vergelijkingen (XI), waaraan door de coördinaten van 8 wordt voldaan. De vergelijking (XIII) is echter van de gedaante

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 q^2 = 0$$

dus is ook het coördinatenviervlak een poolviervlak van ditzelfde oppervlak. Hieruit volgt dat de acht punten, verdeeld in twee viertallen, de hoekpunten zijn van twee poolviervlakken van eenzelfde kwadratisch oppervlak.

§ 12. Eenvoudiger dan een der bovengenoemde is het door Serret[1]) gegeven bewijs van Hesse's Eerste Stelling. Uit de identiteit

$$\sum_1^8 \lambda_i p_i^2 \equiv 0,$$

welke (zie § 5) de analytische voorwaarde is voor het geassocieerd zijn der acht punten, volgt dat de vergelijkingen

$$\sum_1^4 \lambda_i p_i^2 = 0 \quad \text{en} \quad \sum_5^8 \lambda_i p_i^2 = 0$$

hetzelfde kwadratische oppervlak moeten voorstellen. Uit de eerste vergelijking blijkt dat 1234 en uit de tweede vergelijking dat 5678 een poolviervlak is van dit oppervlak, waarmede de stelling bewezen is.

Serret heeft opgemerkt dat de identiteit ook op andere wijze in twee gelijkwaardige vergelijkingen kan gesplitst worden. Bijvoorbeeld zullen ook

$$\sum_1^5 \lambda_i p_i^2 = 0 \text{ en } \lambda_6 p_6^2 + \lambda_7 p_7^2 + \lambda_8 p_8^2 = 0$$

eenzelfde meetkundige figuur voorstellen. Uit het

[1]) P. Serret. Géometrie de direction p. 317.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

aantal veranderlijken in de tweede vergelijking blijkt dat deze vergelijkingen geen kwadratisch oppervlak doch een kegelsnede in het vlak (6 7 8) voorstellen. Daarvan vormen de punten 6, 7 en 8 een pooldriehoek, terwijl blijkens de eerste vergelijking de snijpunten der zijden van den scheelen vijfhoek 1 2 3 4 5 met het vlak (6 7 8), dit zijn de punten (1 2, 6 7 8), (2 3, 6 7 8) enz., een poolvijfhoek van dezelfde kegelsnede bepalen.

§ 13. Eindelijk moge ook nog het synthetisch bewijs van de Eerste Stelling van Hesse volgen. Het werd het eerst door von Staudt[1]) geleverd. Onderstel 1 2 3 4 en 5 6 7 8 zijn poolviervlakken van een kwadratisch oppervlak O, terwijl wij te doen hebben met het meest algemeene geval: dat geen der hoekpunten van 1 2 3 4 in een of meer der zijvlakken van 5 6 7 8 ligt, of omgekeerd. Dan zijn de twee vlakkenbundels, met de ribben van twee verschillende viervlakken tot assen en bepaald door de overblijvende vier punten, projectief. Bijvoorbeeld:

$$1\,2\,(3\,4\,7\,8) \barwedge 5\,6\,(3\,4\,7\,8)$$

Want twee vlakken zullen aan elkaar toegevoegd zijn als het eene vlak gaat door de pool van het andere, en omgekeerd. Het vlak (4 5 6) bevat de pool van (1 2 3), zoodat aan elkaar toegevoegd zijn (1 2 3) en (4 5 6). Evenzoo:

(1 2 4) en (3 5 6) (want 3 is de pool van (1 2 4))
(1 2 7) en (5 6 8) (want 7 is de pool van (5 6 8))
(1 2 8) en (5 6 7) (want 8 is de pool van (5 6 7)).

[1]) Von Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage (1860) p. 373.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Hieruit volgt: 1 2 (3 4 7 8) $\overline{\wedge}$ 5 6 (4 3 8 7).
Doch ook zal 5 6 (4 3 8 7) $\overline{\wedge}$ 5 6 (3 4 7 8)
waarmede bewezen is:

1 2 (3 4 7 8) $\overline{\wedge}$ 5 6 (3 4 7 8).

Deze beide projectieve vlakkenbundels brengen een kwadratisch oppervlak Φ_1 voort, dat alle acht punten bevat en waarop de rechten (1 2) en (5 6) gelegen zijn. Op dit oppervlak is de ribbe (7 8) niet gelegen, want zij kruist (1 2) en (5 6) dus behoort niet tot het stelsel van beschrijvende lijnen dat door de vlakkenbundels 1 2 (3 4 7 8) en 5 6 (3 4 7 8) wordt voortgebracht. Evenmin zal (7 8) behooren tot het andere stelsel, want dan zou zij bijvoorbeeld de rechte (1 2 3, 3 5 6) snijden, wat in het algemeen niet het geval is, daar wij als (5 6) en (7 8) een willekeurig paar toegevoegde poollijnen kunnen nemen, het punt 3 willekeurig kunnen kiezen en door 3 het vlak (1 2 3) willekeurig kunnen aanbrengen. De ribbe (7 8) ligt dus niet op Φ_1. Hieruit volgt dat de projectieve vlakkenbundels

1 2 (3 4 5 6) en 7 8 (3 4 5 6)

een ander kwadratisch oppervlak Φ_2 voortbrengen, dat wederom alle acht punten bevat. Op dit oppervlak Φ_2 is de ribbe (3 4) niet gelegen terwijl op Φ_1 de ribbe (7 8) niet ligt. Dus de projectieve vlakkenbundels

3 4 (1 2 5 6) en 7 8 (1 2 5 6)

brengen een derde kwadratisch oppervlak Φ_3 voort, dat eveneens door de acht punten gaat. En dit oppervlak Φ_3 behoort niet tot den bundel, welke door Φ_1 en Φ_2 wordt bepaald. Want de rechte (1 2), die gemeen is aan Φ_1 en Φ_2 ligt niet op Φ_3. De drie

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

oppervlakken bepalen dus een net van kwadratische oppervlakken en de acht punten, welke zij gemeen hebben, zijn geassocieerd.

§ 14. Ten behoeve van het synthetisch bewijs van de omkeering van de Eerste Stelling van Hesse geven wij eerst de volgende hulpstelling: Is 1 2 3 4 een poolviervlak van een kwadratisch oppervlak O en is bij ditzelfde oppervlak een punt A de pool van een vlak α, dan zal elk tweetal toegevoegde vlakken dat A bevat, het vlak α snijden volgens twee lijnen l en m, die met de vijf punten 1, 2, 3, 4 en A op eenzelfde kwadratisch oppervlak liggen.

Bewijs. Het vlak α snijdt O volgens een kegelsnede die door ten minste één der lijnen l en m gesneden wordt. Immers: van twee aan elkaar toegevoegde vlakken moet een van beide het oppervlak O snijden. Stel nu dat l de kegelsnede snijdt in P en Q, dan kunnen wij op l een paar punten B en C aannemen, welke door P en Q harmonisch gescheiden zijn. Is verder D, op m, de pool van l dan bepalen de vier punten A, B, C en D een tweede poolviervlak van het oppervlak O. Het kwadratisch oppervlak Φ nu, dat gebracht wordt door de vier punten 1, 2, 3 en 4 en de twee lijnen l en m (dus o. a. de zeven punten 1, 2, 3, 4, A, B en C bevat) bevat ook het (achtste) punt D, waarmede onze hulpstelling bewezen is.

Een omkeering van deze hulpstelling luidt: als een kwadratisch oppervlak Φ_1, dat door de vijf punten 1, 2, 3, 4 en A gaat waarvan de eerste vier een poolviervlak vormen van een ander kwadratisch oppervlak O, het poolvlak α van A snijdt volgens

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

twee rechte lijnen l en m, dan zijn ook de vlakken, door A en die lijnen gebracht, aan elkaar toegevoegd ten opzichte van O.

Bewijs. Onderstel dat de vlakken β en γ het punt A bevatten en elk toegevoegd zijn aan het vlak door A en l gebracht. Dan kunnen wij volgens het voorgaande de twee volgende kwadratische oppervlakken brengen:

Φ_2 door 1, 2, 3, 4, l en (α, β)

Φ_3 door 1, 2, 3, 4, l en (α, γ),

terwijl Φ_1 door 1, 2, 3, 4, l en m gaat.

Deze drie oppervlakken hebben de punten 1, 2, 3 4 en de rechte l gemeen dus behooren tot eenzelfden bundel van kwadratische oppervlakken. Deze wordt door het vlak α gesneden volgens l en een stralenbundel. Tot dezen laatsten moeten behooren de doorsneden (α, β) en (α, γ) en de lijn m, welke dus door één punt gaan. Dit punt is ten opzichte van de doorsnede (O, α) de pool van l. De lijn m gaat door deze pool van l, dus het vlak gebracht door A en m is óók toegevoegd aan het vlak door A en l, wat te bewijzen gezocht werd.

Wij kunnen nu overgaan tot het synthetisch bewijs van de stelling: als elk kwadratisch oppervlak gebracht door zeven der punten 1, ... , 8 ook het achtste punt bevat, dan kunnen deze acht punten op willekeurige wijze verdeeld worden in twee groepen van vier, welke de hoekpunten zijn van twee poolviervlakken van eenzelfde kwadratisch oppervlak. Onderstel dat 1 2 3 4 poolviervlak is van een kwadratisch oppervlak O (hierdoor zijn aan O zes onaf-

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

hankelijke voorwaarden opgelegd). Elk oppervlak Φ, dat gaat door de vier punten 1, 2, 3 en 4 en twee zijden van $\triangle$ 5 6 7, gaat volgens het gegeven ook door S. (Er zijn drie zulke oppervlakken mogelijk). Het oppervlak O kan verder nog zoo bepaald worden, dat S de pool is van vlak (5 6 7). (Dit zijn nog drie voorwaarden, onafhankelijk van de vorige, dus daarmede is het oppervlak O volkomen bepaald.) Volgens de boven bewezen hulpstelling zijn nu elke twee vlakken gebracht door S en twee der zijden van $\triangle$ 5 6 7 aan elkaar toegevoegd, waaruit volgt dat ook het viervlak 5 6 7 S een poolviervlak is van hetzelfde kwadratische oppervlak O.

§ 15. In het voorgaande hebben wij verschillende methoden behandeld van bewijs van de Eerste Stelling van Hesse en hare omkeering. Daarbij hebben wij ondersteld een geheel willekeurigen stand der acht punten in de ruimte. Wij willen nu nog aantoonen, dat de Stelling onveranderd geldig blijft in bizondere gevallen.

Liggen van de acht punten, welke twee poolviervlakken van een kwadratisch oppervlak O bepalen, vier in één plat vlak, dan liggen ook de andere vier in een plat vlak. Stel bijvoorbeeld 1 ligt in vlak (678), dan moet 5 liggen in vlak (234). (De pool 1 van (234) ligt in (678) dus de pool 5 van (678) in (234).) Het bewijs van § 13 blijft nu ongewijzigd geldig.

Liggen drie der acht punten op één rechte lijn, bijvoorbeeld ligt het punt 5 op de lijn (12), dan zal het poolvlak (678) van 5 ook de aan (12) toegevoegde lijn (34) moeten bevatten en dus (12) snijden

PERPUSTAKAAN NASIONAL

in een punt S. De punten 3, 4, S en 6, 7, S bepalen nu twee pooldriehoeken van de kwadratische kromme, welke de doorsnede (O, 6 7 S) is en zij liggen dus op een andere kwadratische kromme k. Beschouwen wij een der punten 1, 2 of 5 als achtste punt en brengen wij een kwadratisch oppervlak Φ_1 door de beide andere punten en de kromme k, dan ligt de lijn (1 2) en dus ook het achtste punt op dit oppervlak Φ_1. Wordt een der andere vijf punten als achtste punt beschouwd, bijvoorbeeld het punt S, dan blijkt dat dit ligt op elk oppervlak Φ_2 dat gebracht is door de vijf punten 3, 4, S, 6, 7 en de lijn (1 2) want S ligt met die vijf punten op één kwadratische kromme k', welke dan de doorsnede van (6 7 S) met Φ_2 is.

Liggen niet alleen drie der acht punten op één rechte, maar vallen bovendien twee van deze drie punten samen, bijvoorbeeld 5 met 1, dan vallen ook de poolvlakken van 1 en 5 samen, stel in een vlak α. Elk door 1 gaand oppervlak bevat 5 en omgekeerd, dus we behoeven slechts een der zes andere punten als achtste punt te beschouwen. Nu zijn $\triangle$ 2 3 4 en $\triangle$ 6 7 S weer pooldriehoeken van een kromme (O, α), dus de zes punten 2, 3, 4, 6, 7, S liggen op één kwadratische kromme, welke de doorsnede is van α met elk kwadratisch oppervlak, dat door zeven der acht punten is gebracht en waarop dus ook het achtste punt moet liggen.

Liggen eindelijk vier der acht punten op één rechte, dan liggen ook de andere vier op één rechte. Want liggen 5 en 6 op (1 2), dan is de rechte (3 4) welke toegevoegd is aan (1 2), ook toegevoegd aan (5 6),

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dus 7 en 8 liggen op de rechte (34). Elk kwadratisch oppervlak dat nu zeven (zes) der acht punten bevat, zal nu beide rechte lijnen en dus ook het daarop gelegen achtste punt moeten bevatten.

Voor elk der bovengenoemde bizondere gevallen kan ook het bewijs van de omkeering van de Eerste Stelling van Hesse zonder veel moeite gegeven worden.

§ 16. Wij mogen dit hoofdstuk niet sluiten zonder melding gemaakt te hebben van een andere door Hesse bewezen stelling, welke in nauw verband met de in dit hoofdstuk reeds behandelde staat. Hiertoe keeren we terug tot het betoog van § 8. Daar beschouwden we het kegeltoppenviervlak P_{12} van den bundel met vergelijking

$$O_1 + \lambda O_2 = 0$$

en het kegeltoppenviervlak P_{13} van den bundel

$$O_1 + \mu O_3 = 0.$$

Opdat een kwadratisch oppervlak Φ beschreven zij om P_{12} en P_{13} moet voldaan worden aan de voorwaarden vervat in (VI) en (VII). Ons bleek reeds dat de vergelijkingen van (VII) niet vier doch slechts drie nieuwe voorwaarden bepalen. Opdat nu het oppervlak Φ nog beschreven zij om het kegeltoppenviervlak P_{23} van den bundel met vergelijking

$$O_2 + \nu O_3 = 0$$

behoeft slechts aan twee nieuwe voorwaarden voldaan te worden. Want men vindt als voorwaarde:

$$\Sigma\, d_{kl} M_{kl} = 0$$

als M_{11} enz. zijn de minoren van den Hessischen determinant van den laatsten bundel, dus van de gedaante:

$$M_{kl} \equiv G_{kl} + G'_{kl}\,\nu + G''_{kl}\,\nu^2 + G'''_{kl}\,\nu^3.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Hieruit volgen de vier voorwaarden:

$$\Sigma d_{kl} G_{kl} = 0, \Sigma d_{kl} G'_{kl} = 0, \Sigma d_{kl} G''_{kl} = 0 \text{ en } \Sigma d_{kl} G'''_{kl} = 0 \quad \text{(XIV)}.$$

Neemt men nu $\nu = \frac{1}{\lambda} = 0$, dan blijkt:

$$G_{kl} = E'''_{kl} \text{ want} = B_{kl}$$

en neemt men $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\mu} = 0$, dan blijkt:

$$G'''_{kl} = F''_{kl} \text{ want} = C_{kl},$$

dus bevat (XIV) na (VI) en (VII) slechts twee nieuwe voorwaarden. Hieruit volgt, dat de vergelijkingen (VI), (VII) en (XIV) slechts negen onafhankelijke voorwaarden bevatten, waaraan dus door een kwadratisch oppervlak kan worden voldaan. Hiermede is bewezen:

De toppen der twaalf kwadratische kegels, welke de doorsneden van drie (niet tot eenzelfden bundel behoorende) kwadratische oppervlakken twee aan twee bevatten, liggen op éénzelfde kwadratische oppervlak[1]).

Hesse merkt op dat het niet noodig is de drie stellen voorwaarden (VI), (VII) en (XIV) afzonderlijk op te stellen. De drie bundels kan men tezamen gevat denken in de vergelijking

$$\lambda O_1 + \mu O_2 + \nu O_3 = 0,$$

waarbij steeds één der drie grootheden λ, μ en ν nul is. De determinant van den bundel wordt nu:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} + \nu c_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda a_{44} + \mu b_{44} + \nu c_{44} \end{vmatrix}$$

[1]) Hesse, Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung (Crelle's Journal 49 (1855) p. 291 = Hesse's Ges. Werke p. 358); ook Hesse, Vorlesungen 3e Aufl. p. 201.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Laten wij de minoren weer M_{11} enz. noemen, dan kan een oppervlak Φ beschreven zijn om drie kegeltoppenviervlakken P_{12}, P_{13} en P_{23}, als aan

$$\Sigma\, d_{kl}\, M_{kl} = 0$$

voldaan kan worden voor alle waarden van λ, μ en ν. Deze vergelijking is homogeen van den derden graad in λ, μ en ν doch bevat slechts negen coëfficienten, want één der termen bevat het product $\lambda\,\mu\,\nu$ dus is altijd nul. De vergelijking bevat dus niet meer dan negen voorwaarden en hieraan kan door de coefficienten d_{kl} steeds worden voldaan waarmede de stelling eveneens bewezen is.

