Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.

Festrede

gehalten in der

öffentlichen Sitzung der K. B. Akademie der Wissenschaften
zu München

zur Feier ihres 145. Stiftungstages

am 14. März 1904

von

Alfred Pringsheim
o. Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse.

München 1904.
Verlag der K. B. Akademie
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Lembaga Kebudajaan
Indonesia

V-208.

44 hal

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

V, 208

Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.

Festrede

gehalten in der

öffentlichen Sitzung der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München

zur Feier ihres 145. Stiftungstages

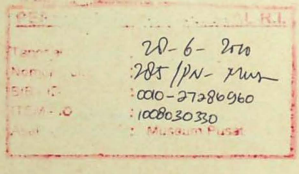
am 14. März 1904

von

Alfred Pringsheim
o. Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse.

München 1904.
Verlag der K. B. Akademie
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA
BAT
LEMBAGA ILMU PENGETAHUAN
K.E.N.W.
PERPUSTAKAAN NASIONAL RI



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Der Mathematiker, dem die hohe Ehre zuteil wird, von dieser Stelle aus über seine Wissenschaft zu sprechen, befindet sich, wenn er auch diese Ehre vollkommen zu würdigen weiss, in einer keineswegs beneidenswerten Lage. Er gleicht einem Ausländer, der allenfalls in seiner Muttersprache mancherlei ganz Erträgliches zu sagen wüsste, doch nur mühsam und unvollkommen dies und jenes in gebrochenem Deutsch auszudrücken vermag und dabei noch Gefahr läuft, von seinen Landsleuten für recht trivial gehalten zu werden. Man hat zwar die Mathematik, weil ihr ganzer Inhalt auf einer geringen Zahl allgemein verständlicher Grundsätze durch rein logische Deduktion sich aufbaut, nicht unzutreffend als die Wissenschaft vom Selbstverständlichen bezeichnet. Das ändert aber nichts an der Erfahrungstatsache, dass sie bis heute für die Ueberzahl der Gebildeten, ja sogar der Gelehrten, die Wissenschaft vom Unverständlichen geblieben ist. Mit der schon von Euklid behaupteten Unmöglichkeit eines Königsweges zur Mathematik scheint es leider seine Richtigkeit zu haben, wenn auch der Bologneser Pietro Mengoli allen Ernstes das Gegenteil behauptet und durch die Tat zu beweisen versucht hat.[1]) Seine 1655 der Königin Christine von Schweden dedizierte „Via regia ad mathematicas“ erweist sich bei näherer Betrachtung lediglich als eine Sammlung höchst schauderhafter lateinischer Disticha, vermittelst deren die Elemente der Arithmetik, Algebra und Planimetrie in einer — wohl nur nach des Verfassers Meinung — besonders einfachen und eindringlichen Art gelehrt werden sollen. Aber auch der ganz anders ernsthaft zu nehmenden Behauptung des 1873 verstorbenen Mathematikers

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Hermann Hankel, dass mit der sogenannten projektiven Geometrie der Königsweg zur Mathematik gefunden zu sein scheine,[2]) wird man doch kaum anders als äusserst skeptisch gegenüberstehen können. Im übrigen, wie dem auch sei: soviel darf wohl als feststehend betrachtet werden, dass in den weitesten Kreisen die Mathematik sich einer glänzenden Unpopularität erfreut. Bedürfte es hierfür noch irgend eines äusseren Beleges, so könnte man vielleicht auf den Umstand hinweisen, dass, ohne Uebertreibung, das mathematische Wissensgebiet wohl das einzige ist, dessen unser sonst allwissender Journalismus noch in keiner Weise sich bemächtigt hat. In allzu respektvoller Entfernung verharrend bringt zwar die Majorität der Gebildeten der Mathematik eine gewisse Hochachtung entgegen: zumeist freilich wohl wegen des anerkannten Nutzens, den sie den Naturwissenschaften und vor allem der mächtig emporgewachsenen, in alle Zweige des menschlichen Lebens eingreifenden Technik gebracht hat. Das verhindert dann keineswegs, dass gar viele den „reinen" Mathematiker, wenn auch nicht geradezu als „reinen Toren", so doch zum mindesten als ziemlich überflüssigen Vertreter einer eingebildeten und abstrusen Brahminenweisheit ansehen. Andere, die bei ihrer Schätzung der Mathematik vielleicht mehr durch das Gefühl, als durch verstandesmässige Erwägungen sich leiten lassen, erblicken in ihr eine ihnen zwar unbegreifliche, aber doch wohl bewunderungswürdige Äusserung menschlicher Geisteskraft und sind allenfalls geneigt, die Mathematik eher zu hoch als zu niedrig zu bewerten. Ein interessantes literarisches Beispiel dieses Typus in seiner höchsten Potenz bietet der Romantiker Novalis, dessen Aussprüche über Mathematik einen kaum minder religiös-schwärmerischen Charakter tragen, als seine Dichtungen: „Das Leben der Götter ist Mathematik. Alle göttlichen Gesandten müssen Mathematiker sein. Reine Mathematik ist Religion. Die Mathematiker sind die einzig Glücklichen. Der Mathematiker weiss alles. Er könnte es, wenn er es nicht wüsste u. s. f."[3]) Man wird einigermassen erstaunt sein, die nach der landläufigen Meinung so „trockene" Mathematik hier im trautesten Verein mit der

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

„blauen Blume der Romantik" zu finden. Des Rätsels Lösung ist nicht so schwierig, wie es auf den ersten Blick vielleicht scheint. Das gemeinsame Band bildet die wunderreiche Zahlenwelt, deren mystische Geheimnisse den religiösen Schwärmer nicht weniger in ihren Bann ziehen, wie eben auch den forschenden Mathematiker. Und das geheimnisvolle Wissen, welches nur dieser durch die Zauberkraft seiner Methoden erwirbt, das gerade ist es, was jenes ersteren überschwängliche Bewunderung hervorruft.

Im übrigen ist dafür gesorgt, dass die Bäume der so „einzig glücklich" gepriesenen Mathematiker nicht in den Himmel wachsen. Denn auch an Feinden hat es der Mathematik bis auf den heutigen Tag nicht gefehlt, ja an völligen Verächtern, die ihr jeden Wert absprechen, soweit sie nicht blossen Nützlichkeitszwecken dient. Meine Absicht, zu einer angemesseneren Wertschätzung der Mathematik mein bescheidenes Teil beizutragen, glaube ich am besten dadurch zu erreichen, dass ich zunächst die wesentlichsten gegen sie erhobenen Vorwürfe zu entkräften versuche und, daran anschliessend, einige allgemeine Bemerkungen über Ziel und Zweck des mathematischen Schulunterrichts und der mathematischen Wissenschaft folgen lasse.

Mit ganz besonderer Schärfe hat sich bekanntlich Schopenhauer an verschiedenen Stellen seiner Schriften gegen die Mathematik gewendet. Das ist nun zwar schon ziemlich lange her: trotzdem sind seine Ausführungen meines Wissens niemals widerlegt worden, vielleicht nur deshalb, weil ihre Widerlegung, als gar zu einfach, den Mathematikern nicht der Mühe wert schien. Da aber bis in die neueste Zeit, namentlich in Schriften und Aufsätzen, die einer Einschränkung des mathematischen Unterrichts an den Mittelschulen das Wort reden, mit fast unfehlbarer Regelmässigkeit versucht wird, Schopenhauers Autorität als eine besonders gewichtige in die Wagschale zu werfen, so scheint es mir dringend wünschenswert, die Schopenhauerischen Argumente, die wissenschaftliche Legitima-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

tion ihres Autors und seine, wie ich nachweisen werde, keineswegs ganz sauberen Praktiken einmal einer öffentlichen Prüfung zu unterziehen.

Was Schopenhauer über die Elementar-Geometrie sagt,[4]) kommt für unsere Zwecke nur insofern in Betracht, als schon bei dieser Gelegenheit sein Mangel an jeder tieferen mathematischen Einsicht deutlich zum Ausdruck gelangt. Kann man auch die von ihm hervorgehobene didaktische Unzweckmässigkeit der Euklidischen Beweismethoden ihm ohne weiteres zugestehen, so liegen doch die weitaus wesentlicheren Mängel des Euklidischen Lehrgebäudes sehr viel tiefer, nämlich in den grundlegenden Definitionen und Axiomen: und gerade hierfür hat Schopenhauer nicht das geringste Verständnis, macht sich vielmehr über die von den Mathematikern in dieser Hinsicht geäusserten Bedenken in recht billiger Weise lustig.[5]) Will man aber mit Schopenhauer jene Fundamente beibehalten, so bleiben Euklids Elemente auch heute noch ein in ihrer Art bewunderungswürdiges Werk von hoher Vollkommenheit. Und bei den meisten Euklidischen Beweisen ist das, was dem Lernenden die Einsicht erschwert, keineswegs der Inhalt, sondern lediglich die rein synthetische Form des Vortrages, welche von jedem geschickten Lehrer mit Leichtigkeit durch eine mehr analytisch-genetische und zugleich geometrisch anschaulichere ersetzt werden kann. Ein schlagendes Beispiel hierfür bietet gerade der von Schopenhauer als „stelzbeinig, ja hinterlistig" charakterisierte Euklidische Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes, welcher bei unerheblicher Änderung der Darstellungsform geradezu als glänzendes Muster eines tadellosen elementar-geometrischen Beweises erscheint, während das, was Schopenhauer als Ersatz zu bieten wagt, gelinde gesagt, als äusserst naiv bezeichnet werden muss. Und nicht einmal an dem armseligen Spezialfall,[6]) auf den sein ganzer (übrigens uralter) Beweis sich beschränkt, gelingt ihm dasjenige, was er eigentlich prätendiert: nämlich anstatt des beim Euklidischen „Mausefallenbeweis" lediglich zum Vorschein kommenden Erkenntnisgrundes den angeblich existierenden, wahren Seinsgrund[7]) aufzudecken. Jeder Sachkundige

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

sieht unmittelbar, dass Schopenhauer in Wahrheit um kein Haar mehr gibt als Euklid: nämlich den Erkenntnisgrund.[8])

Zum Kapitel „Arithmetik" äussert sich Schopenhauer folgendermassen:[9]) „Dass die niedrigste aller Geistestätigkeiten die arithmetische sei, wird dadurch belegt, dass sie die einzige ist, welche auch durch eine Maschine ausgeführt werden kann; wie denn jetzt in England dergleichen Rechenmaschinen bequemlichkeitshalber schon in häufigem Gebrauch sind. Nun läuft alle analysis finitorum et infinitorum im Grunde doch auf Rechnen zurück. Danach bemesse man den „mathematischen Tiefsinn", über welchen schon Lichtenberg sich lustig macht, indem er sagt: „„Es ist fast mit der Mathematik, wie mit der Theologie. Sowie die der letzteren Beflissenen, zumal wenn sie in Ämtern stehen, Anspruch auf einen besonderen Kredit von Heiligkeit und eine nähere Verwandtschaft mit Gott machen, obgleich sehr viele darunter wahre Taugenichtse sind, so verlangt sehr oft der sogenannte Mathematiker für einen tiefen Denker gehalten zu werden, ob es gleich darunter die grössten Plunderköpfe gibt, die man nur finden kann, untauglich zu irgend einem Geschäft, das Nachdenken erfordert, wenn es nicht unmittelbar durch jene leichte Verbindung von Zeichen geschehen kann, die mehr das Werk der Routine als des Denkens sind."" (S. Lichtenbergs vermischte Schriften, Göttingen 1801, Bd. II, S. 287 ff.)"

Nochmals kurz zusammengefasst: Nur die arithmetische Geistestätigkeit kann durch Maschinen ausgeführt werden, folglich ist sie die allerniedrigste. Alle Analysis läuft aber auf Rechnen hinaus, folglich hat Lichtenberg ganz recht, wenn er die Mathematiker für Plunderköpfe erklärt. Ein wundervoller Schluss vom besonderen zum allgemeinen, der die herrlichsten Perspektiven eröffnet. Z. B.: Stanley Jevons hat eine Maschine konstruiert,[10]) mittels deren man gewisse logische Schlussformen auf rein mechanischem Wege erzeugen kann. Damit wäre vor allem belegt, dass die logische Geistestätigkeit der arithmetischen an Niedrigkeit nichts nachgibt. Nun läuft aber alles vernünftige Denken im Grunde doch auf

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

logisches Schliessen zurück. Man bemesse danach den „philosophischen Tiefsinn“ der sogenannten Denker u. s. f.

