VEREENIGING TOT HET UITGEVEN VAN BEKNOPTE HANDLEIDINGEN BIJ HET ONDERWIJS AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL.

K V

№ 21

LANDMETEN: BIJZONDERE ONDERWERPEN

METHODE DER KLEINSTE VIERKANTEN

BEWERKT NAAR HET COLLEGE VAN PROF. H. J. HEUVELINK, DOOR A. GROOTHOFF, C. I.

TWEEDE GEHEEL HERZIENE DRUK.

PRIJS VOOR LEDEN: ING. ƒ 0,95. GEB. ƒ 1,15. MET WIT PAPIER DOORSCHOTEN ING. ƒ 1,25. GEB. ƒ 1,25. VOOR NIETLEDEN WORDEN DEZE PRIJZEN ƒ 1,25, ƒ 1,50, ƒ 1,35, ƒ 1,60.

V:-
87

EN IN DEPÔT BIJ J. WALTMAN Jr.
DELFT. — 1914.

hal. 58 Bp —

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

V-87

VEREENIGING TOT
HET UITGEVEN VAN
BEKNOPTE HANDLEI-
DINGEN BIJ HET ONDER-
WIJS AAN DE TECHNI-
SCHE HOOGESCHOOL.

LANDMETEN: BIJZONDERE ONDERWERPEN

METHODE DER KLEINSTE VIERKANTEN

BEWERKT NAAR HET
COLLEGE VAN PROF.
H. J. HEUVELINK, DOOR
A. GROOTHOFF, C. I.

TWEEDE GEHEEL HER-
ZIENE DRUK.

DRUK EN UITGAVE VAN J. WALTMAN Jr. DELFT 1914

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.
HAKUBUTU-KAN
DJAKARTA

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.
Tanggal : 28-6-2010
Nomor Induk : 194/DH-Museum/10
BIB - ID : 0010-082306127
ITEM - ID : 0000393363
Asal : Museum Pusat

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

VOORWOORD.

Volledigheidshalve dient vermeld, dat bij de bewerking van deze Handleiding, behalve van het College van Prof. H. J. Heuvelink, bovendien een ruim gebruik is gemaakt van Bijlage Q (van het Blijvend gedeelte van het Jaarboekje van het Kon. Instituut van Ingenieurs, tweede druk, 1906).

Aan Prof. Heuvelink, die de welwillendheid heeft gehad om de kopy door te zien en op wiens aanwijzing vele verbeteringen en aanvullingen zijn aangebracht, betuigt ondergeteekende bij dezen openlijk zijn hartelijken dank.

A. GROOTHOFF.

's-GRAVENHAGE, November 1907.

Door de welwillendheid van Prof. Heuvelink, die zijn van aanteekeningen voorzien exemplaar ter onzer beschikking stelde, werden in den tweeden druk vele verbeteringen aangebracht.

In de Toepassingen werd weggelaten de § over Indirecte waarnemingen met voorwaarden-vergelijkingen, welk onderdeel op college niet besproken wordt en in den bestaanden toestand alleszins onvoldoende geacht moest worden.

DELFT, October 1913.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

INHOUD.

I. Inleiding.

Blad z

Eenige definities en eigenschappen uit de waarschijnlijkheidsrekening 1

II. Theorie van de waarnemingsfouten.

1. Toevallige waarnemingsfouten 5
2. Elementaire afleiding van de wet der waarnemingsfouten 6
3. Methode der kleinste vierkanten 8
4. De grootte der waarschijnlijkheid voor het optreden van een fout tusschen bepaalde grenzen. 10
5. Betrekkingen tusschen m, m^1 en r 11
6. De middelbare fout als maat voor de nauwkeurigheid 11
7. Voortplanting der fouten 12
8. Begrip „Gewicht" 13
9. De twee hoofdformules van de methode der kleinste vierkanten 15

III. Toepassingen van de methode der kleinste vierkanten.

I. Directe waarnemingen met gelijk gewicht voor één onbekende 16
II. Directe waarnemingen met ongelijk gewicht voor één onbekende 18
III. Directe waarnemingen met gelijke gewichten voor twee (of meer) onderling onafhankelijke onbekenden 19

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bladz.

IV. Indirecte waarnemingen met gelijk gewicht voor onderling onafhankelijke onbekenden 20
V. Indirecte waarnemingen met ongelijk gewicht . 24
VI. Functies van door indirecte waarneming bepaalde grootheden 26
VII. Niet-lineaire functies bij indirecte waarnemingen. 26
VIII. Directe waarnemingen van niet onderling onafhankelijke grootheden. (Directe waarnemingen met voorwaardenvergelijkingen) 28

IV. Vraagstukken.

I. Directe waarnemingen met gelijk gewicht . . 34
II. Directe waarnemingen met ongelijk gewicht . 36
III. Indirecte waarnemingen met gelijk gewicht . . 41
IV. Indirecte waarnemingen met ongelijk gewicht . 52
V. Directe waarnemingen met voorwaardenvergelijkingen 54

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

I.

INLEIDING.

Eenige definities en eigenschappen uit de waarschijnlijkheidsrekening.

Definities:

De *waarschijnlijkheid* of de kans, dat een bepaald feit zal gebeuren, wordt wiskundig uitgedrukt door een breuk, waarvan: de teller = aantal gunstige gevallen (G)
en de noemer = „ mogelijke „ (M).

Dus:

$$\text{Waarschijnlijkheid } W = \frac{G}{M}.$$

De waarschijnlijkheid W ligt tusschen 0 en 1.

De *maximum waarschijnlijkheid* voor het voorkomen van een bepaald feit is dus

$W_{max.} = 1$ = zekerheid.
$W_{min.} = 0$ = onmogelijkheid.

Eigenschappen:

1°. *Theorema van totale waarschijnlijkheid:*

Wanneer een gebeurtenis het gevolg kan zijn van verschillende oorzaken, dan is de *totale waarschijnlijkheid* der gebeurtenis gelijk aan de som van de waarschijnlijkheden volgens ieder der oorzaken.

Stel totaal aantal mogelijke gevallen = M.

Volgens 1e wijze : g_1 gunstige gevallen.
„ 2e „ : g_2 „ „
. . . . . .
„ n^e „ g_n „ „

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dan is de totale waarschijnlijkheid

$$W = \frac{\text{totaal aantal gunstige gevallen}}{\text{totaal aantal mogelijke gevallen}}$$

of $$W = \frac{g_1 + g_2 + \ldots\ldots + g_n}{M}$$

$$= \frac{g_1}{M} + \frac{g_2}{M} + \ldots\ldots + \frac{g_n}{M}$$

$$W = W_1 + W_2 + \ldots\ldots + W_n$$

Dit theorema heeft alleen betrekking op een enkelvoudig verschijnsel, dat zich op verschillende wijzen kan voordoen.

Voorbeeld. In een bak bevinden zich 2 witte, 3 roode, 4 groene en 5 gele ballen. Welke is dan de kans (de totale waarschijnlijkheid dus), dat men er een gekleurde bal uit zal trekken?

$$W = \frac{3}{14} + \frac{4}{14} + \frac{5}{14} = \frac{12}{14}$$

2°. *Theorema van samengestelde waarschijnlijkheid.*

De waarschijnlijkheid voor het samentreffen van twee verschijnselen A en B noemt men de samengestelde waarschijnlijkheid.

Hierbij zijn drie gevallen te onderscheiden:

a. B is geheel afhankelijk van A: $B = f(A)$.

b. B is geheel onafhankelijk van A: $A = f(x)$, $B = f(y)$.

c. B is niet geheel onafhankelijk van A: $A = f_1(x, y)$.
$B = f_2(x, y)$.

x en y zijn onderling onafhankelijk.

Voor deze drie gevallen wordt de samengestelde waarschijnlijkheid op de volgende wijze uitgedrukt:

Geval a. $B = f(A)$.

De samengestelde waarschijnlijkheid is dan gelijk aan elk der waarschijnlijkheden van de partieele verschijnselen A en B.

$$W_{AB} = W_A = W_B$$

Geval b. $A = f(x)$, $B = f(y)$.

In dit geval is de samengestelde waarschijnlijkheid gelijk aan het product der waarschijnlijkheden van de partieele verschijnselen: $W_{AB} = W_A \times W_B$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

geval a : $W_{AB} = W_a \cdot W_B$.

b. $W_{AB} = W_A \times W_B$ $\frac{7}{12} \times \frac{9}{14}$.

c $W_{AB} = W_a \times W_B$. $\frac{4}{12} \times \frac{3}{11}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Afleiding.

Verschijnsel A: M_A mogelijke, G_A gunstige gevallen.

„ B: M_B „ , G_B „ „ .

$$W_A = \frac{G_A}{M_A} \quad \text{en} \quad W_B = \frac{G_B}{M_B}.$$

Nu het samentreffen van A en B:

aantal mogelijke gevallen: $M_A \times M_B$

„ gunstige „ : $G_A \times G_B$

waaruit volgt:

$$W_{AB} = \frac{G_A \times G_B}{M_A \times M_B}$$

$$= \frac{G_A}{M_A} \times \frac{G_B}{M_B}$$

$$W_{AB} = W_A \times W_B$$

Theorema: Wanneer dus een gebeurtenis bestaat uit het samentreffen van twee (of meer) *onderling onafhankelijke* verschijnselen, dan is de waarschijnlijkheid van die gebeurtenis gelijk aan het product van de waarschijnlijkheden der verschijnselen.

Voorbeeld.

Twee bakken bevatten elk een aantal roode en witte ballen (bak I: 8 roode en 4 witte; bak II: 5 roode en 9 witte). Welke is dan de kans (de samengestelde waarschijnlijkheid dus), dat men uit elk der bakken tegelijk een witte bal zal trekken?

$$W = \frac{4}{12} \times \frac{9}{14}$$

Geval c. $A = f_1(x, y)$, $B = f_2(x, y)$.

De waarschijnlijkheid van het samengestelde verschijnsel is gelijk aan het product van de waarschijnlijkheid van het eene verschijnsel en die van het andere, zooals de laatste waarschijnlijkheid is gewijzigd door het eerst gebeuren van het eene verschijnsel.

$$W_{AB} = W_A \times W_{1B}$$

Afleiding.

Aantal mogelijke gevallen $M = a + b + c + d$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

a gevallen gunstig voor A en gunstig voor B
b „ „ „ A „ ongunstig „ B
c „ ongunstig „ A „ gunstig „ B
d „ „ „ A „ ongunstig „ B

Hieruit volgt onmiddellijk de waarschijnlijkheid voor het samentreffen van A en B nl.

$$W_{AB} = \frac{a}{M}$$

Verder is $W_A = \frac{a+b}{M}$ en $W_{1B} = \frac{a}{a+b}$

dus $W_A \times W_{1B} = \frac{a+b}{M} \times \frac{a}{a+b} = \frac{a}{M}$

of $W_{AB} = W_A \times W_{1B}$

Theorema: Wanneer dus een gebeurtenis bestaat uit het samentreffen van twee (of meer) *niet onderling onafhankelijke* verschijnselen, dan is de waarschijnlijkheid van die gebeurtenis gelijk aan het product van de waarschijnlijkheid van het eerste verschijnsel en van de waarschijnlijkheid van het tweede verschijnsel, zooals deze laatste waarschijnlijkheid geworden is door het plaats hebben van het eerste verschijnsel.

Voorbeeld. In een bak bevinden zich 4 witte en 8 roode ballen. Hoe groot is de kans (de samengestelde waarschijnlijkheid dus), dat men twee witte ballen achter elkaar uit de bak trekt?

$$W = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11}$$

Met behulp van bovengenoemde formule (geval c) kan men ook de waarschijnlijkheid bepalen, dat men achtereenvolgens uit een volledig kaartspel de vier azen trekt. Bedoelde waarschijnlijkheid bedraagt

$$W = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} \times \frac{1}{49}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

II.

Theorie van de waarnemingsfouten.

I. Toevallige waarnemingsfouten.

Algemeen begrip „waarnemingsfouten".

In elke waarneming bevindt zich altijd de een of andere fout.

De fout x in een bepaalde waarneming wordt uitgedrukt door het verschil van de waargenomen grootheid p en de juiste waarde p^1 daarvan.

$$x = p - p^1.$$

De waarnemingsfouten kunnen in de volgende soorten onderscheiden worden:

1°. *Grove fouten*, onachtzaamheden.

2°. *Constante en regelmatige fouten*, waarvan het bedrag op ieder oogenblik uitgedrukt kan worden; hiertoe behooren de fouten die geëlimineerd kunnen worden.

3°. *Toevallige fouten*, die het gevolg zijn van verschillende oorzaken en elk oogenblik van richting en grootte veranderen.

Voor de toevallige fouten is geen rechtstreeksche correctie mogelijk; wel zijn ze aan bepaalde wetten onderworpen.

De theorie der waarnemingsfouten wordt alléén op de toevallige fouten toegepast. Alvorens de waarnemingen aan deze theorie te onderwerpen, moeten zij dus ontdaan worden van de sub 1° en 2° genoemde fouten, zoodat daarin alleen de *toevallige fouten* van waarneming voorkomen.

Definities.

1°. Onder de middelbare waarde der waarnemingsfouten of kortweg de *middelbare fout* verstaat men den wortel uit het gemiddelde van de vierkanten der fouten.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

In een reeks van n waarnemingen komen de fouten $x_1, x_2 \ldots . x_n$ voor, dan is

de middelbare fout: $m = \sqrt{\frac{[xx]}{n}}$.

2°. Onder *gemiddelde fout* (d. i. de gemiddelde waarde der fouten) verstaat men het gemiddelde van de „absolute" waarden der fouten. Van een reeks van n fouten $x_1, x_2 \ldots . x_n$ is dus de gemiddelde fout: $m^1 = \frac{[\text{abs. w. } x]}{n}$.