§ 17. Bestaat nu ook de stelling: „Als twaalf punten verdeeld kunnen worden in drie groepen van vier, zoodanig dat elk tweetal groepen acht geassocieerde punten vormen, dan liggen die twaalf punten op éénzelfde kwadratisch oppervlak"? Het antwoord op deze vraag kan niet zonder meer bevestigend zijn. Beschouwen wij namelijk de drie groepen van vier punten:

1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8 en 9, 10, 11, 12

welke zoodanig zijn gelegen dat elke twee groepen acht geassocieerde punten vormen, terwijl ze bepaald zijn door de vergelijkingen:

$$p_1 \equiv x_1\, u + y_1\, v + z_1\, w + q_1\, r = 0 \text{ enz.}$$

dan kunnen (zie § 5) de coëfficiënten λ, μ en ν zoodanig bepaald worden, dat:

$$\sum_1^8 \lambda_i\, p_i^2 \equiv 0,\ \sum_5^{12} \mu_i\, p_i^2 \equiv 0 \text{ en } \sum_1^4 \nu_i\, p_i^2 + \sum_9^{12} \nu_j\, p_j^2 \equiv 0 \quad (XV)$$

Elimineert men uit deze drie identiteiten p_8^2 en p_{12}^2, dan verkrijgt men een nieuwe identiteit:

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$$\sum_{1}^{4} a_i p_i^2 + \sum_{5}^{7} b_i p_i^2 + \sum_{9}^{11} c_i p_i^2 \equiv 0 \qquad \text{(XVI)}$$

waarin:

$$a_i \equiv \mu_8 \nu_{12} \lambda_i + \lambda_8 \mu_{12} \nu_i$$
$$b_i \equiv \nu_{12} (\mu_8 \lambda_i - \lambda_8 \mu_i)$$
$$c_i \equiv \lambda_8 (\mu_{12} \nu_i - \nu_{12} \mu_i).$$

Zijn alle coefficiënten a, b en c $\neq$ nul, dan volgt uit (XVI): de punten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 en 11 liggen op één kwadratisch oppervlak en hierop moeten ook 8 en 12 liggen, want 8 is geassocieerd met de punten 1, . . . 7 en 12 met de punten 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11. Het zal zich echter kunnen voordoen dat één of meer der coefficiënten a, b en c nul zijn. Zijn bijvoorbeeld de drie coefficiënten: $c_{11} = c_{10} = c_9 = 0$, dan volgt hieruit:

$$\frac{\mu_{11}}{\mu_{12}} = \frac{\nu_{11}}{\nu_{12}}; \quad \frac{\mu_{10}}{\mu_{12}} = \frac{\nu_{10}}{\nu_{12}} \quad \text{en} \quad \frac{\mu_9}{\mu_{12}} = \frac{\nu_9}{\nu_{12}}$$

dus dan stellen de vergelijkingen:

$$\sum_{9}^{12} \mu_i p_i^2 = 0 \text{ en } \sum_{9}^{12} \nu_i p_i^2 = 0$$

eenzelfde kwadratisch oppervlak voor, dat blijkens de identiteiten (XV) ook wordt voorgesteld door:

$$\sum_{5}^{8} \mu_i p_i^2 = 0 \text{ en door } \sum_{1}^{4} \nu_i p_i^2 = 0.$$

Dus zijn 9, 10, 11, 12; 5, 6, 7, 8 en 1, 2, 3, 4 de hoekpunten van poolviervlakken van eenzelfde kwadratisch oppervlak en men ziet onmiddellijk in dat twaalf zulke punten in het algemeen niet op één kwadratisch oppervlak liggen.

Hiermede is één uitzondering op de stelling aangewezen, welke tevens de eenige is, zooals op de volgende meetkundige wijze blijkt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Beschouw de groepen:
5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12 als hoekpunten van twee poolviervlakken van een kwadratisch oppervlak F, 9, 10, 11, 12; 1, 2, 3, 4 als hoekpunten van twee poolviervlakken van een kwadratisch oppervlak G en 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8 als gelijksoortige punten bij een kwadratisch oppervlak H.

Maken F, G en H geen deel uit van eenzelfden bundel dan liggen de twaalf punten, zooals Hesse bewezen heeft, op een kwadratisch oppervlak. Behooren echter F, G en H tot eenzelfden bundel — een bundel waarvan de oppervlakken oneindig veel poolviervlakken gemeen hebben, want een poolviervlak van twee oppervlakken uit een bundel is dat van alle oppervlakken uit den bundel, zoodat hier elk der drie tetraëders een poolviervlak is van elk der drie oppervlakken — dan liggen toch nog de twaalf punten op een kwadratisch oppervlak. De bedoelde oppervlakkenbundel heeft dan twee kegelsneden tot basiskromme en de gemeenschappelijke poolviervlakken hebben alle twee hoekpunten gemeen, namelijk de beide (eigenlijke) kegeltoppen uit dezen bundel, terwijl de andere hoekpunten liggen op de snijlijn van de beide vlakken die tot den bundel behooren.

Valt G samen met F, dan zijn 1 2 3 4 en 5 6 7 8 twee gemeenschappelijke poolviervlakken van F en H. Van de hoekpunten vallen er twee paren samen, bijvoorbeeld 1, 2 met 5, 6, terwijl 3, 4 en 7, 8 op eenzelfde rechte liggen en 9, 10, 11, 12 de hoekpunten zijn van een willekeurig poolviervlak van F.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Wij hebben gezien, dat wij de beide rechten waarop de eerstgenoemde punten liggen met de hoekpunten van het laatste viervlak door een kwadratisch oppervlak kunnen verbinden, zoodat ook in dit geval de twaalf punten op éénzelfde kwadratisch oppervlak liggen.

Zijn echter 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8 en 9, 10, 11, 12 de hoekpunten van willekeurige poolviervlakken van éénzelfde oppervlak F, dan liggen de twaalf punten niet meer op één kwadratisch oppervlak.

Aan de in den aanhef van deze paragraaph voorgestelde stelling moet dus toegevoegd worden: „mits de drie groepen van vier punten niet de hoekpunten vormen van drie poolviervlakken van eenzelfde kwadratisch oppervlak."

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK III.

Tweede Stelling van Hesse.

§ 18. Hesse's Tweede Stelling luidt:

Zijn 1, 2, ... 8 geassocieerde punten, dan bepalen de snijpunten der zijden van den scheelen zeshoek 1 2 3 4 5 6 met de vlakken, gebracht door telkens een overstaande zijde en een der punten 7 of 8, twee andere zeshoeken waarvan de zijden op éénzelfde hyperboloïde gelegen zijn. [1])

Wij zullen de bedoelde snijpunten noemen als volgt:

(1 2, 4 5 8) = A	(1 2, 4 5 7) = A′
(2 3, 5 6 8) = B	(2 3, 5 6 7) = B′
(3 4, 6 1 8) = C	(3 4, 6 1 7) = C′
(4 5, 1 2 8) = D	(4 5, 1 2 7) = D′
(5 6, 2 3 8) = E	(5 6, 2 3 7) = E′
(6 1, 3 4 8) = F	(6 1, 3 4 7) = F′

De hoofddiagonalen van elk der zeshoeken ABCDEF en A′B′C′D′E′F′, in de stelling bedoeld, gaan door één punt, namelijk resp. de punten 8 en 7; dus

[1]) Hesse, De curvis et superficiebus secundi ordinis (Crelle's Journal 20 (1840) p 307 = Hesse's Ges. Werke p. 49); Ueber die lineäre Construction des achten Schnittpunctes etc. (Crelle's Journal 26 (1843) p. 152 = Hesse's Ges. Werke p. 81) en Note über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung (Crelle's Journal 73 (1871) p. 371 = Hesse's Ges. Werke p. 561; ook Bulletin des sciences mathématiques etc. par Darboux, 1 p. 196).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

liggen twee overstaande zijden in één vlak. Hieruit volgt dat elke zijde van een zeshoek door drie andere (de overstaande en de beide aanliggende) gesneden wordt. De hyperboloïde dus, welke bepaald wordt door drie even (niet-opeenvolgende) zijden van één zeshoek bevat ook de andere drie (oneven) zijden van dien zeshoek als beschrijvende lijnen. Elk der zeshoeken is dus geheel op een hyperboloïde gelegen. De stelling zal bewezen zijn als aangetoond is dat beide hyperboloïden samenvallen. Daartoe behoeft slechts bewezen te worden dat elke zijde van den eenen zeshoek drie even of drie oneven zijden van den anderen zeshoek snijdt. Wij kiezen nu willekeurig één zijde A′ B′ en zullen bewijzen dat zij de zijden A B, C D en E F snijdt. Dat A′ B′ en A B elkaar snijden volgt onmiddellijk daaruit dat beide in het vlak (1 2 3) gelegen zijn. Om aan te toonen dat A′ B′ en C D elkaar snijden zullen wij bewijzen dat A′ D en B′ C elkaar snijden. Steunende op de Eerste Stelling van Hesse kan dit als volgt geschieden:

Kies als coördinatenviervlak den tetraëder met zijvlakken

(1 2 3), (2 3 4), (3 4 5) en (4 5 7),

dus met de hoekpunten 4, (4 5, 1 2 3), (2 3, 4 5 7) en 3.

Beschouw 1 2 3 8 en 4 5 6 7 als poolviervlakken van een kwadratisch oppervlak met vergelijking

$$0 \equiv a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + \ldots + 2a_{34}\,zq = 0$$

De lijn A′ D verbindt de punten (1 2, 4 5 7) en (4 5, 1 2 8) dus is de doorsnede (1 2 8, 4 5 7).

De vergelijking van (4 5 7) zij $q = 0$ (XVII.)

Om de vergelijking van (1 2 8) te vinden bedenken

wij dat dit het poolvlak is van het punt 3, dus van het hoekpunt (0, 0, 0, 1) van het coördinatenviervlak. Hieruit volgt voor (1 2 8) de vergelijking

$$a_{14}\,x + a_{24}\,y + a_{34}\,z + a_{44}\,q = 0. \qquad \text{(XVIII)}$$

De vergelijkingen (XVII) en (XVIII) te zamen bepalen de lijn A′ D.

De lijn B′ C verbindt de punten (2 3, 5 6 7) en (3 4, 6 1 8). Het vlak (5 6 7) is het poolvlak van 4 dus van het hoekpunt (1, 0, 0, 0) en heeft tot vergelijking

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a_{14}\,q = 0.$$

De lijn (2 3) is de doorsnede der vlakken (1 2 3) en (2 3 4), dus bepaald door $x = 0$ en $y = 0$. Het punt B′ is dus het snijpunt van drie vlakken met vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a_{14}\,q &= 0 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIX)}$$

Evenzoo is C het snijpunt der drie vlakken met de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} a_{13}\,x + a_{23}\,y + a_{33}\,z + a_{34}\,q &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XX)}$$

Uit (XIX) en (XX) blijkt dat B′C de snijlijn is der vlakken met vergelijkingen:

$$y = 0 \qquad \text{(XXI)}$$

$$\text{en} \quad \frac{x}{a_{34}} + \frac{z}{a_{14}} + \frac{q}{a_{13}} = 0 \qquad \text{(XXII)}$$

De vier vlakken voorgesteld door de vergelijkingen (XVII), (XVIII), (XXI) en (XXII) gaan door één punt, immers door het snijpunt der drie vlakken met vergelijkingen:

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$$y = 0, \quad q = 0 \quad \text{en} \quad a_{14}\, x + a_{34}\, z = 0,$$

dus gaan de lijnen A′D en B′C door datzelfde punt, m.a.w. snijden elkaar. Dus snijden ook A′B′ en CD elkaar. Op dezelfde wijze (of door een permutatie van cijfers) toonen we aan dat de vier punten A′, B′, E en F in één vlak gelegen zijn, waarmede de geheele stelling bewezen is.

§ 19. Hesse zelf heeft zijn Tweede Stelling op de volgende wijze[1]) uit de Eerste afgeleid:

Beschouw wederom 1 2 3 8 en 4 5 6 7 als poolviervlakken van een kwadratisch oppervlak en laten wij volstaan met te bewijzen dat de vier punten A′ = (1 2, 4 5 7), B′ = (2 3, 5 6 7), C = (3 4, 6 1 8) en D = (4 5, 1 2 8) in één plat vlak liggen. Noem het snijpunt (3 6, 1 4 8) = P. Van dit punt P op (3 6) zal het poolvlak gaan door de doorsnede (1 2 8, 4 5 7) dus bevatten de punten A′ en D. Omdat P in het vlak (1 4 8) ligt gaat het poolvlak van P ook door het punt (2 3, 5 6 7), dat is het punt B′. Om nu aan te toonen dat ook het vierde punt: C in ditzelfde vlak gelegen is verbinden we P met 4. Deze lijn (P 4) snijdt (1 8) in een punt dat we Q zullen noemen. Het poolvlak van Q gaat door 3 want Q ligt in het vlak (1 4 8). En van het punt 4 gaat het poolvlak door 6, want 4 ligt in het vlak (4 5 7). Nu zijn van de volledige vierzijde (Q 4), (3 6), (3 4), (Q 6) de hoekpunten Q en 3 en de hoekpunten 4 en 6 aan elkaar toegevoegd, dus zijn ook P en het snijpunt van (Q 6) en (3 4) aan elkaar toegevoegd, waaruit volgt dat het poolvlak van P ook dit laat-

[1]) Crelle's Journal 20 p. 305 = Hesse's Werke p. 46.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

ste snijpunt moet bevatten; dit is het punt (3 4, 1 6 8) = C.

De punten A′, B′, C en D zijn dus in één plat vlak gelegen, namelijk in het poolvlak van P = (3 6, 1 4 8).

§ 20. Later[1]) heeft Hesse zijn Tweede Stelling zonder de Eerste te gebruiken synthetisch bewezen in aansluiting aan zijne lineaire constructie van het achtste geassocieerde punt bij zeven gegeven punten. Zijn uitvoerige afleiding kan als volgt in een direct bewijs worden omgezet:

Vormen acht punten 1, 2, 3, ... 8 een systeem van geassocieerde punten, dan kan de lijn (18) beschouwd worden als de gemeenschappelijke beschrijvende lijn van twee kwadratische kegels, die beide de punten 2, 3, 4, 5, 6 en dus ook het overblijvende punt 7 bevatten. Dat er twee zulke kegels mogelijk zijn, blijkt als volgt. Noem de top T, dan moet T op de lijn (18) gelegen zijn. Brengt men een willekeurig vlak V aan, dat de beschrijvende lijnen (18), (T 2), ... (T 6) achtereenvolgens snijdt in de punten 1′, 2′, ... 6′ dan liggen deze laatste op een kegelsnede in V, dus bepalen de snijpunten P = (6′1′, 3′4′), Q = (1′2′, 4′5′) en R = (2′3′, 5′6′) een rechte lijn l (stelling van Pascal). Hieruit volgt dat de drie lijnen TP, TQ en TR in één plat vlak (Tl) gelegen zijn.

Deze drie lijnen zijn achtereenvolgens de doorsneden: (1 6 8, T 3 4), (1 2 8, T 4 5) en (T 2 3, T 5 6).

Het punt T is dus zóó gelegen dat deze doorsneden in één plat vlak (T l) gelegen zijn. In ditzelfde vlak

[1]) Crelle's Journal 26 (1843) p. 147—154 = Hesse's Werke p. 73—81

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

liggen ook de punten C = (3 4, 1 6 8) op T P en D = (4 5, 1 2 8) op T Q.

De lijn C D moet dus T R snijden, terwijl deze laatste ook (2 3) (in vlak T 2 3) en (5 6) (in vlak T 5 6) snijdt. Met andere woorden: het punt T is gelegen op de rechte T R welke de vier rechte lijnen (1 8), (2 3), (5 6), en C D snijdt, of: het punt T is het snijpunt van (1 8) met de hyperboloïde, welke bepaald is door de rechte lijnen (2 3), (5 6) en C D. Aangezien de lijn (1 8) deze hyperboloïde in twee punten (T en T') snijdt, zijn er ook twee kwadratische kegels mogelijk, welke de rechte (1 8) en de punten 2, 3, 4, 5, 6, 7 bevatten.

De hyperboloïde (2 3, 5 6, C D) is evenzeer bepaald door de beschrijvende lijnen der andere (tweede soort) welke door T en T' gaan èn door de lijn (3 5). (3 5) snijdt C D, want beide liggen in vlak (3 4 5), dus (3 5) is een beschrijvende lijn van de tweede soort. Wij kunnen dus dezelfde hyperboloïde bepalen door verwisseling van 4 met 7 waaruit volgt: de verbindingslijn der punten γ = (3 7, 1 6 8) en δ = (5 7, 1 2 8) is een beschrijvende lijn van de eerste soort (van dezelfde soort als C D).

Verbinden wij nu het punt δ = (5 7, 1 2 8) met B' = (2 3, 5 6 7) dan blijkt δ B' een beschrijvende lijn van de tweede soort te zijn; immers:

δ B' snijdt δ γ,

δ B' snijdt 2 3 want B' ligt op 2 3,

en δ B' snijdt 5 6 want B' ligt in 5 6 7 en δ op 5 7.

Hieruit volgt dat δ B' ook de beschrijvende lijn C D van de eerste soort moet snijden en dus: de

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

vier punten δ, B', C en D liggen in één plat vlak.

Op de verbindingslijn van δ = (5 7, 1 2 8) met D = (4 5, 1 2 8) ligt ook het punt A' = (1 2, 4 5 7) dus zijn ook in een plat vlak gelegen de punten: A' = (1 2, 4 5 7), B' = (2 3, 5 6 7), C = (3 4, 1 6 8), D = (4 5, 1 2 8) waaruit de Tweede Stelling onmiddellijk volgt.

Om bijv. aan te toonen dat ook de punten E, F, A' en B' in één plat vlak liggen behoeven wij slechts de punten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 te verwisselen resp. met de punten 5, 6, 1, 2, 3, 4, 8, 7.

Hierbij zij opgemerkt dat de Tweede Stelling van Hesse dus daarop berust dat de punten (1 2, 4 5 7), (2 3, 5 6 7), (3 4, 1 6 8) en (4 5, 1 2 8) in één plat vak liggen.

Ditzelfde kunnen wij ook aldus uitdrukken: De punten (2 3, 5 6 7) en (3 4, 1 6 8) liggen met de doorsnede (4 5 7, 1 2 8) in één vlak.

§ 21. Voor de afleiding van de Tweede Stelling heeft Hesse beschouwd een kwadratische kegel gebracht door vijf van acht geassocieerde punten en met een beschrijvende lijn gaande door twee andere van die punten.