Jene ganze Schopenhauer'sche Schlussweise beruht auf dem Missbrauche, welcher mit dem Worte arithmetische Tätigkeit getrieben wird. In Wahrheit handelt es sich hier doch ausschliesslich um das gewöhnliche numerische Rechnen, d. h. um die Ausführung der vier Spezies an gegebenen Zahlen. Will man diese, allerdings ziemlich untergeordnete, geistige Tätigkeit mit dem pompösen Namen einer arithmetischen beehren, so ist dagegen vom rein etymologischen Standpunkte kaum etwas einzuwenden. In der Tat findet man den entsprechenden Lehrgegenstand auf den Lehrplänen der bayerischen Gymnasien nach altem scholastischen Brauch schlechthin als „Arithmetik“ bezeichnet. Doch scheint mir dieser einigermassen luxuriöse Usus wenig empfehlenswert: einmal schon deshalb, weil nicht recht abzusehen ist, warum man ungefähr dasselbe Gericht,[11]) welches auf den Volksschulen weit bescheidener und zweckmässiger als „Rechnen“ dargeboten wird, den gymnasialen oberen Zehntausend unter einem so viel feineren, weit grössere Erwartungen erregenden Namen serviert; sodann aber, weil man auf diese Weise die an sich schon äusserst dunklen Vorstellungen, welche in weiteren Kreisen über Wesen und Inhalt der Mathematik herrschen, nur noch verdunkeln hilft. Die Arithmetik, auch die elementare, ist eine Wissenschaft; sie lehrt, gewisse allgemeine Gesetze in systematischer Form aufzustellen und logisch zu begründen. Das Rechnen ist im wesentlichen ein Können, kein Wissen — eine in der Hauptsache rein technische Fertigkeit, deren Ziel und Zweck in der zahlenmässigen Anwendung eines verhältnismässig sehr geringen Bestandes von zumeist nur notdürftig erklärten und unzulänglich bewiesenen arithmetischen Regeln besteht. Usurpiert man hierfür die viel zu anspruchsvolle Benennung Arithmetik (die älteren Lehrbücher sagen in diesem Zusammenhange wenigstens „gemeine“ Arithmetik), so bringt man damit die Arithmetik in einen gänzlich falschen Gegensatz zur „eigentlichen Mathe-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

matik“ oder man erweckt den irrigen Glauben, dass die Mathematik, abgesehen von der reinen Geometrie, dem numerischen Rechnen eng verwandt oder gar im wesentlichen damit identisch sei. So ungefähr scheint auch Schopenhauer sich die Sache vorgestellt zu haben. Und doch involviert sein Ausspruch, dass die gesamte Analysis auf ein der Tätigkeit einer Rechenmaschine vergleichbares Rechnen hinauslaufe, eine vollendete petitio principii, welche unwiderleglich zeigt, dass er von den Methoden und dem Inhalte jener Wissenschaft auch nicht die leiseste Ahnung besitzt.

Hiervon werden wir uns im folgenden alsbald noch des genaueren überzeugen. Zuvor aber wollen wir noch feststellen, dass jenes Lichtenberg-Zitat, durch welches Schopenhauer die Lacher auf seine Seite zu ziehen und seine fadenscheinige Argumentation zu stützen sucht, bei näherer Betrachtung als eine vollkommen bewusste, recht plumpe und bösartige Fälschung sich erweist. Der fragliche Ausspruch Lichtenbergs beginnt nämlich in Wahrheit mit den Worten: „Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft, aber die Mathematiker taugen oft den Henker nicht.“ Schopenhauer, der ja gerade die geistige Minderwertigkeit der Mathematik zu beweisen wünscht, entblödet sich nicht, diesen einen, das völlige Gegenteil besagenden Satz kurzweg zu unterschlagen,[12]) um so im Leser die irrige Meinung hervorzurufen, als habe Lichtenberg durch seinen Ausfall auf gewisse Mathematiker die Mathematik selbst treffen wollen. Im übrigen kann für jeden, der mit der Geschichte der Mathematik einigermassen vertraut ist, kaum ein Zweifel darüber bestehen, auf welche Mathematiker jener Angriff gemünzt ist. Es handelt sich dabei offenbar um die Anhänger der, heute fast völliger Vergessenheit anheimgefallenen, sogenannten kombinatorischen Schule, welche gegen Ende des 18. und Anfang des 19. Jahrhunderts fast alle mathematischen Lehrstühle an den deutschen Universitäten okkupierten und deren weitschweifige, zumeist in ödesten Formalismus sich verlierende Produktionen einem geistreichen Kopfe wie Lichtenberg, der ja

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

überdies als Professor der Physik (in Göttingen) mathematisch selbst wohlbewandert war, nur höchstes Missbehagen verursachen konnten.

Doch, kehren wir wieder zu Schopenhauer zurück! Um seine völlige Unkenntnis des Wesens der Analysis zu charakterisieren, führe ich zunächst die folgende Stelle an:[13])

„Will man von den räumlichen Verhältnissen abstrakte Erkenntnis haben, so müssen sie erst in zeitliche Verhältnisse, d. h. in Zahlen, übertragen werden. . . . Diese Notwendigkeit, dass der Raum, mit seinen drei Dimensionen, in die Zeit, welche nur eine Dimension hat, übersetzt werden muss, wenn man eine abstrakte Erkenntnis seiner Verhältnisse haben will, diese Notwendigkeit ist es, welche die Mathematik so schwierig macht.[14]) Dies wird sehr deutlich, wenn wir die Anschauung der Kurven vergleichen mit der analytischen Berechnung(!) derselben, oder auch nur die Tafeln der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen mit der Anschauung der wechselnden Verhältnisse der Teile des Dreiecks, welche durch jene ausgedrückt werden(?): was hier die Anschauung in einem Blick, vollkommen und mit äusserster Genauigkeit(?) auffasst, nämlich wie der Kosinus abnimmt, indem der Sinus wächst, wie der Kosinus des einen Winkels der Sinus des andern(?) ist, das umgekehrte Verhältnis(?) der Ab- und Zunahme beider Winkel, u. s. f., welches ungeheure Gewebe von Zahlen, welche mühsälige Rechnung bedurfte es nicht, um dies in abstrakto auszudrücken!"

Ohne auf die groben, einem einigermassen mathematisch gebildeten Leser unmittelbar ersichtlichen Ungereimtheiten einzugehen, die jeder einzelne dieser Sätze darbietet, will ich mich nur an das Endergebnis halten: darnach soll der Mathematiker, um eine einfache geometrische Beziehung in abstrakto auszudrücken, eines nur durch „mühsäligste" Rechnung zu gewinnenden „ungeheuren Zahlengewebes" bedürfen. Ach nein! Das leistet er mit Hilfe einer einzigen Formel. Und noch mehr: diese ersetzt ihm nicht nur die Anschauung, sondern sie präzisiert mit absoluter Genauigkeit,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

was jene nur in grobem Umrisse zeigt. Auch enthält eine einzige Formel unendlich viel mehr, als sämtliche Logarithmentafeln der Erde: denn sie umfasst die unbegrenzte Mannigfaltigkeit aller überhaupt denkbaren Fälle, während jene Logarithmentafeln, mögen sie noch so zahlreich und noch so dick sein, immer nur auf eine begrenzte Anzahl von bestimmten Fällen sich erstrecken können. Von der wahren Bedeutung und der wunderbaren Kraft einer analytischen Formel hat Schopenhauer gar keine Vorstellung. Die Analysis, die nach seiner Meinung nur mit Hilfe „ungeheurer Zahlengewebe" d. h. Tabellen sich verständlich macht, besitzt dazu ein unendlich viel ausdrucksvolleres und kürzeres Hilfsmittel: die Funktion, gewissermassen eine auf den minimalen Umfang von wenigen Zeichen reduzierte Tabelle von unbegrenzter Feinheit. Die Analysis begnügt sich nicht, wie die Algebra, zu fragen: „Wie berechnet man aus einer Gleichung, die neben gewissen gegebenen Zahlen eine unbekannte Zahl y enthält, dieses unbekannte y?" Vielmehr nimmt sie ihren Ausgang von der folgenden weit allgemeineren Fragestellung (in welcher offenbar die eben genannte als spezieller Fall enthalten ist): „Welche Folge von Zahlenwerten durchläuft jenes y, wenn die betreffende Gleichung ausser den fest gegebenen Zahlen noch eine sogenannte veränderliche Zahl enthält, d. h. einen Buchstaben x, an dessen Stelle man sich successive eine Menge verschiedener Zahlen, z. B. jede überhaupt mögliche Zahl gesetzt denkt?" Einen derartigen Zusammenhang zwischen zwei gleichzeitig mit einander veränderlichen Zahlen x und y, wobei also, gerade wie in einer Tabelle mit zwei, x und y überschriebenen Kolonnen, jedem Zahlenwerte x immer wieder ein gewisser Zahlenwert y zugehört (eventuell auch deren mehrere), bezeichnet der Mathematiker mit dem Ausdrucke: es sei y eine Funktion von x.

Der Nutzen und die Wichtigkeit des soeben rein arithmetisch definierten Funktions-Begriffes dürfte einigermassen deutlich werden, wenn wir auf seinen geometrischen Ursprung und damit zugleich auf eine seiner fruchtbarsten Anwendungen in Kürze eingehen, nämlich

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

auf den Grundgedanken der sogenannten analytischen Geometrie, deren Erfindung durch Cartesius (= Descartes, 1637) und Fermat (ungefähr gleichzeitig) den vollständigen Bruch mit der bis dahin allein herrschenden geometrischen Tradition der Griechen und den Beginn einer ganz neuen mathematischen Aera bezeichnet. Man denke sich auf einem Blatte quadratisch liniierten Papiers, wie es die Anfänger zum Rechnen benützen, die Vertikal-, wie auch die Horizontal-Linien mit den Nummern 0, 1, 2 · · · u. s. f. versehen. Dann ist durch die Aussage: „es liege ein Punkt in einer bestimmten Vertikale, z. B. Nr. 3, und einer bestimmten Horizontale, z. B. Nr. 5," — offenbar ein einziger Punkt vollständig bestimmt. Das hierbei auftretende Zahlenpaar (3, 5) kann also dazu dienen, einen bestimmten Punkt eindeutig zu charakterisieren. Denkt man sich jetzt neue Vertikalen und Horizontalen gezogen, welche die bisher vorhandenen Zwischenräume gerade halbieren, und numeriert dieselben demgemäss mit: $^1/_2$, $1^1/_2$, $2^1/_2$ · · · u. s. f., so ist ohne weiteres klar, dass jetzt auch Zahlenpaare, wie: $(3^1/_2, 5)$, $(3, 5^1/_2)$, $(3^1/_2, 5^1/_2)$, je einen bestimmten Punkt charakterisieren. Durch Fortsetzung dieser Schlussweise und Heranziehung gewisser Verallgemeinerungen des Zahlbegriffs (auf die ich hier nicht eingehe) gelangt man zu dem Resultate: Man kann jedem Punkte einer Ebene ein ganz bestimmtes Zahlenpaar (x, y) zuordnen, welches man als seine Koordinaten bezeichnet, und umgekehrt entspricht dann auch jedem Zahlenpaare (x, y) ein und nur ein bestimmter Punkt.

Ist jetzt in der fraglichen Ebene irgend eine Kurve, d. h. eine beliebige krumme Linie verzeichnet, so können wir auf Grund des oben gesagten die Gesamtheit ihrer Punkte ersetzen durch einen Komplex von unendlich vielen Zahlenpaaren (x, y). Zu jeder hierbei vorkommenden Zahl x gehört also (mindestens) eine bestimmte Zahl y — das ist aber genau dasselbe, was wir oben durch den Ausdruck bezeichneten: y ist eine Funktion von x. Mit anderen Worten: es findet eine funktionale Beziehung d. h. eine Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen x und y statt, welche gewisser-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

massen als das arithmetische Abbild jener Kurve erscheint und schlechthin die Gleichung der Kurve genannt wird. Umgekehrt wird man in entsprechender Weise für eine Gleichung zwischen x und y eine gewisse Kurve als geometrisches Abbild erhalten. Diese Wechselbeziehung zwischen Kurven und Gleichung gestattet dem Mathematiker, die Eigenschaften der Kurven an ihren Gleichungen zu studieren, und auf arithmetischem Wege gewonnene Erkenntnisse in geometrische Anschauung umzusetzen. Gleichwie der Musiker im stande ist, aus dem blossen Anblicke einer Partitur sich eine akustische Vorstellung von dem Eindrucke eines nie zuvor gehörten Tonstückes zu bilden, so liefert dem Mathematiker die Gleichung einer Kurve, die er nie gesehen, ein vollkommenes Bild ihres Verlaufes. Ja noch mehr: wie dem Musiker die Partitur oft Feinheiten enthüllt, die seinem Ohre bei der Komplikation und dem raschen Wechsel der Gehöreindrücke entgehen würden, so ist die Einsicht, die der Mathematiker der Gleichung einer Kurve entnimmt, eine viel tiefere, als die durch blosse Anschauung vermittelte. Denn abgesehen von der schon oben kurz hervorgehobenen, an und für sich viel grösseren Präzision der arithmetischen Darstellung gegenüber der blossen Anschauung, besitzt der Mathematiker in dem von Newton und Leibniz (1675) erfundenen Infinitesimal-Kalkul ein mit gleichsam mikroskopischer Schärfe arbeitendes Instrument der rechnerischen Analyse.