3°. Onder *waarschijnlijke fout* verstaat men een zoodanige grootheid, dat er evenveel kans bestaat een fout te maken, die grooter is, als om een fout te maken, die kleiner is dan dat bedrag.

Uit een reeks van n fouten kan men de waarschijnlijke fout r vinden door de fouten naar hun absolute waarden te rangschikken en uit die reeks den middelsten term te nemen.

$$W_{-r}^{+r} = \frac{1}{2}.$$

---

2. Elementaire afleiding van de wet der waarnemingsfouten.

Exponentieele Wet.

Hieronder verstaat men de uitdrukking voor de *waarschijnlijkheid van het voorkomen van een bepaalde fout* x in zekere waarneming:

$$W_x = F(x) = \frac{1}{M\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2M^2}}$$

Door toepassing van het theorema van totale waarschijnlijkheid kunnen we de exponentieele wet in in een andere gedaante brengen, waarin zij uitdrukt: *de waarschijnlijkheid van het optreden van een fout tusschen bepaalde grenzen bijv.* x *en* $x + dx$:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

middelbare fout $\mu = \sqrt{\frac{[xx]}{n}}$.

gemiddelde fout $\mu_1 = \frac{[x]}{n}$ — absolute waarde.

waarschijnlijke fout $W_{-r}^{+r} = \frac{1}{2}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$W_x^{x+dx} = \int_x^{x+dx} F(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{M\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2M^2}}\, dx.$$

De exponentieele wet kan als volgt afgeleid worden:

Indien in eene bepaalde waarneming zich een toevallige fout van zeker bedrag x bevindt, dan kan men zich die fout x ontstaan denken als de resultante van een zeker aantal, bijv. s kleine foutjes:

$$x = x_1 + x_2 + \ldots . x_s.$$

Veronderstel, dat de foutjes x_1, x_2, ... + x_s in absolute grootte gelijk zijn, doch alleen in teeken verschillen, dus

$$x_1,\ x_2, \ldots . x_s = +m \text{ of } -m,$$

dan kan men voor de resulteerende fout aannemen:

$$x = \alpha\text{-maal } (+m) + \beta\text{-maal } (-m)$$

waarin $\alpha + \beta = s$, dus

$$x = (\alpha - \beta)\, m \quad \text{of} \quad (2\alpha - s)\, m$$

of

$$\alpha = \frac{x + sm}{2m}.$$

Stel de waarschijnlijkheden W_{+m} en W_{-m} voor het optreden der foutjes $+m$ en $-m$ resp. p en q, dan wordt de waarschijnlijkheid voor het voorkomen van fout x, d. i. dus ook de waarschijnlijkheid voor het optreden van α-maal foutje $+m$ en β-maal foutje $-m$ uitgedrukt door de formule:

$$W_x = \binom{s}{\alpha} p^{\alpha} q^{\beta}.$$

De afleiding van deze formule voor W_x geschiedt door toepassing van het theorema van totale waarschijnlijkheid. Stelt men de waarschijnlijkheden W_{+m} en W_{-m} aan elkaar gelijk, dan is:

$$p = q = {}^1/_2, \text{ want } p + q = 1.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De formule van W_x wordt dus:

$$W_x = \binom{s}{\alpha} \, {}^1/_2{}^\alpha \times {}^1/_2{}^\beta = \binom{s}{\alpha} \left({}^1/_2\right)^s$$

waarin $$\alpha = \frac{x + sm}{2m}.$$

Overgaande tot de limiet $s =$ oneindig groot en $m =$ oneindig klein, vindt men na differentiatie van W_x en daarop volgende integratie *de exponentieele wet*:

$$W_x = F(x) = \frac{1}{M\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2M^2}}$$

waarin M voorstelt $\sqrt{\text{Lim. } sm^2}$ (vergelijk formule IIa, voortplanting der fouten).

M beteekent de middelbare waarde van de enkele fout x (dus deze dan beschouwd als de limiet van de som van een oneindig aantal elementaire foutjes).

---

3. Methode der kleinste vierkanten.

Doel.

De methode der kleinste vierkanten heeft ten doel om uit waarnemingen, wier aantal grooter is dan het aantal te bepalen grootheden, *de meest waarschijnlijke waarden* voor die grootheden af te leiden.

De nauwkeurigheid van de resultaten kan in cijfers uitgedrukt worden door de daarbij behoorende *middelbare fouten* te berekenen.

De bepaling van de meest waarschijnlijke waarde geschiedt met behulp van de waarschijnlijkheidsrekening, n.l. door toepassing van de exponentieele wet.

Toepassing van de Exponentieele Wet:

In een reeks van n waarnemingen komen voor de fouten $x_1, x_2 \ldots . x_n$, die onderling onafhankelijk zijn en waarbij de middelbare waarden $M_1, M_2 \ldots . M_n$ behooren.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Volgens de theorie van de samengestelde waarschijnlijkheid (2e geval) is nu de waarschijnlijkheid voor het samentreffen van deze reeks van n fouten:

$$W_{x_1 \ldots . x_n} = \frac{1}{M_1 \sqrt{2\pi}} c^{-\frac{x_1^2}{2M_1^2}} \times \frac{1}{M_2 \sqrt{2\pi}} c^{-\frac{x_2^2}{2M_2^2}} \times \ldots .$$

$$\ldots . \times \frac{1}{M_n \sqrt{2\pi}} c^{-\frac{x_n^2}{2M_n^2}}$$

$$= \frac{1}{M_1 \sqrt{2\pi} \times M_2 \sqrt{2\pi} \times \ldots . M_n \sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times c^{-\left\{ \frac{x_1^2}{2M_1^2} + \frac{x_2^2}{2M_2^2} + \ldots . + \frac{x_n^2}{2M_n^2} \right\}}.$$

Men vraagt nu de *grootst mogelijke* waarschijnlijkheid te bepalen voor het samentreffen van een zekere reeks fouten.

Hoe brengt men de waarschijnlijkheid $W_{x_1 \ldots . x_n}$ op haar maximum waarde?

M_1, $M_2 \ldots . M_n$ zijn constant als middelbare waarden van de fouten in de gegeven waarnemingsreeks.

Opdat $W_{x_1 \ldots . x_n}$ maximum wordt, zal dus de negatieve exponent van c een minimum moeten zijn, n.l.:

$$\left\{ \frac{x_1^2}{2M_1^2} + \frac{x_2^2}{2M_2^2} \ldots . + \frac{x_n^2}{2M_n^2} \right\} = \text{min.}$$

$$\text{of } \left[\frac{x^2}{M^2} \right] = \text{min.}$$

Dit is de *grondstelling van de methode der kleinste vierkanten.*

Wordt nu in een zeker waarnemingsgeval aan bovenstaande grondstelling voldaan,

$$\text{n.l. } \left[\frac{xx}{M^2} \right] = \text{min.}$$

dan treedt juist die serie fouten op, welke de *maximum* waarschijnlijkheid van samentreffen bezitten; bij deze serie fouten behoort de meest waarschijnlijke waarde van de beschouwde grootheden.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Omgekeerd berekent men de meest waarschijnlijke waarde van de, bij een bepaald waarnemingsgeval betrokken, grootheden door aan de voorwaarde $\left[\frac{x\,x}{M^2}\right] = \text{min.}$ te laten voldoen.

De bijbehoorende middelbare fouten worden dan verder met behulp van hare definities berekend, zooals later bij de toepassingen blijken zal.

Voor waarnemingen van gelijke nauwkeurigheid, die dus gelijke middelbare fouten bezitten, vervalt de M als constante uit de formule $\left[\frac{x\,x}{M^2}\right] = \text{min.}$ en wordt deze eenvoudig: $[x\,x] = \text{min.}$

---

4. De grootte der waarschijnlijkheid voor het optreden van een fout tusschen bepaalde grenzen.

Uit de uitdrukking voor de Exponentieele Wet (bl. 7) volgt, dat de waarschijnlijkheid voor het optreden van een fout tusschen de grenzen o en $+x$ is als volgt:

$$W_o^{+x} = \int_o^x F(x)\,dx = \int_o^{+x} \frac{1}{M\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2M^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{M\sqrt{2\pi}} \int_o^{+x} e^{-\frac{x^2}{2M^2}}\,dx$$

Stel $\frac{x}{M\sqrt{2}} = t$, dan is

$$W_o^{+x} = \frac{M\sqrt{2}}{M\sqrt{2\pi}} \int_o^{+t} e^{-t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_o^t e^{-t^2}\,dt$$

HAKUBUTU-KAN DJAKARTA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De waarschijnlijkheid voor het optreden van een fout tusschen de grenzen is $-x$ en $+x$ is:

$$W_{-x}^{+x} = \int_{-x}^{+x} F(x)\,dx = 2\int_{o}^{x} F(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{o}^{t} e^{-t^2}\,dt \quad \text{stel} = \theta(t), \text{ functie van } t.$$

$$\text{dus } W_{-x}^{+x} = \theta(t).$$

---

5. Betrekkingen tusschen m, m^1 en r.

Bij de toevallige waarnemingsfouten bestaan de volgende betrekkingen tusschen de middelbare fout m, de gemiddelde fout m^1 en de waarschijnlijke fout r:

$$m = 1.25331\ m^1 = 1.48260\ r$$
$$m^1 = 0.79788\ m = 1.18295\ r$$
$$r = 0.67449\ m = 0.84535\ m^1.$$

Deze betrekkingen kunnen gevonden worden met behulp van de definities der fouten en eenige der behandelde eigenschappen uit de waarschijnlijkheidsrekening.

Ofschoon de gemiddelde fout en de waarschijnlijke fout *direct* uit hun definities (zie blz. 5) berekend kunnen worden, geschiedt dit meestal niet, maar worden ze met behulp van de opgegeven betrekkingen uit de middelbare fout berekend, omdat laatstgenoemde, zooals uit het volgende blijken zal, uit de som van de vierkanten der fouten gevonden wordt, zonder dat het noodig is de fouten zelve uit te rekenen.

---

6. De middelbare fout als maat voor de nauwkeurigheid.

We hebben gevonden (zie blz. 11):

$$W_{-x}^{+x} = \theta(t) = \theta\left(\frac{x}{M\sqrt{2}}\right)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.

Voor $x = M$ $\quad W_{-M}^{+M} = 0\left(\frac{M}{M\sqrt{2}}\right) = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.6827$

„ $x = 2\,M$ $\quad W_{-2M}^{+2M} = 0\left(\frac{2\,M}{M\sqrt{2}}\right) = 0\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 0.9545$

„ $x = 3\,M$ $\quad W_{-3M}^{+3M} = 0\left(\frac{3\,M}{M\sqrt{2}}\right) = 0\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0.9973$

„ $x = 4\,M$ $\quad W_{-4M}^{+4M} = 0\left(\frac{4\,M}{M\sqrt{2}}\right) = 0\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) = 0.99994$

Deze waarschijnlijkheden naderen dus vlug tot de eenheid d.i. tot haar maximum waarde, m.a.w. de fout in de berekende meest waarschijnlijke waarde van een grootheid mag met vrij groote zekerheid aangenomen worden als te liggen tusschen $-3\,M$ en $+3\,M$.

---

7. Voortplanting der fouten.

Algemeene opgave.

Grootheden $p_1, p_2 \ldots p_n$

met onderling onafhankelijke middelbare fouten: $m_1, m_2 \ldots m_n$.

Indien gegeven: $P = f(p_1, p_2 \ldots p_n)$.

Wordt gevraagd de middelbare fout in P:

$$M = f(m_1, m_2 \ldots m_n)?$$

Verschillende gevallen.

1. Stel $P = ap$,

waarin p = waargenomen grootheid,

a = getallencoëfficiënt,

dan is na eenvoudige herleiding:

$$M^2 = a^2 m^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Bijzonder geval: a is een breuk bijv. $a = \frac{1}{n}$

$$P = \frac{1}{n}\,p,$$

dan is $M^2 = \frac{1}{n^2}\,m^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I^*)$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

II. $$P = p_1 \pm p_2 \pm \ldots \pm p_n,$$

dan is $M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2$, . . . (II)

altijd + in het 2e lid; het + of — teeken in de uitdrukking voor P heeft geen invloed op M.

Bijzonder geval: P = som van n grootheden p, alle met gelijke middelbare fouten m.

$$M^2 = nm^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II^*)$$

III. *Combinatie van de gevallen I en II.*

a. $$P = a_1 p_1 \pm \ldots \pm a_n p_n = [\pm a p]$$

$$M^2 = a_1^2 m_1^2 + \ldots + a_n^2 m_n^2$$

$$M^2 = [a^2 m^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III^a)$$

b. P = gemiddelde van n waarden van p, alle met gelijke middelbare fouten m.

$$P = \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n} = \frac{1}{n} p_1 + \ldots + \frac{1}{n} p_n$$

$$M^2 = \left[\frac{1}{n^2} m^2\right] = n \frac{1}{n^2} m^2$$

$$M^2 = \frac{1}{n} m^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III^b).$$

IV. *Algemeen geval.*

$$P = f(p_1, p_2 \ldots p_n),$$

dan is $$M^2 = \left(\frac{df}{dp_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{df}{dp_2}\right)^2 m_2^2 \ldots \left(\frac{df}{dp_n}\right)^2 m_n^2$$

$$M^2 = \left[\left(\frac{df}{dp}\right)^2 m^2\right] \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV).$$

.S. Begrip „Gewicht".

Definitie:

Terwijl de middelbare fout een maatstaf in *absoluten* zin is voor de nauwkeurigheid van de waargenomen grootheden, dient het in te voeren nieuwe begrip *„gewicht"* om de *relatieve* nauwkeurigheid uit te drukken.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Waarnemingen, die even nauwkeurig zijn en dus allen dezelfde middelbare waarde van de fout bezitten, worden ook genoemd waarnemingen met *gelijk gewicht*. Zijn de waarnemingen niet even nauwkeurig, bezitten de verschillende waarnemingen dus verschillende middelbare waarden, m_1, $m_2 \ldots . m_n$ voor de fout, dan heeft iedere waarneming een verschillend gewicht, welke wij door $g_1, g_2 \ldots . g_n$ zullen uitdrukken.