Dobriner heeft opgemerkt [1]) dat het eenvoudiger is in plaats van een kegel een hyperboloïde te kiezen. Trekt men namelijk (1 8) en (5 7) dan bepalen de lijnen

[1]) Dobriner, Ueber das räumliche Achteck, welches die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung bilden (Acta Mathematica 12 (1889) p. 339). Dobriner heeft tevens ruimteuitbreidingen gegeven van de verdere eigenschappen van den Pascalschen zeshoek: punten van Steiner, Kirkman, lijnen van Cayley en Salmon. Zijne formuleeringen zijn niet symmetrisch.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

p = (2 1 S, 2 5 7), q = (4 1 S, 4 5 7) en r = (6 1 S, 6 5 7) een hyperboloïde waarop de punten 1, [illegible], 5, 7, 2, 4 en 6 en dus ook het punt 3 gelegen moeten zijn. Noemen we p, q en r beschrijvende lijnen der eerste soort, dan zijn (S 1) en (5 7) beschrijvende lijnen der tweede soort. Het nauwe verband tusschen de Stelling van Pascal en de Tweede Stelling van Hesse blijkt nu het eenvoudigst door (onder afwijking van Dobriner) de bedoelde hyperboloïde te snijden door het vlak (2 3 4). De doorsnede bevat de punten A = (1 S, 2 3 4) en B = (5 7, 2 3 4) en bovendien de punten 2, 3 en 4 en C = (r, 2 3 4), namelijk het snijpunt van de beschrijvende lijn door 6 met het vlak (2 3 4). Laten A, 2, 3, 4, B, C een zeshoek bepalen. De rechten (3 4) en A C snijden elkaar in het punt (3 4, 6 1 S). De rechten (2 3) en B C in (2 3, 5 6 7). Het snijpunt eindelijk van (B 4) met (A 2) is gelegen op de doorsnede (1 2 S, 4 5 7).

Volgens de Tweede Stelling liggen de punten (3 4, 6 1 S) en (2 3, 5 6 7) met de rechte (1 2 S, 4 5 7) in één plat vlak W, dus liggen de drie punten (3 4, A C), (2 3, B C) en (B 4, A 2) in één rechte, namelijk de doorsnede van W met (2 3 4), en dit is de Stelling van Pascal.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK IV.

De Stelling van Weddle.

§ 22. In het vorige hoofdstuk hebben wij de Tweede Stelling van Hesse afgeleid met diens eigen formuleering. Zij is een door haar gebrek aan symmetrie onvolkomen vertolking van een eigenschap der geassocieerde punten, welke eerst door Weddle [1]) ten volle is gewaardeerd in zijne Stelling:

Zijn de punten 1, 2, ... 8 geassocieerd dan hebben de vier doorsneden

(1 2 3, 5 6 7) = a, (2 3 4, 6 7 8) = b

(3 4 5, 7 8 1) = c en (4 5 6, 8 1 2) = d

hyperboloïdische ligging.

Deze Stelling kan worden afgeleid uit Hesse's Tweede Stelling. De laatste toch kwam daarop neer dat de doorsnede (4 5 7, 1 2 8) met de punten (2 3, 5 6 7) en (3 4, 1 6 8) in één plat vlak ligt. Om nu tot een symmetrische formuleering te geraken verwisselen wij eerst nog 6 en 7 met elkaar, dus gaan uit van de eigenschap: de punten (2 3, 5 6 7) en (3 4, 7 8 1) liggen met (4 5 6, 8 1 2) in één plat vlak, of, wat hetzelfde is: de rechte die de punten (2 3, 5 6 7) en (3 4, 7 8 1) verbindt snijdt de rechte

[1]) Thomas Weddle, On the theorems in space analogous to those of Pascal and Brianchon in a plane (Cambridge and Dublin mathematical journal vol. V (1850) p. 58).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

(4 5 6, 8 1 2) = d. De bedoelde rechte snijdt echter uit eigen aard reeds de doorsneden:
(1 2 3, 5 6 7) = a, (2 3 4, 6 7 8) = b en (3 4 5, 7 8 1) = c.

Passen we nu op de punten 1, 2, ... 8 tweemaal een cyclische permutatie toe, dan blijkt dat ook de rechten, die

(3 4, 6 7 8) en (4 5, 8 1 2)
en (4 5, 7 8 1) en (5 6, 1 2 3)

verbinden, elk de vier rechten a, b, c en d snijden. Deze laatste vier snijden dus de drie genoemde verbindingsrechten, waarmede de hyperboloïdische ligging bewezen is.

§ 23. Weddle kende vermoedelijk Hesse's Stelling niet en bewees de zijne analytisch. Eenvoudiger kan zij synthetisch uit Hesse's Eerste Stelling, zonder de Tweede te gebruiken, worden afgeleid. Daartoe bewijzen wij eerst nog de eigenschap, dat de doorsneden der zijvlakken van een viervlak met de poolvlakken der overstaande hoekpunten ten opzichte van een kwadratisch oppervlak, hyperboloïdische ligging hebben [1]). Zijn namelijk A, B, C en D de hoekpunten van het viervlak, α, β, γ en δ de overstaande zijvlakken en α', β', γ' en δ' de poolvlakken der hoekpunten ten opzichte van een kwadratisch oppervlak, dan zijn de doorsneden (α', δ), (β', δ) en (γ', δ) de poollijnen a', b' en c' van de hoekpunten van Δ ABC in δ. De doorsneden (α, α'), (β, β') en (γ, γ') snijden dus δ in de punten (a, a'), (b, b') en (c, c'). Volgens

[1]) De duale eigenschap werd bewezen door Chasles (Aperçu historique Note 32; zie ook Reye, Geometrie der Lage II, 4e Aufl. p. 275 : Aufg. und Lehrs. no. 88).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

een bekende eigenschap [1]) liggen deze drie punten op één rechte l, welke dus de drie doorsneden (α, α'), (β, β') en (γ, γ') snijdt, doch omdat ze in δ ligt, ook (δ, δ') zal snijden. Evenzoo bevat elk ander zijvlak van het viervlak A B C D een rechte welke de vier rechten (α, α'), (β, β'), (γ, γ') en (δ, δ') snijdt, waarmede hun hyperboloïdische ligging bewezen is. Kiest men nu (wat volgens Hesse's Eerste Stelling mogelijk is) een kwadratisch oppervlak, waarvan 3 8 1 2 en 4 5 6 7 poolviervlakken zijn en vormt men het viervlak met de zijvlakken;

(1 2 3), (2 3 4), (3 4 5) en (4 5 6)

dus met de hoekpunten:

4, (4 5, 1 2 3), (2 3, 4 5 6) en 3

dan zijn de poolvlakken van deze punten achtereenvolgens:

(5 6 7), (6 7 8), (7 8 1) en (8 1 2)

zoodat volgens de zooeven bewezen eigenschap de doorsneden:

(1 2 3, 5 6 7), (2 3 4, 6 7 8), (3 4 5, 7 8 1) en (4 5 6, 8 1 2)

hyperboloïdische ligging hebben.

§ 24. Schroeter [2]) heeft opgemerkt dat de symmetrisch geformuleerde Tweede Stelling van Hesse (Stelling van Weddle) evenzeer geldt voor acht punten eener kubische ruimtekromme [3]) als voor acht ge-

[1]) De snijpunten der zijden van een driehoek met de poollijnen der overliggende hoekpunten liggen op één rechte (Zie bijvoorbeeld: Reye, Geometrie der Lage II, 4e Aufl. p. 96).

[2]) Schroeter, Ueber die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung (Acta Mathematica 14 (1891) p. 207).

[3]) Voor acht punten eener kubische ruimtekromme bewees Buchheim deze stelling. Zie: Buchheim, An extension of Pascal's theorem to space of three dimensions (Messenger of Mathematics 14 (1885) p. 74).

PERPUSTAKAAN NASIONAL

associeerde punten, want voor het bewijs behoeft men niets anders te veronderstellen dan dat door de acht punten hyperboloïden gebracht kunnen worden. Zoo'n hyperboloïde wordt bijvoorbeeld voortgebracht door de projectieve vlakkenbundels 4 5 (1 2 3 6) en 7 8 (1 2 3 6). Snijdt men deze door het vlak (1 2 3), dan verkrijgt men in dit vlak twee projectieve stralenbundels met middelpunten (4 5, 1 2 3) en (1 8, 1 2 3) en deze brengen in (1 2 3) een kegelsnede voort waarop de zes punten:

1, 2, 3, (4 5, 1 2 3) = S_1, (1 2 3, 4 5 6, 6 7 8) = S_2

en (7 8, 1 2 3) = S_3

gelegen zijn. Volgens de Stelling van Pascal liggen nu de snijpunten:

(1 2, S_1 S_2), (2 3, S_2 S_3) en (3 S_1, S_3 1)

op één rechte l, of wat hetzelfde is:

(1 2, 4 5 6), (2 3, 6 7 8) en (1 2 3, 3 4 5, 7 8 1) liggen op één rechte l [1]) Deze wordt gesneden door elk der der vier rechten:

a = (1 2 3, 5 6 7), b = (2 3 4, 6 7 8), c = (3 4 5, 7 8 1)

en d = (4 5 6, 8 1 2)

want:

a ligt met l in één vlak: het vlak (1 2 3),

b gaat door (2 3, 6 7 8),

c gaat door (1 2 3, 3 4 5, 7 8 1) en

d gaat door (1 2, 4 5 6).

Op dezelfde wijze als wij een rechte l gevonden hebben in vlak (1 2 3), kunnen wij in elk der andere

[1]) Tot hetzelfde resultaat komt men door de projectieve puntrijen te beschouwen, volgens welke de projectieve vlakkenbundels door de rechten (1 2) en (2 3) gesneden worden. Zie Reye, Geometrie der Lage III, 4e Aufl. p. 229: Aufg. und Lehrs. no. 64.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

vlakken van den scheelen achthoek een lijn vinden, die elk der vier rechten a, b, c en d snijdt. Want door de cyclische permutatie der acht punten krijgt men andere projectieve vlakkenbundels, doch gaan de rechten a, b, c en d in elkaar over. Hieruit volgt dat de laatste hyperboloïdische ligging hebben.

§ 25. Wellicht onafhankelijk van Weddle heeft Zeuthen [1]) dezelfde stelling bewezen. Zeuthen echter leidde haar uit Hesse's Tweede Stelling af (zie § 22). Daartoe gebracht door een verhandeling van Dobriner (zie de noot op blz. 45) merkte hij op dat men Stellingen moet kunnen verkrijgen, analoog aan die van Steiner, Kirkman enz. voor de kegelsneden, door groepen van ingeschreven achthoeken van drie kwadratische oppervlakken te beschouwen. Hij bewees nu de volgende Stelling:

Verstaat men onder 1 2 3 4 5 6 7 8 de hyperboloïde met richtlijnen

$a = (1\,2\,3,\ 5\,6\,7),\ b = (2\,3\,4,\ 6\,7\,8),\ c = (3\,4\,5,\ 7\,8\,1)$

en $d = (4\,5\,6,\ 8\,1\,2)$

dan behooren:

1 2 3 4 5 6 7 8, 2 1 3 4 5 6 7 8, 1 2 4 3 5 6 7 8, 2 1 4 3 5 6 7 8,
1 2 3 4 6 5 7 8, 2 1 3 4 6 5 7 8, 1 2 4 3 6 5 7 8, 2 1 4 3 6 5 7 8,
1 2 3 4 5 6 8 7, 2 1 3 4 5 6 8 7, 1 2 4 3 5 6 8 7, 2 1 4 3 5 6 8 7,
1 2 3 4 6 5 8 7, 2 1 3 4 6 5 8 7, 1 2 4 3 6 5 8 7, 2 1 4 3 6 5 8 7

tot een lineairen complex.

Om deze stelling te bewijzen behoeven wij slechts

---

[1]) Zeuthen, Note sur les huits points d'intersection de trois surfaces du second ordre (Acta Mathematica 1 2 (1889) p. 362). Een vertaling van het voornaamste gedeelte van dit opstel vindt men in Reye, Geometrie der Lage III, 4e Aufl. p. 229: Aufg. und Lehrs. nos 65 en 66.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

aan te toonen dat de lineaire complex met toegevoegde lijnen a en d, b en c en welke de hyperboloïde 1 2 3 4 5 6 7 8 bevat, niet verandert door verwisseling van 1 met 2. Deze lineaire complex bevat als stralen de rechten (1 2), (3 4), (5 6), (7 8) welke immers achtereenvolgens a en d, b en c, a en d, b en c snijden. De complex is dus evenzeer bepaald door de toegevoegde lijnen a en d en de straal (3 4), welke die beide kruist. Verwisselt men nu 1 met 2 dan veranderen daardoor weliswaar b en c in e = (1 3 4, 6 7 8) en f = (3 4 5, 7 8 2) doch a en d en de stralen (1 2), (3 4), (5 6) en (7 8) blijven dezelfde. De complex met a en d, e en f als toegevoegde lijnen heeft nu met den vorigen complex de toegevoegde lijnen a en d en de straal (3 4) gemeen, dus valt daarmede geheel samen.

De lineaire complex blijft evenzoo onveranderd bij alle andere verwisselingen van de punten der paren (1 2), (3 4), (5 6) en (7 8). Door verwisseling echter der puntparen onderling kunnen uit den beschouwden lineairen complex twee andere worden afgeleid. Geeft men den eersten aan door (1 2, 3 4, 5 6, 7 8) dan zijn de andere (1 2, 5 6, 7 8, 3 4) en (1 2, 7 8, 3 4, 5 6).

Deze drie lineaire complexen hebben de vier stralen (1 2), (3 4), (5 6) en (7 8) gemeen, dus hebben zij een lineair stralenste sel (congruentie) gemeen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK V.

Derde Stelling van Hesse. Onderlinge afhankelijkheid van twee der punten, als de zes overige gegeven zijn.

§ 26. De Derde Stelling van Hesse luidt:

Van de kubische ruimtekromme, welke bepaald is door zes van acht geassocieerde punten, is de verbindingsrechte der beide andere een bisecante [1]).

Hesse heeft haar afgeleid bij zijne beschouwing der kwadratische kegels welke door zeven van acht geassocieerde punten gebracht kunnen worden en dan ook het achtste punt bevatten. Zooals we in § 20 gezien hebben zijn er twee kegels mogelijk, die de verbindingsrechte van twee der punten (1 en 8) als beschrijvende gemeen hebben en bovendien de punten 2, 3, 4, 5, 6 en dus ook 7 bevatten. Deze beide kegels hebben nu behalve de rechte (1 8) ook nog een kubische ruimtekromme gemeen welke door de punten 2, 3, 4, 5, 6 en 7 gaat. Van deze kubische ruimtekromme kan men een willekeurig aantal punten lineair construeeren. De verbindingsrechte van het punt $\gamma = (3\ 7, 1\ 6\ 8)$ met $\delta = (5\ 7, 1\ 2\ 8)$ is een beschrij-

[1]) Hesse, Ueber die lineäre Construction des achten Schnittpunctes etc. (Crelle's Journal 26 (1843) p. 150 = Hesse's Ges. Werke p. 76.)

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

vende van de eerste soort op de hyperboloïde welke bepaald werd door de rechten (beschrijvenden der eerste soort) (2 3), (5 6) en C D. Hadden we dus een ander punt 7′ op de kubische kromme dan zou ook de verbindingsrechte van $\gamma' = (3\ 7', 1\ 6\ 8)$ met $\delta' = (5\ 7', 1\ 2\ 8)$ een beschrijvende van dezelfde soort zijn. Hieruit kan omgekeerd een constructie van een willekeurig punt 7′ volgen: neem op de hyperboloïde een willekeurige beschrijvende lijn der eerste soort en bepaal de snijpunten γ' en δ' met de vlakken (1 6 8) en (1 2 8). Het snijpunt der lijnen $(\gamma'\ 3)$ en $(\delta'\ 5)$ is het gezochte punt 7′. Op deze wijze correspondeert met elke beschrijvende lijn van de hyperboloïde een punt op de kubische kromme. Met de beschrijvenden (2 3) en (5 6) komen overeen de punten 2 en 6, terwijl met 3 en 5 overeenkomen de beschrijvende lijnen der eerste soort, welke door de punten (3 5, 1 2 8) en (3 5, 1 6 8) gaan. De beschrijvende lijnen eindelijk, welke door T en T′ getrokken kunnen worden, komen overeen met de punten T en T′ zelve, dus deze punten behooren tot de kubische kromme, waarmede bewezen is dat de kubische ruimtekromme, bepaald door de punten 2, 3, 4, 5, 6, 7 in twee punten (T en T′) gesneden wordt door de lijn (1 8). Deze laatste is dus een bisecante.

Onafhankelijk van Hesse heeft H. Picquet[1]) hetzelfde verband van kubische ruimtekromme en

[1]) H. Picquet, Solutions de quelques problèmes relatifs aux surfaces du second degré (Crelle's Journal 73 (1871) p. 365). Dit opstel is door Picquet geschreven in den tijd dat hij als luitenant der genie Duitsch krijgsgevangene (te Stralsund) was in den oorlog van 1870—1871.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

geassocieerde punten gevonden. Hij merkte op dat de punten 1 en 8 in het algemeen niet gelegen zijn op de kubische kromme (2, 3, 4, 5, 6, 7). Trekt men nu door het punt 1 een bisecante welke die kromme snijdt in T en T', dan kan men twee kwadratische kegels verkrijgen door uit T en T' de kromme te projecteeren.[1]) Deze beide kegels hebben alleen de beschrijvende (bisecante) TT' en de kubische kromme gemeen, want alle andere beschrijvenden, welke elkaar niet in een punt der kromme snijden, moeten elkaar kruisen. De beide kegels bevatten de punten 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7, dus ook het punt 8. Het punt 8 moet dus gelegen zijn op de bisecante T T' of: (1 8) is bisecante van de kubische kromme (2, 3, 4, 5, 6, 7).