Diese Betrachtungen lassen sich auch leicht von der Ebene auf den Raum übertragen. Und ähnliche Dienste wie der Geometrie leistet die Einführung des Funktions-Begriffs der Mechanik. Die Lage, also die Koordinaten eines beweglichen Punktes erscheinen hier als Funktionen einer neuen Veränderlichen: der Zeit (die man sich, von einem bestimmten Momente an nach irgend einer Zeiteinheit gemessen, als blosse Zahl vorzustellen hat); und die Differentialrechnung gibt die nötigen Mittel an die Hand, um auch Begriffe, wie Geschwindigkeit, Beschleunigung analytisch zu formulieren, d. h. in Funktions-Begriffe umzusetzen. Die Auffindung

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

von Bewegungsgesetzen wird auf diese Weise wieder auf das Studium gewisser Funktional-Beziehungen (Integration von Differential-Gleichungen), also auf „Analysis“ zurückgeführt.

Für Schopenhauer, nach dessen Meinung „die Mathematik, wie sie von Eukleides als Wissenschaft aufgestellt wurde, bis auf den heutigen Tag geblieben ist“,[16]) existiert das alles nicht.

> „Rechnungen“, sagt er, „haben bloss Wert für die Praxis, nicht für die Theorie. Sogar kann man sagen, wo das Rechnen anfängt, hört das Verstehen auf. Denn der mit Zahlen beschäftigte Kopf ist, während er rechnet, dem kausalen Zusammenhang des physischen Hergangs gänzlich entfremdet: er steckt in lauter abstrakten Zahlbegriffen. Das Resultat besagt nie mehr als Wieviel, nie Was.“

Und an einer anderen Stelle:[17])

> „Sie hören nicht auf, die Zuverlässigkeit und Gewissheit der Mathematik zu rühmen. Aber was hilft es mir, noch so gewiss und zuverlässig etwas zu wissen, daran mir gar nichts gelegen ist — das Wieviel.“

Ich hoffe, die zuvor gegebenen, freilich recht unvollkommenen Andeutungen werden immerhin erkennen lassen, dass die auf dem Funktionsbegriffe aufgebaute Analysis eben nicht bloss auf die Frage Wieviel, sondern ganz wesentlich auf die Frage Was antwortet.[18]) Sie zeigt (wenn wir des leichteren Verständnisses halber von der reinen Funktionenlehre absehend, uns auf deren Anwendungen beschränken) z. B. nicht nur, wie man etwa die Länge eines Kurvenbogens, den Inhalt eines irgendwie begrenzten Flächenstückes berechnet; sondern sie gibt Auskunft über die allgemeinen Eigenschaften und Lagenverhältnisse geometrischer Gebilde. Sie erfindet dem Astronomen und Physiker nicht bloss die Formeln zur Berechnung irgendwelcher Entfernungen, Zeiten, Geschwindigkeiten, physikalischer Konstanten; sie verschafft ihm vielmehr Einsicht in die Gesetze der Bewegungsvorgänge, lehrt ihn, aus gewonnenen Erfahrungen zukünftige voraussagen und liefert ihm die Hilfsmittel

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

zu naturwissenschaftlicher Erkenntnis, d. h. zur Zurückführung ganzer Gruppen verschiedener, oft äusserst heterogener Erscheinungen auf ein Minimum einfacher Grundgesetze.

Dass der Mathematiker, so lange er rechnet, dem kausalen Zusammenhange eines Vorganges mehr oder weniger entfremdet ist, darf zugegeben werden: liegt doch gerade darin die erstaunliche Kraft der Analysis, dass die ihr eigentümliche Zeichensprache gestattet, verwickelte Gedankenreihen durch einfache Zeichenoperationen zu ersetzen, ohne dass derjenige, welcher sich ihrer zu bedienen versteht, genötigt ist, den gedanklichen Inhalt dieser Operationen immer wieder in allen Einzelheiten nachzuprüfen. Es wird doch auch niemanden einfallen, allemal wenn ihm eine tadellose Reichsbanknote in Zahlung gegeben wird, nach Berlin zu reisen, um sich zu überzeugen, ob die Reichsbankhauptkasse ihm, wie geschrieben steht, den Betrag bar ausbezahlt. Wesentlich ist eben nur, dass jede analytische Zeichenoperation in ihrer Anwendung auf Grössenbeziehungen einen bestimmten Gedankeninhalt repräsentiert und dass zwar nicht das „Rechnen" an sich, d. h. das mechanische Operieren mit gewissen Symbolen, wohl aber die Auflösung jener Operationen in ihren Gedankeninhalt auch wirkliche Einsicht in das Zustandekommen des Endergebnisses verschafft. Es wäre nicht schwierig, das an einfacheren Fällen vollständig durchzuführen. Andererseits soll nicht geleugnet werden, dass mit zunehmender Komplikation der Probleme die Schwierigkeit und Weitläufigkeit der gedanklichen Analyse ins Ungemessene wächst. Das Gebiet, über welches die Sprache der Analysis ihre Macht erstreckt, ist zwar ein relativ begrenztes: doch innerhalb desselben ist sie der gewöhnlichen Sprache so unendlich überlegen, dass diese schon nach wenigen Schritten es aufgeben muss, ihr bis ans Ziel zu folgen. Der Mathematiker aber, der in jener wunderbar kondensierten Sprache zu denken versteht, ist vom mechanischen Rechner himmelweit verschieden.

Es kann nach dem bisher Gesagten nicht wundernehmen, dass Schopenhauer von dem allgemeinen Bildungswerte der Mathematik

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

eine überaus geringe Meinung hat. Im Anschlusse an eine Abhandlung des schottischen Philosophen Hamilton,[19]) auf die wir noch zurückkommen werden, gelangt er zu dem folgenden, für die Mathematik nicht eben schmeichelhaften Endergebnis:[20])

„Der einzige unmittelbare Nutzen, welcher der Mathematik gelassen wird, ist, dass sie unstäte und flatterhafte Köpfe gewöhnen kann, ihre Aufmerksamkeit zu fixieren. — Sogar Cartesius, der doch selbst als Mathematiker berühmt war, urteilt ebenso über die Mathematik. In der Vie de Descartes, par Baillet 1693 heisst es Liv. II, ch. 6, p. 54: Seine eigene Erfahrung hatte ihn von dem geringen Nutzen der Mathematik überzeugt, zumal wenn man sie nur wegen ihrer selbst treibt. ... Nichts erschien ihm zweckloser, als mit blossen Zahlen und eingebildeten Figuren sich zu beschäftigen u. s. f.“[21])

Ich kann nicht verhehlen, dass ein so vernichtendes Urteil gerade aus dem Munde eines bahnbrechenden Mathematikers und auch sonst so vielseitigen und tiefen Denkers, wie Descartes, seinerzeit einen grossen Eindruck auf mich machte. Es war mir daher ein wahrer Trost, als ich gelegentlich entdeckte, dass auch dieses Schopenhauer'sche Zitat auf einer Fälschung beruht. Durch Verstümmelung des Zusammenhanges hat es Schopenhauer wahrhaftig fertig gebracht, den wahren Sinn von Descartes Urteil in das vollkommene Gegenteil zu verwandeln. Zwischen den beiden von Schopenhauer zitierten Sätzen steht in Baillets Descartes-Biographie die Bemerkung, dass zu einer gewissen Zeit, nämlich 1623, Descartes aufhörte, sich mit Mathematik zu beschäftigen.[22]) Zur Motivierung dieser Tatsache folgt dann der zweite von Schopenhauer angeführte Satz:

„Nichts erschien ihm zweckloser, als mit blossen Zahlen und eingebildeten Figuren sich zu beschäftigen“,

aber mit dem von Schopenhauer unterdrückten Zusatze:

„ohne seine Blicke weiter zu richten“,

einer Einschränkung, durch welche jener Hauptsatz schon an und für

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

sich eine ganz andere Bedeutung bekommt. Sodann, nach einer Bemerkung des Inhalts, dass Descartes die mathematischen Beweise — wohlgemerkt die mathematischen Beweise jener Zeit — oberflächlich und unzulänglich fand, heisst es weiter:

„Aber man darf sagen, dass er das Spezialstudium der Arithmetik und Geometrie nur aufgab, um sich ganz der Beschäftigung mit jener allgemeinen, aber wahren und unfehlbaren Wissenschaft hinzugeben, die von den Griechen scharfsinnig Mathesis (d. h. „Wissenschaft" überhaupt) genannt wurde, und die alle mathematischen Disziplinen als Teile enthält. Er behauptete, dass diese Spezialkenntnisse sich mit Verhältnissen, Proportionen und Massbeziehungen beschäftigen müssten, wenn sie den Namen Mathematik verdienen sollten. Und er schloss daraus, dass es eine allgemeine Wissenschaft gebe, zur Aufklärung aller Fragen, die man in Bezug auf Verhältnisse, Proportionen und Massbeziehungen stellen könnte, sofern man diese als losgelöst von jeder Materie betrachtet; und dass diese allgemeine Wissenschaft mit vollem Rechte den Namen Mathesis oder Allgemeine Mathematik tragen dürfte, weil sie alles in sich enthält, was innerhalb unserer sonstigen Kenntnisse den Namen Wissenschaft und Mathematik verdient.

Hierin liegt die Lösung der Schwierigkeit, welche man darin finden müsste, anzunehmen, dass Descartes gänzlich auf die Mathematik verzichtet haben sollte — zu einer Zeit, wo es ihm nicht mehr frei stand, darin unwissend zu sein."

Mit dieser auf das Jahr 1623 bezüglichen Aussage vergleiche man nun die Tatsache, dass Descartes im Jahre 1637 seine berühmte Géométrie publizierte, jenes Werk, welches eben die früher erwähnten Fundamente der analytischen Geometrie enthält und eine der wichtigsten Grundlagen unserer modernen Mathematik bildet. Wie sehr Descartes der Neuheit und Tragweite seiner Erfindung sich bewusst war, beweist folgende Stelle aus einem seiner Briefe (an Pater Mersenne):[23])

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

„Es ist mir recht peinlich, mich selbst loben zu müssen. Aber da nur wenige Leute fähig sind, meine Geometrie zu verstehen, und da Sie mich danach fragen, was ich von ihr halte, so scheint es mir angemessen, Ihnen zu sagen: Sie ist genau so, dass ich nichts mehr wünsche. In meiner Dioptrik und der Schrift über die Meteore habe ich wohl den Leser zu überzeugen versucht, dass meine Methode besser sei, als die bisher übliche; aber ich behaupte, durch meine Geometrie das wirklich bewiesen zu haben."

Und nachdem er hervorgehoben, dass die Tragweite seiner Methode alles frühere weit übertreffe, fügt er nach Erwähnung der hauptsächlichsten zeitgenössischen Produktionen hinzu:

„Keiner dieser Modernen hat etwas zustande gebracht, was nicht schon die Alten gekannt haben."[24])

Überhaupt richtet sich alles, was er gelegentlich an der Mathematik auszusetzen scheint, niemals gegen diese selbst, sondern immer nur gegen ihre mangelhafte Behandlung. Arithmetik und Geometrie erklärt er ausdrücklich für die einzigen Wissenschaften, die nichts Falsches oder Ungewisses enthalten:[25]) nur an den Autoren, die sich damit befasst hätten, sei mancherlei auszusetzen und nur sie treffe die Schuld, wenn gerade viele gut beanlagte Geister diese Wissenschaften als leere und kindische Spielereien verachtet oder nach wenigen Anfangsversuchen wieder aufgegeben hätten.[26])

Dass Schopenhauer trotz alledem gewagt hat, diesen grossen Mathematiker als einen seiner Eideshelfer für den Unwert der Mathematik zu zitieren, muss nach dem Gesagten als eine unerhörte und nichtswürdige Geschichtsfälschung bezeichnet werden.