Stel een serie waargenomen grootheden:

$$p_1, p_2 \cdots p_n$$

met respectievelijk de vierkanten der middelbare fouten:

$$m_1^2, m_2^2 \ldots . m_n^2.$$

Men voert nu nieuwe uitdrukkingen in:

$$\frac{\mu^2}{g_1} = m_1^2 ; \frac{\mu^2}{g_2} = m_2^2 \ldots . \frac{\mu^2}{g_n} = m_n^2.$$

Die breuken $\frac{\mu^2}{g_1}, \frac{\mu^2}{g_2} \ldots . \frac{\mu^2}{g_n}$ worden zoodanig gekozen, dat ze alle de μ gemeen hebben; deze stelt voor de middelbare fout in een zekere grootheid, terwijl g_1, $g_2 \ldots . g_n$ getallen zijn.

De *getallen* g_1, $g_2 \ldots . g_n$ worden de *gewichten* genoemd resp van de grootheden $p_1, p_2 \ldots . p_n$ en drukken dus de verhoudingen uit van de vierkanten der middelbare fouten m_1^2, $m_2^2 \ldots . m_n^2$ tot μ^2. De gewichten zijn slechts betrekkelijke getallen, die in dezelfde reden vergroot of verkleind kunnen worden.

Beteekenis van μ.

Stel bijv. $m_1 = \mu$, dan is dus volgens definitie van gewicht

$$m_1^2 = \frac{\mu^2}{g_1} \text{ of } \mu^2 = \frac{\mu^2}{g_1} \text{ of } g_1 = 1.$$

μ is dus de middelbare fout van een grootheid, waarvan het gewicht $= 1$ d. i. *van de gewichtseenheid.*

De gewichten g_1, $g_2 \ldots . g_n$ zijn omgekeerd evenredig

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

met de vierkanten der daarbij behoorende middelbare fouten, hetgeen onmiddellijk uit bovenstaande uitdrukkingen volgt n.l:

$$m_1^2 = \frac{\mu^2}{g_1}\,;\; m_2^2 = \frac{\mu^2}{g_2} \ldots m_n^2 = \frac{\mu^2}{g_n}$$

dus: $g_1 : g_2 : g_3 \ldots = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} : \frac{1}{m_3^2} \ldots .$

$\frac{\mu^2}{g_1}$, d. i. het vierkant van de middelbare fout in p_1 is bovendien (zie form. III^b voortplanting der fouten) de uitdrukking voor het vierkant van de middelbare fout in het gemiddelde van g_1 grootheden. Dus p_1 is gelijkwaardig met dat gemiddelde van g_1 grootheden waarin gelijke middelbare fouten μ voorkomen.

Invoering van het begrip „gewicht" in de grondstelling van de methode der kleinste vierkanten.

Zie bl. 9: $\left[\frac{x^2}{M^2}\right] = \text{min.}$

$M_2 = \frac{\mu^2}{G}$, dus $\left[\frac{x^2\, G}{\mu^2}\right] = \text{minimum}$

μ heeft een bepaalde constante waarde, dus:

$$[G\, x\, x] = min.$$

---

9. De twee hoofdformules van de methode der kleinste vierkanten.

Waarnemingen van ongelijke nauwkeurigheid bezitten ongelijke middelbare fouten en dus ook ongelijke gewichten en heeten daarom waarnemingen met ongelijk gewicht, die gelijke nauwkeurigheid en dus ook gelijke middelbare fouten bezitten.

I. *Voor waarnemingen met ongelijk gewicht* wordt dus toegepast de voorwaarde $[G\, x\, x] = \text{minimum}$.

II. *Voor waarnemingen met gelijk gewicht*, geldt:

$$[x\, x] = \text{minimum}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

III.

Toepassingen van de methode der kleinste vierkanten.

1. Directe waarnemingen met gelijk gewicht voor één onbekende.

Opgave:

Gegeven: Een reeks van n waarnemingen: $p_1, p_2 \ldots . p_n$ voor een zelfde grootheid P.

Gevraagd:

1°. de *meest waarschijnlijke waarde* van P;

2°. de *middelbare fout in het eindresultaat* d.i. de middelwaarde M van de fout in P;

3°. de *middelbare fout in de enkele waarneming* d.i. de middelbare waarde m van de fouten in de waarnemingen $p_1, p_2 \ldots . p_n$.

Oplossing:

1°. De waarnemingen voor de grootheid P zijn:

$$p_1, p_2 \ldots . p_n.$$

Volgens de methode van de kleinste vierkanten moet nu de meest waarschijnlijke waarde van P zoodanig uit de waargenomen p's bepaald worden, dat de daarbij optredende fouten

$$x_1 = p_1 - P, x_2 = p_2 - P, \ldots . x_n = p_n - P$$

voldoen aan de voorwaarde

$$[x\,x] = \text{minimum.}$$

De $x_1, x_2 \ldots . x_n$ worden genoemd de *schijnbare fouten* in de waarnemingen $p_1, p_2 \ldots . p_n$ omdat P niet de juiste maar de meest waarschijnlijke waarde van de waargenomen grootheid is.

Voor $[x\,x] = \text{min.}$ kan men schrijven

$$[(p - P)^2] = \text{min.}$$

In deze uitdrukking wordt P als veranderlijke beschouwd. Na herleiding volgens $\frac{d[xx]}{dP} = 0$ vindt men voor de meest waarschijnlijke waarde van P:

$$P = \frac{[p]}{n}$$

d.i. juist het gemiddelde der gedane waarnemingen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

2°. De middelbare fout M in P vinden we door toepassing van de formule IIIb (voortplanting der fouten)

$$M^2 = \frac{1}{n} m^2.$$

3°. Berekening van de middelbare fout m in de enkele waarneming.

Volgens definitie: $m^2 = \frac{[x^1 x^1]}{n}$

indien de x^1's *ware fouten* voorstellen.

Ware fout = waarneming p — absoluut juiste waarde P^1.

Na herleiding:

ware fout = schijnbare fout + fout in eindresultaat.

Door substitutie hiervan in bovenstaande uitdrukking en na verdere herleiding en vereenvoudiging vinden we

$$m^2 = \frac{[x\,x]}{n-1}$$

waarin m dus uitgedrukt staat als functie van de schijnbare fouten x.

Berekening van $[x\,x]$:

$[x\,x]$ kan gevonden worden zonder dat het noodig is de fouten zelve uit te rekenen, n.l. door

$$x_1 = p_1 - P \ldots . x_n = p_n - P$$

te stellen, enz.

Na substitutie en herleiding:

$$[x\,x] = [p\,p] - \frac{[p]^2}{n}.$$

Benaderde waarden.

Bij de practische toepassingen van bovenstaande formules worden de berekeningen zeer vereenvoudigd door eerst van alle waarnemingen een zelfde getal, *de benaderde waarde*, af te trekken en daarna de restanten als nieuwe gewone waarnemingen verder te behandelen volgens de methode der kleinste vierkanten.

De benaderde waarden kunnen willekeurig gekozen

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

worden, liefst zóó, dat de berekeningen met kleine getallen kunnen uitgevoerd worden.

1. Eindresultaat = benaderde waarde + berekende waarde.
2. Middelbare-fout in eindresultaat = middelbare fout in berekende waarde.

II. Directe waarnemingen met ongelijk gewicht voor één onbekende.

Opgave:

Gegeven: Van een zelfde grootheid P een reeks van n waarnemingen:

$$p_1, p_2 \cdot \cdot \cdot \cdot p_n$$

met daarbij behoorende gewichten

$$g_1, g_2 \cdot \cdot \cdot \cdot g_n.$$

Gevraagd:

1°. *de meest waarschijnlijke waarde van* P;
2°. *de middelbare fout in* P (eindresultaat);
3°. Middelbare fout μ in de gewichtseenheid;
4°. Gewicht G van het eindresultaat.

Oplossing:

1°. De meest waarschijnlijke waarde van P vinden we door de daarbij optredende fouten te laten voldoen aan de voorwaarde

$$[g\,x\,x] = \text{min.}$$

waaruit na herleiding overeenkomstig het vorig geval volgt:

$$P = \frac{[gp]}{[g]}$$

2°. De middelbare fout M in P wordt gevonden door toepassing van de formule III^a (voortplanting der fouten) en door invoering van de middelbare fout in de gewichtseenheid:

$$M^2 = \frac{\mu^2}{[g]}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

3°. μ treedt nu in de plaats van m = middelbare fout in de enkele waarneming (zie vorig geval)

$$\mu^2 = \frac{[g\,xx]}{n-1}$$

waarin $[g\,x\,x] = [g\,p\,p] - \frac{[g\,p]^2}{[g]}$.

4°. Het gewicht G van het eindresultaat wordt afgeleid uit de middelbare fout $M^2 = \frac{\mu^2}{[g]}$ n.l.

$$G = [g].$$

Opmerking:

Neemt men in deze formules alle gewichten gelijk aan één, waardoor $[g] = n$ wordt, dan gaan deze formules over in die van het vorige geval.

III. Directe waarnemingen met gelijke gewichten voor twee (of meer) onderling onafhankelijke onbekenden.

Opgave:

Gegeven. Voor een zelfde grootheid P een reeks van n_1 waarnemingen:

$$p_1,\ p_2 \cdots p_{n_1}$$

en voor een andere, van P onafhankelijke grootheid Q, een reeks van n_2 waarnemingen:

$$q_1,\ q_2, \cdots q_{n_2}$$

Gevraagd:

1°. *de meest waarschijnlijke waarden* van P en Q;

2°. *de middelbare fout m in de enkele waarneming*;

3°. *de middelbare fouten in P en Q.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Oplossing:

Volgens het geval I:

$$P = \frac{[p]}{n_1} \qquad Q = \frac{[q]}{n_2}$$

$$m_P^2 = \frac{m^2}{n_1} \qquad m_Q^2 = \frac{m^2}{n_2}$$

Een enkele waarde van m moet nu berekend worden uit alle voorhanden waarnemingen

$$m^2 = \frac{[(p-P)^2] + [(q-Q)^2]}{(n_1 + n_2) - 2}$$

In deze uitdrukking is in 't algemeen de teller gelijk aan de som van de vierkanten van alle schijnbare fouten en de noemer gelijk aan het totaal aantal waarnemingen verminderd met het aantal der onbekenden.

Opmerking. Het geval III is evenals het overeenkomstige geval voor waarnemingen met ongelijke gewichten gemakkelijk af te leiden uit de gevallen voor indirecte waarnemingen.

IV. Indirecte waarnemingen met gelijk gewicht voor onderling onafhankelijke onbekenden.

Opgave:

Stel, dat er bijv. drie onderling onafhankelijke grootheden A, B en C zijn, welke men *niet* door *directe* meting van die grootheden kan bepalen, maar wel *indirect* uit waarnemingen van andere grootheden P_1, P_2 . . . . P_n, die lineaire functies van A, B en C zijn, namelijk:

$$(p_1)\ P_1 = a_1 A + b_1 B + c_1 C$$
$$(p_2)\ P_2 = a_2 A + b_2 B + c_2 C$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(p_n)\ P_n = a_n A + b_n B + c_n C$$

waarin a_1, b_1 en c_1 enz. getallen-coëfficiënten voorstellen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Door waarneming heeft men voor de grootheden P_1, $P_2 \ldots . P_n$ gevonden de waarden p_1, $p_2 \ldots . p_n$.

De schijnbare fouten worden uitgedrukt door de zoogenaamde *foutenvergelijkingen*:

$$x_1 = p_1 - P_1 = p_1 - a_1 A - b_1 B - c_1 C$$
$$x_2 = p_2 - P_2 = p_2 - a_2 A - b_2 B - c_2 C$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = p_n - P_n = p_n - a_n A - b_n B - c_n C$$

1°. **Berekening van de meest waarschijnlijke waarden van A, B en C.**

Men vindt nu de meest waarschijnlijke waarden van A, B en C door deze 3 grootheden zoodanig te bepalen, dat

$$[xx] = \text{min.}$$

In deze uitdrukking $[xx]$ zijn dan A, B en C de veranderlijken en wel onderling onafhankelijk. Dus de voorwaarden, opdat $[xx]$ = min. wordt, zijn:

$$\frac{d\,[xx]}{dA} = 0, \frac{[d\,xx]}{dB} = 0, \frac{d\,[xx]}{dC} = 0.$$

Hieruit herleidt men de volgende drie *normaalvergelijkingen*:

Normaalvergelijkingen

$$\begin{cases} [aa]\,A + [ab]\,B + [ac]\,C - [ap] = 0 \\ [ab]\,A + [bb]\,B + [bc]\,C - [bp] = 0 \\ [ac]\,A + [bc]\,B + [cc]\,C - [cp] = 0 \end{cases}$$

Men vindt dus de meest waarschijnlijke waarden voor A, B en C door deze uit bovenstaande normaalvergelijkingen op te lossen.

Met het oog op de berekening der middelbare fouten kunnen de normaalvergelijkingen worden opgelost door middel van onbepaalde coëfficiënten, die *gewichtsgetallen* genoemd worden, omdat ze in nauw verband staan met het gewicht van het eindresultaat.

De gewichtsgetallen, waarvan er drie bij elke onbekende A, B en C behooren, worden opgelost uit de z.g. *gewichts-*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

vergelijkingen, waarvan er ook 3 stel zijn overeenkomstig het aantal onbekenden.

Oplossing van A. Q_{11}, Q_{12} en Q_{13} zijn de *gewichtsgetallen van A*.