§ 27. Aan deze Derde Stelling van Hesse sluit zich gemakkelijk aan eene beschouwing van de onderlinge afhankelijkheid van twee der geassocieerde punten als de zes overige gegeven zijn. Deze afhankelijkheid

---

[1]) Door een kubische ruimtekromme uit een harer punten op een plat vlak te projecteeren verkrijgt men een kegelsnede. Deze projectie kan dus leiden tot een ruimteuitbreiding van de stelling van Pascal. Projecteeren we uit een punt 7 van de kubische kromme, welke door de punten 1, . . . 6 bepaald is, en geven we de projecties aan met 1' enz. dan liggen de snijpunten (1' 2', 4' 5'), (2' 3', 5' 6') en (3' 4', 6' 1') op één rechte l. Dus de punten (1 2, 4 5 7) (2 3, 5 6 7) en (3 4, 6 1 7) liggen met 7 in één vlak, namelijk het door 7 en l gebrachte. Dit is in woorden: „Wanneer in eene kromme van de derde orde een scheele zevenhoek is beschreven, dan zullen de vlakken van drie opvolgende hoeken van dien zevenhoek de overstaande zijden in drie punten snijden, die in een vlak door het aan de drie vlakken gemeenschappelijke hoekpunt gaande, zijn gelegen". (P. Zeeman, De kromme lijnen van de derde orde in de ruimte, dissertatie Leiden 1878).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

is onderzocht door Geiser en Sturm.[1]) Om haar te bespreken willen we eenigszins vooruitloopen op den inhoud van het volgende hoofdstuk en reeds nu opmerken dat Hesse's Derde Stelling tot de volgende constructie kan leiden van het achtste geassocieerde punt bij zeven gegeven punten.

Denk een kubische ruimtekromme $\varrho^{(3)}$ bepaald door zes der punten, bijv. 1, 2, 3, 4, 5 en 6 en trek uit het zevende punt 7 de bisecante l. Breng een kwadratisch oppervlak $O^{(2)}$ door de punten 1, ... 7 en overigens willekeurig, mits niet uit den bundel door l en $\varrho^{(3)}$ bepaald. Het tweede snijpunt van l met $O^{(2)}$ is het gezochte punt 8. Zijn 1, 2, 3, 4, 5 en 6 gegeven vaste punten dan zal bij elk punt 7 in het algemeen één punt 8 gevonden worden. Omgekeerd zal bij 8 weer het punt 7 als achtste punt verkregen worden. De zes vaste punten bepalen dus een involutie.

Uit de constructie blijkt dat in de volgende twee gevallen door een punt 7 niet één enkel punt 8 bepaald is:

als elk oppervlak $O^{(2)}$ door 1, ... 7 de geheele rechte l bevat,

als elk oppervlak $O^{(2)}$ de geheele kromme $\varrho^{(3)}$ bevat. Voor het eerste is noodig en voldoende dat 7 met twee der gegeven punten op één rechte ligt, en voor het tweede dat 7 op de kubische kromme $\varrho^{(3)}$ gelegen is. Hieruit volgt:

[1]) Geiser, Ueber zwei geometrische Probleme (Crelle's Journal 77 (1867) p. 83) en Sturm, Das Problem der Projectivität (Mathematische Annalen 1 (1869) p. 558). Zie ook: Eberhard, Über eine räumlich involutorische Verwandtschaft siebenten Grades und ihre Kernfläche vierter Ordnung, dissertatie Breslau 1885.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Met elk punt op de verbindingsrechte van twee der gegeven punten komen alle punten dier rechte overeen. En met elk punt der kromme $\varrho^{(3)}$ komen alle punten dier kromme overeen. Deze resultaten zijn geheel in overeenstemming met die van § 4. Ook blijkt nu dadelijk:

Met elk der punten P = 1, 2, 3, 4, 5 of 6 (dat is dus een punt der $\varrho^{(3)}$) komen overeen alle punten van het kwadratische kegeloppervlak, dat uit P de kromme $\varrho^{(3)}$ projecteert. Want bij elk punt S van zoo'n kegel behoort de top als 7.

§ 28. Doorloopt het punt 7 een rechte lijn a, *welke door geen der vaste punten gaat,* dan zal het punt S zekere kromme $\varrho^{(x)}$ beschrijven. De rechte a bepaalt met de vaste punten 1, 2, 3, 4, 5 en 6 een kwadratisch oppervlak $O^{(2)}$ en daarop moet de met a geassocieerde kromme $\varrho^{(x)}$ liggen. Bij elk punt 7 op a behoort een punt S′, dat ligt op de door 7′ gaande bisecante van de kubische ruimtekromme $\varrho^{(3)}$, welke door de punten 1, ... 6 bepaald is. Het snijpunt der bisecante met $O^{(2)}$ is S′. Alle bisecanten van $\varrho^{(3)}$, welke a snijden, brengen echter een oppervlak $O^{(4)}$ van den vierden graad voort [1]), dat de rechte a bevat en de kubische kromme $\varrho^{(3)}$ als dubbellijn (want door elk punt van $\varrho^{(3)}$ gaan twee bisecanten). De kromme $\varrho^{(x)}$ welke door S beschreven wordt moet zoowel op $O^{(2)}$ als op $O^{(4)}$ gelegen zijn, welke oppervlakken reeds de rechte a gemeen hebben, en dus liggen op de verdere doorsnede: dat is een ruimtekromme van den zevenden graad: $\varrho^{(7)}$. Deze bezit de zes vaste

[1]) Zie bijv. Reye, Geometrie der Lage II, 4te Auflage, p. 198.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

punten (op de $\varrho^{(3)}$) als dubbelpunten, terwijl de beschrijvende lijnen van $O^{(2)}$, welke met a van gelijke soort zijn (en die wij van de eerste soort zullen noemen) haar in vier, de beschrijvenden der andere (tweede) soort haar in drie punten snijden.

In elk der dubbelpunten P = 1, 2, 3, 4, 5 of 6 kunnen de raaklijnen der $\varrho^{(7)}$ aangegeven worden. Zooals wij boven zagen zijn met elk dier punten alle punten van den kwadratischen kegel, die de $\varrho^{(3)}$ uit het beschouwde punt projecteert, geassocieerd. Aldus is met 1 geassocieerd het kwadratische kegeloppervlak gaande door 2, 3, 4, 5 en 6. Hieruit volgt, dat 8 in 1 komt, als 7 komt in een der snijpunten S of S′ van a met dat kegeloppervlak. Het punt 8 is echter ook gelegen op de bisecante door 1 getrokken aan de kubische ruimtekromme welke bepaald is door de punten 2, ... 7. Hieruit volgt, dat de bisecanten uit 1 getrokken aan de beide kubische ruimtekrommen, welke resp. door 2, ... 6, S en 2, ... 6, S′ zijn bepaald, de raaklijnen zijn in 1 aan $\varrho^{(7)}$.

§ 29. In bizondere gevallen kan de graad der met een rechte a geassocieerde kromme lager dan zeven zijn. Snijdt a de verbindingsrechte van twee van de zes vaste punten, dan stemt met dit punt van a reeds overeen de geheele verbindingsrechte, dus zullen de oppervlakken $O^{(2)}$ en $O^{(4)}$ behalve deze rechte en a nog slechts een kromme $\varrho^{(6)}$ van den zesden graad gemeen hebben. Snijdt a de kubische ruimtekromme $\varrho^{(3)}$, dan is met dit punt van a reeds die geheele kromme geassocieerd en hebben de oppervlakken $O^{(2)}$ en $O^{(4)}$ behalve a en $\varrho^{(3)}$ nog een $\varrho^{(4)}$ gemeen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Hieruit zien we dat door de snijding van de rechte a met een der vijftien rechten welke de zes vaste punten verbinden, of door snijding met de $\varrho^{(3)}$, de graad der geassocieerde kromme verlaagd wordt met den graad der gesneden lijn.

Snijdt a één der genoemde vijftien rechten, bijvoorbeeld de rechte (1 2) dan hebben de oppervlakken $O^{(3)}$ en $O^{(4)}$ behalve de rechten a en (1 2) nog een ruimtekromme van den zesden graad $\varrho^{(6)}$ gemeen, die de punten 3, 4, 5 en 6 als dubbelpunten, doch 1 en 2 enkelvoudig bevat. Zij wordt door een beschrijvende van elke soort van $O^{(3)}$ in niet meer dan drie punten gesneden, want de beschrijvenden der eerste soort (welke met a van gelijke soort zijn) snijden het oppervlak $O^{(4)}$ in een punt van (1 2) en dus nog drie andere punten.

Snijdt a twee elkaar kruisende van de vijftien rechten, bijvoorbeeld (1 2) en (3 4), dan hebben de oppervlakken $O^{(2)}$ en $O^{(4)}$ behalve deze en de rechte a nog een ruimtekromme van den vijfden graad $\varrho^{(5)}$ gemeen, welke de punten 5 en 6 als dubbelpunten bevat, door de beschrijvenden der eerste soort van $O^{(2)}$ in twee en door die der tweede soort in drie punten gesneden wordt.

Snijdt a drie elkaar kruisende verbindingsrechten, bijvoorbeeld (1 2), (3 4) en (5 6) dan hebben $O^{(2)}$ en $O^{(4)}$ behalve deze en de rechte a nog een bikwadratische ruimtekromme $\varrho_1^{(4)}$ gemeen, waarop alle zes vaste punten enkelvoudig gelegen zijn en welke door de beschrijvenden der eerste soort van $O^{(2)}$ eenmaal, die der tweede soort driemaal gesneden wordt, waar-

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

uit blijkt dat zij een bikwadratische kromme der tweede soort is. Zij is gelegen op de hyperboloïde die door de rechten (1 2), (3 4) en (5 6) wordt bepaald. Er zijn vijftien zulke hyperboloïden mogelijk.

In het geval dat a in het vlak α van drie der vaste punten ligt en zij dus drie elkaar snijdende verbindingsrechten snijdt, valt het oppervlak $O^{(2)}$ uiteen in twee platte vlakken α en α', waarvan het eerste met $O^{(4)}$ de rechte a en de drie verbindingsrechten gemeen heeft. De met a geassocieerde ruimtekromme van den zevenden graad $\varrho^{(7)}$ valt dus in dit geval uiteen in drie rechten en nog een vlakke kromme van den vierden graad, die drie dubbelpunten heeft en eenmaal door a gesneden wordt.

Is a de doorsnede van twee der vlakken, waarin drie basispunten liggen, bijvoorbeeld de vlakken (1 2 3) en (4 5 6), dan is de $\varrho^{(7)}$ uiteengevallen in zeven rechten. Met elk der punten van a is de geheele rechte a geassocieerd. Met de zes snijpunten van a met de rechten (1 2), (2 3), (3 1), (4 5), (5 6) en (6 1) komen bovendien de rechten zelve overeen.

Snijdt a de kubische ruimtekromme $\varrho^{(3)}$ in één punt S, dan zal het oppervlak $O^{(4)}$ ontaarden in den kwadratischen kegel, die $\varrho^{(3)}$ uit S projecteert en de hyperboloïde, waarin ook $O^{(2)}$ overgaat. Er is dus nu, buiten de $\varrho^{(3)}$, geen eigenlijke doorsnede van $O^{(2)}$ en $O^{(4)}$. De met a geassocieerde $\varrho^{(7)}$ is uiteengevallen in de $\varrho^{(3)}$ (overeenkomende met het punt S) en nog een ruimtekromme van den vierden graad: $\varrho_2^{(4)}$, die éénmaal door de vaste punten gaat (de $\varrho^{(3)}$ gaat immers ook eenmaal door die punten). Met elk punt

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

7′ op a is geassocieerd één punt 8′ op de door 7′ gaande bisecante der $\varrho^{(3)}$. Hieruit volgt dat al zulke bisecanten (beschrijvenden der tweede soort van $O^{(2)}$) door $\varrho_2^{(4)}$ éénmaal gesneden worden. Deze bikwadratische kromme is dus van de tweede soort. Zij ontaardt in een kubische ruimtekromme en een rechte, als de rechte a buiten de $\varrho^{(3)}$ ook nog een der vijftien verbindingsrechten van de zes vaste punten snijdt. Snijdt a bijvoorbeeld ook de rechte (1 2) dan zijn met haar geassocieerd de $\varrho^{(3)}$ en (1 2) zelve en nog een kubische ruimtekromme $\varrho_1^{(3)}$ welke door de punten 3, 4, 5 en 6 gaat.

Snijdt a de kubische kromme $\varrho^{(3)}$ en bovendien twee elkaar kruisende der vijftien verbindingsrechten, bijvoorbeeld (3 4) en (5 6), dus ligt zij op een der 4 5 kwadratische oppervlakken die de $\varrho^{(3)}$ en twee zulke rechten bevatten, dan zal de met a geassocieerde kromme uiteenvallen in deze rechten en de $\varrho^{(3)}$ zelve en nog een kegelsnede welke door de punten 1 en 2 gaat en bovendien (3 4) en (5 6) moet snijden. Het vlak van deze kegelsnede kan lineair bepaald worden. Want met het snijpunt S van a met $\varrho^{(3)}$ komt op de kegelsnede een punt overeen, dat gelegen is in het vlak dat a en de raaklijn in S aan $\varrho^{(3)}$ bevat. Is S′ het snijpunt van dit laatste vlak met de $\varrho^{(3)}$, dan zal (1 2 S′) het vlak der kegelsnede zijn. Omgekeerd zal met een kegelsnede die $\varrho^{(3)}$, (3 4) en (5 6) snijdt en door de punten 1 en 2 gaat, een rechte lijn geassocieerd zijn die $\varrho^{(3)}$, (3 4) en (5 6) snijdt.

Snijdt a de kromme $\varrho^{(3)}$ in twee punten, dan is

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

zij bisecante dier kromme en is met haar geassocieerd de $\varrho^{(3)}$ (tweemaal geteld) en de rechte zelve. Het is niet mogelijk dat a de $\varrho^{(3)}$ in twee punten en bovendien nog een der vijftien verbindingsrechten snijdt, want dan zouden uit het snijpunt met die rechte twee bisecanten der $\varrho^{(3)}$ getrokken kunnen worden.

§ 30. In het bovenstaande maakten we het voorbehoud (zie § 28), dat de rechte a niet door een der zes vaste punten zou gaan. Is dit namelijk wel het geval, dan is het oppervlak $O^{(2)}$ niet langer door a en die vaste punten bepaald. Twee kwadratische oppervlakken $O_1^{(2)}$ en $O_2^{(2)}$, welke door a en de overige vijf punten gebracht kunnen worden hebben nog een kubische ruimtekromme $\varrho_2^{(3)}$ gemeen, waarvan a bisecante is. Een derde kwadratisch oppervlak $O_3^{(2)}$, gebracht door een punt 7 (op a) en de zes vaste punten snijdt $O_1^{(2)}$ en $O_2^{(2)}$ in een achtste punt, dat het zesde snijpunt is der $\varrho_2^{(3)}$ met $O_3^{(2)}$. Met de punten op a zijn nu dus geassocieerd alle punten der $\varrho_2^{(3)}$ welke bepaald is door: de vijf vaste, niet op a liggende punten en de bisecante a. Met het op a liggende vaste punt is (zie § 27) het kwadratisch kegeloppervlak geassocieerd, dat de $\varrho^{(3)}$ projecteert.

Gaat de rechte a door een der vaste punten (1) en snijdt ze bovendien de verbindingsrechte (2 3) van twee andere vaste punten dan is de kromme $\varrho_1^{(3)}$ ontaard in die verbindingsrechte en een kegelsnede welke door de drie overblijvende vaste punten 4, 5, 6 en de punten (2 3, 4 5 6) en (a, 4 5 6) gaat.

Gaat de rechte a door een der vaste punten en

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

snijdt ze bovendien de elkaar kruisende verbindingsrechten van twee paar der overige vijf vaste punten, dan is de kubische kromme $\varrho_2^{(3)}$ ontaard in die twee verbindingsrechten en een deze snijdende rechte, welke door het laatste (zesde) vaste punt gaat. Dit is in overeenstemming daarmede, dat alle kwadratische oppervlakken, welke de punten 2, 3, 4, 5, 6 en bovendien een door 1 gaande rechte a bevatten, die (2 3) en (4 5) snijdt, ook bevatten moeten de doorsnede (6 2 3, 6 4 5). Door elk der vaste punten kunnen vijftien zulke rechten getrokken worden, zoodat er totaal negentig zulke rechten mogelijk zijn.

§ 31. Daar met een rechte a in het algemeen een ruimtekromme van den zevenden graad geassocieerd is, zal het oppervlak dat met een plat vlak α is geassocieerd, ook van den zevenden graad zijn. Want een willekeurige rechte snijdt dit oppervlak $O^{(x)}$ in evenveel punten als de met die rechte geassocieerde kromme het vlak α snijdt. Het aantal dezer snijpunten is zeven, waaruit volgt dat met het platte vlak α een oppervlak $O^{(7)}$ is geassocieerd. Dit oppervlak bevat de kubische kromme $\varrho^{(3)}$ driemaal geteld want zij is geassocieerd met haar drie snijpunten met α.

Op dit oppervlak $O^{(7)}$ liggen verder de vijftien verbindingsrechten (enkel geteld) der vaste punten twee aan twee, want zij zijn geassocieerd met hunne snijpunten met α. Elke rechte door een der vaste punten gaande snijdt $O^{(7)}$ in nog drie punten, want de met haar geassocieerde kromme $\varrho_1^{(3)}$ heeft met α drie snijpunten. Hieruit volgt dat de zes vaste punten vier-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

voudig op $O^{(7)}$ liggen. Op dit oppervlak liggen bovendien nog de drie rechten welke de snijpunten van a met $\varrho^{(3)}$ onderling verbinden. Want a snijdt $O^{(7)}$ volgens deze bisecanten der $\varrho^{(3)}$, die met zichzelve overeenkomen en nog een kromme van den vierden graad wier punten samenvallend geassocieerd zullen zijn. De doorsnede van $O^{(7)}$ met het vlak van drie der zes vaste punten is (behalve de drie verbindingsrechten dier punten) een vlakke kromme van den vierden graad, welke geassocieerd is met de doorsnede van dit vlak met dat der andere vaste punten (zie § 29).