Charakteristisch für das unglaublich niedrige Niveau, auf welches Schopenhauer bei seinem Feldzuge gegen die Mathematik herabsteigt, ist der Umstand, dass er die oben erwähnte Hamilton'sche Abhandlung als „eine sehr gründliche und kenntnisreiche" dringend empfiehlt. Das Ergebnis derselben, nämlich dass die Mathematik der allgemeinen Ausbildung des Geistes keineswegs förderlich, ja sogar

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

entschieden hinderlich sei, werde „nicht nur durch gründliche dianoiologische Untersuchung der mathematischen Geistestätigkeit dargetan, sondern auch durch eine sehr gelehrte Anhäufung von Beispielen und Autoritäten befestigt". — Ich kann es mir, um den Geist der so dringend empfohlenen Schrift zu kennzeichnen, nicht versagen, einen grossen Teil jener „Autoritäten" wenigstens zu nennen: Aristo von Chios; Philoponus; Fracastorius; Klumpp; Kenelm Digby; Sorbière; Poiret; Buddeus; Barbeyrac; Salat; Kirwan; Monboddo; Gundling u. s. f. Ich muss zu meiner Schande gestehen, dass ich vor der Lektüre der Hamilton'schen Abhandlung keine einzige dieser glänzenden Autoritäten auch nur dem Namen nach kannte; zu meiner Entschuldigung dient vielleicht der Umstand, dass ich einzelne von ihnen sogar nicht einmal a posteriori in den Adressbüchern der Wissenschaft ausfindig machen konnte. Freilich wird auch eine Anzahl bekannterer Namen ins Treffen geführt: zunächst natürlich, wie es für einen gründlichen Philosophen sich ziemt, die Vor-Euklidiker Sokrates, Plato, Aristoteles; dann: Cicero, Seneca, Plinius, Albertus Magnus; der Mystiker und Kabbalist Pico von Mirandula; der Dichter Coleridge; der Historiker Gibbon; Frau von Staël; der Memoiren-Schriftsteller Walpole; die Philologen Wolf und Bernhardi u. s. f. — lauter Leute, die keinesfalls durch ein Übermass mathematischer Kenntnisse daran verhindert waren, über den Wert der Mathematik sich ein massgebendes Urteil zu bilden. Als besonders schwerwiegend erscheinen dann noch der heilige Augustinus, der die Mathematik „als von Gott abwendend", der heilige Hieronymus, der sie als „nicht die Frömmigkeit lehrend" erwähnt, während der heilige Ambrosius erklärt: „Sich mit Astronomie und Geometrie beschäftigen, heisse die Sache der Erlösung verlassen und die des Irrtums ergreifen." Fast noch Schlimmeres freilich lässt uns Hamilton durch den Mund des Mystikers Poiret, „eines der tiefsten Denker seiner Zeit", vernehmen: „Der mathematische Genius pflegt die Gemüter seiner allzu

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

heftigen Anhänger mit den bösartigsten Neigungen zu erfüllen. Denn er infiziert sie mit Fatalismus, religiöser Gleichgültigkeit, Unglauben, Roheit und einem nahezu unheilbaren Hochmut." — Sapienti sat! Und ferne sei es von mir, den Frankfurter Philosophen um solche Bundesgenossen beneiden zu wollen.

Wenn Hamilton der Mathematik vorwirft, dass ihr intensives Studium den Geist für anderweitige Betätigung, wie sie z. B. die Philosophie und das Leben erfordern, unfähig mache,[27]) so meine ich, der erste Teil dieses Vorwurfs dürfte dahin zu berichtigen sein, dass allerdings die Mathematiker für nebelhafte und haltlose metaphysische Spekulationen wenig Sinn und Neigung zu besitzen pflegen. Und wenn sie es demnach zumeist für nützlicher hielten, mathematische Werte zu schaffen, statt den Wust blühenden Unsinns, den zahlreiche Metaphysiker im Laufe der Jahrhunderte angehäuft haben, vermehren zu helfen, so kann ich darin allenfalls nur ein Verdienst, sicherlich aber kein Zeichen eines geistigen Defektes erblicken. Andererseits genügt es wohl, die Namen Descartes und Leibniz zu nennen, um nachzuweisen, dass führende Mathematiker auch führende Philosophen sein können.

Wird aber den Mathematikern nachgesagt, dass ihre Wissenschaft sie den Forderungen des praktischen Lebens entfremde, so trifft dieser Vorwurf, soweit er berechtigt ist, die Mathematiker nicht mehr, als die Gelehrten überhaupt. Um sich zu überzeugen, dass die Mathematik an sich hieran völlig unschuldig ist, braucht man nur den Blick zu unseren westlichen Nachbarn zu wenden, bei denen seit dem 18. Jahrhundert gerade die Mathematiker eine ganz hervorragende Rolle im öffentlichen Leben gespielt haben, nicht etwa blosse Auch-Mathematiker, sondern zum Teil produktive mathematische Geister hohen und höchsten Ranges. Um nur die bedeutendsten zu nennen: Gaspard Monge (1746—1818), den Schöpfer der Géométrie déscriptive (1799) und Verfasser der Applications de l'analyse à la géométrie (1801), zweier klassischer Werke, deren Einfluss bis auf die heutige Zeit reicht, finden wir 1792 als Marine-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

minister; im folgenden Jahre leistet er geradezu Märchenhaftes in der Herbeischaffung von Kriegsmaterial für die Landesverteidigung, gründet 1794 die École polytechnique, begleitet 1798 seinen Freund Napoléon Bonaparte nach Ägypten, führt dort ein kriegerisches, an Gefahren und Entbehrungen überreiches Leben und ist dabei zugleich die Seele der wissenschaftlichen Untersuchungen zur Erforschung der ägyptischen Altertümer. — Lazare Carnot (1753—1823), des Konvents und später Bonapartes genialer Kriegsminister, schreibt mitten in seiner erfolgreichen politischen Wirksamkeit seine vielgenannten Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal und seine, die Entwickelung der neueren Geometrie vorbereitende Géométrie de position. — Joseph Fourier (1768 bis 1830), der unsterbliche Schöpfer der Théorie analytique de la chaleur gehörte auch zu den Teilnehmern der Napoleonischen Expedition nach Ägypten. Als Kommissär beim ägyptischen Divan entfaltet er eine geradezu glänzende diplomatische Tätigkeit, unterdrückt mit höchster Umsicht und Unerschrockenheit einen Aufstand der Bewohner von Kairo, publiziert bei alledem eine Anzahl mathematischer Abhandlungen und ist zugleich auch eifriger Mitarbeiter an der archäologischen Déscription de l'Égypte. Später (1802) wird er Präfekt des Jsère-Departements und vollbringt die lange vergeblich angestrebte Austrocknung der Sümpfe von Bourgoin.[28]) — François Arago (1786—1853), der Erbe von Monges geometrischem Lehrstuhl, bekannter durch seine physikalischen und astronomischen Leistungen, seit 1830 beständiger Sekretär der Akademie und als solcher „unerreicht und ohnegleichen", war zugleich unter dem Juli-Königtum als Deputierter der gefürchtetste Redner der Opposition. Bei der provisorischen Regierung von 1848 finden wir ihn als Minister des Krieges und der Marine, später als energisches und durch persönliche Tapferkeit ausgezeichnetes Mitglied der Exekutiv-Kommission. — Jean Victor Poncelet[29]) macht 1812 als Leutnant den russischen Feldzug mit, wird in der Schlacht bei Krasnoi (18. November 1812) verwundet und gefangen, nach Saratow an der Wolga

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

geschleppt und entwirft dort in der Gefangenschaft, von allen wissenschaftlichen Hilfsmitteln entblösst, die Grundlagen seines epochemachenden Werkes: Traité des propriétés projectives des figures, das ihm, als dem Begründer der projektiven Geometrie, einen hervorragenden Platz unter den Geometern aller Zeiten sichert. Nach Frankreich zurückgekehrt (1814) tritt er wieder in die Armee ein, entwickelt später, trotz gleichzeitiger Fortsetzung seiner rein geometrischen Arbeiten, eine umfangreiche Tätigkeit als Genieoffizier, wird 1848 General, in welcher Eigenschaft er noch 1852 die zu Paris vereinigten Nationalgarden kommandiert. — Schliesslich noch einen Namen, der zwar nicht die wissenschaftliche Bedeutung der bisher genannten, dafür aber den Vorzug der Aktualität besitzt: Freycinet, welcher als Minister und Ministerpräsident durch seine verständige und friedliche Politik sich auch in Deutschland seinen guten Namen gemacht hat, ist Mathematiker und ein keineswegs unbedeutender Mathematiker: er hat ausser einem zweibändigen Traité de mécanique rationelle zwei beachtenswerte Bücher über die philosophischen Grundlagen der Infinitesimal-Analysis und der Mechanik publiziert.[30]) — Die vorstehenden Beispiele, die sich leicht vermehren liessen, dürften für unseren Zweck genügen. Wenn in Deutschland die Göttin Justitia nicht die leidige Gewohnheit hätte, die Minister-Portefeuilles nur ihren eigenen Sprösslingen in die Wiege zu legen, wer weiss, ob nicht schon mancher deutsche Mathematiker einen trefflichen Minister abgegeben hätte!

Ohne auf weitere Einzelheiten der Hamilton'schen Abhandlung einzugehen, möchte ich, nur an eine besonders prägnante und auf den ersten Blick verblüffend annehmbar erscheinende Stelle anknüpfend, nunmehr versuchen festzustellen, welchen Bildungswert wir der Mathematik etwa beimessen können, soweit sie als Lehrgegenstand der höheren Schulen, insbesondere der humanistischen Gymnasien in Betracht kommt. Selbst ihre Verächter pflegen in diesem Zusammenhange meist zuzugestehen, dass sie als eine Art praktische Schule der Logik vor allen anderen Wissenschaften geeignet sei, die formale

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Verstandesbildung wesentlich zu fördern: in der Tat verdankt sie ja zunächst wohl hauptsächlich diesem Umstande ihre Aufnahme in die Lehrpläne der Gelehrtenschulen. Hiergegen bemerkt nun Hamilton:[31])

„Die Kunst richtig zu schliessen, wird sicherlich nicht durch ein Verfahren gelehrt, bei welchem es kein unrichtiges Schliessen gibt. Durch Vorübung in einem Bassin voll Quecksilber lernen wir nicht im Wasser schwimmen. Wenn also die Mathematik empfohlen wird, um unserer natürlichen Neigung zum Irrtum entgegen zu wirken, warum schlägt man nicht auch das Quecksilber vor, um unsere natürliche Neigung zum Untersinken zu paralysieren?"