De meest waarschijnlijke waarde van A is:

$$A = [ap]\,Q_{11} + [bp]\,Q_{12} + [cp]\,Q_{13}.$$

Gewichtsvergelijkingen van A:

$$\begin{aligned}[aa]\,Q_{11} + [ab]\,Q_{12} + [ac]\,Q_{13} &= 1\\ [ab]\,Q_{11} + [bb]\,Q_{12} + [bc]\,Q_{13} &= 0\\ [ac]\,Q_{11} + [bc]\,Q_{12} + [cc]\,Q_{13} &= 0\end{aligned}$$

Oplossing van B. *Gewichtsgetallen van B:* Q_{21}, Q_{22} en Q_{23}.

De meest waarschijnlijke waarde van B is:

$$B = [ap]\,Q_{21} + [bp]\,Q_{22} + [cp]\,Q_{23}.$$

Gewichtsvergelijkingen van B:

$$\begin{aligned}[aa]\,Q_{21} + [ab]\,Q_{22} + [ac]\,Q_{23} &= 0\\ [ab]\,Q_{21} + [bb]\,Q_{22} + [bc]\,Q_{23} &= 1\\ [ac]\,Q_{21} + [bc]\,Q_{22} + [cc]\,Q_{23} &= 0\end{aligned}$$

Oplossing van C. *Gewichtsgetallen van C:* Q_{31}, Q_{32} en Q_{33}.

De meest waarschijnlijke waarde van C is:

$$C = [ap]\,Q_{31} + [bp]\,Q_{32} + [cp]\,Q_{33}.$$

Gewichtsvergelijkingen van C:

$$\begin{aligned}[aa]\,Q_{31} + [ab]\,Q_{32} + [ac]\,Q_{33} &= 0\\ [ab]\,Q_{31} + [bb]\,Q_{32} + [bc]\,Q_{33} &= 0\\ [ac]\,Q_{31} + [bc]\,Q_{32} + [cc]\,Q_{33} &= 1\end{aligned}$$

2°. Bepaling van de middelbare fouten in A, B en C.

Stel: M_A, M_B en M_C respectievelijk de middelbare fouten in A, B en C. De waarnemingen p_1, $p_2 \ldots p_n$ worden verondersteld alle van gelijk gewicht te zijn, dus alle met dezelfde middelbare fout m in de enkele waarneming.

De gevonden waarden voor A, B en C zijn te herleiden tot de volgende uitdrukkingen

$$A = [\alpha p], \quad B = [\beta p], \quad C = [\gamma p]$$

waarin α, β en γ bepaalde coëfficienten zijn, die in zeker verband tot de gewichtsgetallen staan. M_A, M_B, M_C vinden

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

we door toepassing van formule III^a (voortplanting der fouten) n.l.

$$M_A^2 = [\alpha\alpha]\, m^2,\ M_B^2 = [\beta\beta]\, m^2 \text{ en } M_C^2 = [\gamma\gamma]\, m^2.$$

Verder blijkt in verband met de gewichtsvergelijkingen

$$[\alpha\alpha] = Q_{11},\ [\beta\beta] = Q_{22},\ [\gamma\gamma] = Q_{33}$$

dus

$$M_A^2 = Q_{11}\, m^2$$
$$M_B^2 = Q_{22}\, m^2$$
$$M_C^2 = Q_{33}\, m^2$$

Stel het gewicht van de enkele waarneming = 1 en stel het gewicht van het eindresultaat = G, dan is volgens definitie van „gewicht":

$$M_A^2 = \frac{m^2}{G_A},\ M_B^2 = \frac{m^2}{G_B},\ M_C^2 = \frac{m^2}{G_C}.$$

Dus is $Q_{11} = \frac{1}{G_A}$, $Q_{22} = \frac{1}{G_B}$ en $Q_{33} = \frac{1}{G_C}$.

3°. **Berekening van de middelbare fout m in de enkele waarneming.**

Volgens definitie: $m^2 = \frac{[x^1 x^1]}{n}$.

Door herleiding van de ware fouten x^1 in de schijnbare fouten in verband met de normaal- en gewichtsvergelijkingen enz. vinden we als resultaat:

$$m^2 = \frac{[xx]}{n-3}$$

of in 't algemeen

$$m^2 = \frac{[xx]}{n\text{-aantal onbekenden}}.$$

Bepaling van $[xx]$:

$$[xx] = [pp] - A\,[ap] - B\,[bp] - C\,[cp].$$

Opmerking. In werkelijkheid is 't niet noodig *alle* gewichtsgetallen te kennen, want er bestaat de betrekking: $Q_{rs} = Q_{sr}$ hetgeen voor elk willekeurig stel bijv. $Q_{12} = Q_{21}$ bewezen kan worden met behulp van de ingevoerde uitdrukkingen α, β en γ:

$$Q_{12} = [\alpha\beta] = Q_{21}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De oplossing van de normaal-vergelijkingen en gewichtsvergelijkingen, benevens de berekening van $[x\,x]$ kan geschieden volgens de methode van GAUSS. Overzicht van de berekening wordt op college gedrukt rondgedeeld en is ook te vinden in SCHOLS. Landmeten en waterpassen. 8e en 9e druk.

Voor een niet te groot aantal onbekenden kan ook als volgt worden te werk gegaan.

De onbekenden worden ieder voor zich opgelost in functie van de bekende termen van de normaal-vergelijkingen. De coëfficiënten van de bekende termen zijn dan de gewichtsgetallen, en na substitutie van de getallen-waarden van de bekende termen volgen dan de waarden der onbekenden. Vergelijk hiervoor blz. 20

$$A = [a\,p]\,Q_{11} + [b\,p]\,Q_{12} + [c\,p]\,Q_{13}$$
$$B = [a\,p]\,Q_{21} + [b\,p]\,Q_{22} + [c\,p]\,Q_{23}$$
$$C = [a\,p]\,Q_{31} + [b\,p]\,Q_{32} + [c\,p]\,Q_{33}$$

Dikwijls geeft het besparing van werk, wanneer sommige onbekenden, wier getallenwaarde niets ter zake doet, worden geëlimineerd uit de fouten-vergelijkingen, alvorens tot het opmaken der (gereduceerde) normaal-vergelijkingen wordt overgegaan. Zie voorbeeld blz. 48. Methode van SNELLIUS.

V. Indirecte waarnemingen met ongelijk gewicht.

De gang van de berekeningen is dezelfde als bij de indirecte waarnemingen met *gelijk* gewicht.

Verondersteld wordt, dat de functies lineair en er eenvoudigheidshalve slechts 2 grootheden A en B in plaats van drie, zooals in het vorig geval, zijn.

Opgave:

Waarnemingen	Gewichten.
$p_1 = a_1 A + b_1 B$	g_1
$p_2 = a_2 A + b_2 B$	g_2
. . . . .	. . .
$p_n = a_n A + b_n B$	g_n

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1°. **Berekening van de meest waarschijnlijke waarden van A en B.**

Deze moeten zoodanig bepaald worden, dat de daarbij behoorende fouten voldoen aan de voorwaarde: $[g\,x\,x] = \text{min.}$ waaruit na herleiding volgen de twee *normaalvergelijkingen:*

$$[g\,a\,a]\;A + [g\,a\,b]\;B = [g\,a\,p]$$
$$[g\,a\,b]\;A + [g\,b\,b]\;B = [g\,b\,p]$$

Uit deze vergelijkingen lost men weer de meest waarschijnlijke waarden voor A en B op door middel van de ingevoerde gewichtsgetallen en gewichtsvergelijkingen.

Oplossing van A.

Gewichtgetallen: Q_{11} en Q_{12}.

Gewichtsvergelijkingen:

$$[g\,a\,a]\;Q_{11} + [g\,a\,b]\;Q_{12} = 1$$
$$[g\,a\,b]\;Q_{11} + [g\,b\,b]\;Q_{12} = 0.$$

Meest waarschijnlijke waarde:

$$A = [g\,a\,p]\;Q_{11} + [g\,b\,p]\;Q_{12}.$$

Oplossing van B

Gewichtsgetallen: Q_{21} en Q_{22}.

Gewichtsvergelijkingen:

$$[g\,a\,a]\;Q_{21} + [g\,a\,b]\;Q_{22} = 0$$
$$[g\,a\,b]\;Q_{21} + [g\,b\,b]\;Q_{22} = 1.$$

Meest waarschijnlijke waarde:

$$B = [g\,a\,p]\;Q_{21} + [g\,b\,p]\;Q_{22}.$$

2°. **Te bepalen de middelbare fouten M_A en M_B in A en B.**

$$M_A^2 = Q_{11}\,\mu^2 = \frac{\mu^2}{G_A} \text{ dus } G_A = \frac{1}{Q_{11}}$$

$$M_B^2 = Q_{22}\,\mu_2 = \frac{\mu^2}{G_B} \text{ dus } G_B = \frac{1}{Q_{22}}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

3°. **Berekening van μ, d. i. de middelbare fout in de gewichtseenheid:**

$$\text{in 't algemeen } \mu^2 = \frac{[g\,x\,x]}{n-v}$$

n = aantal waarnemingen,
v = „ onbekenden.
Bepaling van $[g\,x\,x]$.

$$[[g\,x\,x] = [g\,p\,p] - [g\,a\,p]\,A - [g\,b\,p]\,B.$$

VI. Functies van door indirecte waarneming bepaalde grootheden.

Gegeven: $R = f(A, B, C)$.
A, B en C zijn door indirecte waarneming bepaald.
Gevraagd: 1. Meest waarschijnlijke waarde voor R.
2. Middelbare fout M_R in R.

Oplossing:

1°. De meest waarschijnlijke waarde van R wordt gevonden door in de gegeven functie $R = f(A\,B\,C)$ de gevonden meest waarschijnlijke waarden van A, B en C te substitueeren.

2°. Middelbare fout M_R:

$$M_R^2 = \mu^2 \left\{ Q_{11} \left(\frac{df}{dA}\right)^2 + Q_{22} \left(\frac{df}{dB}\right)^2 + Q_{33} \left(\frac{df}{dC}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\,Q_{12} \frac{df}{dA} \cdot \frac{df}{dB} + 2\,Q_{13} \frac{df}{dA} \cdot \frac{df}{dC} + 2\,Q_{23} \frac{df}{dB} \cdot \frac{df}{dC} \right\}.$$

Voor de berekening van M_R is dus noodig te weten de waarden van de *gewichtsgetallen* met *kwadratische* zoowel als met *niet-kwadratische index*.

VII. Niet-lineaire functies bij indirecte waarnemingen.

Indien de betrekkingen tusschen de te bepalen grootheden A, B en C en de gemeten grootheden $P_1, P_2 \ldots P_n$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

door niet-lineaire functies uitgedrukt worden, brengt men deze eerst weer tot lineaire functies terug door de invoering van benaderde waarden A_0, B_0 en C_0 respectievelijk voor A, B en C.

Daarna bepaalt men de correcties ΔA, ΔB en ΔC, die men moet aanbrengen om uit de benaderde waarden A_0, B_0 en C_0 de meest waarschijnlijke waarden A, B en C te vinden:

$$A = A_0 + \Delta A, \quad B = B_0 + \Delta B, \quad C = C_0 + \Delta C.$$

De gegeven niet-lineaire functies zijn:

$$\begin{aligned} (p_1) \quad & P_1 = f_1 (A, B, C) \\ (p_2) \quad & P_2 = f_2 (A. B, C) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ (p_n) \quad & P_n = f_n (A, B, C) \end{aligned}$$

Door waarneming vinden we:

$$p_1, p_2 \ldots . p_n \text{ voor } P_1, P_2 \ldots . P_n$$

De schijnbare fouten zijn dan:

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 - f_1 (A, B, C) \\ x_2 &= p_2 - f_2 (A, B, C) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ x_n &= p_n - f_n (A, B, C) \end{aligned}$$

Door invoering van benaderde waarden wordt:

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 - f_1 (A_0 + \Delta A, B_0 + \Delta B, C_0 + \Delta C) \\ x_2 &= p_2 - f_2 (A_0 + \Delta A, B_0 + \Delta B, C_0 + \Delta C) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= p_n - f_n (A_0 + \Delta A, B_0 + \Delta B, C_0 + \Delta C) \end{aligned}$$

Volgens TAYLOR ontwikkeld:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 - \{ a_1 \Delta A + b_1 \Delta B + c_1 \Delta C \} \\ x_2 &= q_2 - \{ a_2 \Delta A + b_2 \Delta B + c_2 \Delta C \} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= q_n - \{ a_n \Delta A + b_n \Delta B + c_n \Delta C \} \end{aligned}$$

Deze uitdrukkingen zijn geheel van denzelfden vorm als de vroeger afgeleide foutenvergelijkingen (bl. 20).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$x_1 = p_1 - (a_1 A + b_1 B + c_1 C)$$
$$x_2 = p_2 - (a_2 A + b_2 B + c_2 C)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = p_n - (a_n A + b_n B + c_n C)$$

dus kunnen we de gewone formules van de indirecte waarnemingen toepassen, mits we A, B en C vervangen door ΔA, ΔB en ΔC en de getallencoëfficiënten anders nemen.

$$q_1 = p_1 - f_1 (A_0 B_0 C_0);\ a_1 = \frac{d f_1}{d A_0};\ b_1 = \frac{d f_1}{d B_0};\ c_1 = \frac{d f_1}{d C_0}$$
$$q_2 = p_2 - f_2 (A_0 B_0 C_0);\ a_2 = \frac{d f_2}{d A_0};\ b_2 = \frac{d f_2}{d B_0};\ c_2 = \frac{d f_2}{d C_0}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q_n = p_n - f_n (A_0 B_0 C_0);\ a_n = \frac{d f_n}{d A_0};\ b_n = \frac{d f_n}{d B_0};\ c_n = \frac{d f_n}{d C_0}$$

Zijn uit de normaalvergelijkingen ΔA, ΔB en ΔC opgelost, dan vinden we vanzelf de meest waarschijnlijke waarden

$$A = A_0 + \Delta A;\ B = B_0 + \Delta B;\ C = C_0 + \Delta C.$$

Opmerking.