Het oppervlak $O^{(7)}$ bevat verder oneindig veel krommen $\varrho^{(7)}$ overeenkomende met de oneindig veel rechten a in a. Twee zulke krommen hebben behalve de zes vaste punten nog één punt gemeen, namelijk het overeenstemmende van het snijpunt der met die krommen geassocieerde rechten in a. Aan elke kromme $\varrho_1^{(7)}$ kan men een bepaalde kromme $\varrho_2^{(7)}$ toevoegen welke met haar op één kwadratisch oppervlak ligt en met haar de volledige doorsnede vormt van dit oppervlak met $O^{(7)}$. Want het oppervlak $O^{(2)}$ gebracht door een rechte a_1 in a bevat $\varrho_1^{(7)}$ op $O^{(7)}$, doch snijdt a volgens een tweede rechte a_2 en bevat dus tevens de daarmede geassocieerde kromme $\varrho_2^{(7)}$ op $O^{(7)}$.

Op het oppervlak $O^{(7)}$ liggen verder drie stelsels $S^{(4)}$ van oneindig veel bikwadratische ruimtekrommen der tweede soort, welke geassocieerd zijn met de stralenbundels, die de snijpunten van a en $\varrho^{(3)}$ als centrum bezitten. Twee zulke krommen van gelijk stelsel hebben behalve de basispunten geen snijpunt meer. Hetzelfde geldt voor de zesde-graads-krommen

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

der vijftien stelsels $S^{(6)}$, welke geassocieerd zijn met de vijftien stralenbundels die hun centrum op een verbindingsrechte der zes vaste punten hebben. Elk stelsel $S^{(4)}$ heeft (afgezien van de $\varrho^{(3)}$ en de verbindingsrechten) met elk stelsel $S^{(6)}$ een kubische ruimtekromme $\varrho_1^{(3)}$ gemeen, welke geassocieerd is met een rechte die $\varrho^{(3)}$ en een der verbindingsrechten snijdt. Door alle deze krommen wordt elke $\varrho^{(7)}$ behalve in de zes vaste punten nog eenmaal gesneden.

Met twee platte vlakken a_1 en a_2 zijn geassocieerd de oppervlakken $O_1^{(7)}$ en $O_2^{(7)}$, welke in het algemeen een ruimtekromme $\varrho^{(49)}$ van den graad 49 gemeen zullen hebben, terwijl met de doorsnede a der beide platte vlakken slechts een ruimtekromme $\varrho^{(7)}$ van den zevenden graad is geassocieerd. Deze schijnbare tegenstrijdigheid vindt hare verklaring daarin, dat de $\varrho^{(49)}$ uiteenvalt in:

de $\varrho^{(3)}$ welke op beide oppervlakken drievoudig is en dus als doorsnede negenmaal geteld moet worden,

de vijftien verbindingsrechten der vaste punten twee aan twee en

de $\varrho^{(7)}$ welke met de doorsnede van a_1 en a_2 is geassocieerd.

Inderdaad is $9 \times 3 + 15 + 7 = 49$.

§ 32. In bizondere gevallen zal het met een plat vlak a geassocieerde oppervlak $O^{(7)}$ uiteenvallen in oppervlakken van lageren graad.

Als a een der vaste punten, bijvoorbeeld het punt 1 bevat, dan is er behalve de bij dat punt behoorende kwadratische kegel nog een oppervlak van den vijfden graad $O^{(5)}$ mede geassocieerd. Daar elke door het be-

schouwde vaste punt 1 gaande rechte het oppervlak $O^{(5)}$ in nog drie punten snijdt (overeenstemmende met de drie snijpunten van $\varrho_2^{(3)}$ en α), is 1 een dubbelpunt op $O^{(5)}$. Elke door een der andere vaste punten gaande rechte snijdt echter $O^{(5)}$ in nog slechts twee punten (want de met zoo'n rechte geassocieerde kromme snijdt α in het daarin gelegen vaste punt en dus in nog twee punten) zoodat deze andere vaste punten drievoudig op $O^{(5)}$ liggen. De kromme $\varrho^{(3)}$ is dubbelkromme op $O^{(5)}$, want ze is geassocieerd met haar, niet met het punt 1 samenvallende snijpunten met α. Op $O^{(5)}$ liggen verder de tien verbindingsrechten der vijf drievoudige vaste punten. Het oppervlak $O^{(5)}$ wordt door het vlak α zelf gesneden volgens een niet door het punt 1 gaande bisecante der $\varrho^{(3)}$ en nog een kromme van den vierden graad. Op $O^{(5)}$ liggen nog oneindig veel ruimtekrommen van den zevenden graad, twee stelsels $S^{(4)}$ en tien stelsels $S^{(6)}$. Een der stelsels $S^{(4)}$ van $O^{(7)}$ is overgegaan in een stelsel kubische ruimtekrommen $\varrho_2^{(3)}$ en de deze snijdende beschrijvenden van den kwadratischen kegel, welke uit 1 de kubische kromme $\varrho^{(3)}$ projecteert.

Ook liggen op $O^{(5)}$ de twintig kubische krommen $\varrho_2^{(3)}$ die overeenkomen met de niet door het punt 1 gaande rechten in α, welke elk de $\varrho^{(3)}$ en één der tien verbindingsrechten van de punten 2, . . . 6 snijden. Bovendien liggen op $O^{(5)}$ de tien kegelsneden, die geassocieerd zijn met de rechten in α, die elk door 1 gaan en één van diezelfde verbindingsrechten snijden. Elk oppervlak $O^{(2)}$ dat door een rechte a van α en de zes vaste punten gebracht wordt, snijdt α volgens

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

een tweede rechte a_1 welke door 1 gaat. De doorsnede der oppervlakken $O^{(2)}$ en $O^{(5)}$ bestaat dus uit een $\varrho^{(7)}$ en de met a_1 geassocieerde $\varrho^{(3)}_2$.

Als α twee der vaste punten bevat, bijvoorbeeld de punten 1 en 2, ontaardt het oppervlak $O^{(7)}$ in de met die punten geassocieerde kwadratische kegels en nog een kubisch oppervlak $O^{(3)}$ waarop de overige vier vaste punten als dubbelpunten liggen. Elke rechte a in α snijdt de rechte (1 2). Het oppervlak $O^{(3)}$ bevat dus oneindig veel krommen $\varrho^{(6)}$; elke is de volledige doorsnede met het oppervlak $O^{(2)}$, dat door a en de zes vaste punten gebracht kan worden en dus ook de rechte (1 2) bevat. Op het oppervlak $O^{(3)}$ liggen twee stelsels van krommen $\varrho^{(3)}_2$ (zie de eerste alinea van § 30) en een stelsel van krommen $\varrho^{(3)}_1$ (zie de zevende alinea van § 29). Elk stelsel bevat zes kegelsneden. Ook liggen nog drie krommen $\varrho^{(4)}_1$ (zie de vierde alinea van § 29) op $O^{(3)}$. Verder liggen op dit oppervlak behalve de zes verbindingsrechten der vier vaste punten 3, 4, 5, 6 ook nog de drie rechten, welke geassocieerd zijn met de kegelsneden in α die gemeen hebben de punten 1, 2 en het derde snijpunt van $\varrho^{(3)}$ met α en verder bepaald zijn door de snijpunten (3 4, α) en (5 6, α), (3 5, α) en (4 6, α), (3 6, α) en (4 5, α). Deze drie kegelsneden snijden elkaar twee aan twee in een vierde punt, zoodat de drie met deze kegelsneden geassocieerde rechten elkaar ook twee aan twee snijden, d.w.z. in één plat vlak liggen. Zooals wij in § 29 (achtste alinea) gezien hebben, verbinden deze rechten de paren overstaande ribben van het viervlak 3 4 5 6.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Elke van de drie snijdt éénmaal $\varrho^{(3)}$, doch tweemaal elk der krommen $\varrho^{(6)}$ en $\varrho_1^{(4)}$ want de met deze laatste geassocieerde rechten snijden de drie kegelsneden elk in twee punten.

Bevat α eindelijk drie der vaste punten dan is het oppervlak $O^{(7)}$ uiteengevallen in een plat vlak gebracht door de andere vaste punten en de drie kwadratische kegels welke met de drie in α gelegen vaste punten geassocieerd zijn.

§ 33. Is eenmaal het verband bekend tusschen het zevende en achtste punt bij beweging van een dier beide langs een rechte lijn of over een plat vlak, dan kan daaruit het verband bij elke andere gegeven beweging worden afgeleid. Doorloopt bijvoorbeeld het punt 7 een ruimtekromme van den n^{den} graad: $\varrho^{(n)}$, dan zal het punt 8 een ruimtekromme $\varrho^{(x)}$ beschrijven. Met de 7n snijpunten van $\varrho^{(n)}$ en het met het vlak α geassocieerde oppervlak $O^{(7)}$ zijn ook geassocieerd 7n snijpunten van $\varrho^{(x)}$ met α, dus moet $x = 7n$ zijn, of: de met een $\varrho^{(n)}$ geassocieerde kromme is een $\varrho^{(7n)}$.

Beschrijft het punt 7 een oppervlak $O^{(n)}$ van den n^{den} graad, dan zal het punt 8 een oppervlak $O^{(y)}$ beschrijven. Met de 7n snijpunten van $O^{(n)}$ en de $\varrho^{(7}$ welke met een rechte a geassocieerd is, zijn geassocieerd ook 7n snijpunten van a en $O^{(y)}$. Hieruit volgt dat $y = 7n$ is, dus: het met een oppervlak van den n^{den} graad geassocieerde oppervlak is van den graad 7n.

In bizondere gevallen zal de $\varrho^{(7n)}$ welke met een $\varrho^{(n)}$ en het $O^{(7n)}$ welke met een $O^{(n)}$ is geassocieerd uiteenvallen in krommen, resp. oppervlakken van

lageren graad, waarvan we reeds enkele voorbeelden gezien hebben.

§ 34. Ten slotte willen we nog de punten 7 opzoeken, welke met het geassocieerde punt 8 samenvallen. Daartoe beschouwen we de in § 27 genoemde constructie met geringe wijziging. Het punt 8 zou even goed gevonden kunnen worden door een kubische ruimtekromme $\varrho_1^{(3)}$ te brengen door de punten 2, 3, 4, 5, 6, 7 en uit 1 de bisecante m van die kromme te trekken. Brengt men vervolgens een kwadratisch oppervlak $O^{(2)}$ door de zeven punten, dan zal het tweede snijpunt van m met $O^{(2)}$ het punt 8 zijn. Hieruit volgt: 8 valt samen met 7 als m gaat door 7, dus als de lijn (1 7) bisecante is der $\varrho_1^{(3)}$. Dit is het geval als de zes rechten (7 1), (7 2), . . . , (7 6) op een kwadratisch kegeloppervlak liggen en dus zijn de toppen der kwadratische kegels, welke door de zes vaste punten gebracht kunnen worden, die punten waarin 7 en 8 samenvallen. De meetkundige plaats dier punten is dientengevolge een oppervlak, dat zal moeten bevatten:

de vijftien rechten welke de zes punten twee aan twee verbinden,

de tien rechten welke de doorsneden zijn van de tien vlakkenparen, die door de zes punten kunnen gebracht worden.

Het is bekend, dat dit oppervlak — het oppervlak van Jacobi uit de lineaire verzameling van kwadratische oppervlakken door zes punten — van den vierden graad is. Uit onze behandelingswijze blijkt dit aldus: Op elke door een der punten P = 1, 2,

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

3, 4, 5 of 6 gaande rechte l liggen de toppen T en T′ van twee kwadratische kegels welke de zes vaste punten bevatten. Deze punten T en T′ moeten tot de meetkundige plaats behooren zoodat elke rechte l haar behalve in P nog in twee punten snijdt. Is g de graad van het oppervlak en v de veelvoudigheid van P daarop, dan moet dus:

$$g = v + 2.$$

Elke top T ligt met de vijf overblijvende van de zes vaste punten op een kubische ruimtekromme welke ook T′ bevat. Het aantal snijpunten van deze kromme met het oppervlak bedraagt dus

$$3\,g = 5\,v + 2.$$

Uit de twee vergelijkingen volgt:

$$g = 4 \quad \text{en} \quad v = 2.$$

Het kernoppervlak is dus van den vierden graad, bevat de zes vaste punten als dubbelpunten, de bovengenoemde vijf-en-twintig rechten en bovendien de kubische ruimtekromme $\varrho^{(3)}$, welke door de zes punten is bepaald.

Dat dit kernoppervlak van den vierden graad is stemt overeen met de reeds verkregen uitkomst (zie § 28) dat een rechte a en de met haar geassocieerde $\varrho^{(7)}$ vier punten gemeen hebben. Is de rechte a bisecante der kromme $\varrho^{(3)}$ dan komt met elk punt 7 op a een punt 8 overeen eveneens op a gelegen. Daardoor wordt op a een involutie bepaald waarin de snijpunten van a en $\varrho^{(3)}$ met elkaar overeenstemmen, terwijl de twee overblijvende snijpunten van a met het kernoppervlak dubbelpunten der involutie zijn. Hieruit volgt: de bisecanten der $\varrho^{(3)}$ snijden het kernoppervlak $O^{(4)}$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

behalve in de $\varrho^{(3)}$ nog in twee punten, welke door de eerste twee harmonisch gescheiden zijn.

De doorsnede van het oppervlak $O^{(4)}$ met een plat vlak α is tevens de gedeeltelijke doorsnede van α en het daarmede geassocieerde oppervlak $O^{(7)}$ (zie § 31), dus ook van $O^{(4)}$ en $O^{(7)}$. De volledige doorsnede der oppervlakken $O^{(4)}$ en $O^{(7)}$ bestaat uit de $\varrho^{(3)}$ driemaal geteld, de vijftien verbindingsrechten der zes vaste punten twee aan twee en de bovengenoemde vlakke kromme van den vierden graad.

Weten we eenmaal, dat de meetkundige plaats van de toppen der kegels uit de verzameling van kwadratische oppervlakken met zes basispunten een oppervlak van den vierden graad is, dan volgt hieruit gemakkelijk dat de meetkundige plaats der toppen van de kegels uit een net een ruimtekromme van den zesden graad is. Zijn namelijk 1, . . . 7 basispunten van het net dan bepalen de punten 1, . . 6 een verzameling met kernoppervlak $O_1^{(4)}$ en de punten 2, . . . 7 een verzameling met kernoppervlak $O_2^{(4)}$. De doorsnede dier beide oppervlakken bevat de toppen der kegels uit het net en die punten, welke top zijn van twee kwadratische kegels, de eene door 1, . . . 6, de andere door 2, . . . 7. De meetkundige plaats van deze laatste punten wordt gevormd door de tien rechten die de vijf punten 2, 3, 4, 5 en 6 twee aan twee verbinden. De $\varrho^{(10)}$, welke doorsnede is van $O_1^{(4)}$ en $O_2^{(4)}$ valt dus uiteen in deze tien rechten, die niet tot de gezochte meetkundige plaats behooren, en nog een ruimtekromme van den zesden graad.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK VI.

Constructies van het achtste punt.

§ 35. De opgave bij zeven snijpunten van drie kwadratische oppervlakken het achtste op lineaire wijze te construeeren, heeft vele wiskundigen bezig gehouden. Na Hesse hebben v. Staudt, H. Müller, Sturm, P. Serret, Picquet, Reye, Schroeter, Zeuthen en Caspary constructies gepubliceerd, waarvan sommige zich onderscheiden in beginsel, andere slechts wedijveren in eenvoud van practische uitvoering.

Elk der drie stellingen van Hesse, in het voorgaande behandeld, geeft aanleiding tot een constructie van het achtste punt. Doch dit punt kan evenzeer gevonden worden door slechts gebruik te maken van de fundamenteele eigenschap, dat het het *achtste* snijpunt is van drie kwadratische oppervlakken welke door de zeven gegeven punten gebracht kunnen worden. Reye heeft o.a. den laatsten weg gekozen[1]) en voor de drie kwadratische oppervlakken hyperboloïden gekozen. Laten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 de gegeven punten zijn, bepaalt men de doorsneden:

$(2\,3\,4,\ 2\,5\,6) = l_2$, en $(1\,3\,4,\ 1\,5\,6) = l_1$

en trekt men door 7 een lijn p_{12}, die zoowel l_1

[1]) Lineare Construction des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiter Ordnung (Crelle's Journal 100 (1887) p. 487 en ook Geometrie der Lage III, 4te Aufl. p. 227).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

als l_2 snijdt, dan wordt door de drie rechten p_{12}, (3 4) en (5 6) een hyperboloïde bepaald, waarop de zeven gegeven punten gelegen zijn. Daarbij is dus

$$(7\,l_1,\ 7\,l_2) = p_{12}$$

Door verwisseling van elk der puntenparen 3, 4 en 5, 6 met het puntenpaar 1, 2 worden twee andere hyperboloïden verkregen, welke eveneens de zeven gegeven punten bevatten. Daarbij bepalen we dus de doorsneden:

$$(3\,1\,2,\ 3\,5\,6) = l_3\ ,\quad (4\,1\,2,\ 4\,5\,6) = l_4,$$
$$(7\,l_3,\ 7\,l_4) = p_{34},$$
$$(5\,1\,2,\ 5\,3\,4) = l_5\ ,\quad (6\,1\,2,\ 6\,3\,4) = l_6,$$
$$(7\,l_5,\ 7\,l_6) = p_{56}.$$

Het punt S moet op alle drie de hyperboloïden liggen, dus op:
een lijn a, die p_{12}, (3 4) en (5 6) snijdt,
een lijn b, die (1 2), p_{34}, en (5 6) snijdt,
een lijn c, die (1 2), (3 4) en p_{56} snijdt.

De drie in 7 samenkomende rechten p_{12}, p_{34} en p_{56} bepalen drie platte vlakken:

$(p_{34},\ p_{56}) = \alpha$, $(p_{56},\ p_{12}) = \beta$ en $(p_{12},\ p_{34}) = \gamma$.