Nun, darauf wäre zu erwidern: Man schlägt es in Wahrheit nicht bloss vor, sondern man wendet es sogar konsequent an — NB. nachdem man es von den ihm anhaftenden metaphysischen Schlacken gründlich gereinigt hat. Der Metaphysiker Hamilton übersieht nämlich, dass das spezifische Gewicht des Quecksilbers etwa 13 mal so gross ist, wie das des Menschen, so dass der letztere überhaupt nicht tief genug eintauchen würde, um darin Schwimmbewegungen ausführen zu können. Und das wäre doch erforderlich, wenn das angewandte Bild überhaupt einen Sinn haben soll — denn logische Schwimmbewegungen, d. h. Schlüsse werden ja wirklich in der Mathematik ausgeführt. Hamilton will also in Wahrheit nur sagen, der Mensch könne nicht die Fertigkeit erwerben, im Wasser zu schwimmen, wenn er seine Übungen in einer Flüssigkeit anstellt, die spezifisch so schwer sei, dass er darin nicht untersinken könne. Und nun sage ich: der Kulturmensch pflegt wirklich in einem solchen Quasi-Quecksilber seine Schwimmstudien zu machen, nachdem Archimedes, der glücklicherweise ein Mathematiker und kein Methaphysiker war, ihn gelehrt hat, wie er sich eine solche Flüssigkeit aus gewöhnlichem Wasser in der denkbar einfachsten und billigsten Weise herstellen kann: nämlich, indem er, statt die Flüssigkeit spezifisch schwerer zu machen, sich selbst

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

in ein spezifisch leichteres Wesen verwandelt. Er bindet sich eben einfach einen Schwimmgürtel um und erlernt sodann die Technik des Schwimmens, nicht obgleich, sondern gerade weil er nunmehr gegen das Untersinken gesichert ist. Und wenn er dann diese Technik vollständig beherrscht, so hält sie ihn schliesslich auch ohne Schwimmgürtel über Wasser, zumal wenn durch allmähliche Abschwächung seiner Wirkung er sich nach und nach davon entwöhnt. In ganz analoger Weise wirkt auch ein richtig geleiteter mathematischer Schulunterricht. Nur die Anfangsgründe der Geometrie sind von der Art, dass sie bei genügender Präzisierung der zu Grunde gelegten Axiome die Möglichkeit logischer Irrtümer so ziemlich ausschliessen. Das gilt aber nicht einmal in gleichem Masse von den Elementen der Arithmetik und Algebra. Und wenn nun gar der Schüler beginnt, die erlernten Sätze zur Lösung von geometrischen und algebraisch-geometrischen Aufgaben zu verwerten, geometrische und algebraische Erkenntnisse auf physikalische Probleme anzuwenden, konkrete Fragen mannigfacher Art in die abstrakte Form der mathematischen Zeichensprache, z. B. in algebraische Gleichungen zu übersetzen, so wird er zu Irrtümern und Fehlschlüssen ausreichende Gelegenheit finden, um allmählich auch ohne Euklidischen Schwimmgürtel schwimmen zu lernen. Im übrigen schätzt man die Einwirkung der Mathematik auf die formale Verstandesbildung von vornherein viel zu niedrig ein, wenn man, wie häufig geschieht, lediglich annimmt, sie sei eine nützliche Übung für die Kunst, logisch zu schliessen, d. h. aus gegebenen Prämissen richtige Schlussfolgerungen zu ziehen. Denn schon bei zweckmässiger Unterweisung in den Hauptsätzen der Elementar-Geometrie besteht der bei weitem schwierigere und wichtigere Teil der Verstandestätigkeit nicht in der Schlussbildung selbst, sondern gerade in der Auffindung der zur Fortführung des Schlussverfahrens tauglichen, durch genaue Beobachtung des Sachverhaltes und geschickte Heranziehung schon erworbener Erkenntnisse zu gewinnenden Prämissen. Und der weitere Verlauf eines guten

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

mathematischen Schulunterrichts bietet reiches Material, um den Schüler nicht bloss zu richtigem Beobachten und Schliessen, sondern vor allem zu logischem und selbsttätigem Denken anzuleiten. Zugleich wird ihm eine unvergleichliche Gelegenheit gegeben, an scharfe und genaue Begriffsbestimmungen sich zu gewöhnen, sowie Klarheit und Präzision des sprachlichen Ausdrucks sich anzueignen — eine Gelegenheit, die freilich bei weitem nicht genügend ausgenützt zu werden scheint, wenigstens soweit meine bei Studenten gemachten Erfahrungen reichen. Fügt man hierzu noch die von der Geometrie, insbesondere von deren stereometrischem Teile dargebotene Übung zur Ausbildung des Anschauungsvermögens, so wird man die formalen Bildungsmöglichkeiten, welche dem mathematischen Schulunterrichte innewohnen, als überaus reichhaltige und wesentliche anerkennen müssen.

Fassen wir ferner die Mathematik, wie sie auf den Gymnasien gelehrt wird oder doch gelehrt werden sollte, dem Inhalte nach ins Auge, so wird man ihren Nutzen für die allgemeine geistige Ausbildung der Schüler vor allem darin zu suchen haben, dass sie unter den Lehrgegenständen der einzige ist, welcher ihnen das Beispiel einer wirklichen Wissenschaft, als eines Inbegriffs wohlerworbener und systematisch verknüpfter Erkenntnisse gibt. Zweitens erweist sie sich als unentbehrlich für den Unterricht in der Physik und den Elementen der Astronomie (der sogenannten mathematischen Geographie), soll dieser nicht, statt wirkliche Einsicht in die einfacheren physikalischen und astronomischen Erscheinungen zu verschaffen, zu einer blossen Mitteilung empirischer Tatsachen herabsinken. Und drittens gestattet sie zahlreiche und nützliche Anwendungen auf mannigfache Fragen des praktischen Lebens (sogenannte Textgleichungen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Feldmesskunde).

Aus dem Zusammenwirken von Form und Inhalt der Mathematik erwächst schliesslich dem Schüler die Bekanntschaft mit Methoden, welche ihn befähigen, innerhalb gewisser, wenn auch

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

bescheidener Grenzen selbständig zu produzieren und durch eigenes Nachdenken seine Erkenntnis zu erweitern. Die mit dieser Art der Betätigung verbundene Steigerung des geistigen Kraftgefühls und das allmähliche Erwachen geistiger Selbständigkeit darf wohl als das schönste und höchste Resultat der mathematischen Erziehung bezeichnet werden.

Obschon ich von der Richtigkeit der vorstehenden Darlegungen aufs tiefste überzeugt bin, so kann ich mir nicht verhehlen, dass dieselben manches enthalten, was sein sollte und wohl auch sein könnte, aber im allgemeinen nicht ist. Denn es wäre abgeschmackt, leugnen zu wollen, dass bei einem grossen, ja sogar bei dem grösseren Teile der Schüler die Früchte des mathematischen Unterrichts recht kümmerliche sind. Man hat zur Erklärung dieser Tatsache das Märchen erfunden, dass die Fähigkeit, das mathematische Schulpensum zu bewältigen, eine ganz spezielle mathematische Begabung erfordere;[32] und gewisse, glücklicherweise wohl allmählich seltener werdende Schulphilologen, namentlich aber mitleidige Eltern unternormal oder anormal begabter, oft aber auch nur schlechthin fauler Schüler haben redlich dazu beigetragen, jenem Märchen in den weitesten Kreisen Glauben zu verschaffen. Wenn zur Unterstützung dieses Glaubens häufig angeführt wird, mit der relativen Seltenheit der mathematischen Begabung verhalte es sich ähnlich, wie etwa bei der musikalischen, so kann man dieser Analogie wohl zustimmen, aber gerade um daraus die entgegengesetzten Konsequenzen zu ziehen. Gewiss ist derjenige Grad von musikalischer Begabung, welcher erforderlich ist, um mit Erfolg sich der Musik zu widmen oder gar schaffender Musiker zu werden, ein relativ seltener. Aber ein gewisses Mass von musikalischer Begabung, welches dazu befähigt, Freude an der Musik zu empfinden und bei richtiger Anleitung auch mehr oder weniger wirkliches Verständnis dafür zu gewinnen, darf doch geradezu als Regel angesehen werden. Wie wollte man sonst die dominierende Rolle erklären, welche heutzutage die Musik nicht bloss innerhalb des eigentlichen Kunstlebens, sondern im gesamten

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Kulturleben des Volkes spielt? — So besitzt nach der Meinung aller Einsichtigen auch jeder normal begabte Schüler ein genügendes Mass geistiger Fähigkeiten, um dem mathematischen Unterrichte das nötige Verständnis entgegenzubringen.

> „Den Gedankengang eines Platonischen Dialogs, einer Horazischen Epistel scharf und genau darstellen, die Idee eines Shakespeareschen Dramas, den Charakter einer seiner Personen entwickeln, einer Dichtung Goethes in alle ihre Beziehungen folgen, das sind Übungen, die eine Kraft und Beweglichkeit der Intelligenz hervorzubringen geeignet sind, der auch die Schwierigkeit mathematischer und physikalischer Begriffe und Methoden nicht unüberwindlich sein wird", —

sagt Friedrich Paulsen,[23]) freilich mit einer ganz anderen Tendenz, als die hier vorliegende: nämlich, um zu beweisen, dass die humanistischen Fächer für die logische Verstandesausbildung mindestens dasselbe leisten, wie die Mathematik. Nun, ohne meinerseits diese nämliche Folgerung an das obige Diktum knüpfen zu wollen, sein Inhalt erscheint mir im wesentlichen zutreffend, d. h., dass Schüler, die in den humanistischen Fächern wirklich Tüchtiges leisten, auch für die Mathematik ausreichende Begabung besitzen dürften. Zugleich wird man aber zugeben müssen, dass ein ganz ansehnlicher Teil der Gymnasialabiturienten auch von all den schönen Dingen, welche Paulsen anführt, recht wenig vermag: Leute, welche es allenfalls dazu bringen, über einen gewissen Vorrat gedächtnismässig eingeprägter Sprachkenntnisse und historischer Daten zu verfügen und nach bewährtem Rezepte, mit dem nötigen Aufwande klassischer Zitate, moralischer Gemeinplätze und patriotischer Phrasen, einen sogenannten deutschen Aufsatz anzufertigen. Für deren mathematische Begabung einzustehen, fühle ich mich in keiner Weise berufen.

Aber, selbst wenn man von der letztgenannten Kategorie absieht, so bleibt immerhin die Tatsache bestehen, dass gar mancher unter den besseren Schülern nur notdürftige Kenntnisse in der Mathematik erwirbt, ja, dass nur eine verhältnismässig geringe Anzahl aus dem

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

mathematischen Unterrichte sichtlichen und nachhaltigen Gewinn zieht. Ich will auch nicht verschweigen, dass ein sehr angesehener mathematischer Kollege (Professor Moritz Pasch[34]) in Giessen) zur Erklärung dieser Erscheinung die Hypothese aufgestellt hat, das mathematische Denken müsse wohl der menschlichen Natur im Grunde zuwiderlaufen. Ich kann mich dieser pessimistischen Auffassung nicht anschliessen und bin vielmehr geneigt, den Hauptgrund für die wenig günstigen Ergebnisse des mathematischen Schulunterrichts in seiner Unvollkommenheit zu erblicken. Dass heutzutage nicht wenige rein als Broterwerb den mathematischen Lehrerberuf ergreifen, die dazu in keiner Weise veranlagt sind, erwähne ich nur nebenbei. Nachdrücklich möchte ich jedoch hervorheben, dass nach meinem Dafürhalten die Ausbildung der Lehrer gerade in Bezug auf denjenigen Punkt, der mir der wichtigste scheint, nicht bloss viel, sondern geradezu alles zu wünschen übrig lässt. Lehren ist eine schwere Kunst, und das Lehren der mathematischen Anfangsgründe der schwersten eine. Nun wird man ja niemals darauf rechnen dürfen, durch Unterweisung Künstler zu erziehen. Aber das Können, welches die Grundlage jeder Kunst bildet, wird doch wohl am besten durch Unterweisung erworben, ja es kann von jemandem, der nicht ein Genie oder wenigstens ein hervorragendes Talent ist, überhaupt auf keinem anderen Wege gründlich erlernt werden. In dieser Richtung bietet aber das Universitätsstudium dem zukünftigen Lehrer der Mathematik nicht die geringste Handhabe, was um so schwerer ins Gewicht fällt, als in keinem anderen Lehrfache die Divergenz zwischen dem Inhalte der meisten Universitäts-Vorlesungen und den Lehrgegenständen der Schule eine so vollständige ist, wie gerade in der Mathematik. Ich möchte diese Bemerkung nicht etwa in dem Sinne verstanden wissen, dass ich die mit jenen Universitäts-Vorlesungen bezweckte höhere wissenschaftliche Ausbildung der Lehrer für überflüssig halte: ganz im Gegenteil! Aber ebenso notwendig, ja noch notwendiger wäre doch eine systematische Ausbildung in der Kunst, Elementar-Mathematik zu lehren. Dass das in Preussen eingeführte

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

und, wie ich höre, auch für Bayern in Aussicht genommene sogenannte Probejahr der Lehramtskandidaten diesen Zweck nicht erfüllen kann, liegt auf der Hand und wird durch die Praxis bestätigt. Überdies will mir das gewohnheitsmässige und bewusste Experimentieren an Schülern der Unterklassen, quasi in corpore vili, vom ethischen Standpunkte äusserst bedenklich erscheinen.

Was uns in Wahrheit not täte, das sind Universitäts-Vorlesungen und Seminar-Übungen aus dem Gebiete der mathematischen Pädagogik, welche sich auf alle einzelnen in den Mittelschulen zu lehrenden Disziplinen zu erstrecken hätten. Inwieweit die jetzigen Vertreter der Universitäts-Mathematik für einen derartigen Zuwachs an Tätigkeit etwa noch Zeit, Neigung und — worauf es offenbar ganz wesentlich ankommt — auch praktische Schulerfahrung besitzen, entzieht sich meiner Beurteilung. Aber, ohne etwa von mir auf andere schliessen zu wollen, aller Wahrscheinlichkeit nach würde die Durchführung jenes Planes die Errichtung besonderer Lehrstühle für mathematische Pädagogik erfordern. Damit greift dann freilich diese ganze Erörterung in jenes Gebiet hinüber, in welchem bekanntlich die Gemütlichkeit aufhört: sie dürfte daher in unserer, für höhere Kulturzwecke so äusserst geldknappen Zeit zunächst wenig Aussicht haben, aus dem Stadium mathematischer Idealisierung heraustretend, reale Gestalt zu gewinnen.