De invoering van benaderde waarden A_0, B_0 en C_0 heeft ook dikwijls plaats, als de functies toch al lineair zijn, teneinde de bereking door kleinere getallen eenvoudiger te maken.

VIII. Directe waarnemingen van niet onderling onafhankelijke grootheden.

(Directe waarnemingen met voorwaardenvergelijkingen).

Opgave:

Grootheden: $P_1\ P_2 \ldots . P_n$
Waarnemingen: $p_1,\ p_2 \ldots . p_n$
Gewichten: $g_1,\ g_2 \ldots . g_n$

De betrekkingen waaraan die onderling afhankelijke grootheden P_1, $P_2 \ldots . P_n$ moeten voldoen, kunnen zijn lineaire of niet-lineaire betrekkingen. Reeds is gebleken, dat niet-lineaire functies door invoering van benaderde waarden tot

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

lineaire functies kunnen teruggebracht worden, dus zullen in dit geval alleen lineaire betrekkingen behandeld worden.

Veronderstel, dat er 3 betrekkingen zijn, waaraan de grootheden $P_1, P_2 \ldots . P_n$ moeten voldoen, n.l.:

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + \ldots . + a_n P_n = R_1$$
$$b_1 P_1 + b_2 P_2 + \ldots . + b_n P_n = R_2$$
$$c_1 P_1 + c_2 P_2 + \ldots . + c_n P_n = R_3$$

Het aantal betrekkingen kan nooit grooter dan het aantal onbekenden zijn.

Oplossing:

1°. De *meest waarschijnlijke waarden* $P_1, P_2 \ldots . P_n$ moeten zoodanig zijn, dat ze zelf aan de drie gegeven betrekkingen voldoen, terwijl de daarbij optredende fouten de voorwaarde $[g\,x\,x] =$ min. moeten vervullen.

Schijnbare fouten:

$$x_1 = p_1 - P_1 \text{ of } P_1 = p_1 - x_1$$
$$x_2 = p_2 - P_2 \text{ of } P_2 = p_2 - x_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = p_n - P_n \text{ of } P_n = p_n - x_n$$

Zijn nu $x_1, x_2 \ldots . x_n$ bekend, dan zijn dus vanzelf ook de meest waarschijnlijke waarden van $P_1, P_2 \ldots . P_n$ gevonden. Het doel wordt nu in dit geval, om *de waarden van de schijnbare fouten* $x_1, x_2 \ldots . x_n$ te vinden.

Door substitutie van $P_1 = p_1 - x$ enz. in de 3 gegeven betrekkingen en na verdere herleiding vinden we de 3 zoogenaamde *voorwaardenvergelijkingen:*

1. $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots . a_n x_n = r_1$ (nieuwe bekende term)
2. $b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots . b_n x_n = r_2$
3. $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots . c_n x_n = r_3$

Tevens moeten de fouten voldoen aan de voorwaarde:

$$[g\,x\,x] = \text{min. of}$$
$$f(x_1, x_2 \ldots . x_n) = \text{min.}$$

De grootheden $x_1, x_2 \ldots . x_n$ van deze functie zijn *niet*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

onderling onafhankelijk, dus, opdat deze functie een minimum zij, moet voldaan worden aan de voorwaarde:

totale diff. = o.

4. $$g_1 x_1 dx_1 + g_2 x_2 dx_2 + \ldots + g_n x_n dx_n = o.$$

Door differentiatie van de voorwaardenvergelijkingen, invoering van coëfficiënten k_1, k_2 en k_3 (de zoogenaamde korrelaten) en na verdere herleidingen, vinden we als resultaat n vergelijkingen, de zoogenaamde *korrelatenvergelijkingen:*

$$x_1 = \frac{a_1}{g_1} k_1 + \frac{b_1}{g_1} k_2 + \frac{c_1}{g_1} k_3$$

$$x_2 = \frac{a_2}{g_2} k_1 + \frac{b_2}{g_2} k_2 + \frac{c_2}{g_2} k_3$$

. . . . . .

$$x_n = \frac{a_n}{g_n} k_1 + \frac{b_n}{g_n} k_2 + \frac{c_n}{g_n} k_3$$

waarin de schijnbare fouten x_1, $x_2 \ldots . x_3$ in de korrelaten k_1, k_2 en k_3 uitgedrukt zijn.

Deze korrelaten worden gevonden door substitutie van de *korrelatenvergelijkingen* in de *voorwaardenvergelijkingen*, waardoor 3 nieuwe vergelijkingen, de zoogenaamde *normaalvergelijkingen* ontstaan, evenveel vergelijkingen als er korrelaten zijn en waaruit dus deze opgelost kunnen worden:

$$\left[\frac{a\,a}{g}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{g}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{g}\right] k_3 = r_1$$

$$\left[\frac{a\,b}{g}\right] k_1 + \left[\frac{b\,b}{g}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{g}\right] k_3 = r_2$$

$$\left[\frac{a\,c}{g}\right] k_1 + \left[\frac{b\,c}{g}\right] k_2 + \left[\frac{c\,c}{g}\right] k_3 = r_3$$

De oplossing van deze *normaalvergelijkingen* geschiedt op dezelfde wijze als die van de normaalvergelijkingen in 't geval van indirecte waarnemingen van onderling onafhankelijke grootheden.

Zijn eenmaal de korrelaten k_1, k_2 en k_3 opgelost, dan vindt men met behulp van de bovenstaande korrelatenvergelijkingen de schijnbare fouten x_1, $x_2 \ldots . x_n$, waarmede dan de meest waarschijnlijke waarden P_1, $P_2 \ldots . P_n$ berekend worden.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

2°. *Bepaling van de middelbare fouten.*

Daartoe brengen wij het vraagstuk terug tot indirecte waarnemingen van onderling onafhankelijke grootheden.

In plaats van n onbekenden, die aan 3 betrekkingen moeten voldoen, kunnen ingevoerd worden $n - 3$ onderling onafhankelijke onbekenden $A, B \ldots . K$, en 3 onbekenden, die functies zijn van $A, B \ldots . K$.

De schijnbare fouten in de waarnemingen worden dan voorgesteld door:

$$\begin{aligned}
x_1 &= p_1 - A \\
x_2 &= p_2 - B \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-3} &= p_{n-3} - K \\
x_{n-2} &= p_{n-2} - a_l A + b_l B - \ldots . - k_l K \\
x_{n-1} &= p_{n-1} - a_m A + b_m B - \ldots . - k_m K \\
x_n &= p_n - a_n A + b_n B - \ldots . - k_n K
\end{aligned}$$

Overeenkomstig de formules bij de indirecte waarnemingen vinden we dus voor de middelbare fout in de gewichtseenheid:

$$\mu^2 = \frac{[g\,x\,x]}{n - v}$$

waarin: n = aantal waarnemingen
v = „ onafhankelijke onbekenden.

In dit geval is het aantal onafhankelijke onbekenden $A, B \ldots . K$. gelijk aan n verminderd met het aantal voorwaarden 3, dus $n - 3$:

$$\mu^2 = \frac{[g\,x\,x]}{n - (n-3)}$$

$$\text{of } \mu^2 = \frac{[g\,x\,x]}{3}$$

$$\text{in 't algemeen: } \mu^2 = \frac{[g\,x\,x]}{\text{aantal voorwaarden}} = \frac{[g\,x\,x]}{w}.$$

Berekening van $[g\,x\,x]$ met behulp van de korrelatenvergelijkingen en de normaalvergelijkingen:

$$[g\,x\,x] = k_1 r_1 + k_2 r_2 + k_3 r_3$$

$$\text{in 't algemeen: } [g\,x\,x] = [k\,r].$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opmerkingen:

I. Het is dikwijls moeilijk de voorwaarden vergelijkingen goed op te stellen; daarom brengen we de vraagstukken van grootheden, waartusschen betrekkingen bestaan, liefst terug tot het vraagstuk van indirecte waarneming van onderling onafhankelijke grootheden. We geven dan aan onze waarnemingen en betrekkingen den vorm van functies van onderling onafhankelijke grootheden. (Zie de afleiding van de middelbare fouten bl. 31).

II. Door in het behandelde geval de gewichten $g_1, g_2 \ldots . g_n$ alle = 1 te stellen, gaan de formules over tot die van waarnemingen met *gelijk gewicht.*

Te bepalen: $P_1, P_2 \ldots . P_n$

gemeten: $p_1, p_2 \ldots . p_n$

Voorwaardenvergelijkingen dezelfde (bl. 29).

Korrelatenvergelijkingen:

$$x_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3$$
$$x_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3$$

Normaalvergelijkingen:

$$[a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 = r_1$$
$$[a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 = r_2$$
$$[a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 = r_3$$

Middelbare fout in de enkele waarneming:

$$m^2 = \frac{[xx]}{\text{aantal voorwaarden}}$$

$$[xx] = k_1 r_1 + k_2 r + k_3 r_3.$$

III. *Middelbare fout in een lineaire functie van direct waargenomen grootheden, waartusschen betrekkingen bestaan.*

Grootheid F = lineaire functie van $P_1, P_2 \ldots . P_n$.

$$F = l_1 P_1 + l_2 P_2 + \ldots . + l_n P_n.$$

Gevraagd: Middelbare fout M_F in F.

Oplossing. Voor de P's substitueeren: $p - x$ en vervolgens de x's elimineeren met behulp van de korrelatenvergelijkingen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Daarna door middel van de normaalvergelijkingen de korrelaten wegwerken.

Na vele herleidingen is eindelijk het eindresultaat *de middelbare fout in F:*

$$M_F^2 = \frac{1}{3}\{[l\,l] - [a\,l]\,L_1 - [b\,l]\,L_2 - [c\,l]\,L_3\}\ m^2$$

waarin de grootheden L_1, L_2 en L_3 gevonden moeten worden uit de 3 vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
[a\,a]\,L_1 + [a\,b]\,L_2 + [a\,c]\,L_3 &= [a\,l]\\
[a\,b]\,L_1 + [b\,b]\,L_2 + [b\,c]\,L_3 &= [b\,l]\\
[a\,c]\,L_1 + [b\,c]\,L_2 + [c\,c]\,L_3 &= [c\,l]
\end{aligned}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

IV.

Vraagstukken.

I. Directe waarnemingen met gelijk gewicht.

Voorbeeld.

Bij het meten van een bepaalden hoek zijn de volgende waarden gevonden:

78° 54′ 55,″4
„ „ 56, 1
„ „ 58, 0
„ „ 61, 9
„ „ 59, 2
„ „ 57, 4
„ „ 57, 7
„ „ 60, 3
„ „ 63, 6
„ „ 53, 9
„ „ 59, 7
„ „ 56, 4

Men vraagt de meest waarschijnlijke waarde voor dien hoek, alsmede de middelbare fout in de uitkomst, te berekenen.

Oplossing.

Trek eerst van alle waarnemingen een zelfde getal (de benaderde waarde), in dit geval 78° 54′, af en beschouw daarna de restanten als een reeks van $n = 12$ nieuwe waarnemingen $p_1, p_2 \ldots p_{12}$. We vinden dan de meest waarschijnlijke waarde P hiervan volgens de formule:

$$P = \frac{[p]}{n}$$

Door bij deze uitkomst de benaderde waarde op te tellen, verkrijgt men de meest gezochte waarschijnlijke waarde van den hoek.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De middelbare fout in het eindresultaat $= M$ wordt gevonden uit:

$$M^2 = \frac{m^2}{n}$$

waarin $m^2 = \frac{[x\,x]}{n-1}$ (m = middelbare fout in de enkele waarneming), terwijl $[x\,x] = [p\,p] - \frac{[p]^2}{n}$ is.

De becijfering geschiedt als volgt:

Benaderde waarde = 78° 54′.

p	$x = p - P$	x^2
55,4	— 2,9	8,41
56,1	— 2,2	4,84
58,0	— 0,3	0,09
61,9	+ 3,6	12,96
59,2	+ 0,9	0,81
57,4	— 0,9	0,81
57,7	— 0,6	0,36
60,3	+ 2,0	4,00
63,6	+ 5,3	28,09
53,9	— 4,4	19,36
59,7	+ 1,4	1,96
56,4	— 1,9	3,61
$[p] = 699,6$	+ 13,2	$[x\,x] = 85,30$
$n = 12$	— 13,2	$n - 1 = 11$
$P = \frac{[p]}{n}$ 58″,3	0	$m^2 = \frac{[x\,x]}{n-1} = 7,75$
		$n = 12$
		$M^2 = \frac{m^2}{n} = 0,65$
		$M = 0″,81.$

Controle: $[x] = [p - P]$
$= [p] - n\,P = 0$
Zie optelling 2e kolom.

Eindresultaat = Benaderde waarde + P
= 78°54′ + 58″,3 = 78°54′58″,3

Middelbare fout in eindresultaat $M = \pm 0″,81$

Schrijfwijze voor de uitkomst:

$$78°54′58″,3 \pm 0″,81.$$

De juiste waarde van den hoek kan dan met vrij groote

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

zekerheid aangenomen worden tusschen de meest waarschijnlijke waarde min 3 M en plus 3 M dus

tusschen 78°54′58″,3 — 3 × 0″,81 = 78°54′55″,87
en 78°54′58″,3 + 3 × 0″,81 = 78°55′0″,73.

— 1891.

Men vraagt voor het geval van directe waarnemingen met gelijk gewicht de formule te ontwikkelen voor het berekenen van de middelbare fout van de enkele waarneming.

II. Directe waarnemingen met ongelijk gewicht.

Voorbeeld.

Bij het bepalen van de geographische breedte van een plaats op aarde, heeft men in verschillende nachten de volgende uitkomsten verkregen:

52°5′10″,60	als gemiddelde	van	13	sterwaarnemingen.
52°5′10″,82	„	„	20	„
52°5′11″,04	„	„	7	„
52°5′10″,90	„	„	22	„
52°5′ 9″,58	„	„	31	„

Men vraagt de meest waarschijnlijke waarde voor de geogr. breedte als mede de middelbare fout daarvan te berekenen.