Noemen we verder nog de snijpunten:

$(a,\ p_{12}) = A$, $(b,\ p_{34}) = B$ en $(c,\ p_{56}) = C$.

Het vlak door a en b (die elkaar in S zullen snijden) gebracht bevat (5 6) en A B. Van deze laatste rechte is het punt

$$(5\,6,\ \gamma) = C'$$

bekend. Evenzoo zijn van B C en C A de punten

$$(1\,2,\ \alpha) = A' \text{ en } (3\,4,\ \beta) = B'$$

bekend, waaruit volgt dat de zijden van den driehoek ABC gevonden worden als:

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

$(A'B'C', \alpha) = BC, (A'B'C', \beta) = AC$ en $(A'B'C', \gamma) = AB$.

Het snijpunt der drie vlakken

(A 3 C), (B 1 C) en (A 5 B)

is het gezochte punt 8.

Er wordt door deze constructie geen bepaald punt 8 gevonden, als de drie punten A', B' en C' op één rechte liggen, want dan is het vlak (ABC) door die punten niet bepaald. Dit geval zal zich voordoen, als de drie hyperboloïden een rechte, een kegelsnede of kubische ruimtekromme gemeen hebben en elk punt van die doorsnede als punt 8 kan worden beschouwd (vergelijk § 4 en § 27). De constructie van Reye kan ook wel toegepast worden in het geval dat vier der zeven punten, bijvoorbeeld 1, 2, 3 en 4 in één plat vlak liggen. In dit geval echter zal het punt 8 eenvoudiger op de volgende wijze [1]) kunnen gevonden worden. Het moet nu (zie § 4) in het vlak (5 6 7) liggen. De kwadratische oppervlakken van het net, dat door de zeven gegeven punten is bepaald, snijden nu elk der vlakken (1 2 3 4) en (5 6 7) volgens een bundel van kegelsneden en deze bepalen op de doorsnede dier vlakken een involutie. In deze involutie zijn aan elkaar toegevoegd de punten:

(1 2, 5 6 7) en (3 4, 5 6 7)
(1 3, 5 6 7) en (2 4, 5 6 7).

Bepalen wij nu het aan (5 6, 1 2 3 4) toegevoegde punt P en het aan (5 7, 1 2 3 4) toegevoegde punt

---

[1]) H. Picquet, Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadriques (Bulletin de la Société Math. de France 22 (1894) p. 21.)

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Q, dan zal S gevonden worden als snijpunt van (7 P) en (6 Q).

§ 36. Hesse heeft uit elk van zijne stellingen een constructie afgeleid. Die welke uit de Eerste Stelling volgt [1]) is door Schroeter [2]) iets vereenvoudigd. Tot dezelfde constructie komt ook Sturm [3]), terwijl de constructies van Zeuthen [4]) en Serret [5]), die de acht punten verdeelt in een vijftal en een drietal, welke een poolvijfhoek en een pooldriehoek bepalen (zie § 12), in uitvoering ongeveer dezelfde zijn.

Volgens Hesse's Eerste Stelling kunnen acht geassocieerde punten verdeeld worden in twee viertallen, welke de hoekpunten zijn der poolviervlakken van eenzelfde kwadratisch oppervlak. Zijn wederom 1, ... 7 de gegeven punten dan kan men 1 2 3 4 als poolviervlak en 5 6 7 als pooldriehoek van eenzelfde polair systeem beschouwen en de vraag is dan de pool S van het vlak (5 6 7) te bepalen. In het vlak (5 6 7) bepalen de ribben van 1 2 3 4 zes snijpunten:
(1 2, 5 6 7) = A (1 3, 5 6 7) = B (1 4, 5 6 7) = C
(3 4, 5 6 7) = A_1 (2 4, 5 6 7) = B_1 (2 3, 5 6 7) = C_1

[1]) De octo punctis etc. (Crelle's Journal 20 (1840) p. 303 en vlg. = Hesse's Ges. Werke p. 44 en vlg.)

[2]) Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung (Crelle's Journal 99 (1886) p. 131).

[3]) Das Problem der Projectivität (Mathematische Annalen 1 (1869) p. 533 en 22 p. 569) en Ueber den achten Schnittpunkt dreier Flächen zweiter Ordnung (Crelle's Journal 99 (1886) p. 317).

[4]) Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre (Mathematische Annalen 18 (1881) p. 63) en Constructions du huitième point commun aux surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés (Crelle's Journal 99 (1886) p. 322, ook: Oversigt over het kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1880. p 28 en 227).

[5]) Géométrie de direction, p. 316.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

welke twee aan twee aan elkaar zijn toegevoegd. Deze zes punten liggen drie aan drie in één rechte; immers zij bepalen de vier rechte lijnen:

$A\ B\ C_1 = (1\ 2\ 3,\ 5\ 6\ 7)$, $A\ B_1\ C = (1\ 2\ 4,\ 5\ 6\ 7)$,
$A_1\ B\ C = (1\ 3\ 4,\ 5\ 6\ 7)$, $A_1 B_1 C_1 = (2\ 3\ 4,\ 5\ 6\ 7)$.

In het vlak (5 6 7) is het polaire systeem niet overbepaald door den pooldriehoek en drie paar correspondeerende punten, want het derde paar volgt uit de beide andere paren. Bijvoorbeeld is C het snijpunt van $A_1 B$ en $A B_1$, terwijl C_1 het snijpunt is van $A B$ en $A_1 B_1$.

Om nu de pool S van het vlak (5 6 7) te bepalen, construeeren wij de poolvlakken van drie punten van dit vlak. Voor die drie punten kunnen wij A, B en C kiezen. Is in het vlak (5 6 7) de rechte a poollijn van A (a gaat door A_1) dan is het vlak dat a en (3 4) bevat het poolvlak van A (a en (3 4) snijden elkaar in A_1). Van de poollijn a behoeft slechts één punt A′ bepaald te worden, dan is (A′ 3 4) het poolvlak van A. Om het punt A′ van de poollijn a te construeeren maken we gebruik van de eigenschap, dat alle rechten a′, welke poollijnen zijn van A in de polaire systemen, welke behalve den pooldriehoek 5 6 7 alle nog het paar $B B_1$ als toegevoegde punten bezitten, door éénzelfde punt gaan en dit laatste kan dus als A′ gekozen worden. Het wordt gevonden door de straleninvolutie te gebruiken, welke door de paren 5 6, 5 7 en 5 B en 5 B_1 worden bepaald. In deze involutie komt met (5 A) een bepaalde straal $(5\ S) = a'_5$ overeen. S is dan het tegenover A liggende hoekpunt van de volledige vierzijde waarvan

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

B en B_1 en (5 6, A B) en (5 7, A B_1) de andere hoekpunten zijn. Verwisselen wij 5 met 6, dan vinden wij in de nieuwe involutie een met (6 A) overeenkomende straal a'_6. Het snijpunt van a'_5 en a'_6 is het gezochte punt A'. Op dezelfde wijze kunnen wij bepalen een punt B' op de poollijn b van B en een punt C' op de poollijn c van C. Het snijpunt der drie poolvlakken (A' 3 4), (B' 2 4) en (C' 2 3) van resp. de punten A, B en C is de pool van het vlak (A B C) of (5 6 7), dus het gezochte punt 8.

§ 37. Hesse heeft bij de afleiding der Tweede Stelling terloops (zie § 28) de Derde Stelling gevonden en daaruit onmiddellijk een constructie afgeleid voor het achtste punt [1]). Volgens de Derde Stelling moet 8 gelegen zijn op de door 1 getrokken bisecante van de kubische ruimtekromme, welke door de zes overige punten 2, ... 7 is bepaald. Verwisselt men vervolgens het punt 1 met een der punten 2, 3, 4, 5, 6 of 7, bijvoorbeeld met 7, dan moet 8 ook liggen op de bisecante door dat punt 7 aan de kubische ruimtekromme (1, 2, 3, 4, 5, 6) getrokken. Het snijpunt der bisecanten is het gezochte punt 8.

De vraag naar het achtste geassocieerde punt is hiermede teruggebracht tot de constructie van een rechte welke door een gegeven punt gaat en bisecante is van een kubische ruimtekromme, welke door zes gegeven punten gaat. Hesse beschouwt daartoe de bisecante wederom als de beschrijvende lijn welke twee kwadratische kegels gemeen hebben, die de

[1]) Ueber die lineäre Construction des achten Schnittpunktes etc. (Crelle's Journal 26 (1843) p. 152 = Hesse's Ges. Werke p. 79).

PERPUSTAKAAN NASIONAL

punten 2, 3, 4, 5, 6 en 7 bevatten en het punt 1 op die beschrijvende. Zooals uit de beschouwingen van het derde hoofdstuk blijkt kan deze beschrijvende lijn (1 8) op de volgende wijze gevonden worden: zij is de doorsnede der vlakken (1 2 D) en (1 6 C) als (4 5, 1 2 8) = D en (3 4, 1 6 8) = C. Wij moeten dus deze punten C en D bepalen zonder het punt 8 te gebruiken. Daartoe bepalen wij twee punten van de rechte C D. Volgens de Tweede Stelling van Hesse moeten A′ B′ en C D en ook E′ F′ en C D elkaar snijden. Bepaal dus de punten (1 2, 4 5 7) = A′ en (2 3, 5 6 7) = B′ en daarna het snijpunt van A′B′ met (3 4 5). Bepaal vervolgens de punten (5 6, 2 3 7) = E′ en (1 6, 3 4 7) = F′ en het snijpunt van E′F′ met (3 4 5). De verbindingsrechte vervolgens van (A′B′, 3 4 5) met (E′F′, 3 4 5) snijdt (3 4) in C en (4 5) in D. De doorsnede (1 2 D, 1 6 C) is de gezochte lijn (1 8).

Een andere constructie der bisecante is gegeven door Picquet [1]), die gebruik maakte van de eigenschap dat de ∞^2 kwadratische oppervlakken welke door een kubische ruimtekromme gebracht kunnen worden een net vormen en dat de poolvlakken van een punt P ten opzichte van alle netoppervlakken door één punt P_1 gaan. Dit punt P_1 zal gelegen moeten zijn op de bisecante gaande door het punt P, zoodat de bisecante door P bekend is, als het punt P_1 gevonden is. Nu

[1]) Solutions de quelques problèmes relatifs aux surfaces du second degré (Crelle's Journal 73 (1871) p. 365). Over deze en andere constructies schrijft Picquet ook later (Crelle's Journal 99 (1886) p. 259 en Bulletin de la Soc. Math. de France 22 (1894) p. 19). Zie ook dit proefschrift § 42.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

behooren tot de ∞^2 kwadratische oppervlakken, welke door de kubische ruimtekromme (2, 3, 4, 5, 6, 7) gebracht kunnen worden, ook ∞ kwadratische kegels, waarvan de toppen op de kromme gelegen zijn. Kiest men hieruit drie kegels en bepaalt men de poolvlakken van het punt 1, dan zal het snijpunt S dier poolvlakken een punt van de door 1 gaande bisecante zijn. Dit snijpunt S kan op eenvoudige wijze gevonden worden door de toppen der kegels in de punten 2, 3 en 4 te kiezen. Nu projecteeren wij:

uit 2 de punten 3, 4, 5, 6, 7 op het vlak (1 6 7); de projecties zijn 3_2, 4_2, 5_2, 6, 7,

uit 3 de punten 2, 4, 5, 6, 7 op hetzelfde vlak; de projecties zijn 2_3, 4_3, 5_3, 6, 7,

uit 4 de punten 2, 3, 5, 6, 7 op hetzelfde vlak; de projecties zijn 2_4, 3_4, 5_4, 6, 7.

Daarbij valt op te merken dat $3_2 \equiv 2_3$, $4_2 \equiv 2_4$ en $4_3 \equiv 3_4$ is. Telkens bepalen in het vlak (1 6 7) de vijf projecties een kwadratische kromme, ten opzichte waarvan de poollijnen p_2, p_3, en p_4 van het punt 1 op lineaire wijze geconstrueerd kunnen worden. Dan zijn de vlakken $(2\ p_2)$, $(3\ p_3)$ en $(4\ p_4)$ de poolvlakken van het punt 1 ten opzichte van de drie kegels. Het snijpunt S dier vlakken, verbonden met 1, levert de gezochte bisecante. Verwisselt men daarna 1 met 7 en bepaalt men in hetzelfde vlak (1 6 7) de projecties 3_2, 4_2, 5_2, 6, 1 enz. dan vindt men een tweede bisecante (nu door 7) en daarmede het punt S.

De constructie van het achtste geassocieerde punt met behulp van de bisecante eener kubische ruimte-

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

kromme wordt ook aangegeven door Reye [1]). Deze denkt, evenals H. Müller [2]), de bisecante bepaald door een hyperboloïde, welke, behalve de kubische kromme $\varrho^{(3)}$ door 1, 2, 3, 4, 5, 6 gebracht, ook nog het punt 7 bevat. Om deze hyperboloïde te bepalen brengen we de vlakken (1 5 7) en (1 6 7) aan, welke de ϱ^3 snijden in de (onbepaald te blijven) punten Y en X. De rechten (5Y) en (6X) zijn beschrijvenden der hyperboloïde. De rechten

(7 1), (2 6X, 2 5Y) $= l_2$ en (3 6X, 3 5Y) $= l_3$

zijn beschrijvenden der andere soort. Volgens de uitgebreide stelling van Pascal [3]) liggen de punten:

(1 2, 4 5 6) (2 3, 5 6X) en (3 4, 6X 1) met 6

in één plat vlak α. Dus liggen eveneens in dit vlak de punten:

(1 2, 4 5 6), (2 3, 5 6X), (3 4, 6 7 1) en 6.

Construeeren wij dit vlak α door de drie bekende punten (1 2, 4 5 6), (3 4, 6 7 1) en 6 en bepalen wij het snijpunt (2 3, α) dan is hiermede een punt gevonden, dat met (5 6) het vlak (5 6X) geheel bepaalt, wiens doorsnede met (6 7 1) de rechte (6X) is. Bepaalt men vervolgens op dezelfde wijze de rechte 5Y en de doorsneden:

(2 6X, 2 5Y) $= l_2$ en (3 6X, 3 5Y) $= l_3$

dan zal de rechte welke 7 verbindt met het snijpunt (l_3, l_2 7) de bisecante door 7 zijn. Om op deze bisecante nu nog het punt 8 te bepalen, moet 7 met een der

---

[1]) Geometrie der Lage III, 4te Aufl. p. 39.

[2]) Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung (Mathematische Annalen 1 (1869) p. 407).

[3]) Zie de noot op blz. 55.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

andere punten worden verwisseld, bijvoorbeeld met 6 en nu van de hyperboloïde die 6 verbindt met de kubische ruimtekromme (1, 2, 3, 4, 5, 7) een beschrijvende der tweede soort worden bepaald.

§ 38. Eenvoudig is de constructie, welke geheel op Hesse's Tweede Stelling berust [1]) en waarop door Caspary [2]) nog eens nadrukkelijk is gewezen. Noemen wij, evenals in § 18:

$$(1\,2,\ 4\,5\,8) = A \qquad (2\,3,\ 5\,6\,8) = B$$
$$(3\,4,\ 1\,6\,7) = C' \qquad (4\,5,\ 7\,1\,2) = D'$$
$$(5\,6,\ 7\,2\,3) = E' \qquad (6\,1,\ 7\,3\,4) = F'$$

dan moet volgens de Tweede Stelling van Hesse de rechte A B zoowel C' D' als E' F' snijden. Van de rechte A B kunnen dus bepaald worden de punten (C' D', 1 2 3) en (E' F', 1 2 3). Is l de lijn die deze laatste punten verbindt, dan vinden wij A als snijpunt van l met (1 2), B als snijpunt van l met (2 3).

Volgens dezelfde stelling wordt E' D' door B C gesneden, als (3 4, 1 6 8) = C genoemd is. Van de rechte B C wordt na B een tweede punt gevonden als snijpunt van E' D' met (2 3 4). Is m de rechte welke dit snijpunt met B verbindt, dan is (m, 3 4) = C. Het snijpunt der vlakken (A 4 5), (B 5 6) en (C 6 1) is het gezochte punt S.

Deze constructie blijft ook geldig, als de zeshoek A' B' C' D' E' F' (zie § 18) welke volgens Hesse's Tweede Stelling met den zeshoek A B C D E F op

---

[1]) Ueber die lineäre Construction des achten Schnittpunktes etc. (Crelle's Journal 26 (1843) p. 154 = Hesse's Ges. Werke p. 81)

[2]) Zur Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung (Crelle's Journal 99 (1886) p. 128).

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

eenzelfde hyperboloïde ligt, niet langer scheel, doch vlak is. Is namelijk α dan het vlak van dien zeshoek, dan zal de rechte l welke de snijpunten (C′ D′, 1 2 3) en (E′ F′, 1 2 3) verbindt nu tevens de doorsnede (α, 1 2 3) dus A′ B′ voorstellen. Echter is (l, 1 2) = A en (l, 2 3) = B, waaruit volgt dat A met A′ en B met B′ zal samenvallen. Maar dan moeten ook de overige hoekpunten der zeshoeken twee aan twee samenvallen en dus vallen de punten S en 7 (de snijpunten der hoofddiagonalen) tevens samen. Zooals wij in § 34 zagen is dit het geval, als het punt 7 de top is van een kwadratischen kegel die de punten 1, ... 6 bevat. Dáár leidden wij dit af uit een constructie berustend op de Derde Stelling van Hesse. Het is echter even gemakkelijk uit de nu behandelde constructie af te leiden. Want is de zeshoek A′ B′ C′ D′ E′ F′ niet scheel, doch vlak (gelegen in α) en projecteeren wij uit het punt 7 den zeshoek 1 2 3 4 5 6 op een plat vlak β, de projectie 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′ noemende, dan ziet men dat de hoofddiagonalen A′ D′, B′ E′ en C′ F′, dat zijn de doorsneden:

(7 1 2, 7 4 5), (7 2 3, 7 5 6) en (7 3 4, 7 6 1)

het vlak β snijden in de punten:

P = (1′ 2′, 4′ 5′), Q = (2′ 3′, 5′ 6′) en R = (3′ 4′, 6′ 1′),

welke op één rechte (de doorsnede der vlakken α en β) liggen. Hieruit volgt, dat de projecties 1′, . . . 6′ op één kegelsnede liggen en dus de punten 1, . . . 6 zelve op een kwadratischen kegel met top 7. Ligt deze top 7 bovendien juist op de door de punten 1, . . . 6 bepaalde kromme $\varrho^{(3)}$ dan kan (zie § 27),

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

elk willekeurig punt dier kromme als S gekozen worden.