Etwas leichter realisierbare, wenn auch nicht allzu sanguinische Hoffnungen liessen sich vielleicht an die Bemerkung knüpfen, dass die Mathematik innerhalb des Lehrplanes der bayerischen humanistischen Gymnasien noch keineswegs denjenigen Platz einnimmt, welcher erforderlich wäre, um die in ihr enthaltenen, oben geschilderten Bildungsmöglichkeiten zu voller Entwickelung zu bringen. Zwar wird man es als einen Fortschritt begrüssen müssen, dass man neuerdings an Stelle der sphärischen Trigonometrie die Elemente der analytischen Geometrie eingeführt hat — vorausgesetzt, dass dabei weniger auf eine möglichst grosse Zahl formaler Einzelkenntnisse, als auf die Herausarbeitung des Funktionsbegriffes und

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

seiner graphischen Darstellung, sowie auf die Herleitung der für die Naturwissenschaften unentbehrlichen Haupteigenschaften der Kegelschnitte Gewicht gelegt und durch Behandlung des Tangentenproblems, etwa an der Parabel, ein Ausblick auf die Differentialrechnung geschaffen wird. Dagegen scheint mir das arithmetisch-algebraische Pensum noch einer mässigen Abrundung nach oben zu bedürfen, wenn dasselbe einigermassen den Charakter wissenschaftlicher Geschlossenheit und den durchaus wünschenswerten Kontakt mit den unteren Grenzen der höheren Mathematik erlangen soll.[35]) (Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen,[36]) möchte ich nur, um jedes Missverständnis auszuschliessen, bemerken, dass ich mit dem Gesagten nicht etwa die Einführung der Elemente der Differentialrechnung befürworten will.) Schliesslich müsste noch für etwas reichlichere, das mathematische Interesse der Schüler anregende und an sich nützliche Anwendungen Platz geschaffen werden. Diese Forderungen dürften manchem als äusserst anspruchsvoll und verwerflich erscheinen. Demgegenüber möchte ich hervorheben, dass ja die Mathematik auf den humanistischen Gymnasien offiziell neben Deutsch und Latein als eins der drei Hauptfächer gilt. Wie reimt sich hiermit die Tatsache zusammen, dass in der Oberklasse, also dort, wo der Geist der Schüler am reifsten ist oder doch sein soll, von 27 obligatorischen Wochenstunden 12 auf Latein und Griechisch, dagegen im ganzen 4, sage vier, nicht etwa auf Mathematik, nein auf Mathematik, Physik und mathematische Geographie entfallen (also zirka nur $^1/_7$ aller Unterrichtsstunden)? In der siebenten und achten Klasse gibt es allerdings je 5 Stunden Mathematik und Physik, in der sechsten 4 Stunden Mathematik (keine Physik); dagegen auf den preussischen Gymnasien, allerdings bei 28 Wochenstunden, je 4 Stunden Mathematik und 2 Stunden Physik in jeder der genannten vier oberen Klassen. Ich sollte meinen, es müsste zu ermöglichen sein, ohne Vermehrung der obligatorischen Schulstunden und ohne den Charakter des Gymnasiums als eines „humanistischen“ wesentlich zu beeinträchtigen, die Anzahl der Mathematik-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

und Physikstunden wenigstens in den drei oberen Klassen auf sechs zu erhöhen. Das könnte natürlich nur auf Kosten der klassischen Sprachen geschehen. Aber sollte wirklich die „humanistische" Seite der Bildung eine so merkliche Schädigung erleiden, wenn man sich entschlösse, an der Klassikerlektüre einige Einsparungen zu machen? Von dem unechten Pathos und der geschwollenen, bis zur Widerwärtigkeit selbstgefälligen Rhetorik der Ciceronischen Reden dürften die Schüler schon durch Verabreichung ziemlich bescheidener Dosen einen ausreichenden Begriff bekommen; und es wäre lediglich ein Akt weiser und gerechter Oekonomie, wenn man ein reichlicheres Auskosten des Entzückens, welches ja die Latinisten beim Genusse der mehr wort- als inhaltreichen Ciceronischen Perioden erfahrungsgemäss empfinden sollen, dem Universitätsstudium der zukünftigen Philologen aufsparte. Und sollte wirklich die trostlos-öde Lektüre von Ciceros philosophischen Schriften ein so unentbehrliches Hilfsmittel allgemeiner Geistesbildung darbieten? Ja, ich kann mich sogar des ketzerischen Gedankens nicht erwehren, dass der geistige Gewinn, den jugendliche Köpfe aus der Beschäftigung mit der ermüdend weitläufigen Dialektik Platonischer Dialoge, trotz aller darin verborgenen Weisheit, etwa davontragen mögen, wohl wesentlich überschätzt wird; und dass das mühselige und zeitraubende Zusammenbuchstabieren Sophokleischer Chöre eher dazu beitragen dürfte, den Schülern die Sophokleslektüre zu verleiden, als bei ihnen wahre Liebe für den grossen Tragiker zu erwecken und sein tieferes Verständnis zu fördern. Ich fürchte, dass diese Bemerkungen bei den klassischen Philologen ein mehr oder weniger allgemeines Schütteln des Kopfes hervorrufen werden. Aber gerade weil ich ein aufrichtiger Verehrer des klassischen Altertums und, cum grano salis, auch der humanistischen Bildung bin, so hege ich die Meinung, dass die humanistischen Gymnasien noch zu gewissen Konzessionen in der angedeuteten Richtung sich entschliessen sollten, auf dass sie nicht allmählich zu blossen Fachschulen für Philologen, Theologen und (wer weiss wie lange noch?) Juristen herabsinken.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Habe ich mich bei der Schulmathematik etwas länger aufgehalten, weil die Frage nach ihrer angemessenen Wertschätzung noch immer viel umstritten wird und zugleich auch weitere Kreise lebhafter zu interessieren pflegt, so kann ich bezüglich des Nutzens der Mathematik als Hilfswissenschaft für naturwissenschaftliche Erkenntnis und verschiedenartige praktische Zwecke mich um so kürzer fassen, als dieser heutzutage kaum mehr ernstlich in Zweifel gezogen wird. Auch würde es die Grenzen dieses Vortrages weit überschreiten, wollte ich nur versuchen, in äusserster Kürze auseinander zu setzen, was Physik, Astronomie, Geodäsie, Geophysik und Ingenieurwissenschaften, als die Hauptanwendungsgebiete der Mathematik, ihr verdanken. Wird doch selbst der Mathematiker, der, wie ich, den Anwendungen ferner steht, von Staunen erfüllt, wenn er beispielsweise aus der im Erscheinen begriffenen Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (einschliesslich der Disposition der noch nicht erschienenen Teile) einen Überblick gewinnt über die ungeheure Anzahl und Mannigfaltigkeit den genannten Wissenschaften angehöriger Einzelgebiete, welche die Dienste der Mathematik in Anspruch nehmen. Damit ist indessen ihre Anwendungsfähigkeit noch bei weitem nicht erschöpft: zeigt sich doch bei allen Disziplinen, in denen Quantitäten eine Rolle spielen, das Bestreben, sich der mathematischen Methoden zu bemächtigen — freilich mit verschiedenem Erfolge. Wir können heute nur darüber lächeln, wenn wir Kunde empfangen von einer „Nova medicinae methodus ex mathematica ratione morbos curandi", die ein gewisser Virdungus 1532 veröffentlicht hat.[37]) Auch „Herrn George Sarganecks Versuch einer Anwendung der Mathematik in dem Artikul von der Grösse der Sündenschulden" (1749)[38]) dürfte wohl nicht zu den besonders glücklichen Anwendungen der Mathematik gehören. Wenn aber selbst ein so enthusiastischer Verehrer der Mathematik, wie Auguste Comte,[39]) es für unwahrscheinlich gehalten hat, dass Chemie, Physiologie und Sozialwissenschaft zu Gegenständen mathematischer Behandlung werden könnten,[40]) so hat ihm die Entwickelung jener Wissenschaften Un-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

recht gegeben: die Chemie ist mit wachsendem Erfolge bestrebt, ihre Fundamente auf mathematisch-physikalischen Betrachtungen aufzubauen;[41]) in die Physiologie haben mathematische Methoden erfolgreichen Eingang gefunden;[42]) und den Versuchen, auch Teile der Nationalökonomie auf mathematische Grundlage zu stellen,[43]) wird man zum mindesten ein theoretisches Interesse nicht absprechen können, mag auch ihre praktische Bedeutung zweifelhaft erscheinen. Unbestritten ist hingegen der Nutzen der Mathematik auf den Nachbargebieten der Statistik[44]) und des Versicherungswesens.[45])

Bei Gelegenheit der Erwähnung Comtes scheint es vielleicht nicht uninteressant, an eine andere seiner Voraussagen zu erinnern, welche in noch viel drastischerer Weise durch die Macht der Tatsachen widerlegt worden ist und ein überaus lehrreiches Beispiel dafür gibt, wie vorsichtig man in den exakten Wissenschaften mit negativen Prophezeiungen sein muss.

„Wir begreifen die Möglichkeit, Gestalt, Entfernung, Grösse und Bewegungen der Gestirne zu bestimmen; aber niemals werden wir imstande sein, durch irgend ein Mittel ihre chemische Zusammensetzung zu studieren" —

so schreibt Comte[46]) im Jahre 1835: nur 24 Jahre später entdecken Kirchhoff und Bunsen die Spektralanalyse,[47]) durch welche das für unmöglich gehaltene zur Wirklichkeit wird. Und, was ich in dem hier vorliegenden Zusammenhange noch ganz besonders hervorheben möchte: die endgültige Berechtigung dazu, die Resultate von Spektralbeobachtungen auf die chemische Analyse der Sonnenatmosphäre und der Gestirne anzuwenden, beruht gerade auf den mathematisch-physikalischen Untersuchungen Kirchhoffs.[48])

Herbarts Versuch, auch die Psychologie mathematisch zu behandeln,[49]) darf zwar als misslungen gelten, insofern er die fehlenden experimentellen Grundlagen durch Hypothesen zu ersetzen suchte: immerhin hat er die Möglichkeit dargetan, Mathematik auf Psychologie anzuwenden.[50]) Der von Fechner betretene Weg des psychophysischen Experiments und die Weiterbildung der experimentellen

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Methoden, namentlich durch Wilhelm Wundt, hat dann in der Tat die nötigen Vorbedingungen geschaffen, um bestimmte Kategorien psychologischer Probleme einer exakten mathematischen Behandlung zugänglich zu machen.[51])

Greift hiermit die Mathematik in das Gebiet der Philosophie hinüber, so wird man diesen Erfolg nicht allzu hoch anschlagen dürfen: es liegt in der Natur der Sache, dass die direkte Anwendungsfähigkeit der Mathematik hier immer eine eng begrenzte bleiben wird, auch wenn man zu den „philosophischen" Anwendungen der Mathematik noch den von George Boole begründeten Logik-Kalkül[52]) rechnet.

Viel wesentlicher ist, dass die Bestrebungen der Mathematiker, namentlich der modernen Mathematiker, die Grundlagen ihrer Wissenschaft zu vertiefen, die Begriffe der Zahl, des Raumes, der Zeit und des Unendlichen zu erforschen und zu fixieren, zugleich einen wertvollen Zuwachs an philosophischem Wissen repräsentieren. Auch wird man nicht vergessen dürfen, dass die moderne Weltanschauung durchaus auf dem Boden der exakten mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung erwachsen ist, und dass die Philosophie diesem Einflusse nie mehr sich wird entziehen können. Was schon Leonardo da Vinci, eines jener merkwürdigen Universalgenies der Renaissance, vor 400 Jahren gesagt hat,[53]) gilt heute mehr, denn je:

„Wer die höchste Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung und wird niemals Schweigen auferlegen den Widersprüchen der sophistischen Wissenschaften, durch die man nur ein ewiges Geschrei erlernt."