Oplossing.

De vijf uitkomsten, in verschillende nachten als gemiddelden van een verschillend aantal sterwaarnemingen verkregen, kunnen beschouwd worden als directe waarnemingen met ongelijk gewicht.

De gewichten zullen zich verhouden als de aantallen sterwaarnemingen, dus mogen wij eenvoudigheidshalve ook wel aannemen, dat zij daaraan gelijk zijn.

Namelijk, indien de middelbare fout in de enkelvoudige sterwaarneming = m aangenomen wordt, dan is

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$M_1^2 = \frac{m^2}{13},\quad M_2^2 = \frac{m^2}{20},\quad M_3^2 = \frac{m^2}{7},\quad M_4^2 = \frac{m^2}{22},\quad M_5^2 = \frac{m^2}{31}$$

of wel

$$g_1 : g_2 : g_3 : g_4 : g_5 = \frac{1}{M_1^2} : \frac{1}{M_2^2} : \frac{1}{M_3^2} : \frac{1}{M_4^2} : \frac{1}{M_5^2}.$$
$$= 13 : 20 : 7 : 22 : 31$$

Stel de benaderde waarde = 52°5′10″ dan is de gezochte meest waarschijnlijke waarde:

$$\varphi = 52°5'10'' + P.$$

P wordt gevonden volgens de formule:

$$P = \frac{[g\,p]}{[g]}$$

en $M = \frac{\mu^2}{[g]}$, waarin $\mu^2 = \frac{[g\,p\,p] - \frac{[g\,p]}{[g]}}{n-1}$.

De becijfering geschiedt als volgt:
Benaderde waarde = 52°5′10″.
$n = 5$.

p	g	$g\,p$	$g\,p\,p$
+ 0″,60	13	+ 7,80	4,6800
+ 0″,82	20	+ 16,40	13,4480
+ 1″,04	7	+ 7,28	7,5712
+ 0″,90	22	+ 19,80	17,8200
− 0″,49	31	− 13,02	5,4684
$G = [g] = 93$		$[g\,p] = +\ 38,26$	$[g\,p\,p] = 48,9876$

$[g] = 93$

$P = +\ 0''41$

$[g\,p]^2 = 1463,8276$

$[g] = 93$

$\frac{[g\,p]^2}{[g]} = 15,7401$

$\frac{[g\,p]^2}{[g]} = 15,7401$ af

$33,2475$

$n - 1 = 4$

$\mu^2 = 8,3119$

$[g] = 93$

$M^2 = 0,0893$

$M = 0'',30$

Eindresultaat = benaderde waarde + P

$$\varphi = 52°5'10'' + 0'',41 = 52°5'10'',41.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Middelbare fout $M = \pm 0'',30$.

Schrijfwijze: $\varphi = 52°5'10''41 \pm 0'',30$.

De juiste waarde voor de geographische breedte is dan met vrij groote nauwkeurigheid gelegen tusschen:
$52°5'10'',41 - 3 \times 0'',30$ en $52°5'10'',41 + 3 \times 0'',30$.

Gewichtsbepaling bij aaneengeschakelde waterpassingen.

We veronderstellen het geval, dat een waterpassing van A naar B langs twee verschillende wegen verricht wordt. Verder dat in beide gevallen onder gelijke omstandigheden gewerkt is dus met hetzelfde instrument en dezelfde baken door den zelfden persoon en in slagen van dezelfde lengte.

	1e waterpassing	2e waterpassing
afstand:	a_1	a_2
aantal slagen:	n_1	n_2
gevonden hoogteverschil:	P_1	P_2

Stel de middelbare fout in het hoogteverschil per slag $= m$, dan is volgens formule II* voortplanting der fouten)

$$M_{P_1}^2 = n_1 m^2 \quad \text{en} \quad M_{P_2}^2 = n_2 m^2$$

$$\text{of } M_{P_1}^2 : M_{P_2}^2 = n_1 : n_2$$
$$= a_1 : a_2$$

want $\frac{a_1}{n_1} = \frac{a_2}{n_2}$ (gelijke slagen).

Nu is volgens definitie van „gewicht":

$$M_{P_1}^2 : M_{P_2}^2 = \frac{1}{g_1} : \frac{1}{g_2}$$

$$\text{dus } g_1 : g_2 = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2}$$

waaruit volgt dat $g_1 = \frac{1}{a_1}$ en $g_2 = \frac{1}{a_2}$ gesteld mag worden.

Stel $g = 1$ voor een waterpassing over 1 K.M. lengte en de middelbare fout voor de gewichtseenheid $= \mu$, dan vinden

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

we voor de middelbare fout in een waterpassing over een afstand van a K.M. (dus met gewicht $g = \frac{1}{a}$)

$$m_a^2 = \frac{\mu^2}{g} = \frac{\mu_2}{1/a} = \mu^2 a.$$

In de gewone ingenieurspraktijk: $\mu = 3$ à 5 m.m.
Bij de nauwkeurigheidswaterpassingen in Europa:
$\mu = 1.50$ m.m.
In Nederland: $\mu = 0{,}75$ m.m.

1901.

Ter bepaling van de hoogte van het punt R werden waterpassingen uitgevoerd langs de lijnen RA, RB en RC naar de punten A, B, C, waarvoor de hoogten boven peil als geheel juist bekend worden aangenomen.
De lengten der gewaterpaste lijnen zijn:

$RA = 10$ K.M., $RB = 20$ K.M., $RC = 30$ K.M.

De gevonden hoogten voor R zijn:

uit de waterpassing langs RA : 6,347 M. boven peil
" " " " RB : 6,357 " " "
" " " " RC : 6,343 " " "

Welke is de meest waarschijnlijke hoogte van R?
Hoeveel bedraagt de middelbare fout daarin?

1902.

Een hoek A is gemeten met twee theodolieten, welke verschillen in nauwkeurigheid voor de daarmee te verkrijgen resultaten.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De verkregen resultaten zijn de volgende:

met theodoliet N°. 1	met theodoliet N°. 2
47°23′ 40″	47°23′ 7″
47 22 45	47 23 6
47 22 35	47 22 59
47 23 15	47 22 55
47 22 15	47 23 5
47 22 10	47 22 58
47 23 30	47 22 54
47 23 10	47 23 4

Men vraagt uit deze waarnemingen de meest waarschijnlijke waarde voor den hoek A tot in tienden van secunden te berekenen.

Wijze van oplossing.

Beschouw de waarnemingen van elke theodoliet eerst afzonderlijk, dus als *directe waarnemingen met gelijk gewicht.* Bepaal dan de meest waarschijnlijke waarde A_1 en A_2 en de daarbij behoorende middelbare fouten M_1 en M_2.

Beschouw vervolgens de uitkomsten A_1 en A_2 als nieuwe *directe waarnemingen met ongelijke gewichten* g_1 en g_2 $\left(g_1 : g_2 = \frac{1}{M_1^2} : \frac{1}{M_2^2}\right)$ en bepaal daarmede het eindresultaat A.

Ter vereenvoudiging van de berekening kan men eerst weer een benaderde waarde invoeren.

Wanneer ook de middelbare fout gevraagd was, zou deze bij voorkeur berekend worden uit de afzonderlijke waarnemingen.

Hoe kleiner het aantal waarnemingen (of de als zoodanig ingevoerde waarden) des te minder betrouwbaar is de waarde van de middelbare fout.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1898.

Voor een lijn waarvan men de lengte wenscht te kennen, heeft men op drie verschillende dagen door meting de volgende resultaten verkregen:

a. als gemiddelde van 3 metingen: 200,24 Meter.
b. „ „ „ 2 „ 200,11 „
c. „ „ „ 4 „ 200,17 „

Welke is de meest waarschijnlijke lengte van die lijn en welke is de middelbare fout in het eindresultaat, wanneer aangenomen wordt, dat de enkelvoudige metingen alle met dezelfde nauwkeurigheid zijn geschied?

III. Indirecte waarnemingen met gelijk gewicht.

Voorbeeld.

Tusschen de 3 richtingen A, B en C in een punt P zijn de 3 volgende hoeken gemeten:

$$\left.\begin{array}{l} \angle APB = p_1 \\ \angle BPC = p_2 \\ \angle APC = p_3 \end{array}\right\} \text{ alle met dezelfde nauwkeurigheid}$$

Men vraagt de meest waarschijnlijke waarden te berekenen van de hoeken tusschen de richtingen A, B en C, alsmede de middelbare waarden van de fouten in die hoeken.

Oplossing.

Stel de gevraagde hoek $APB = A$ en $\angle BPC = B$, dan is $\angle APC = A + B$.

We beschouwen nu de waarnemingen p_1, p_2 en p_3 als functies van A en B n l.:

$$p_1 = A$$
$$p_2 = B$$
$$p_3 = A + B$$

De schijnbare fouten in de waarnemingen worden uitgedrukt door de *foutenvergelijkingen.* (zie blz. 21).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$x_1 = p_1 - A$$
$$x_2 = p_2 - B$$
$$x_3 = p_3 - A - B.$$

Dan is het geval dus teruggebracht tot indirecte waarnemingen van 2 grootheden A en B met gelijk gewicht.

$p_1 = A$	$a_1 = 1$	$b_1 = 0.$
$p_2 = B$	$a_2 = 0$	$b_2 = 1$
$p_3 = A + B$	$a_3 = 1$	$b_3 = 1$

Normaalvergelijkingen.

$$2\,A + B = p_1 + p_3$$
$$A + 2\,B = p_2 + p_3.$$

Uit deze twee vergelijkingen vinden we de meest waarschijnlijke waarden voor A en B, terwijl de middelbare fouten als volgt berekend worden.

Gewichtsvergelijkingen van A.

$$2\,Q_{11} + Q_{12} = 1$$
$$Q_{11} + 2\,Q_{12} = 0$$

$$4\,Q_{11} + 2\,Q_{12} = 2$$
$$Q_{11} + 2\,Q_{12} = 0$$
$$\text{of}$$
$$3\,Q_{11} = 2$$
$$Q_{11} = {}^2/_3$$

Gewichtsvergelijkingen van B.

$$2\,Q_{12} + Q_{22} = 0$$
$$Q_{12} + 2\,Q_{22} = 1$$

$$2\,Q_{12} + Q_{22} = 0$$
$$2\,Q_{12} + 4\,Q_{22} = 2$$
$$\text{of}$$
$$3\,Q_{22} = 2$$
$$Q_{22} = {}^2/_3.$$

Middelbare fout in de enkele waarneming:

$$m = \frac{[x\,x]}{n - 2}$$
$$[x\,x] = [p\,p] - A\,[a\,p] - B\,[b\,p].$$

Middelbare fout in eindresultaat:

$$M_A^2 = Q_{11}\,m^2 \text{ en } M_B^2 = Q_{22}\,m^2$$
$$M^2{}_{A+B} = M_A^2 + M_B^2$$

Op soortgelijke wijze kunnen alle dergelijke vraagstukken

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van hoekmetingen in één punt of in één driehoek enz. opgelost worden door de metingen dan te beschouwen als „*indirecte waarnemingen*", hetzij met gelijk of ongelijk gewicht.

Meet men b.v. de drie hoeken van een driehoek en wil men de meest waarschijnlijke waarden daarvan bepalen, dan kan men deze met behulp van de volgende foutenvergelijkingen oplossen:

$$x_1 = p_1 - A$$
$$x_2 = p_2 - B$$
$$x_3 = p_3 - (180° - A - B).$$

1887.

In een punt A zijn tusschen de richtingen naar de punten B, C, D en E de volgende hoeken gemeten:

$\angle BAC = 59°9'44''$ $\quad \angle BAD = 144°51'30''$
$\angle BAE = 219°29'38''$ $\quad \angle CAD = 85°41'48''$
$\angle CAE = 160°19'48''$ en $\angle DAE = 74°37'54''$

Men vraagt, volgens de methode der kleinste vierkanten, te berekenen de meest waarschijnlijke waarden van de hoeken, die de richtingen AC, AD en AE met de richting AB maken, alsmede de middelbare waarde van de fout in een dier hoeken.

1894.

Tusschen de vier richtingen A, B, C en D zijn de vijf volgende hoeken gemeten: $AB = p_1$, $AC = p_2$, $AD = p_3$, $BD = p_4$ en $CD = p_5$. Men vraagt te berekenen de meest waarschijnlijke waarde van de hoeken BC en AD en de middelbare waarde van de fouten in die uitkomsten. De middelbare waarde van de fout in ieder der gemeten hoeken wordt gelijk m genomen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1895.

Tusschen de vier richtingen A, B, C en D zijn de vijf volgende hoeken gemeten: $AB = 59°9'44''$, $AC = 144°51'30''$, $AD = 219°29'38''$, $BC = 85°41'48''$ en $BD = 160°19'48''$. Men vraagt de meest waarschijnlijke waarden te berekenen van de hoeken, die de richtingen naar B, C en D maken met de richting naar A alsmede de middelbare waarden van de fouten in die hoeken.

1889.

Ter bepaling van de hoekwaarde van het niveau van een waterpasinstrument heeft men bij de navolgende standen der bel: $+b$; $-b$; $+b$; $-b$; en $+b$ op eene op bekenden afstand geplaatste baak de navolgende aflezingen gedaan: p_1; p_2; p_3; p_4; en p_5. Men vraagt de formules te ontwikkelen om volgens de methode der kleinste vierkanten de meest waarschijnlijke waarde voor de hoekwaarde van een niveaudeel te berekenen en om het gewicht dier bepaling te vinden.

Het gewicht der enkele aflezing wordt als eenheid aangenomen.

Wijze van oplossing:

Voer nieuwe onbekenden in, die onderling onafhankelijk zijn, n.l.:

A = aflezing op de baak bij inspelende bel

en B = interval „ „ „ voor 1 niveaudeel.