§ 39. Tracht men, zooals door Neumann [1]) is gedaan, uit de Stelling van Weddle een constructie af te leiden voor het achtste geassocieerde punt, dan komt men niet tot een eenvoudiger uitvoering dan in de voorgaande paragraaph is aangegeven. Dit is trouwens te verwachten daar de Stelling van Weddle feitelijk niets meer is dan een symmetrische formuleering van de Tweede Stelling van Hesse. Het door Neumann gebruikte aantal vlakken (twaalf) stemt dan ook overeen met het in de voorgaande constructie benoodigde. Zooals ook Neumann opgeeft vragen daartegenover de constructies van Reye (zie § 35) en die met de bisecante eener kubische kromme respectievelijk 25 en 21 vlakken. Of het intusschen billijk is den eenvoud eener constructie af te meten naar het daarin gebezigde aantal vlakken mag zeer zeker worden betwijfeld. Een juist inzicht in het aantal vereischte operaties zal ook eerst verkregen worden als mede gelet wordt op de bewerking die twee punten door een rechte verbindt.

Er zijn schrijvers geweest [2]) die de constructies als niet feitelijk uitvoerbaar erkenden, zoolang ze met gebruik van een hyperboloïde of een kubische ruimtekromme werden beschreven. Daartegenover mag wel worden opgemerkt, dat het juist die opper-

---

[1]) Die acht assoziierten Schnittpunkte von drei Flächen zweiter Ordnung (Mathematische Annalen 73 (1913) p. 86).

[2]) Crelle's Journal 99 (1886) p. 128 (Caspary). p. 131 (Schroeter), p. 230 (Picquet).

PERPUSTAKAAN NASIONAL

vlakken en krommen zijn, welke onze voorstelling te hulp komen en ons in staat stellen een overzicht te behouden. De min of meer vereenvoudigde details der practische uitvoering zijn daarna slechts van bijkomstig belang. Zij geven alleen aanleiding tot een niet wezenlijke verscheidenheid van constructies, wier waarde voor de wiskunde niet kan worden uitgedrukt in een aantal getrokken rechten of aangebrachte vlakken.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK VII.

Verwante vlakke problemen.

§ 40. Met het probleem der geassocieerde punten staan enkele vraagstukken in het platte vlak in nauw verband. Het zijn de bepaling van het aantal der dubbelraaklijnen van een vlakke kromme van den vierden graad, de bepaling van het negende basispunt van een bundel van vlakke kubische krommen en ten slotte de bepaling van het laatste (zestiende) snijpunt van twee vlakke krommen van den vierden graad, welke twee gemeenschappelijke dubbelpunten en nog zeven andere gemeenschappelijke punten hebben. Wij willen ons eerst met de dubbelraaklijnen eener vlakke kromme van den vierden graad bezig houden.

Tot een net van kwadratische oppervlakken behooren oneindig veel kegels en de toppen van deze kegels liggen op een ruimtekromme van den zesden graad (zie § 34). Deze ruimtekromme heeft Hesse [1]) op de volgende wijze in verband gebracht met een vlakke kromme van den vierden graad. Is het net bepaald door de drie kwadratische oppervlakken met vergelijkingen:

[1]) Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung (Crelle's Journal 49 (1855) p. 298 = Hesse's Ges. Werke p. 350).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$O_1 \equiv a'_{11}\, x^2 + a'_{22}\, y^2 + \ldots = 0$$
$$O_2 \equiv a''_{11}\, x^2 + a''_{22}\, y^2 + \ldots = 0$$
$$O_3 \equiv a'''_{11}\, x^2 + a'''_{22}\, y^2 + \ldots = 0$$

dan kan het net voorgesteld worden door

$$N \equiv \varkappa\, O_1 + \lambda\, O_2 + \mu\, O_3 = 0.$$

Uitgeschreven wordt deze vergelijking van de gedaante:

$$N \equiv n_{11}\, x^2 + n_{22}\, y^2 + \ldots + 2\, n_{34}\, z\, q = 0$$

waarin $n_{11} = \varkappa\, a'_{11} + \lambda\, a''_{11} + \mu\, a'''_{11}$ enz. alle homogeen van den eersten graad in $\varkappa$, λ en μ.

De vergelijking $N = 0$ stelt een kegel voor als:

$$K \equiv \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{12} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} & n_{34} \\ n_{14} & n_{24} & n_{34} & n_{44} \end{vmatrix} = 0$$

Deze laatste vergelijking is homogeen van den vierden graad $\varkappa$, λ en μ en stelt dus in vlakke coördinaten een kromme van den vierden graad voor. Met elk punt $(\varkappa, \lambda, \mu)$ op deze kromme komt een kegel uit het net overeen, dus ook een kegeltop of punt der ruimtekromme welke de meetkundige plaats der kegeltoppen is. Er bestaat aldus tusschen beide krommen een eigenaardig verband dat ons dienen kan eigenschappen der eene uit die der andere af te leiden. [1]) De functie K bevat zeven-en-twintig

[1]) Betreffende deze verwantschap bewijst Hesse o. a. de volgende eigenschappen:

Met de vier snijpunten van een rechte lijn en de vlakke vierdegraadskromme komen overeen de toppen van vier kegels welke elkaar volgens eenzelfde kromme snijden. (Crelle's Journal 49 (1855) p. 286 = Hesse's Ges. Werke p. 353).

Met de acht snijpunten van een kegelsnede en de vlakke vierdegraadskromme komen overeen acht kegeltoppen welke een systeem van geassocieerde punten vormen (Crelle 49 p. 292 = Werke p. 360).

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

coefficiëntenverhoudingen, zoodat wij nog over verschillende der coefficienten kunnen beschikken, zonder aan de algemeenheid der vierdegraadskromme te kort te doen. De vergelijking $K = 0$ kan dus een willekeurige vlakke kromme van den vierden graad voorstellen. Op eenvoudige wijze kan het aantal van haar dubbelraaklijnen geteld worden.

Tot de oneindig veel kegels van het net behooren sommige die als beschrijvende de verbindingsrechte hebben van twee der acht geassocieerde punten welke aan alle oppervlakken van het net gemeen zijn. Zooals wij vroeger gezien hebben zijn er telkens twee kegels mogelijk, waarvan de top gelegen is op de rechte die een tweetal der geassocieerde punten verbindt. Om een dergelijk kegelpaar op eenvoudige wijze in onze beschouwing op te nemen, passen wij de substitutie toe:

$$\begin{aligned} x &= x_1 X + x_2 Y + x_3 Z + x_4 Q \\ y &= y_1 X + y_2 Y + y_3 Z + y_4 Q \\ z &= z_1 X + z_2 Y + z_3 Z + z_4 Q \\ q &= q_1 X + q_2 Y + q_3 Z + q_4 Q \end{aligned}$$

waardoor de vergelijking van het net overgaat in:
$N \equiv N_{11} X^2 + N_{22} Y^2 + \ldots\ldots + 2 N_{34} ZQ = 0$
waarin:

$$N_{kl} \equiv N_{lk} \equiv x_k \frac{\delta N}{\delta x_l} + y_k \frac{\delta N}{\delta y_l} + z_k \frac{\delta N}{\delta z_l} + q_k \frac{\delta N}{\delta q_l}$$

en homogeen van den eersten graad in $\varkappa$, λ en μ. De vergelijking der vlakke kromme van den vierden graad wordt nu:

$$\Psi \equiv \begin{vmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{12} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ N_{13} & N_{23} & N_{33} & N_{34} \\ N_{14} & N_{24} & N_{34} & N_{44} \end{vmatrix} = 0$$

en deze functie Ψ is slechts door een constanten factor van K onderscheiden, derhalve is $\Psi \equiv D^2$. K als D den substitutiedeterminant voorstelt. Voor de coefficiënten x_1, x_2 enz. kunnen wij de coördinaten van vier punten in de ruimte kiezen. Wij willen $(x_1\, y_1\, z_1\, q_1)$ en $(x_2\, y_2\, z_2\, q_2)$ kiezen als de punten 1 en 2 van het systeem der geassocieerde punten 1, 2, ... 8. Deze coördinaten moeten dan voldoen aan de vergelijking van het net, dus maken $N_{11} = 0$ en $N_{22} = 0$. En door deze substitutie gaat de vergelijking van de vlakke kromme van den vierden graad over in:

$$\Psi' \equiv \begin{vmatrix} 0 & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{12} & 0 & N_{23} & N_{24} \\ N_{13} & N_{23} & N_{33} & N_{34} \\ N_{14} & N_{24} & N_{34} & N_{44} \end{vmatrix} = 0$$

Nu stelt de vergelijking $N_{12} = 0$ in het $\varkappa$, λ, μ-vlak een rechte lijn voor, welke de kromme met vergelijking $\Psi' = 0$ in vier punten snijdt. De coördinaten van deze vier snijpunten worden bepaald door $N_{12} = 0$ en $\Psi' = 0$, dus evenzeer door $N_{12} = 0$ en de vergelijking welke men verkrijgt door $N_{12} = 0$ te stellen in Ψ', dit is door de vergelijkingen:

$$N_{12} = 0 \qquad \text{en} \qquad \begin{vmatrix} N_{13} & N_{14} \\ N_{23} & N_{24} \end{vmatrix}^2 = 0$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

waaruit blijkt dat de snijpunten twee aan twee samenvallen. De vergelijking $N_{12} = 0$ stelt dus een dubbelraaklijn voor van de kromme met vergelijking $\Psi' = 0$. De met de raakpunten overeenkomende punten der ruimtekromme, welke de meetkundige plaats der kegeltoppen uit het net is, worden dadelijk herkend als de twee kegeltoppen die op de rechte (1 2) gelegen zijn. Immers: uit $\Psi' = 0$ volgt dat $N = 0$ een kegel voorstelt; uit $N_{11} = 0$ en $N_{22} = 0$ volgt dat de punten 1 en 2 op dien kegel gelegen zijn, en uit $N_{12} = 0$ (of: het poolvlak van 1 gaat door 2 en omgekeerd) blijkt ten slotte dat de geheele rechte (1 2) op dien kegel ligt. Er zijn echter twee zulke kegels, dus twee kegeltoppen komen overeen met de raakpunten der dubbelraaklijn met vergelijking $N_{12} = 0$. Door elke verbindingsrechte van twee der acht geassocieerde punten wordt op deze wijze op de ruimtekromme van den zesden graad een tweetal punten bepaald, waarmee op de vlakke kromme van den vierden graad de beide raakpunten van een dubbelraaklijn overeenkomen. Het aantal mogelijke verbindingsrechten der acht geassocieerde punten twee aan twee bedraagt $\frac{8 \times 7}{2} = 28$, en dit is dus tevens het aantal dubbelraaklijnen van een vlakke kromme van den vierden graad.

§ 41. Terwijl alle kwadratische oppervlakken welke zeven punten gemeen hebben ook nog een achtste snijpunt bezitten, is aan alle vlakke kubische krommen die acht punten gemeen hebben (dus aan een bundel van zulke krommen) nog een negende punt gemeen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Engel [1]) heeft er het eerst op gewezen dat de vraag naar het achtste basispunt van een net van kwadratische oppervlakken samenhangt met de bepaling van het negende basispunt van een bundel van vlakke kubische krommen. Laten 1, . . . 8 de basispunten van een net van kwadratische oppervlakken zijn, waartoe de oppervlakken $O_1^{(2)}$, $O_2^{(2)}$ en $O_3^{(2)}$ behooren. Deze laatste snijden elkaar volgens drie bikwadratische ruimtekrommen der eerste soort: $\varrho_{1,2}^{(4)}$, $\varrho_{1,3}^{(4)}$ en $\varrho_{2,3}^{(4)}$ welke uit één der basispunten, bijvoorbeeld uit het punt 1, geprojecteerd op een plat vlak drie kubische krommen leveren. Wij willen twee van deze projecties beschouwen: $\varrho'_{1,2}$ en $\varrho'_{1,3}$. Deze snijden elkaar in de projecties $2'$, ... $8'$, dus in nog twee andere punten: $9'$ en $10'$ welke de projecties zijn van twee niet-samenvallende, doch telkens met het punt 1 op één rechte gelegen punten der bikwadratische ruimtekrommen $\varrho_{1,2}^{(4)}$ en $\varrho_{1,3}^{(4)}$. Bijvoorbeeld is $9'$ de projectie van 9_2 van de kromme $\varrho_{1,2}^{(4)}$ en tegelijk van het punt 9_3 gelegen op $\varrho_{1,3}^{(4)}$, zoodat op het oppervlak $O_1^{(2)}$ de punten 1, 9_2 en 9_3 liggen op één rechte: l_9, en de punten 1, 10_2 en 10_3 op één rechte: l_{10}. Het oppervlak $O_1^{(2)}$ moet dus een regelvlak zijn als de punten $9'$ en $10'$ reëel zijn. De rechten l_9 en l_{10} zijn de gemeenschappelijke lijnen van het raakvlak in 1 en het oppervlak $O_1^{(2)}$.

Zijn nu gegeven de acht snijpunten

$2'$, $3'$, $4'$, $5'$ $6'$, $7'$, $9'$ en $10'$

[1]) Konstructionen zur Geometrie der Flächen zweiter Ordnung und der ebenen Kurven dritter Ordnung (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 34 (1889) p. 327).

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

der kubische krommen $\varrho'_{1,2}$ en $\varrho'_{1,3}$, dan zal het negende snijpunt S′ te construeeren zijn door een punt 1 te kiezen en een oppervlak $O_1^{(2)}$ te bepalen dat de rechten $l_9 = (1\,9')$ en $l_{10} = (1, 10')$ als beschrijvenden bezit, op dit oppervlak de punten 2 . . . . . 7 te bepalen en vervolgens bij de punten 1, . . . 7 het achtste geassocieerde punt S te construeeren. Daarna zal de rechte (1 S) het vlak der kubische krommen snijden in het gezochte punt S′. Bij de uitvoering van deze constructie kunnen wij het oppervlak $O_1^{(2)}$ bepalen door het punt 1 geheel willekeurig en de punten 2, 3, 4, 5 op de rechten (12′), (13′), (14′), (15′) maar overigens willekeurig (doch niet meer dan drie in een plat vlak) aan te nemen. Het oppervlak $O_1^{(2)}$ is dan volledig bepaald door de beschrijvenden l_9 en l_{10} en de vier punten 2, 3, 4, 5. De punten 6 en 7 moeten dan geconstrueerd worden als de snijpunten van $l_6 = (16')$ en $l_7 = (17')$ met $O_1^{(2)}$. Om bijvoorbeeld het punt 6 te consttueeren kan men opmerken dat het vlak door l_6 en l_9 gebracht, dus het vlak (1 6′ 9′), het oppervlak $O_1^{(2)}$ snijdt volgens twee rechten: l_9 en een nog onbekende rechte m_6. Het snijpunt van m_6 met l_6 is 6. De rechte m_6 kan gevonden worden door de kegelsneden k en k′ te beschouwen, volgens welke het oppervlak $O_1^{(2)}$ resp. door de vlakken (2 3 4) en (2 3 5) gesneden wordt. Van elk dezer kegelsneden is een vijftal punten bekend:

in (2 3 4) de punten: 2, 3, 4, $(l_9,\ 2\,3\,4) = A_9$
en $(l_{10},\ 2\,3\,4) = A_{10}$
in (2 3 5) de punten: 2, 3, 5, $(l_9,\ 2\,3\,5) = B_9$
en $(l_{10},\ 2\,3\,5) = B_{10}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Construeert men in A_9 en B_9 de raaklijnen a_9 en b_9 dier kegelsneden dan bepalen deze met l_9 de raakvlakken van $O_1^{(2)}$ resp. in de punten A_9 en B_9. Bovendien kent men het raakvlak in het punt 1, namelijk het vlak (1 9′ 10′). Dus kent men de raakvlakken in drie punten van l_9 en kan daarmede in elk punt dier rechte het raakvlak construeeren en omgekeerd bij een raakvlak het raakpunt. (De raakpuntenreeks is projectief met den raakvlakkenbundel). Bepaalt men nu het raakpunt C_9 van het raakvlak dat l_6 bevat, dus het vlak (1 6′9′), dan is dit een punt van m_6. Deze rechte m_6 zal verder, als beschrijvende van $O_1^{(2)}$, het vlak (2 3 4) in een punt der daarin bepaalde kegelsnede k moeten snijden, waaruit volgt dat m_6 gevonden kan worden als de tweede beschrijvende volgens welke de kegel die de kromme k uit C_9 projecteert, gesneden wordt door het vlak (1 6′ 9′) (de andere beschrijvende is l_9).

§ 42. Uit het bovenstaande volgt dat elke constructie voor het achtste geassocieerde punt ons in staat stelt het negende snijpunt van twee vlakke kubische krommen te bepalen. Zooals Picquet [1]) heeft opgemerkt is het verkieselijker het ruimteprobleem terug te brengen tot het vraagstuk in het platte vlak, dan omgekeerd. Daarbij kan dan de constructie van het negende basispunt der kubische krommen teruggebracht worden tot het bepalen van het vierde snijpunt van twee kegelsneden welke

[1]) Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadriques. Son identité avec un problème plan. (Bulletin de la Soc. Math. de France 24 (1894) p. 19).