Der soeben gegebene kurze Überblick dürfte immerhin ausreichen, um deutlich zu machen, wie zahlreich und verschiedenartig die Gebiete sind, die alle an den Erfolgen der Mathematik ihren Anteil heischen. Und nun —

„Ganz spät, nachdem die Teilung längst geschehen,
Naht der Poet", —

der „reine" Mathematiker, der die Mathematik nicht nur um ihrer selbst willen treibt, sondern noch obendrein behauptet, sie sei auch

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

in erster Linie um ihrer selbst willen da. Sie verdanke ihre wahre Existenz einem rein idealistischen Bedürfnisse, welches dem Bedürfnisse nach Naturerkenntnis zwar verwandt und seiner Befriedigung in hohem Grade förderlich sei, aber weder in ihm allein wurzle, noch jemals darin aufgehen wolle: gerade so wenig, wie wir wiederum das Endziel aller Erkenntnis der Naturkräfte in deren Beherrschung zum Zwecke des praktischen Nutzens erblicken können. Es ist eine unbestreitbare Tatsache, dass ausgedehnte Gebiete der Mathematik, vor allem die sogenannte Zahlentheorie, der bei weitem grössere Teil der höheren Algebra, der Funktionentheorie, ja sogar der Geometrie, bisher keine aussermathematische Anwendung gefunden haben oder, wie eine stark euphemistische Ausdrucksweise lautet, „noch der Anwendung harren". In Wahrheit „harren" sie überhaupt nicht oder doch zumeist vergebens! Und es wäre gerade so irrig, ja ich möchte sagen, unaufrichtig, die Existenzberechtigung jener rein mathematischen Untersuchungen aus der entfernten Möglichkeit anderweitiger Anwendung herleiten zu wollen, wie wenn man etwa die Forderung der nötigen Geldmittel für eine Polarexpedition damit motivieren wollte, es erscheine gar nicht ausgeschlossen, dass mit der Zeit noch sehr gewinnbringende Handelsbeziehungen daraus erwachsen könnten.

Nun darf man immerhin sagen, der endgültige Nutzen einer mathematischen Untersuchung lasse sich von vornherein keineswegs voraussehen; der dabei gewonnene rein mathematische Kraftvorrat komme vielleicht anderen, nützlicheren Untersuchungen zustatten; auch ergebe sich zuweilen zwischen scheinbar weit auseinander liegenden Untersuchungsgebieten plötzlich ein so überraschender Zusammenhang, dass man schon aus diesen Gründen jene rein theoretischen Forschungen nicht von der Hand weisen könne. Und wenn etwa die staatlich angestellten Mathematiker des 20. Jahrhunderts durch einen Erlass angewiesen würden, nur die Dinge zu lehren und mit solchen Problemen sich zu beschäftigen, welche sichere Aussicht bieten, den Naturwissenschaften und womöglich der Technik dienlich zu sein, so

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

würde man der mathematischen Forschung gleichzeitig mit ihrer Freiheit auch einen grossen Teil ihrer nutzbringenden Kraft entziehen.[54]) Das ist sicherlich richtig, trifft aber doch nicht den eigentlichen Kern der Sache. Denn bei dieser Auffassung würde ein beträchtlicher Teil der Mathematik immer nur als eine Art notwendigen Übels erscheinen. Wir sehen vielmehr in dem tiefgreifenden Einflusse, welchen die Errungenschaften der Mathematik auf die Fortschritte der Naturwissenschaften und die Vervollkommnung der Lebensbedingungen ausüben, lediglich das charakteristische Symptom einer dem menschlichen Geiste zukommenden höheren Verpflichtung, die Gesetze und wechselseitigen Beziehungen der Zahl- und Raumgebilde in ihrem weitesten Umfange zu ergründen. Die mathematischen Erkenntnisse erscheinen uns daher, nicht nur, soweit sie als Mittel für andere Zwecke dienen, sondern an sich als wertvoll, und wir erblicken zugleich in ihrem systematischen Auf- und Ausbau die vollendetste und reinste Form logischer Geistestätigkeit, die Verkörperung höchster Verstandesästhetik.

In dem wahren Mathematiker steckt allemal ein gutes Stück vom Künstler: vom Architekten, ja vom Poeten. Ausserhalb der realen Welt, doch in erkennbarem Zusammenhange mit ihr, haben die Mathematiker in schöpferischer Gedankenarbeit sich eine ideale erbaut, die sie zur vollkommensten aller Welten auszugestalten suchen und nach allen Richtungen durchforschen. Von dem Reichtum dieser Welt hat natürlich nur der eine Ahnung, der sie kennt: nur überhebliche Unwissenheit kann behaupten, dass der Mathematiker in einem engen Kreise sich bewege. Die Wahrheit, die er erstrebt, ist freilich, bei Lichte betrachtet, nicht mehr und nicht weniger, als Widerspruchslosigkeit. Aber zeigt sich nicht vielleicht gerade in der Beschränkung auch hier der Meister? Letzte Fragen zu lösen, überlässt der Mathematiker neidlos anderen.

Vieles, was die überreiche mathematische Produktion hervorgebracht hat und hervorbringt, ist vergänglich. Aber aus der Menge des Geschaffenen scheidet sich ein kristallklarer Kern abstrakten

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Wissens ab, welcher allen Zeiten als ein glänzendes Denkmal menschlicher Geisteskraft erscheinen wird. Sollten diejenigen, die da, jeder nach seinen Kräften, bemüht sind, an der Aufrichtung dieses Denkmals mitzuarbeiten, wirklich, wie die landläufige Meinung es will, nur einseitige und trockene Verstandesmenschen sein? Ich denke, hier hat doch wohl der schon zu Anfang zitierte Novalis das Richtigere getroffen, wenn er sagt:[55])

„Der echte Mathematiker ist Enthusiast *per se*. Ohne Enthusiasmus keine Mathematik."

Literatur-Nachweise und Anmerkungen.

1) Via regia ad mathematicas per arithmeticam, algebram speciosam et planimetriam. A Petro Mengolo. Bononiae 1655.

2) Hermann Hankel, Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Antrittsrede. Tübingen 1869 (2. Auflage, 1884).

3) Novalis Schriften, herausg. von E. Heilborn (Berlin 1901). Teil II, erste Hälfte, p. 223.

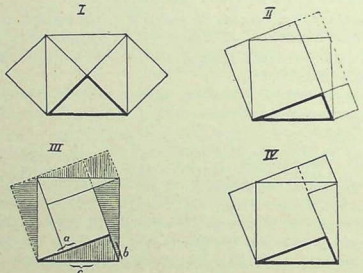
4) Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde, § 39 = Werke, herausg. von J. Frauenstädt, I, p. 135—139. — Die Welt als Wille und Vorstellung, I, § 14 = Werke, II, p. 82—87.

5) Welt als Wille etc., II, Kap. 13 = Werke, III, p. 142. — Die Mathematiker haben in Wahrheit sehr schwerwiegende Gründe gegen die von Schopenhauer als Evangelium angesehene Kantische Transzendentalität der Raumanschauung. Vgl. Gauss, Werke (1876), II, p. 177. — Riemann, Werke (1876), p. 254. — Helmholtz, Wissensch. Abhandlungen, II (1883), p. 610; 618. — Fr. Engel und P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig 1895. — D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. 2. Auflage. Leipzig 1903.

6) Es ist der Spezialfall des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks, der die Richtigkeit des Satzes für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck kaum vermuten lässt, geschweige denn, wie Schopenhauer behauptet, „ohne alles Gerede, von der Wahrheit des Pythagoreischen Lehrsatzes zwanzigmal mehr

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Überzeugung gibt, als der Euklidische Mausefallenbeweis". Der fragliche Beweis selbst findet sich im wesentlichen schon bei Plato: s. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. I (1880), p. 186 (vgl. auch ebendaselbst, p. 623; desgl. Bd. II [1892], p. 277). Versucht man, jenen Beweis (s. Fig. I) auf den Fall eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks zu übertragen (wie es zuerst wohl ein Anonymus getan hat: Lond. Philos. Transactions, Vol. 13 [1683], p. 673), so nimmt derselbe einen wesentlich weniger befriedigenden Charakter an: es gelingt auf diese Weise nicht, zu beweisen, dass die betreffenden Figuren „zerlegungsgleich", sondern nur, dass sie „ergänzungsgleich" sind (s. Fig. II). Im übrigen kannten schon im frühen Mittelalter die Inder und Araber (vgl. Cantor a. a. O. I, p. 557; 639) einen direkten „Zerlegungs"-Beweis, der auf der Doppelgleichung: $c^2 = (a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$ beruht. Ordnet man die zur geometrischen Veranschaulichung dieser Doppelgleichung erforderliche Zerschneidung und Umlegung in der Weise an, wie es durch Fig. III angedeutet wird, so gelangt man, nach Weglassung der sich als überflüssig erweisenden Schnitte (s. Fig IV), zu dem überaus einfachen und eleganten Zerschneidungsbeweise des An-Nairizi (= Anaritius, um 900 n. Chr.: vgl. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, II [Leipzig 1903], p. 73).



7) Trotz allen Herumredens (Vierf. Wurzel des Satzes etc. § 36—39) gelingt es Schopenhauer überhaupt gar nicht, eine scharfe und brauchbare Definition des nach seiner Ansicht existierenden, spezifisch mathematischen Seinsgrundes aufzustellen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

8) Mit Hilfe der schliesslich auf den Axiomen beruhenden Kongruenz gewisser Dreiecke wird bewiesen, dass die betreffenden Figuren der Definition der Gleichheit („Zerlegungsgleichheit") genügen. — Vgl. auch: Wilhelm Wundt, Logik, 2. Auflage (Stuttgart 1893), I, p. 569—571.

9) Parerga II, § 35 = Werke, VI, p. 52.

10) Vgl. „On the mechanical performance of logical inference": Lond. Philos. Transactions, Vol. 160 (1870), p. 497—518.

11) Es ist mir natürlich nicht unbekannt, dass der Rechenunterricht an den Mittelschulen ein etwas höheres Ziel verfolgt, als auf den Volksschulen: er soll zugleich als Vorbereitung für den Unterricht in der wirklichen („allgemeinen") Arithmetik dienen. Aber abgesehen davon, dass diese Tendenz zumal in den ersten zwei, ja sogar drei Klassen auf die Gestaltung des Rechenunterrichts einen kaum merklichen Einfluss übt, so ist doch schliesslich eine „arithmetische Propädeutik" noch keine „Arithmetik". Überhaupt sollte man sich entschliessen, die von den wissenschaftlichen Mathematikern jetzt allgemein akzeptierte Terminologie auch auf den Mittelschulen einzuführen und danach die „Buchstabenrechnung", d. h. die Lehre vom Rechnen mit allgemeinen Zahlen, nicht mehr „Algebra", sondern „Arithmetik" zu nennen, dagegen die Bezeichnung „Algebra" für die Lehre von den Gleichungen zu reservieren.

12) Der fragliche Ausspruch Lichtenbergs findet sich innerhalb einer Reihe von aphoristischen Bemerkungen, deren jede von der vorangehenden durch einen breiten Zwischenraum und drei Sternchen typographisch getrennt ist. Damit erscheint also jede Möglichkeit ausgeschlossen, dass etwa Schopenhauer jenen einen Satz übersehen haben könnte: es handelt sich daher ganz unzweifelhaft, wie im Texte bemerkt, um eine vollkommen bewusste Fälschung.

13) Welt als Wille etc., I, § 12 = Werke, II, p. 64, 65.

14) Dieser tiefsinnige Unsinn klingt so wunderschön, dass selbst Hegel nichts Vollkommeneres dieser Art hätte zustande bringen können. Bekanntlich liegt gerade die prinzipielle Hauptschwierigkeit der Analysis in der Schöpfung des eindimensionalen Zahlenkontinuums, nicht aber in dessen Verwertung zum Studium der Beziehungen im dreidimensionalen Raume, da ja hierzu keineswegs, wie Schopenhauer offenbar annimmt, eine stetige Abbildung des dreidimensionalen Kontinuums auf das eindimensionale, sondern lediglich die Hinzunahme des Koordinatenbegriffes erforderlich ist.

15) Welt als Wille etc., I, § 15 = Werke, II, p. 82.

16) Über die vierfache Wurzel etc., § 21 = Werke, I, p. 77. Eine Variante der im Texte zitierten Stelle: Parerga II, § 35, Fussnote = Werke, VI, p. 52, 53.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

17) Nachlass, herausg. von Frauenstädt, p. 329.

18) Hierzu wäre noch generell zu bemerken, dass manches, das unsere Sinne als ein „Was" empfinden, in Wahrheit lediglich auf einem „Wieviel" beruht; mit anderen Worten, dass Unterschiede, die uns subjektiv als qualitative erscheinen, objektiv nur quantitative sind, z. B. Tonhöhe = Schwingungszahl der Luftwellen; Klangfarbe = Anzahl und Intensität der dem Grundtone beigemischten Obertöne; Farbe = Schwingungszahl der Lichtwellen bezw. Mischungsverhältnis von Lichtstrahlen verschiedener Schwingungszahl.

19) William Hamilton (1788—1856), seit 1836 Professor der Logik und Metaphysik an der Universität Edinburgh (nicht zu verwechseln mit dem berühmten Mathematiker gleichen Namens, dem Erfinder des nach ihm benannten mechanischen Prinzips und des Quaternionen-Kalküls). Die fragliche Abhandlung, in Form einer Rezension der Whewells'chen Schrift: *„Thoughts on the study of Mathematics as a part of a liberal education"* (1835), erschien zunächst anonym in der Edinburgh Review, Vol. 62 (1836), p. 409–455, später in einer Sammlung verschiedener Abhandlungen des genannten Verfassers. Eine (gleichfalls anonyme) deutsche Übersetzung erschien unter dem Titel: *„Über den Wert und Unwert der Mathematik"* (Cassel 1836).

20) Welt als Wille etc., II, § 13 = Werke, III, p. 144.

21) Wörtliche Übersetzung des von Schopenhauer in der Ursprache zitierten französischen Originals.

22) Voller Korrektheit zuliebe teile ich die ganze fragliche Stelle aus Baillets Vie de Descartes (nach der von Schopenhauer benützten, abgekürzten Ausgabe von 1693) hier mit. Die beiden gesperrt gedruckten Sätze sind die einzigen, welche Schopenhauer zitiert. A. a. O. p. 54 heisst es:

„Il y avait déjà longtemps que sa propre expérience l'avait convaincu du peu d'utilité des Mathématiques, surtout lorsqu'on ne les cultive que pour elles-mêmes, sans les appliquer à d'autres choses. Depuis l'an 1620, il avait entièrement négligé les règles de l'Arithmétique. Les attaches qu'il eut pour la Géométrie subsistèrent un peu plus longtemps dans son coeur, parceque les mathématiciens de Hollande et d'Allemagne qu'il avait vus pendant ses voyages avaient contribué à les retenir par les questions et les problèmes qu'ils lui avaient proposés à resoudre. Mais on peut dire qu'elles étaient tombées dès l'an 1623, s'il est vrai qu'en 1638 *il y avait plus de quinze ans qu'il faisait profession de négliger la Géométrie, et de ne plus s'arrêter jamais à la solution d'aucun problème qu'à la prière de quelque ami.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Il ne voyait rien de moins solide que de s'occuper de nombres tout simples et de figures imaginaires, sans porter ses vues au delà.*) Il y trouvait même quelque chose de plus qu'inutile: et il croyait qu'il était dangereux de s'appliquer trop sérieusement à ces démonstrations superficielles, que l'industrie et l'expérience fournissent moins souvent que le hazard; et qui sont plutôt du ressort des yeux et de l'imagination que de celui de l'entendement. Sa maxime était que cette application nous désaccoutume insensiblement de l'usage de notre raison, et nous expose à perdre la route que la lumière nous trace.**)

Mais on peut dire qu'il n'abandonna l'étude particulière de l'Arithmétique et de la Géométrie, que pour se donner tout entier à la recherche de cette Science générale, mais vraie et infaillible, que les Grecs ont nommée judicieusement *Mathesis*, et dont toutes les Mathématiques ne sont que des parties. Il prétendait que ces connaissances particulières pour mériter le nom de Mathématiques devaient avoir des rapports, des proportions et des mesures pour objet. Delà il jugeait qu'il y avait une Science générale destinée à expliquer toutes les questions que l'on pourrait faire touchant les rapports, les proportions et les mesures, en les considérant comme détachées de toute matière: et que cette Science générale pouvait à très-juste titre porter le nom de *Mathesis* ou *Mathématique universelle*, puisqu'elle renferme tout ce qui peut faire mériter le nom de Science et de Mathématique particulière aux autres connaissances.

Voilà le dénouement de la difficulté qu'il y aurait à croire que M. Descartes eût absolument renoncé aux Mathématiques, en un temps où il ne lui était plus libre de les ignorer."

23) Descartes, Lettres (Paris 1667), T. III, No. 73 (p. 291).

24) Dieser Vorwurf erscheint übrigens nicht ganz berechtigt gegenüber der von Descartes a. a. O. auch erwähnten Fermat'schen Abhandlung: „De

*) In der grossen Ausgabe der Vie de Descartes von 1691, I, p. 112 lautet dieser Nachsatz noch ausführlicher und prägnanter: „Comme si l'on devait s'en tenir à ces *bagatelles* sans porter sa vue au delà."

**) Hier folgt in der grossen Ausgabe noch eine längere Ausführung, die mit den charakteristischen Sätzen beginnt: „Voilà une partie des motifs qui le portèrent à renoncer aux Mathématiques vulgaires. Mais il parait que le respect qu'il témoignait pour les Anciens l'empêcha de pousser le mépris qu'il faisait de ces Sciences au delà des temps et des lieux où il trouvait de l'abus dans la manière de les cultiver ou de les enseigner." Weiterhin heisst es: „Descartes ne fut pas le premier qui s'aperçut du mauvais état où était cette Science des Anciens, et des abus qu'y avaient commis ceux qui l'avaient reçue d'eux d'une manière toute unie et toute simple."

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Maximis et Minimis" (abgedruckt in P. de Fermat, Varia opera mathematica, Tolosae 1679, p. 63—73; jedoch schon aus dem Jahre 1629 stammend, wie ein Brief an Roberval vom 22. September 1636 beweist, der gleichfalls in den Op. math. p. 136 sich abgedruckt findet). — Fermats Grundlagen der analytischen Geometrie sind enthalten in der Abhandlung: „Ad locos planos et solidos isagoge" (Op. math. p. 1—11); die Zeit der Abfassung ist nicht genau bekannt.

25) Ähnlich äussert sich zwar auch Schopenhauer über die Arithmetik (Vierf. Wurzel des Satzes etc., § 46 = Werke, I, p. 151), wie er auch in der „Mathematik in jeder Hinsicht Wissenschaft" erblickt (Welt als Wille etc., I, § 14 = Werke, II, p. 75). Nur verhindert ihn leider seine völlige Unkenntnis jener Wissenschaft, sie auch richtig zu schätzen.

26) Grosse Ausgabe der Vie de Descartes (1691), II, p. 481.

27) A. a. O. p. 424 = Übers. p. 28.

28) Sehr ausführliche und interessante Biographien von Monge, Carnot und Fourier aus der Feder Aragos findet man in dessen Oeuvres complètes (Paris 1854—1862), T. I, II (auch deutsch von W. G. Hankel, Leipzig 1854—1862, Bd. I, II).

29) Vgl. die Vorrede zum ersten Bande des „Traité des propriétés projectives des figures" (1822, auch abgedruckt in der zweiten Auflage von 1865); ferner die Vorreden zu den zwei Bänden: „Applications d'analyse et de géométrie etc." (Paris 1862—1864).

30) Charles de Freycinet, De l'analyse infinitésimale. Étude sur la métaphysique du haut calcul. Paris 1860 (2e éd. 1881). — Essais sur la Philosophie des Sciences: Analyse, Mécanique. Paris 1896 (2e éd. 1900).

31) A. a. O. p. 427 = Übers. p. 33.

32) „Dass die Anlage zur Mathematik seltener sei als zu anderen Studien, ist blosser Schein, der von verspäteten und vernachlässigten Anfängern herrührt" — sagt schon Herbart: Werke, herausg. von Hartenstein, Bd. 10, p. 103.

33) Das Realgymnasium und die humanistische Bildung (Berlin 1889), p. 24.

34) Über den Bildungswert der Mathematik. Akad. Festrede (Giessen 1894), p. 7.

35) Gerade weil das humanistische Gymnasium keine Fachschule sein soll, so müsste es doch auch diejenigen, die später Mathematik oder Physik studieren wollen, so weit fördern, dass sie im ersten Studiensemester mit genügendem

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Verständnis einer Universitätsvorlesung über Differentialrechnung folgen können. Das ist, nach den von mir gemachten Erfahrungen, bei dem jetzigen Zustande im allgemeinen nicht der Fall.

36) Als wünschenswerte Ergänzungen würde ich etwa bezeichnen: Elemente der Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Binomischer Satz, auch für negative und gebrochene Exponenten, mit Übergang zu den Elementen der Reihenlehre. Exponentialfunktion und Logarithmus als Grenzwerte und unendliche Reihen. — Einige Hauptsätze aus der höheren Algebra: Begriff der Derivierten einer ganzen Funktion. Maxima und Minima ganzer Funktionen. Rolle'scher und Sturm'scher Satz. Unterschied zwischen algebraischer und numerischer Auflösung algebraischer Gleichungen. Einiges über numerische Auflösung.

37) Nova medicinae methodus nunc primum et condita et aedita ex mathematica ratione morbos curandi. Joanne Hasfurto Virdungo, medico et astrologo doctissimo autore. Ettelingae 1532. — Natürlich läuft diese ganze mathematische Kuriermethode auf eine Anwendung der Astrologie hinaus.

38) Als Anhang erschienen zu: Johann Jakob Schmidt, Biblischer Mathematikus. 2. Auflage, Züllichau 1749.

39) Cours de philosophie positive (Paris 1830—1842), I, p. 114: „C'est la science mathématique qui doit constituer le véritable point de départ de toute éducation scientifique rationelle, soit générale, soit spéciale."

40) A. a. O. III, p. 414—416.

41) Vgl. das ausführliche Lehrbuch über: Theoretische Chemie von W. Nernst (4. Auflage, Stuttgart 1903).

42) Hierhin gehören namentlich die Arbeiten über: Physiologische Mechanik (Mechanik der Gliederbewegung, des Blutumlaufes, der Atmung, etc.), Physiologische Optik und Akustik.

43) Eine kritische Übersicht der einschlägigen Literatur gibt V. Pareto in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, p. 1094—1120.

44) Vgl. den Artikel von L. von Bortkiewicz in der Enzykl. d. math. Wissensch., Bd. I, p. 821—851.

45) Ebendaselbst p. 852—917: G. Bohlmann, Lebensversicherungs-Mathematik. — Eine populäre Darstellung des Gebietes gibt: M. Cantor, Politische Arithmetik. Leipzig 1903.

46) A. a. O. T. II, p. 8.

47) Grundlegende Publikation: G. Kirchhoff, Über die Frauenhofer'schen Linien. Berl. Monatsber. 1859, p. 662 = Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen (Leipzig 1882), p. 564.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

48) Kirchhoff, Ges. Abh., p. 566—598. Vgl. auch: p. 633/634, 641; ferner: Rosenberger, Geschichte der Physik, III (Braunschweig 1887—1890), p. 691 ff.

49) Herbart, Psychologie als Wissenschaft neu gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik. Ges. Werke, herausg. von Hartenstein, Bd. V, VI.

50) M. W. Drobisch, Erste Grundlinien der mathematischen Psychologie (Leipzig 1850), Vorrede. Vgl. auch Wilhelm Wundt, Grundzüge der physiologischen Psychologie, I (5. Auflage, Leipzig 1902), p. 7.

51) Wundt a. a. O., Kap. IX, p. 466 ff.

52) Ausführliches Literaturverzeichnis in Ernst Schröders Algebra der Logik, I (Leipzig 1890), p. 700—715.

53) M. Herzfeld, Leonardo da Vinci (Leipzig 1904), p. 8, XXIII.

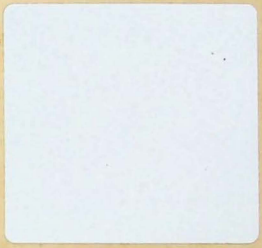
54) Allgemeine Betrachtungen über die Wechselwirkung zwischen der reinen Mathematik und ihren Anwendungen geben: William Spottiswoode, Die Mathematik in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften. Deutsch von H. Gretschel. Leipzig 1879. — H. Poincaré, Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique. Acta mathematica, 21 (1897). — Walther Dyck, Über die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und angewandten Mathematik. Akad. Festrede. München 1897.

55) A. a. O. (s. Note 3).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA



Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.