Bij achtereenvolgende standen van de bel: $+b$, $-b$, $+b$, $-b$ en $+b$, verkrijgt men:

Aflezingen:	Schijnbare fouten:
$p_1 = A + bB$	$x_1 = p_1 - A - bB$
$p_2 = A - bB$	$x_2 = p_2 - A - bB$
$p_3 = A + bB$	$x_3 = p_3 - A - bB$
$p_4 = A - bB$	$x_4 = p_4 - A - bB$
$p_5 = A + bB$	$x_5 = p_5 - A - bB$

De oplossing geschiedt verder volgens de formules van de indirecte waarnemingen met gelijk gewicht.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

— 1886.

Bij het onderzoek van een niveau zijn de volgende aflezingen gedaan op eene op een afstand van 68,755 Meter geplaatste baak: Uitwijking der bel: — 20; — 10; 0; + 10; + 20 niveaudeelen. Aflezing op de baak; 1,296; 1,388; 1,479; 1,571; 1,662 Meter.

Men vraagt te berekenen de meest waarschijnlijke waarde voor de hoekwaarde van het niveau, alsmede de middelbare waarde van die fout in die uitkomst.

— 1897.

Op een verticale baak, die op een afstand van 41,253 M. van een waterpasinstrument verwijderd is, heeft men bij uitwijkingen der bel van — 15, — 5, + 5, + 15 niveaudeelen afgelezen: 1,152, 1,184, 1,217, 1,247 M.

Bereken hieruit de meest waarschijnlijke grootte van de hoekwaarde van het niveau, alsmede de middelbare fout in de uitkomst.

— 1903.

Het niveau van een waterpasinstrument heeft eene verdeeling met doorgaande becijfering van 0 tot 40.

Om de hoekwaarde van dat niveau te berekenen, zijn de waarnemingen beschikbaar als volgt:

	Bel inspelende tusschen de strepen.	Overeenkomstige aflezing op de baak.
1e stand van baak	0 en 10	1,2182 Meter.
	20 „ 30	1,2584 „
2e „ „ „	15 en 24	1,2157 Meter.
	31 „ 40	1,2479 „
3e „ „ „	10 en 21	1,2395 Meter.
	22 „ 33	1,2639 „
4e „ „ „	6 en 21	1,1998 Meter.
	16 „ 31	1,2204 „

Afstand van instrument tot baak: 41,253 Meter.
Baak verticaal.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Terwijl aangenomen wordt, dat de niveaubuis zuiver cirkelvormig is uitgeslepen, wordt gevraagd om uit de waarnemingen te berekenen: 1°. de meest waarschijnlijke hoekwaarde van het niveau en 2°. de middelbare fout in die berekende hoekwaarde.

$$\rho'' = 206265).$$

Wijze oplossing:

Het betreft hier een bijzonder geval van *indirecte* waarneming. Er zijn n.l. met *gelijke* gewichten verschillende veelvouden van de gevraagde onbekende (hoekwaarde A) gemeten

$$p_1 = a_1 A \qquad x_1 = p_1 - a_1 A$$
$$p_2 = a_2 A \qquad x_2 = p_2 - a_2 A$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$p_n = a_n A \qquad x_n = p_n - a_n A$$

Normaalvergelijking:

$$[a\,a]\,A = [a\,p]$$
$$A = \frac{[a\,p]}{[a\,a]}$$

1905.

Bij constante temperatuur van 15° werd de lengte van een stalen meetband (doorsnede 13 × 0.2 mM.) onder verschillende spanningen bepaald.

Voor de lengte werd gevonden:

Bij spanning van	30	K.G.:	20,04104	Meter
„ „ „	35	„	20,03934	„
„ „ „	20	„	20,03736	„
„ „ „	15	„	20,03562	„
„ „ „	10	„	20,03360	„

Gevraagd: de meest waarschijnlijke waarden voor de lengte van dien band bij 15° zonder spanning en voor de verlenging van den band per K.G. spanning.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1907 (Sept.).

Voor de bepaling van de vermenigvuldig-constante van een geregelden poolplanimeter worden, bij gebruik van een proefcirkel van 80 mM. straal, de navolgende aflezingen verkregen op het rolletje van het instrument en uitgedrukt in eenheden van de daar voorkomende nonius:

Eerste meting	Beginaflezing.	1086,0
	Aflezing nadat de cirkel 3 maal is doorloopen	7121,5
Tweede meting	Beginaflezing.	8175,3
	Aflezing nadat de cirkel 4 maal is doorloopen	16225,3
Derde meting	Beginaflezing.	4046,0
	Aflezing nadat de cirkel 5 maal is doorloopen	14103,3

Gevraagd: in vierkante millimeters per nonius-eenheid en in twee decimalen nauwkeurig de meest waarschijnlijke waarde van de constante volgens methode der kleinste vierkanten te berekenen uit bovenstaande metingen.

1898.

Voor de bepaling van de excentriciteit tusschen cirkelrand en alhidade heeft men door waarneming verkregen 18 waarden van de functie $4\,E = 4\,\rho'' \frac{e}{r} \sin.\,(I - k)$ waarbij I achtereenvolgens de waarden 0°, 10°, 20° ... 170° heeft.

Gevraagd de formules te ontwikkelen voor de berekening van de meest waarschijnlijke waarden van de onbekenden e en k en voor de middelbare fouten in die grootheden.

N.B. $\rho'' = 206265''$; e = lineaire excentriciteit; r = straal van de randverdeeling.

Wijze van oplossing: (functie lineair maken).

$$4\,E = 4\,\rho'' \frac{e}{r} \text{ Sin. } (I - k) = 4\,\rho'' \frac{e}{r} \text{ Sin. } I \text{ Cos. } k -$$

$$- 4\,\rho'' \frac{e}{r} \text{ Cos. } I \text{ Sin. } k.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Stel $4\rho''\frac{e}{r}$ Cos. $k = A$; $-4\rho''\frac{e}{r}$ Sin. $k = B$,

dan is $4E = \text{Sin. } I\,A + \text{Cos } I\,B$

$E = p.$ Sin. $I = a$ en Cos. $I = b$,

dus $p = a\,A + b\,B$.

De uitdrukking voor de schijnbare fouten wordt:

$$x = p - a\,A - b\,B$$

waaruit volgt, dat de verdere oplossing kan geschieden volgens de formules voor indirecte waarnemingen met gelijk gewicht.

1892.

Ter bepaling van de twee constanten K en k in formule

$$P = K \text{ sin. } (\varphi + k)$$

is de waarde van P gemeten voor ($\varphi = 0°, 10°, 20°, \ldots 170°$.

Men vraagt naar de formules voor het berekenen van de meest waarschijnlijke waarden van K en k en voor de middelbare waarden van de fouten in die uitkomsten.

Methode van Snellius betreffende het vastleggen van punten van een secundair driehoeksnet aan punten van een net van hoogere orde uitsluitend door hoekmeting in de vast te leggen punten van het secundaire net alléén.

Een beschrijving van nog andere methoden ten behoeve van een dergelijke vastlegging vindt men in Bijlage Q onder het hoofdstuk Secundaire Driehoeksmeting (bl. 53).

Gegeven: Eenige punten van een primair driehoeksnet bijv., A, B, C, enz. met bekende coördinaten x's en y's. P is het vast te leggen punt van het secundaire net. Uit punt P zijn de richtingen PA, PB, PC, enz. gemeten.

Gevraagd: de meest waarschijnlijke waarden van de coördinaten x_P en y_P van P.

Oplossing.

Er zijn richtingshoeken gemeten en er worden coördinaten gevraagd dus is dit een vraagstuk van *indirecte* waarnemingen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Verder wordt aangenomen, dat de metingen alle van *gelijk* gewicht zijn.

Voor de onbekende coördinaten x_P en y_P van P worden eerst benaderde waarden x_{P_0} en y_{P_0} ingevoerd.

Men kan dus stellen:

$$x_P = x_{P_0} + x \text{ en } y_P = y_{P_0} + y.$$

x en y moeten dus nog bepaald worden, waarmede dan het vraagstuk van zelf opgelost is.

Voor de benaderde waarden x_{P_0} en y_{P_0} neemt men de voorloopige coördinaten van punt P, welke berekend kunnen worden uit twee hoeken gemeten tusschen drie van de omliggende punten A, B, C.

Met behulp van de voorloopige coördinaten x_{P_0} en y_{P_0} en van de coördinaten $x_A\, y_A$, $x_B\, y_B$ .... enz., berekent men verder de richtingshoeken ψ en afstanden l voor de lijnen, gaande van de benaderde plaats P_0 van het punt P naar de punten A, B .... enz.

Men vindt dan voor $P_0 A$:

$$\text{tg. } \psi_{P_0 A} = \frac{x_A - x_{P_0}}{y_A - y_{P_0}}$$

$$l_{P_0 A} = \frac{x_A - x_{P_0}}{\text{Sin. } \psi_{P_0 A}} = \frac{y_A - y_{P_0}}{\text{Cos. } \psi_{P_0 A}}.$$

Uit deze berekende richtingshoeken leidt men nu af de richtingshoeken voor de lijnen, gaande — niet van het benaderde punt P_0 maar — van het werkelijke punt P naar de punten A, B . . . enz.

Voor de lijn PA geldt dan:

$$\psi_{PA} = \psi_{P_0 A} + a_1 x + b_1 y$$

waarin $$a_1 = -\frac{\cos. \psi_{P_0 A}\, \rho''}{l_{P_0 A}} \text{ of } = -\frac{y_A - y_{P_0}}{l^2_{P_0 A}} \rho''$$

en $$b_1 = +\frac{\sin. \psi_{P_0 A}}{l_{P_0 A}} \rho'' \text{ of } = +\frac{x_A - x_{P_0}}{l^2_{P_0 A}} \rho''$$

of ook: $$a_1 = -\frac{\sin. \psi_{P_0 A} \cos. \gamma_{P_0 A}}{x_A - x_{P_0}} \rho''$$

$$b_1 = +\frac{\sin. \psi_{P_0 A} \cos. \psi_{P_0 A}}{y_A - y_{P_0}} \rho''.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Voor de berekende richtingshoeken van de verschillende lijnen PA, PB . . . . enz. vindt men dus :

$$\psi_{PA} = \psi_{P_0A} + a_1x + b_1y$$
$$\psi_{PB} = \psi_{P_0B} + a_2x + b_2y$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\psi_{PN} = \psi_{P_0N} + a_nx + b_ny.$$

De waargenomen richtingshoeken zijn R_{PA}, R_{PB} . . . . R_{PN} waaruit na oriënteering volgt de met de berekende ψ's overeenkomende richtingshoeken φ's,

n.l.
$$\varphi_{PA} = R_{PA} - z$$
$$\varphi_{PB} = R_{PB} - z$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_{PN} = R_{PN} - z$$

Vervolgens kan men de volgende foutenvergelijkingen opstellen :

$$v_1 = \varphi_{PA} - \psi_{PA} = R_{PA} - \psi_{P_0A} - a_1x - b_1y - z$$
$$v_2 = \varphi_{PB} - \psi_{PB} = R_{PB} - \psi_{P_0B} - a_2x - b_2y - z$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$v_n = \varphi_{PN} - \psi_{PN} = R_{PN} - \psi_{P_0N} - a_nx - b_ny - z$$

Algemeene vorm voor de foutenvergelijkingen :

$$v = p - ax - by - z$$

waarin v = fouten in de waargenomen grootheden (richtingen),
x en y = correcties in de gezochte grootheden (coördinaten),
z = verschil tusschen waargenomen richting R en geöriënteerde richting φ,
p = verschil tusschen waargenomen richting R en berekende richting ψ;
hiervan zijn x, y en z de onbekenden.

Daar z van betrekkelijk geen nut is voor de oplossing van het vraagstuk zal deze eerst geëlimineerd worden.

Daartoe leidt men uit bovenstaande foutenvergelijkingen eerst één der normaalvergelijkingen af n.l. deze :

$$[a]\,x + [b]\,y + nz = [p]$$

of
$$o = \frac{[p]}{n} - \frac{[a]}{n}x - \frac{[b]}{n}y - z.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Trekt men deze vergelijking af van de oorspronkelijke foutenvergelijkingen (zie boven) dan verkrijgt men de volgende z.g. *gereduceerde foutenvergelijkingen* waarin

$p_1 = R_{PA} - \psi_{P_0A}$, $p_2 = R_{PB} - \psi_{P_0B}$ . . . . $p_n = R_{PN} - \psi_{P_0N}$.

$$v_1 = \left\{p_1 - \frac{[p]}{n}\right\} - \left\{a_1 - \frac{[a]}{n}\right\} x - \left\{b_1 - \frac{[b]}{n}\right\} y$$

$$v_1 = \left\{p_2 - \frac{[p]}{n}\right\} - \left\{a_2 - \frac{[a]}{n}\right\} x - \left\{b_2 - \frac{[b]}{n}\right\} y$$

. . . . . .

$$v_n = \left\{p_n - \frac{[p]}{n}\right\} - \left\{a_n - \frac{[a]}{n}\right\} x - \left\{b_n - \frac{[b]}{n}\right\} y$$

of met andere coëfficienten:

$$v_1 = p_1' - a_1' x - b_1' y$$
$$v_2 = p_2' - a_2' x - b_2' y$$
. . . . . .
$$v_n = p_n' - a_n' x - b_n' y$$

De hieruit af te leiden normaalvergelijkingen zijn:

$$[a'a'] x + [a'b'] y = [a'p']$$
$$\text{en} \quad [a'b'] x + [b'b'] y = [b'p']$$

waaruit de onbekenden x en y opgelost kunnen worden en dus ook $x_P = x_{P_0} + x$ en $y_P = y_{P_0} + y$ bepaald kunnen worden.

Dit zijn dezelfde vergelijkingen (gereduceerde normaal-) als verkregen zouden worden door uit de oorspronkelijke normaalvergelijkingen voor 3 onbekenden de z te elimineeren.

De middelbare fouten vindt men als volgt:

Middelbare fout in de enkele waarneming

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n - \text{aantal onbekenden}}}$$

Er zijn 3 onbekenden n.l. x, y en z, hoewel het aantal normaalvergelijkingen ten slotte tot twee gereduceerd is:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-3}}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$[vv] = [p^1 p^1] - [a^1 p^1]\, x - [b^1 p^1]\, y$$

$$M x_P = M_x = m \sqrt{Q_{11}}$$

$$M y_P = M_y = m \sqrt{Q_{22}}$$

De gewichtsgetallen worden uit de volgende gewichtsvergelijkingen opgelost :

1e stel : $[a^1 a^1]\, Q_{11} + [a^1 b^1]\, Q_{12} = 1$

$[a^1 b^1]\, Q_{11} + [b^1 b^1]\, Q_{12} = 0$

2e stel : $[a^1 a^1]\, Q_{21} + [a^1 b^1]\, Q_{22} = 0$

$[a^1 b^1]\, Q_{21} + [b^1 b^1]\, Q_{22} = 1$

IV. Indirecte waarnemingen met ongelijk gewicht.

Deze vraagstukken worden op overeenkomstige wijze opgelost als die van indirecte waarnemingen met gelijk gewicht, met dien verstande, dat de gewichten der waarnemingen nu ook in de verschillende vergelijkingen voorkomen.

Overigens kan geheel verwezen worden naar de vroeger behandelde formules.

Men begint de oplossing van zoo'n vraagstuk steeds met het opstellen van de foutenvergelijkingen en het bepalen van de gewichten.

1890.

In een driehoek $A\,B\,C$ zijn de navolgende hoeken met de daarbij gevoegde gewichten gemeten :

A 75°34'42" gewicht 2,

B 62°27'33" „ 4,

C 41°57'26" „ 5.

Men vraagt de sluitingsfout van dien driehoek volgens de methode der kleinste vierkanten te vereffenen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

1896.

In een punt A zijn tusschen de richtingen naar B, C en D de navolgende hoeken met de daarbij gevoegde gewichten gemeten:

$$\begin{aligned} BAC &= 62°27'5'' \text{ gewicht } 4, \\ BAD &= 104°25'36'' \quad „ \quad 6, \\ CAD &= 41°57'54'' \quad „ \quad 5. \end{aligned}$$

Men vraagt volgens de methode der kleinste vierkanten de meest waarschijnlijke waarde dier hoeken te berekenen.

1899.

3. In een punt P zijn de volgende 9 hoeken gemeten:

$\angle BPC = 44°17'42''$	$\angle APB = 37°25'12''$
$44°17'41''$	$37°25'15''$
$44°17'38''$	$37°25'19''$
$44°17'43''$	$37°24'14''$

$\angle APC = 81°43'2''$

Men vraagt: a. de meest waarschijnlijke waarden voor de hoeken APA en BPC; b. de middelbare fout in de enkele hoekmeting; c. de middelbare fouten in de vereffende hoeken APB, BPC en APC.

1904.

Van een vlakken driehoek zijn uit waarnemingen bekend de drie hoeken als volgt:

$24°39'50'',0$	met middelbare fout	$1'',0$
$67°20'12'',5$	„ „ „	$0'',5$
$88°\ 0'11'',6$	„ „ „	$0'',4$.

Men vraagt den driehoek sluitend te maken volgens de methode der kleinste vierkanten.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

/1907 (Juni).

In het punt P zijn hoeken gemeten als volgt:

APB	BPC	APC
27° 42′ 18″	40° 13′ 23″	76° 56′ 7″
27° 42′ 42″	49° 13′ 29″	76° 56′ 17″
27° 42′ 25″	49° 13′ 46″	76° 56′ 8″
27° 42′ 35″	49° 13′ 38″	76° 56′ 22″
	49° 13′ 25″	76° 56′ 19″
	49° 13′ 37″	76° 56′ 12″
		76° 56′ 20″
		76° 56′ 23″

Welke zijn de meest waarschijnlijke waarden voor de hoeken APB en PBC, die uit deze waarnemingen volgen en welke zijn de middelbare fouten in de aldus berekende hoeken?

Tot de toepassingen van het geval van *indirecte* waarnemingen hetzij met *gelijk* of *ongelijk* gewicht behooren ook:

1°. Vereffening en berekening van middelbare fouten bij waarnemingen volgens richtingen (*Stationswaarnemingen volgens* Bessel).

2°. Vereffening en berekening van middelbare fouten bij *hoekmetingen volgens* Schreiber.

Beide vraagstukken worden op het College van Geodesie uitvoerig behandeld.

V. Directe waarnemingen met voorwaardenvergelijkingen.

Voorbeeld:

Vereffening van een veelhoeksmeting.

Contrôle.

Bij een open veelhoek, die in beide einden aansluit aan punten A_0 en A_n van een driehoeksnet, waarvan de coör-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dinaten bekend zijn en waarbij men in die punten een lijn heeft, waarvan de richtingshoeken bekend zijn, heeft men de drie volgende vergelijkingen, waaraan de waarnemingen (hoeken en zijden van den veelhoek) moeten voldoen.

$$\Sigma A = \alpha_n - \alpha_m + p \times 180°$$
$$\Sigma a \sin. \alpha = X_n - X_0$$
$$\Sigma a \cos. \alpha = Y_n - Y_0.$$

In deze vergelijkingen stellen a de lengten der zijden, α de richtingshoeken en A de hoeken tusschen de zijden van den veelhoek voor. X_0 en Y_0 zijn de coördinaten van het beginpunt A_0, X_n en Y_n de coördinaten van het eindpunt A_n; α_m en α_n zijn de richtingshoeken van de aansluitingszijden en p een zeker rond getal.

Vereffening.

De hoeken en de zijden van den veelhoek worden afzonderlijk vereffend.

1. *Vereffening der hoeken.* Daartoe neemt men eerst de som van de hoeken A en wat deze afwijkt van het bedrag in de eerste betrekking (zie boven), verdeelt men gelijkelijk over al die hoeken.

Gemeten hoeken: $A_0, A_1 \ldots . A_n$
Gecorrigeerde hoeken: $A_0^1, A_1^1 \ldots . A^1_n$

Betrekking voor de gecorrigeerde hoeken:

$$\Sigma A^1 = \alpha_n - \alpha_m + p \times 180°.$$

Gevonden waarden uit de gemeten hoeken:

$$\Sigma A = \alpha_n - \alpha_m + p \times 180° + \Delta.$$

Stel de correctie voor elk der hoeken $A_0, A_1 \ldots . A_n$ gelijk aan δ, dan is

$$A_0^1 = A_0 + \delta$$
$$A_1^1 = A_1 + \delta$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$A_n^1 = A_n + \delta$$

dus $$\Sigma (A + \delta) = \alpha_n - \alpha_m + p \times 180°$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

of $\dfrac{\text{en } \Sigma A = \alpha_n - \alpha_m + p \times 180° + \Delta}{\Sigma \delta = (n+1)\,\delta = -\Delta}$

$$\text{of } \delta = -\frac{\Delta}{n+1}$$

2. *Vereffening der zijden.*

Met de op bovenstaande wijze vereffende hoeken berekent men de richtinghoeken α, welke voorkomen in de twee betrekkingen voor de zijden, n.l.:

$$\Sigma\, a \sin.\, \alpha = X_n - X_0$$
$$\Sigma\, a \cos.\, \alpha = Y_n - Y_0$$

Gemeten zijden van den veelhoek: $a_1,\ a_2 \ldots . a_n$
Gecorrigeerde „ „ „ „ $a_1 + x_1,\ a_2 + x_2 \ldots .$
$\ldots . a_n + x_n$

Voor de gecorrigeerde zijden gelden dus de bovenstaande betrekkingen:

$$\Sigma\,(a + x) \sin.\, \alpha = X_n - X_0$$
$$\Sigma\,(a + x) \cos.\, \alpha = Y_n - Y_0.$$

Onze voorwaardenvergelijkingen worden dus:

$$\Sigma\, x \sin.\, \alpha = X_n - X_0 - \Sigma\, a \sin.\, \alpha = r_1$$
$$\text{en } \Sigma\, x \cos.\, \alpha = Y_n - Y_0 - \Sigma\, a \cos.\, \alpha = r_2$$
$$\text{of } \sin.\, \alpha_1 . x_1 + \sin.\, \alpha_2 . x_2 \ldots . + \sin.\, \alpha_n . x_n = r_1$$
$$\text{en } \cos.\, \alpha_1 . x_1 + \cos.\, \alpha_2 . x_2 \ldots . + \cos.\, \alpha_n . x_n = r_2$$

Hierin zijn de sin α en cos. α getallencoefficiënten overeenkomende met de coefficiënten a en b in de algemeene formules. (Vergelijk Toepassingen VIII).

Thans dienen de korrelatenvergelijkingen opgesteld te worden. De daarin voorkomende gewichten der waarnemingen (gemeten zijden van den veelhoek) kunnen als volgt bepaald worden:

Bij lengtemetingen $a_1,\ a_2 \ldots a_n$ verhouden de daarbij behoorende vierkanten van middelbare fouten zich als $a_1 : a_2 : a_3 \ldots : a_n$ en dus de gewichten als

$$\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3} \ldots . : \frac{1}{a_n}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Het gewicht van een lengtemeting kan dus uitgedrukt worden door de breuk $\frac{1}{\text{gemeten lengte}}$.

Korrelatenvergelijkingen:

$$x_1 = \frac{\sin.\ \alpha_1}{g_1} k_1 + \frac{\cos.\ \alpha_1}{g_1} k_2 \quad g_1 = \frac{1}{a_1}$$
$$x_2 = \frac{\sin.\ \alpha_2}{g_2} k_1 + \frac{\cos.\ \alpha_2}{g_2} k_2 \quad g_2 = \frac{1}{a_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \frac{\sin.\ \alpha_n}{g_n} k_1 + \frac{\cos.\ \alpha_n}{g_n} k_2 \quad g_n = \frac{1}{a_n}$$

of na substitutie van de waarden der gewichten en verdere herleiding:

$$\frac{1}{a_1} a_1 = \sin.\ \alpha_1 . k_1 + \cos.\ \alpha_1 . k_2$$
$$\frac{1}{a_2} x_2 = \sin.\ \alpha_2 . k_2 + \cos.\ \alpha_2 . k_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{a_n} x_n = \sin.\ x_n . k_1 + \cos.\ \alpha_n . k_2.$$

Uit bovenstaande voorwaarden- en korrelatenvergelijkingen vindt men de volgende twee normaalvergelijkingen:

$$[a \sin.^2 \alpha] k_1 + [a \sin.\ \alpha \cos.\ \alpha] k_2 = r_1$$
$$[a \sin.\ \alpha \cos.\ \alpha] k_1 + [a \cos.^2 \alpha] k_2 = r_2.$$

Hieruit kunnen dan k_1 en k_2 opgelost worden, waarna de gezochte waarden der correcties x_1, x_2 . . . . x_n verder uit de korrelatenvergelijkingen gevonden kunnen worden, n.l.:

$$x_1 = a_1 \sin.\ \alpha_1 k_1 + a_1 \cos.\ a_1 k_2$$
$$x_2 = a_2 \sin.\ \alpha_2 k_1 + a_2 \cos.\ \alpha_2 k_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = a_n \sin.\ \alpha_n k_1 + a_n \cos.\ \alpha_n k_2$$

In den regel worden de correcties aan de grootheden $a \sin.\ \alpha$ en $a \cos.\ \alpha$ aangebracht; zij worden dan als volgt uitgedrukt:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$x_1 \sin.\alpha = a_1 \sin.^2 \alpha_1 k_1 + a_1 \sin.\alpha_1 \cos.\alpha_1 k_2$$

. . . . . .

en $$x_1 \cos.\alpha_1 = a_1 \sin.\alpha_1 \cos.\alpha_1 k_1 + a_1 \cos.^2 \alpha_1 k_2$$

. . . . . .

1888.

1. Van een gesloten veelhoek zijn de hoeken op één na en verder alle zijden gemeten. Men vraagt aan welke voorwaarden de uitkomsten der meting moeten voldoen en verder de formules te ontwikkelen om volgens de methode der kleinste vierkanten de voorkomende verschillen over de lengten der zijden te verdeelen. De middelbare waarde van de fout bij de lengtemeting wordt evenredig met den vierkantswortel uit de lengte aangenomen.

1893.

In de punten A, B, C en D zijn de navolgende richtingen gemeten:

A.	B.	0° 0′ 0″
	C.	66° 36′ 16″
B.	A.	0° 0′ 0″
	C.	74° 12′ 53″
	D.	153° 33′ 46″
C.	D.	0° 0′ 0″
	B.	37° 31′ 56″
	A.	76° 43′ 19″
D.	B.	0° 0′ 0″
	C.	63° 6′ 55″

Men vraagt de sluitingsfouten der twee driehoeken volgens de methode der kleinste vierkanten over de gemeten richtingen te verdeelen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

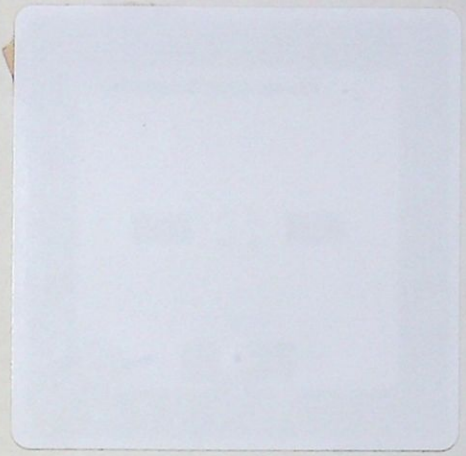
PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

pno 8/188 -2018.
15/10 -19



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