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

drie punten gemeen hebben en elk door nog twee andere punten zijn bepaald. Zijn namelijk 1, ... 7 de gegeven snijpunten van drie kwadratische oppervlakken dan kunnen wij één dier punten, bijvoorbeeld 7, beschouwen als top der projecteerende kegels, terwijl wij de kubische krommen zullen bepalen in het vlak van drie gegeven punten, bijvoorbeeld in het vlak (1 2 3). Het kwadratisch oppervlak $O^{(2)}$ wordt op de volgende bizondere wijze bepaald. Noem:

(2 3, 4 5 6) = A en (5 6, 1 2 3) = B

dan stellen de lijnenparen

(2 3), (1 B) en (5 6), (4 A)

twee ontaarde kegelsneden voor welke de lijn A B = (1 2 3, 4 5 6) als koorde gemeen hebben. Met het punt 7 samen bepalen deze kegelsneden een kwadratisch oppervlak $O^{(2)}$ waarop de door 7 gaande beschrijvende lijnen gemakkelijk zijn aan te wijzen. Immers de doorsneden (7 1 B), (7 4 A) en (7 2 3, 7 5 6) zijn beschrijvenden van verschillend stelsel. Zij leveren met het vlak (1 2 3) de snijpunten 7′ en 7″. Laten verder 4′, 5′, 6′ de projecties zijn van 4, 5, 6 uit 7 op het vlak (1 2 3), dan hebben wij in dit laatste vlak de acht punten:

1, 2, 3, 4′, 5′, 6′, 7′ en 7″

waarvan 7″ zoowel met (2 3) als met (5′ 6′) op één rechte gelegen is. Tot de kubische krommen, door deze acht acht punten gaande, behooren nu de twee volgende ontaardingen:

de rechte (2 3 7″) met de kegelsnede door 1, 4′, 5′, 6′, 7′,

de rechte (5′ 6′ 7″) met de kegelsnede door 1, 2, 3, 4′, 7′.

De kegelsneden hebben behalve 1, 4′ en 7′ nog een

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

punt $8'$ gemeen, dat de projectie uit 7 moet zijn van het op $O^{(2)}$ gelegen punt 8. Om nu nog het punt 8 zelf te bepalen, brengen wij een vlak door $(7\ 8')$ en één der beschrijvende lijnen welke door 7 gaat, bijvoorbeeld het vlak $(7\ 7'\ 8')$. Dit vlak snijdt het oppervlak $O^{(2)}$, behalve volgens $(7\ 7')$, nog volgens een tweede beschrijvende lijn, die van de andere soort moet zijn en dus de beschrijvenden $(2\ 3)$ en $(5\ 6)$ snijdt. Hieruit volgt dat het punt 8, behalve op $(7\ 8')$, ook gelegen moet zijn op de rechte l, welke de punten $(2\ 3,\ 7\ 7'\ 8')$ en $(5\ 6,\ 7\ 7'\ 8')$ verbindt, zoodat 8 als snijpunt van $(7\ 8')$ met l gevonden wordt[1]).

§ 43. Het verband tusschen de acht snijpunten van drie kwadratische oppervlakken eenerzijds en de negen snijpunten van twee vlakke kubische krommen anderzijds stelt ons verder in staat de verwantschap van het achtste en negende basispunt van een bundel van vlakke kubische krommen af te leiden uit de verwantschap tusschen het zevende en achtste basispunt van een net van kwadratische oppervlakken. Daartoe gaan we uit van de constructie van Engel, welke bij de acht basispunten $2', \ldots . 7', 9'$ en $10'$ het negende punt $8'$ bepaalt met behulp van de projectie uit een punt 1 op een kwadratisch oppervlak $O_1^{(2)}$, dat gebracht is door de rechten $(1\ 9')$, $(1,\ 10')$ en de punten 2, 3, 4, 5 welke op $(1\ 2')$, $1\ 3')$, $(1\ 4')$ en $(1\ 5')$ willekeurig gekozen zijn. De punten 6 en 7 worden dan gevonden als tweede snijpunten van $(1\ 6')$ en $(1\ 7')$

[1]) Picquet merkte bij deze constructie op: A défaut d'autre mérite, cette solution a tout au moins celui d'affirmer l'identité des deux problèmes.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

met $O_1^{(2)}$ (zie § 41). Doorloopt nu 7′ een rechte a dan blijft 7 in het vlak α gebracht door a en 1 en beschrijft dus een op $O_1^{(2)}$ gelegen kegelsnede $k^{(2)}$, gaande door 1. Met deze kegelsnede is, afgezien van den bij het punt 1 behoorenden kwadratischen kegel (zie § 27), een ruimtekromme van den tienden graad $\varrho^{(10)}$ geassocieerd. Want met het vlak α is (zie § 32) geassocieerd een oppervlak $O^{(5)}$, dat $O_1^{(2)}$ snijdt volgens een $\varrho^{(10)}$. Het punt 8 komt in 2, als 7 komt op den kwadratischen kegel die 2 heeft als top en de punten 1, 3, 4, 5, 6 bevat. Deze kegel wordt door de kromme $k^{(2)}$, behalve in 1, nog in drie punten gesneden, dus driemaal komt 8 in 2, d.w.z. het punt 2 en evenzoo de punten 3, 4, 5, 6 liggen drievoudig op de $\varrho^{(10)}$. Verder komt 8 in 1 als 7 op den bij het punt 1 behoorenden kegel komt. Deze wordt door de $k^{(2)}$, behalve in 1, in nog twee punten gesneden, dus 1 ligt als dubbelpunt op de $\varrho^{(10)}$. Hieruit volgt dat de kegel, die de $\varrho^{(10)}$ uit 1 projecteert, van den achtsten graad is. Doorloopt dus 7′ de rechte a, dan beschrijft 8 de kromme $\varrho^{(10)}$ en 8′ een kromme van den achtsten graad, waarop de punten 2′, 3′, 4′, 5′, 6′ en dus ook 9′ en 10′ drievoudig gelegen zijn. Dat is:

Als van de negen snijpunten van twee vlakke kubische krommen er zeven vast blijven, terwijl het achtste een rechte a beschrijft, dan beschrijft het negende een kromme van den achtsten graad, die de zeven vaste punten als drievoudige punten bevat.

Het bewegende punt 7 komt in 1, als 7′ komt in het raakvlak in 1 aan $O_1^{(2)}$, dus als 7′ komt op de rechte (9′, 10′). Met het in 1 vallende punt 7

PERPUSTAKAAN NASIONAL

zijn alle punten geassocieerd van den kwadratischen kegel welke 1 tot top heeft en 2, 3, 4, 5, 6 bevat; dus als 7′ het snijpunt is van a met (9′ 10′) dan kan voor 8′ genomen worden elk punt der kegelsnede welke door 2′, 3′, 4′, 5′, 6′ bepaald is. Dus:

Ligt het achtste punt op de verbindingsrechte van twee der zeven vaste punten dan kan voor het negende punt gekozen worden elk van de punten der kegelsnede door de vijf overige punten gebracht.

Gaat a door één der vaste punten, bijvoorbeeld 2′, dan blijft 7 in het vlak β, door a en 1 gebracht en dat nu ook 2 bevat. Het punt 7 beschrijft dus een kegelsnede $k_1^{(2)}$ gaande door 1 en 2. Met het vlak β is geassocieerd (zie § 32) een oppervlak $O^{(3)}$, dat $O_1^{(2)}$ snijdt volgens een ruimtekromme van den zesden graad $\varrho^{(6)}$, waarop de punten 3, 4, 5, 6 dubbel gelegen zijn. Want elke kwadratische kegel die één dier punten als top heeft en de overige vijf vaste op $O_1^{(2)}$ gelegen punten bevat, snijdt de $k_1^{(2)}$ buiten 1 en 2 in nog twee punten. Het punt 1, en evenzoo 2, ligt enkelvoudig op de $\varrho^{(6)}$. Want de bij 1 behoorende kegel snijdt de $k_1^{(2)}$ buiten 1 en 2 nog in één punt. De kegel dus, welke de $\varrho^{(6)}$ uit het punt 1 projecteert, is van den vijfden graad, waaruit blijkt:

Als van de negen snijpunten van twee vlakke kubische krommen er zeven vast blijven, terwijl het achtste een rechte beschrijft door één dier punten gaande, dan beschrijft het negende punt een kromme van den vijfden graad, welke door dat eene punt gaat en waarop de overige zes vaste punten als dubbelpunt liggen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Het bewegende punt 7 komt in 2, als 7′ in 2′ komt. Voor 8 kan dan gekozen worden elk punt van den kwadratischen kegel met top 2, gaande door 1, 3, 4, 5, 6 en die het oppervlak $O_1^{(2)}$ snijdt volgens een bikwadratische ruimtekromme $\varrho^{(4)}$, waarop het punt 2 dubbel, elk der andere genoemde punten enkelvoudig ligt. De kegel die $\varrho^{(4)}$ uit 1 projecteert is dus van den derden graad, waaruit volgt:

Valt van de negen snijpunten van twee vlakke kubische krommen het achtste samen met een der zeven vaste punten, dan ligt het negende op een kubische kromme die door het genoemde vaste punt tweemaal, door de overige vaste punten elk éénmaal gaat.

Gaat de door het punt 7′ doorloopen rechte a door twee der vaste punten, bijvoorbeeld 2′ en 3′, dan blijft 7 in het vlak (1 2 3), dus 8 in het vlak (4 5 6) dat het oppervlak $O_1^{(2)}$ snijdt volgens een kegelsnede welke uit het punt 1 door een kwadratischen kegel wordt geprojecteerd. Hieruit volgt:

Doorloopt het achtste punt een rechte, waarop twee der zeven vaste punten gelegen zijn, dan doorloopt het negende punt een kegelsnede die door de overige vijf vaste punten bepaald is. En omgekeerd: Ligt het achtste punt op de kegelsnede die door vijf der basispunten is bepaald, dan ligt het negende punt op de verbindingsrechte der beide overblijvende basispunten.

§ 44. De overeenkomst tusschen de snijpunten 7′ en 8′ van twee vlakke kubische krommen (die de

punten 1′, ... 6′, 9′ en 10′ gemeen hebben) kan verder worden uitgewerkt op dezelfde wijze als dit voor de snijpunten 7 en 8 van drie kwadratische oppervlakken is geschied. Daar hier met een rechte a (afgezien van de kegelsneden die behooren bij de punten op de verbindingsrechten van de basispunten twee aan twee) een kromme van den achtsten graad overeenkomt, zal met een kromme van den n^{den} graad een kromme van den graad 8n geassocieerd zijn. Dus met een kegelsnede komt overeen een kromme van den zestienden graad $k^{(16)}$. Gaat de kegelsnede door vijf basispunten, dan is de $k^{(16)}$ uiteengevallen in vijf kubische krommen en de verbindingsrechte der beide overige punten.

Het punt 8′ valt samen met 7′ als 8 met 7 samenvalt, dus als dit laatste gelegen is op het oppervlak $O^{(4)}$ (zie § 34), dat $O_1^{(2)}$ snijdt volgens een ruimtekromme van den achtsten graad waarop de punten 1, 2, 3, 4, 5, 6 als dubbelpunt liggen en die dus uit het punt 1 door een kegel van den zesden graad wordt geprojecteerd. Hieruit volgt: De meetkundige plaats van de samenvallende snijpunten van de vlakke kubische krommen door zeven gegeven punten is een kromme van den zesden graad, welke die punten als dubbelpunt bezit. Van deze kromme kan men dadelijk nog 42 punten lineair construeeren, namelijk de snijpunten van de kegelsneden, door vijf der gegeven punten gebracht, elk met de verbindingsrechte der beide overblijvende punten.

§ 45. De vraag naar het achtste basispunt van een net van kwadratische oppervlakken hangt ten

PERPUSTAKAAN NASIONAL

slotte ook samen met de constructie van het laatste (zestiende) snijpunt van twee vlakke krommen van den vierden graad welke twee gemeenschappelijke dubbelpunten (elk telt voor vier snijpunten) en nog zeven andere gemeenschappelijke punten hebben. Laten 1 en 2 de gemeenschappelijke dubbelpunten, 3, ... 9 de overige gegeven snijpunten zijn. Uit een willekeurig punt P buiten het vlak der krommen kan men beide projecteeren door bikwadratische kegels, waarop (P 1) en (P 2) dubbellijn zijn. Geschiedt deze projectie op een kwadratisch oppervlak $O^{(2)}$ dat de rechten (P 1) en (P 2) bevat, dan zal elk der beide projecteerende bikwadratische kegels het oppervlak $O^{(2)}$, behalve volgens de dubbellijnen (P 1) en (P 2) nog snijden volgens een bikwadratische ruimtekromme. Deze laatste is van de eerste soort, want elke beschrijvende lijn van $O^{(2)}$ snijdt elk der bikwadratische kegels in een punt van een der dubbellijnen en dus in nog twee andere punten. Het punt P is echter niet op de bikwadratische ruimtekrommen gelegen, want anders zouden de projecteerende kegels niet bikwadratisch doch kubisch zijn. De beide ruimtekrommen hebben de zeven projecties 3′, ... 9′ van 3, ... 9 op $O^{(2)}$ gemeen, dus hebben zij ook nog een achtste punt 10′ gemeen, waarmede moet overeenstemmen het laatste snijpunt der vlakke krommen van den vierden graad.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

INHOUD.

Hoofdstuk	I.	Geassocieerde punten	1
„	II.	Eerste Stelling van Hesse . .	12
„	III.	Tweede Stelling van Hesse . .	39
„	IV.	De Stelling van Weddle . . .	47
„	V.	Derde Stelling van Hesse. Onderlinge afhankelijkheid van twee der punten, als de zes overige gegeven zijn	53
„	VI.	Constructies van het achtste punt	72
„	VII.	Verwante vlakke problemen .	85

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

STELLINGEN.

I.

Een analytisch bewijs van de Tweede Stelling van Hesse over de acht snijpunten van drie kwadratische oppervlakken wordt het gemakkelijkst verkregen door de Eerste Stelling toe te passen bij een geschikte keuze van het coördinatenviervlak.

II.

Het door Carnoy (Géométrie de l'espace 5ième edit. p. 422) medegedeelde bewijs van de Stelling, dat de toppen der twaalf kwadratische kegels, welke de doorsneden van drie kwadratische oppervlakken twee aan twee bevatten, op éénzelfde kwadratisch oppervlak liggen, is niet volledig.

III.

Ten onrechte meent Serret (Géométrie de direction, p. 331), dat de op de Tweede Stelling van Hesse berustende constuctie van het achtste geassocieerde punt niet geldig is in het geval dat de in die Stelling genoemde zeshoeken vlak zijn.

IV.

Dat de kernkromme van een net van kwadratische oppervlakken van den zesden graad is, wordt door Hesse (Crelle's Journal 49, p. 296 = Werke p. 348) niet overtuigend bewezen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

V.

Het verdient den voorkeur de omhullende van een stelsel van vlakke krommen te definieeren als kromme, welke alle krommen van het stelsel raakt, en niet als meetkundige plaats van karakteristieke punten.

VI.

Het is verkeerd een Eulersch veelvlak te definieeren als een lichaam, dat zoodanig kan worden opgebouwd uit viervlakken, dat elk nieuw bijgevoegd viervlak met één zijvlak volkomen sluit op een driehoek van het lichaam, dat reeds verkregen is, zoodat drie hoekpunten samenvallen met drie hoekpunten van een voorgaand viervlak en slechts het vierde een nieuw hoekpunt van het lichaam oplevert. Het gebruikelijke, aan deze definitie aansluitende bewijs van de formule van Euler ($z + h - r = 2$) is waardeloos.

VII.

Op natuurlijker wijze dan in de meeste leerboeken gebruikelijk is en tot beter begrip van de belangrijke rol welke dit getal vervult, behoort het getal e in de analyse eerst ingevoerd te worden bij de berekening van de afgeleide der exponentieele functie.

VIII.

Césaro (Elementares Lehrbuch § 310) legt tot toepassing van het theorema van L'Hospital aan de afgeleiden de beperking op, dat zij in de omgeving der beschouwde waarde geen gemeenschappelijke nulpunten mogen hebben. Deze beperking is overbodig en dus ongewenscht.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

IX.

Opdat de termsgewijze integratie van een reeks geoorloofd zij bij uniforme convergentie, behoort voor deze laatste een andere definitie gekozen te worden dan de daarvoor door Hk. de Vries (Leerboek der differentiaal- en integraalrekening, en van de theorie der differentiaalvergelijkingen I, §§ 73 en 76) gestelde.

X.

Bij de beschouwing van de breking van het licht door een bolvormig oppervlak kenne men aan de richtingen langs de as van af het oppervlak naar de eene zijde (lucht) en de andere zijde (glas) verschillende teekens toe, en mete men alle afstanden van af dit oppervlak. De afspraken betreffende het teeken van de straal van een hol of bol oppervlak en die betreffende het teeken der afstanden van reëele en virtueele beeldpunten en lichtpunten behooren te vervallen.

XI.

De sterke afwijkingen in de waarnemingen van Purvis (Astrophysical Journal 34, p. 312) met die van andere waarnemers over het Zeeman-effect van enkele Chroomlijnen moeten worden toegeschreven aan een onjuiste bepaling van de sterkte van het magnetisch veld.

XII.

Alvorens de door T. van Lohuizen (Versl. der Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Mei 1912 p. 31) onderstelde reeksen in de spectra van tin en antimoon te aanvaarden, dient een experimenteele bevestiging te worden afgewacht.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

XIII.

Het is gewenscht de hypothese, welke meteoren als uiteengevallen kometen beschouwt, aan een nader onderzoek te onderwerpen.

XIV.

Of voor het opmaken van weersverwachtingen de statistische, dan wel de synoptische methode den voorkeur verdient, zal wellicht kunnen blijken uit de ervaringen welke na het geheel herstel der internationale weerberichtgeving zullen worden opgedaan.

XV.

Een centrale catalogus van alle (Nederlandsche) openbare boekerijen zou van groot nut kunnen zijn.

XVI.

De theoretische mechanica (zoogenaamde „werktuigkunde") behoort als afzonderlijk leervak uit het onderwijs der hoogere burgerscholen te verdwijnen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

KABULANA
TGL: 27/6/02



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA