DE STAALBOUW EN ZIJN BEREKENINGEN

DEEL I

GRAFISCHE —

— METHODEN.

Lemb. Kebudajaan. Ind.
Kon. Bat. Gen.
V-126.

KOLFF
SOERABAIA
36/000
4.90

I-126

DE STAALBOUW EN ZIJN BEREKENINGEN

DOOR J. L. ZON

D E E L I

GRAFISCHE METHODEN

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.

DRUK VAN G. KOLFF & Co. – SOERABAIA

B.P.T. BENDUNGSTECHNIK VAN R. EN W.

BIB Id: 0010-32580360
Item Id: 0209082064

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.
Tanggal : 28-6-2010
Nomor induk : 226/PW-Musikan/10
BIB - ID :
ITEM - ID :
Asal : Museum Pusat

VOORWOORD

Bij de samenstelling van dit werk ben ik van doel uitgegaan een praktische handleiding te vormen voor het berekenen van staalbouwconstructies.
Om een overzichtelijk geheel te verkrijgen is een en ander ondergebracht in 4 afzonderlijke deelen, waarvan:

Deel 1. Omvat de grafische methoden.

Deel 2. De methoden der vastheids-leer.

Deel 3. Berekeningen voor bijzondere constructies. (Bruggen, kranen, en radiomasten).

Deel 4. Idem. (ruimte-vakwerken, tanks, enz.).

Daar waar het mij wenschelijk voorkwam, werd eenigszins dieper op de theorie ingegaan, zoodat deze werkjes tevens geschikt zijn voor zelfstudie.
Voor literatuur, welke meer uitgebreid de theorie behandelt, beveel ik de in de bronvermelding genoemde werken aan.

J. L. ZON.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

Statisch Bepaalde Constructies.

Bladzijde.		Formule
	§ 1) *Evenwichts-voorwaarden.*	
1	a) algemeen	
1	b) evenwichts-vergelijkingen	1
2	c) statische bepaaldheid	2
	§ 2) *Vakwerken.*	
6	a) algemeen	3 - 6
9	b) berekenen van vakwerken	
9	1) Cremona	
10	2) Rittermethode	
11	3) Culmann methode	
12	4) methode van staafverwisseling	
14	5) meervoudige vakwerken	7
15	6) Zimmermann methode	
17	7) analytische methoden	8
18	8) gebogen spant-staven	9 - 10
20	§ 3) *Lichtkappen.*	
	§ 4) *Liggers.*	
21	a) algemeen	
23	b) berekenen van liggers	
23	1) K-verband	
23	2) gekruiste diagonalen	
24	3) tralie liggers	
24	4) tusschen-vormen	
24	5) wind-liggers	
24	6) liggers met ontbrekende diagonalen	11
25	7) driekante liggers	
26	8) vierkante liggers	
26	§ 5) *Doorbuiging van vakwerken.*	12 - 16
	§ 6) *Spanningen in knoopplaten.*	
28	a) geboorde platen	
31	b) vorm der platen	
32	c) gelaschte platen	

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Bladzijde.		Formule
	§ 7) *Driescharnier-kappen.*	
33	a) algemeen	
33	b) reacties	
34	c) impostlijn en druklijn	
35	d) volwandige constructies	17 - 24
39	e) vakwerken	
	HOOFDSTUK II. **Statisch Onbepaalde Constructies.**	
	§ 1) *Arbeid.*	
44	a) verschuivings-arbeid	
44	b) virtueele arbeid	
45	c) vormveranderings-arbeid	25 - 28
46	§ 2) *Enkelvoudig statisch onbepaalde constructies.*	28a. - 35
58	§ 3) *Meervoudig statisch onbepaalde constructies.*	36 - 38
	§ 4) *Toepassing der buigingslijn bij het bepalen der reacties.*	
60	a) algemeen	
61	b) stelling van Maxwell.	39 - 41a.
	HOOFDSTUK III. **Het bepalen der doorbuiging van Paralleldragers.**	
66	§ 1) *Momenten-lijn.*	
68	§ 2) *Grafische bepaling der doorbuiging uit de momentenlijn.*	42
73	§ 3) *Het berekenen der doorbuiging uit het Elastisch Gewicht*	43 - 56
	HOOFDSTUK IV. **Het bepalen der doorbuiging van Vakwerken.**	
	§ 1) *Verschuivingsplan van Williot.*	
81	a) statisch bepaalde constructies	
84	b) statisch onbepaalde constructies	57 - 58
89	c) verdraaiïng der constructie.	

Bladzijde.			Formule.
90	§ 2)	*Methode der hoekveranderingen.*	59 - 61
98	§ 3)	*Het berekenen der doorbuiging uit het Elastisch Gewicht.*	62 - 63
		HOOFDSTUK V.	
104		**Dragers met trekband.**	64 - 65a.
		HOOFDSTUK VI.	
		De Volwandige Tweescharnier-Boog.	
109	§ 1)	*Voetreacties.*	66 - 77
116	§ 2)	*Impostlijn en Invloedslijn.*	78 - 81
		HOOFDSTUK VII.	
		De Tweescharnier-Vakwerkconstructie.	
119	§ 1)	*Voetreactie.*	82
120	§ 2)	*Elastisch gewicht.*	83 - 93
		HOOFDSTUK VIII.	
		Invloeds-Lijnen.	
	§ 1)	*Invloedslijnen voor volwandige constructies.*	
127		a) voor reacties en dwarskrachten	94 - 95
133		b) voor momenten	96 - 103
140		c) voor balken met overstekende einden	104
143		d) voor driescharnierbogen	105 - 105a.
143		1) algemeen	
147		2) methode van prof. Kögler	
148		3) vereenvoudigde methode	
148		4) kernmomenten	106 - 107
150		e) invloedslijnen voor balken op meerdere steunpunten	
150		1) balken op 3 steunpunten	108 - 110
152		2) algemeene gedaante	
153		3) balken met verschillende traagheidsmoment	
153		4) steunpuntsverlaging	111 - 113
154		5) balken op 4 steunpunten	114 - 116
158		6) algemeene gedaante	117 - 118

Bladzijde.		Formule
159	f) tabellen voor balken op meerdere steunpunten	
	§ 2) *Invloedslijnen voor vakwerken.*	
162	a) algemeen	
164	b) invloedslijnen voor randstaven	
165	c) idem „ diagonalen	
169	d) idem „ verticalen	
170	e) idem „ vakwerken met tusschenstaven	
171	f) idem volgens bijzondere methoden	
172	g) idem voor een bewegende belasting	
172	1) 1e methode	
173	2) 2e methode	
	§ 3) *Invloedslijnen voor vakwerken met overstekende einden.*	
177	1) randstaven	
178	2) vulstaven	119
	§ 4) *Invloedslijnen voor driescharniervakwerken.*	
179	a) voor verticale lasten	
184	b) voor horizontale lasten	
	§ 5) *Invloedslijnen voor vakwerken op meerdere steunpunten.*	
185	a) liggers met evenwijdige randen	
187	b) vakwerken met niet evenwijdige randen	120 - 121
188	§ 6) *Invloedslijnen voor tweescharnierkappen.*	

ERRATA

Bladzijde	Er staat	Dit moet zijn
3. 16e regel v. b.	elkaar op heffen	stuks niet uitwendig optreden
14. 16e „ v. o.	reactie V	reactie V_H
17. 1e „ v. b.	wordt	werd hierbij
21. 17e „ „	draadgaas	draadglas
27. 6e „ „	$\delta + \xi . E . t$	$\sigma + \xi . E . t$
30. 8e „ v. o.	Men bepaald	Bepaal
31. 10e „ „	Wmax	Wmin
33. 16e „ v. b.	$10 - 20\%$.	$3 - 8\%$.
39. 1e „ „	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{2,5}$
41. —	invloed idem	invloed op linkerhelft
43. —	straaf	staaf
48. 1e regel v. b.	U . NP. 88	U . NP . 8.
67. —	figuur 110 is niet volgens schaal.	
97. 3e regel v. o.	blz. 83	bladz. 88
116. formule 79	$\frac{3}{16} \cdot \frac{L}{F} \cdot v$	$\frac{3}{16} \cdot \frac{L}{f} \cdot v$
125. 7e regel v. b.	blz. 83	bladz. 88
154. formule 111	$(P + g)$.	$(p + g)$.

163. 10e regel v. o. te lezen: door ontstane staafkracht u.

H O O F D S T U K I.

Statisch bepaalde constructies

§ 1 Evenwichts-voorwaarden.

a) Algemeen.

De uitwendige krachten, welke een willekeurig constructiedeel kunnen belasten, zijn:

1e. Druk of trekkrachten in kg. of tonnen.
2e. Schuifkrachten in kg. of tonnen.
3e. Buigmomenten. in kg-cm of tonmeters.
4e. Draaimomenten. in kg-cm of tonmeters.

Is een constructie-deel door een of meerdere van deze krachten belast, dan zal er tusschen deze krachten en de optredende inwendige spanningen in dat constructie-deel evenwicht dienen te zijn.

De inwendige spanningen bestaan uit:

1e. normaal-spanningen. (trek of druk).
2e. schuif- of tangentiale spanningen.
3e. buigspanningen.
4e. spanningen door wringing. (torsie).

De buigspanningen worden uitgedrukt in de normaalspanningen. ($+$ of $-$ σ)

De wringspanningen worden uitgedrukt in de schuifspanningen. (τ)

Om bij een constructie een evenwichts-toestand tusschen de uit- en inwendige krachten te behouden, mogen de inwendige spanningen de elasticiteits-grens van het materiaal niet overschrijden.

Daar onder deze grens de inwendige spanningen zich bij staal-constructies evenredig zullen aanpassen aan de uitwendige krachten, begint men eerst met de evenwichts-vergelijkingen voor de uitwendige krachten op te stellen.

b) Evenwichts-vergelijkingen voor krachten in het platte vlak.

$$\Sigma H = O \qquad \Sigma V = O \qquad \Sigma M = O \quad \ldots\ldots 1)$$

hierbij is:

$\Sigma H.$ = algebraische som van alle horizontale krachten.
$\Sigma V.$ = „ „ „ „ verticale „
$\Sigma M.$ = „ „ „ „ momenten, t. o. z. van ieder willekeurig punt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Zijn deze algebraïsche sommen gelijk nul, dan is de constructie in rust. (evenwicht).

Voorbeeld.

Van de in fig. 1 geteekende console is:

$\Sigma H = -H + H = 0.$

$\Sigma V = +P - R = 0.$

$\Sigma M = +P.L - H.a = 0.$

Voor het bepalen der steunpunts-reacties kan dus van een of meerdere dezer evenwichts-vergelijkingen gebruik worden gemaakt.

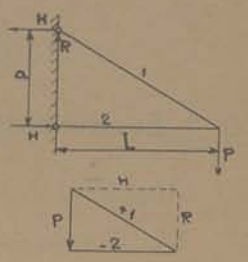


Fig. 1

Zijn bij een afzonderlijke, onvervormbare constructie niet meer dan 3 reacties aanwezig (horiz: & verticale ontbondenen) dan is deze constructie: UITWENDIG. STATISCH. BEPAALD.

Bij minder dan 3 reacties is deze constructie bij scheeve belasting beweegbaar (uitwendig labiel of STATISCH ONDERBEPAALD).

Bij meer dan 3 reacties is zij IN- & UITWENDIG STATISCH ONBEPAALD en wel:

enkelvoudig statisch onbepaald	bij	4 reacties.
tweevoudig ,, ,,	,,	5 ,,
drievoudig ,, ,,	,,	6 ,,

enz.

c) Statische bepaaldheid.

1e Methode.

Een belaste staaf van een vakwerk oefent aan beide zijden op een knooppunt een actie uit.

Het aantal knooppunten moet daarom 2 × zooveel zijn als het aantal staven, vermeerderd met de genoemde 3 reacties wil dit onvervormbare vakwerk in- en uitwendig statisch bepaald zijn.

In een formule uitgedrukt word dit:

$$2.k = s + n. \quad \ldots\ldots 2)$$

(hierbij is $n = 3$)

Voor onderstaande vakwerken zijn de evenwichtsvergelijkingen gegeven.



Fig. 2

Fig. 2 $2.k = s + n$ of,

$2.8 = 13 + 3$, (statisch bepaald).

Een driescharnierkap is te beschouwen als een uit 2 afzonderlijke vakwerken bestaande constructie waarbij de nokreacties elkaar opheffen, zoodat deze constructie statisch bepaald is als: $n = 4$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

IN fig. 3 is: $2.7 = 10 + 4$.

Brengt men een extra staaf, a' aan, dan is $2.7 < 11 + 4$. en is het vakwerk enkelvoudig statisch onbepaald.

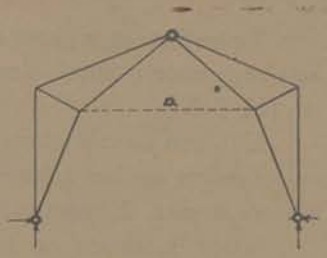


Fig. 3

De constructie in fig. 4 is eveneens enkelvoudig statisch onbepaald, omdat het aantal reacties is 4.

$2 . k = 2 . 13 = 26.$ terwijl:

$s + 4 = 23 + 4 = 27.$

Zou men staaf s laten vervallen, dan wordt het vakwerk statisch bepaald.

Fig. 5 laat een samengestelde vakwerkconstructie zien, bestaande uit 3 afzonderlijke vakwerken.

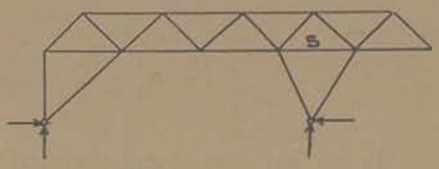


Fig. 4

Het aantal reacties hiervoor bedraagt 9, waarvan 4 elkaar opheffen zoodat $n = 5$.

De geheele constructie is statisch bepaald, daar:

$2 . k = 2 . 14. = 28.$

eveneens is,

$s + n = 23 + 5 = 28.$

Een dergelijke constructie werd in 1932 voor het eerst toegepast bij de overspanning der Progo-rivier in Ned.-Indië. ($L = \pm$ 120 M. *)

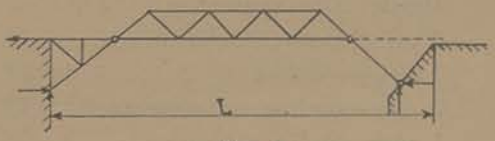


Fig. 5

Het totaal gewicht dezer brug bleek hierbij belangrijk minder te wezen dan dat van een brug uitgevoerd in één enkele ligger-overspanning.

2e Methode.

Een anderen methode om het statisch evenwicht in een vakwerk te bepalen, is de volgende:

Men beschouwt het vakwerk als een enkele schijf. Verschillende vakwerken (schijven) kunnen door een scharnier met elkaar verbonden zijn.

Evenzoo kan men een enkele staaf als een schijf beschouwen, die dan op haar beurt weer met andere schijven (staven) scharnierend verbonden is.

Voor iedere schijf gelden de 3 genoemde evenwichts-voorwaarden:

$$\Sigma H = O. \qquad \Sigma V = O;. \qquad \Sigma M = O.$$

*) Ontwerp Prof: Ir: P. P. Bijlaard.

Bevestigt men een belaste staaf door middel van een scharnier aan een andere staaf, dan treden op dit bevestigingspunt 2 onbekenden op (H & V).

Bij een aansluiting van 3 schijven heeft men $2 \times 2 = 4$ onbekenden op het scharnier (vergelijk b.v. de vaste oplegging in fig. 2; hierop komen 2 reacties en 2 staven samen).

Voor 4 staven op het scharnier is het aantal onbekenden 3×2, zoodat men kan schrijven:

Een scharnier met 2 schijven (enkelvoudig scharnier) = 2 onbekenden.
„ „ „ 3 „ (tweevoudig scharnier) = 4 onbekenden.
„ „ „ 4 „ (drievoudig scharnier) = 6 onbekenden.
„ „ „ n + 1 „ (n-voudig scharnier) = 2 . n onbekenden.

Is nu het aantal onbekenden gelijk aan het aantal evenwichtsvergelijkingen, dan is de constructie statisch bepaald.

Voorbeeld.

Het vakwerk in fig. 2 heeft 13 staven = 39 vergelijkingen.
Verder zijn aanwezig:

2 enkelvoudige scharnieren,	= 4	onbekenden.
3 twee-voudige „	= 12	„
2 drie-voudige scharnieren	= 12	„
1 vier-voudig scharnier	= 8	„
3 oplegreacties	= 3	„
Totaal	= 39	onbekenden.

Voorbeeld.

De 3-scharnierkap in fig. 6 heeft 2 schijven = 6 vergelijkingen; verder zijn aanwezig:
3 enkelvoudige scharnieren = 6 onbekenden.

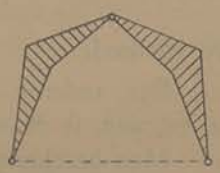


Fig. 6

Fig. 3 (als 2-scharnierkap) heeft:
11 . 3 = 33 vergelijkingen.
verder;

2 enkelvoudige scharnieren	= 4	onbekenden.
2 twee-voudige „	= 8	„
3 drie „ „	= 18	„
4 reacties	= 4	„
totaal	= 34	onbekenden.

Dit vakwerk is dus enkelvoudig statisch onbepaald.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Het raamwerk in fig. 7a wordt beschouwd als een enkele schijf, waardoor het aantal vergelijkingen = 3.

Per inklemming zijn 3 onbekenden aanwezig, zoodat het vakwerk 3-voud: st: onbepaald is.

Om dezelfde reden is fig. 7b 4-voudig statisch onbepaald.

Fig. 7c heeft 6 staven = 18 vergelijkingen,

verder;

4 enkelvoudige scharn. = 8 onbekenden.
2 twee „ „ = 8 „
3 opleggingen = 3 „

totaal = 19 onbekenden,

deze constructie is daarom enkelvoudig stat. onbepaald.

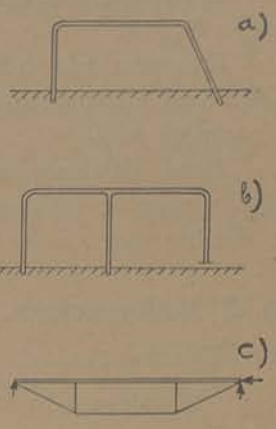


Fig. 7

De in fig. 8 geteekende brug- constructie is enkelvoudig statisch onbepaald daar het aantal vergelijkingen voor 14 schijven = 14 . 3 = 42, waartegenover staan:

7 enkelvoudige scharnieren met 14 onbekenden.
5 tweevoudige scharnieren met 20 onbekenden.
9 oplegreacties met 9 onbekenden.

totaal 43 onbekenden.

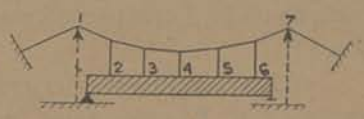


Fig. 8

Voor fig. 9 geldt:

12 schijven = 36 vergelijkingen.
7 enkelvoudige scharnieren = 14 onbekenden.
2 tweevoudige scharnieren = 8 onbekenden.
14 reacties = 14 onbekenden.

totaal = 36 onbekenden.



Fig. 9

Deze brug-constructie is dus statisch bepaald.

Regel.

De verbindings-lijn der oplegreacties mag niet door de scharnieren gaan.

Omgekeerd mag de verbindingslijn der scharnieren niet door de reacties gaan, daar anders de constructie labiel is.

Een constructie als in fig. 10 is dus niet goed.

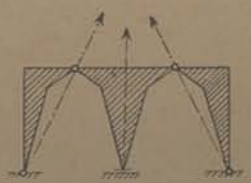


Fig. 10

Toch is hierbij voor 3 schijven het aantal vergelijkingen = 3 . 3 = 9. en het aantal onbek: 4 . 2 + 1 = 9.

Dit ontwerp is bruikbaar te maken door de scharnieren te plaatsen als in fig. 11.

Bijzonder aan te bevelen is dit echter niet, daar de constructie nog eenigszins beweeglijk blijft.

Door de losse oplegging uit deze figuur naar de rechter-zijkant te plaatsen is dit bezwaar op te heffen.



Fig. 11

§ 2 Vakwerken.

a) Constructies.

Het vakwerk in fig. 12 is labiel, daar:
2 . 8 > 12 + 3.

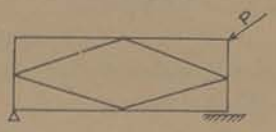


Fig. 12

Fig. 13 is een stabiel vakwerk, doordat
2 . k = s + 3,. of;
2 . 8 = 13 + 3.

Het vakwerk in fig. 14 is uitwendig labiel, daar de 3 reacties elkaar in één punt snijden *).

(Men beschouwe het moment der reacties en der last P, t.o.v. punt ‚m,).

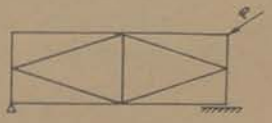


Fig. 13

Er is een zeer groote verscheidenheid in de vormen, welke toegepast worden voor de constructie's van spanten of liggers.

Voor normale spantuitvoeringen kan men een keuze doen uit onderstaande voorbeelden.

Deze kunnen vanzelfsprekend al of niet met licht- of luchtkappen worden uitgevoerd.

Voor lichtkappen is een minimum helling van 35° te rekenen, om een goede afdichting en ook om het afglijden van sneeuw te bevorderen.

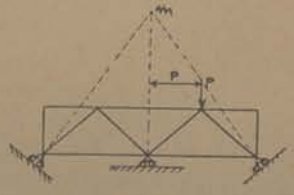


Fig. 14

Het levert voordeel op, de knooppunts-afstanden in de trekranden grooter te maken dan in de drukstaven. (men vergelijke b.v. fig. 16 & 18 met fig. 20).

*) Zie *regel* bl. 5



Fig. 15



Fig. 16



Fig. 17



Fig. 18



Fig. 19

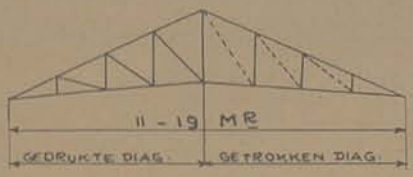


Fig. 20

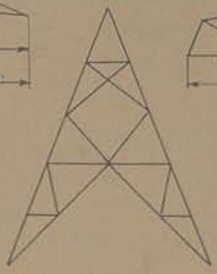


Fig. 22



Fig. 21

Er zij verder opgemerkt, dat bij spanten, welke op muren komen te rusten, vaak gerekend moet worden op een losse en een vaste oplegging, zoodat de windkrachten op het dak door de muur aan één zijde worden opgenomen. (fig. 23).

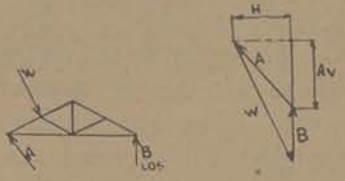


Fig. 23

Een vaste verankering aan beide zijden van het spant, zou door belangrijke temperatuurs-veranderingen bij groote spanten een naar buiten drukken der muren, of een knikken der spanten ten gevolge hebben.

Een losse oplegging waarborgt echter een vrij inkrimpen of uitzetten der constructie.

Bij spanten welke op ijzeren stijlen rusten, is het geoorloofd, de horizontaal ontbondene der windkracht op het dak, gelijk over de beide opleggingen te verdeelen.

Men handelt hierbij als volgt: (fig. 24). Reken eerst B los, waardoor H wordt bepaald. Daarna deelt men H middendoor en bepaalt reacties A_1 en B_1. De verticale reactie's voor A_1 en B_1 blijven hierbij dezelfde als voor A en B.

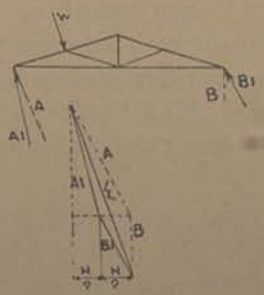


Fig. 24

Juister berekent men de horizontaal op beide stijlen werkende reacties als volgt: (fig. 25).

W geeft links reactie A, welke gelijk is aan:

$$\frac{W.\ b}{a\ +\ b}.$$

Verder is $B = W - A$.

Door deze beide reacties horizontaal te ontbinden, zijn de grootten van H1 en H2 te bepalen.

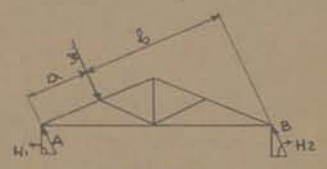


Fig. 25

Bij normale spant en kolomuitvoeringen ziet men meermalen schoren toegepast om de momenten op de stijlen te verkleinen.

De stijlmomenten worden dan berekend volgens „Foerster" met de formule:

$M = \frac{5}{24}.\ W_2.h + \frac{1}{4}.W_1.h_1. \ldots . 3)$

of volgens „Gregor" met:

$M = h.(\frac{11}{16}.\ W_2 + W_1.\sin\alpha). \ldots . 4)$

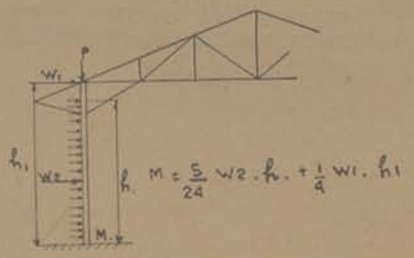


Fig. 26

Het is duidelijk dat bij toepassing van deze schoren een hoekmoment bij de bevestiging van het spant moet ontstaan dat, vooral bij hooge zijwandstijlen groote extra spanningen in de spanten zal veroorzaken. (de spanten worden door de inklemming statisch onbepaald).

Het is dus voor dergelijke constructies noodzakelijk dit inklemmingsmoment op het spant in rekening te brengen.

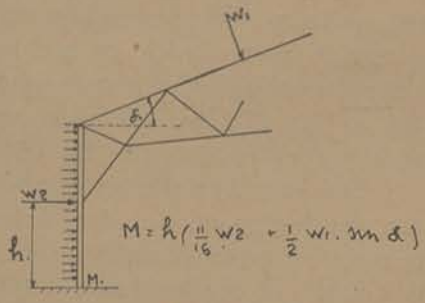


Fig. 27

Een goede en eenvoudige berekening hiervoor is, kolommen en spant te berekenen volgens onderstaande in Amerika vrijwel algemeen toegepaste methode.

Men beschouwt spant en stijlen als één geheel, en berekent het nulpunt der stijlmomenten uit de formule:

$$yo = \frac{D}{2}.\ \frac{D\ +\ 2.H}{2D\ +\ H}. \ldots . 5)$$

Dit punt is als een scharnierpunt te beschouwen, waarop alleen horizontale en verticale krachten kunnen werken, welke bepaald worden uit RA of RB. (fig. 28).

Voorbeeld.

In fig. 28 is:

$$yo = \frac{54}{2} \cdot \left(\frac{54 + 122}{108 + 61}\right) = 28{,}2.$$

W_1 = wind op luchtkap. W_3 = wind op stuk a-c.
W_2 = wind op spant. W_4 = wind op stuk c-d.

ΣW is de resultante uit W_1, W_2 en W_3.

Men bepaalt eerst het snijpunt van ΣW met hart spant, en zet aan beide zijden $\frac{1}{2} \Sigma W$ uit.

Daarna verbindt men dit snijpunt met de nul-punten c en b, en bepaalt RA & RB door de verticale en horizontale ontbondenen tot op deze verbindingslijnen te trekken.

Uit de plaatsing van RA & RB in fig. 28a, blijkt, dat de volgorde der krachten links om het vakwerk loopt.

Immers ligt ΣW dichter bij steunpunt b., waardoor de verticale reactie bij b. grooter is dan bij c.

Daar in beide ontbondenen H evengroot is, wordt de helling van RB steiler dan die van RA.

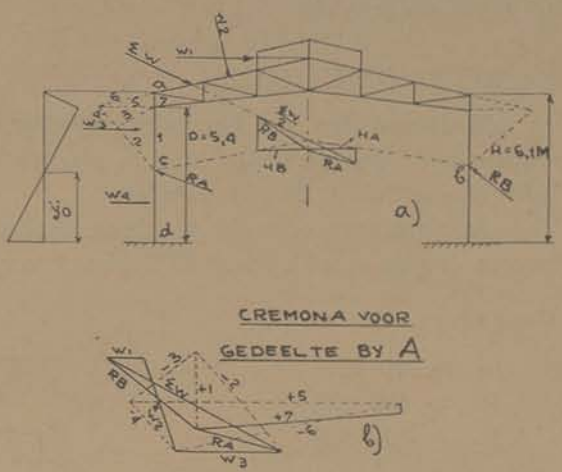


Fig. 28

Men kan nu de cremona (inclusief de gestippelde hulpstaven) eveneens „links om het knooppunt gaande" opteekenen.

Beter is de volgorde van A en B in de cremona te wijzigen, waardoor de volgorde der krachten rechtsom ontbonden kan worden.

Het max: stijlmoment a/d voet is:

$$HA \cdot yo + W_4 \cdot \frac{yo}{2} \ldots\ldots 6)$$

---

b) Het berekenen van vakwerken.

1) VOLGENS „CREMONA".

De meest gebruikelijke methode is wel het berekenen der staafkrachten volgens „Cremona".

De krachten in de staven worden hierbij bepaald, door de reeds bekende reacties (gewoonlijk te beginnen bij het linker steunpunt) in

de richting der 2 aansluitende staven van het bijbehoorende knooppunt te ontbinden.

Aan de hand van deze gevonden krachten bepaalt men de staafkrachten van het volgende knooppunt, waardoor wederom 2 onbekenden worden gevonden.

Door op deze wijze verder te gaan, kan men alle staafkrachten van het vakwerk bepalen, mits er niet meer dan 2 onbekenden tegelijk op een knooppunt voorkomen.

Bij onderstaande „Polonceau"-kap vindt men bij de knooppunten a. en b. na het bepalen der staven 1, 2 en 3 nog 3 onbekenden, zoodat eerst een hiervan langs een andere weg dient te worden bepaald, wil men met de cremona verder kunnen gaan.

Het bepalen van een dezer onbekende staafspanningen geschiedt het beste volgens de:

2) RITTER-METHODE.

Bij doorsnijden van het vakwerk volgens fig. 29, moeten de spanningen in de doorgesneden staven, als krachten aangebracht, de spanthelft in evenwicht kunnen houden.

De momenten voor die krachten, inclusief de bijbehoorende reactie moeten dus de som $\Sigma M = O$ hebben, t.o.v. ieder willekeurig punt.

Voorbeeld.

In fig. 29 is:

$P_1 = 400$ KG.

$P_2 = 200$ KG.

$$A = \frac{\Sigma P_1.11 + \Sigma P_2.4}{16} = 1250 \text{ KG.}$$

$B = 950$ KG.

Hoogte $h = 4{,}15$ Mr.

Bij aanname van punt c als momenten-punt ontstaat de vergelijking:

$$A.\frac{L}{2} - 3.P_1.\frac{L}{4} - x.h = 0.$$

waaruit:

$x = 1250$ KG.

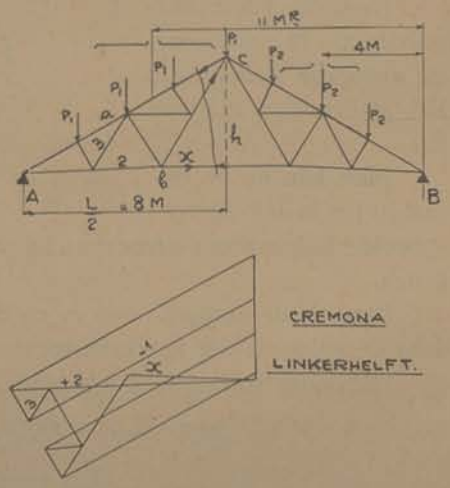


Fig. 29

Nu staafkracht x bekend is, levert het verder uitwerken der cremona geen moeilijkheden meer op.

Ook grafisch lost men zeer gemakkelijk een der onbekende krachten op. (fig. 30).

BAT. GENOOTSCHAP VAN K. EN W.

In staaf 11 treedt alleen spanning op als knooppunt a belast is.

Men ontbindt de op dit knooppunt vallende krachten (P_3 & staaf 15) in de richting der staven 3-4 en 12 (staaf 15 is de resultante uit P_4, staaf 17 en 16).

Hierna wordt 12 ontbonden in richting 11 en 13-14.

De juiste grootte van 11 en 12 is nu bepaald, en tevens het snijpunt (zie stippellijn) van staaf 10 met staaf 11.

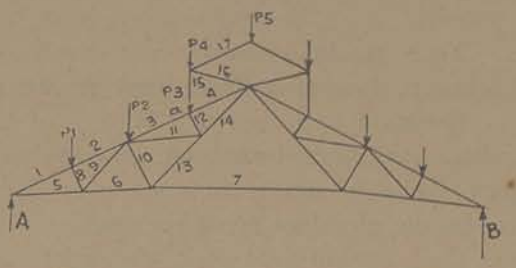
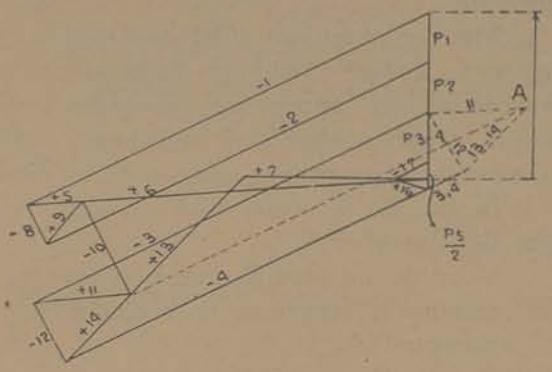


Fig. 30

In deze voorbeelden zijn alleen verticale lasten gegeven, het spreekt vanzelf dat men bij windbelasting evenzoo dient te handelen.

3) CULMANN METHODE.

Deze methode is met succes toe te passen, indien men slechts de spanning in één bepaalde staaf wenscht te berekenen.



Men brengt in het vakwerk een snijding aan over niet meer dan 3 staven waaronder de te bepalen staaf. (fig. 31).

R is de resultante der op het linkergedeelte vallende krachten A, P_1, en P_2.

Men trekt een der randen, (b.v. S_1) door tot R en verbindt het snijpunt hiervan met knooppunt 2.

Door ontbinden van R in r en S_1, en van r in S_2 en S_3, is de gevraagde staafkracht S_3 te bepalen.

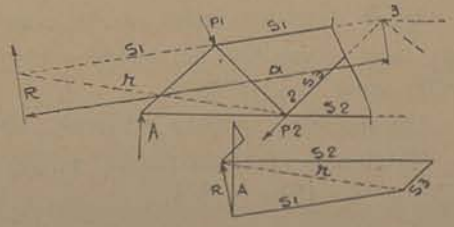


Fig. 31

De grootte en ligging van R is te vinden, door het moment van A, P_1, en P_2 te berekenen t.o.v. punt 3.

Dit moment is hetzelfde als dat van R t.o.v. punt 3, en daar R bekend is, wordt:

$a = M/R$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.

4) METHODE VAN STAAF-VERWISSELING.

Het vakwerk in fig. 32 is statisch bepaald, daar:

$2 . k = s + 3.$ of:

$2 . 9 = 15 + 3.$

Toch is dit vakwerk niet zonder meer volgens „Cremona" te berekenen, daar er op ieder punt minstens 3 staven bij elkaar komen.

Evenmin kan men een Ritter- of Culmann-methode toepassen, daar ook geen snede is aan te brengen over 3 staven, die niet door één punt gaan.

Om bij dit vakwerk de staafkrachten te bepalen, maakt men gebruik van de z.g.n. *Staafverwisselingsmethode.*

Men vervangt een staaf door een in een andere richting loopende, waardoor een knooppunt gevonden wordt, waarop slechts 2 onbekende staafkrachten aangrijpen.

In fig. 32 is staaf A-D vervangen door staaf F-D.

Voor de uitwendige lasten is nu de cremona te teekenen, te beginnen bij knooppunt A.

De hierbij in F-D optredende staafkracht is —So. (fig. b).

Nu rekent men in de knooppunten D en A, 2 naar elkaar toegerichte trekkrachten X_1, ieder groot 1 ton.

Voor deze krachten wordt eveneens een cremona geteekend, (nog zonder staaf A-D).

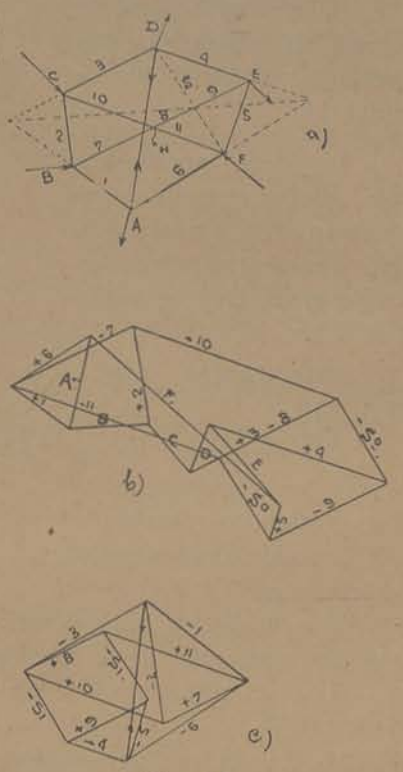


Fig. 32

De spanning in F-D is hierbij $—S_1$. (fig. c).

Treden beide belastingen gelijktijdig op, dan is de staafkracht in F-D: $= — (So + S_1)$.

Kent men nu aan S_1 een ander voorteeken toe dan aan So, b.v. bij een belasting van —X, dan zal, bij een bepaalde grootte van —X, staaf F-D spanningloos zijn.

De kracht welke in D-A door de werkelijke belasting optreedt is dus een drukkracht, en is te bepalen uit:

$$—DA = —X = — \frac{So}{S_1}$$

Met deze waarde voor DA, is daarna een nieuwe cremona te teekenen.

Het kan voorkomen, dat bij een willekeurige zeshoek, als in fig. 32 staaf S. door de belasting X = 1 . ton, spanningloos blijft.

Dit is het geval, wanneer de verbindings-lijn der snijpunten van de verlengde staven 1 & 3 (links) en 4 & 6 (rechts) door het kruispunt H gaat.

De constructie wordt dan inwendig beweeglijk, en is niet geschikt voor toepassing.

Een voorbeeld van een dergelijke foutieve constructie geeft fig. 33.

Staven U en O loopen evenwijdig, zoodat de hartlijn door het kruispunt der diagonalen zal gaan.

Bij belasting zal de constructie in de middenvelden vervormen tot een andere situatie dei staven t.o.z. van elkaar is ingetreden.

Het hellend maken der bovenrandstaven maakt de vorm iets gunstiger, daar de verbindingslijn nu op de onderrand komt te liggen.

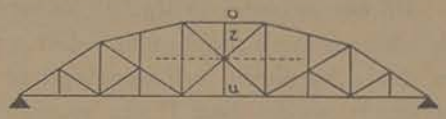


Fig. 33

Aan te bevelen is dit echter niet daar de mogelijkheid tot vormverandering niet geheel is verdwenen.

De staafverwisselingsmethode kan men b.v. toepassen bij de constructie in fig. 34.

Staaf F-G is hierbij te vervangen door een horiz. staaf D-E.

Hierdoor ontstaat dan een ligger A-B, waarvan de staven F-E en F-D. door de belasting spanningloos blijven.

De werkelijke belasting geeft in S een staafkracht So (b.v. + 21 ton.)

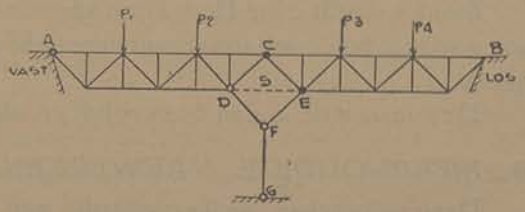


Fig. 34

Men rekent nu een kracht X = —1 ton, ter plaatse van F. (opwaarts gericht.), welke in D-E een spanning S_1 zal veroorzaken. van b.v. —3 ton.

Om nu staaf D-E spanningloos (dus uitneembaar) te maken, moet —X zoo groot wezen, dat —X.—S_1 = So waaruit volgt dat de reactie der werkelijke constructie (zonder staaf S) gelijk is aan:

$$F\text{-}G = -X = \frac{+21}{-3} = -7 \text{ ton.}$$

Andere voorbeelden van dergelijke statisch bepaalde constructies zijn nog gegeven in fig. 34a.

Bij dergelijke constructies is nog na te gaan of de losse opleggingen bij éénzijdige belasting tegen opwippen verankerd moeten worden.

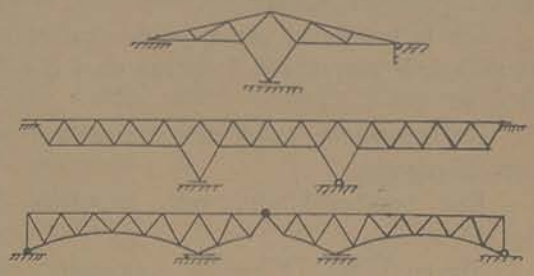


Fig. 34a.

(Voor verdere gegevens betreffende deze methode raadpleege men Müller - Breslau; Die Graphische Statik der Baukonstruktionen. Bnd. 1.)

Bij het vakwerk in fig. 35, is inplaats van staaf a, een extra horizontale voetreactie aangebracht. Dit vakwerk is te berekenen, door eerst een der scharnieren vrij opgelegd te beschouwen, waarbij men staaf a, aanbrengt, welke door P een spanning $+So$ krijgt.

Hierna rekent men op de vrije oplegging een horizontale kracht van $H = 1$ ton.

De spanning hierdoor in a, is $-S_1$.

Daar nu $+So + H.(-S_1) = 0$, wordt $H = \frac{So}{S_1}$ = positief, dus in dezelfde richting als voorloopig werd aangenomen.

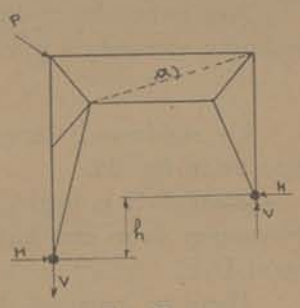


Fig. 35

Reactie $V = \frac{H.h}{L}$.

Staaf a wordt door $H = 1$ ton spanningloos wanneer beide scharnierpunten evenhoog liggen.

De constructie is dan beweeglijk en niet geschikt voor toepassing.

5) MEERVOUDIGE VAKWERKEN.

Deze vakwerken, welke zwaarder zijn dan enkelvoudige (5—20 %) werden vroeger en tijdens den wereldoorlog toegepast in de volgende omstandigheden:

1e) Voor brugconstructies, waarbij een vlugge montage met eenvoudige hulpmiddelen noodig was.

2e) Voor noodbruggen welke snel verplaatst moesten kunnen worden.

3e) Voor bruggen, waarbij het gewenscht was, een korte afstand der dwarsdragers, of een kleine lengte der diagonalen te verkrijgen, met het oog op transport.

In normale omstandigheden worden deze bruggen niet meer toegepast.

Als steunligger uitgevoerd, met enkele plaatselijke belastingen, wordt dit type wel ca: 50% zwaarder dan een normale enkelvoudige constructie.

Deelen de diagonalen elkaar in diverse stukken b.v. 3, dan noemt men deze constructie een drie-voudig vakwerk.

Of de constructie beweeglijk of statisch bepaald is hangt af van het aantal velden en het aantal deelen waarin de staven worden verdeeld.

Als gunstige helling der diagonalen neme men 45°.

Men berekent deze vakwerken eveneens volgens de methode der staafverwisseling.

Het vakwerk in fig. 36 is zesvoudig, waarbij men 3 storende staven (x, y, & z) moet vervangen door 3 andere. (E, F, & G)

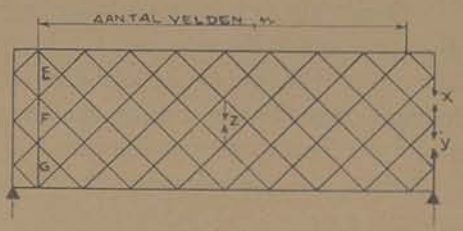


Fig. 36

Door beurtelings in de staven E, F, en G, een kracht X = 1 ton te rekenen, ontstaan de volgende vergelijkingen:

$$Eo + X.E_{x=1} + Y.E_{y=1} + Z.E_{z=1} = O.$$
$$Fo + X.F_{x=1} + Y.F_{y=1} + Z.F_{z=1} = O.$$
$$Go + X.G_{x=1} + Y.G_{y=1} + Z.G_{z=1} = O. \quad \ldots\ldots 7)$$

Hierbij is zooals reeds aangegeven in 4):

Eo, Fo en Go voor den toestand X,Y,Z = 0. (werkelijk last)

$E_{x=1}$ „ „ „ X = 1. ton

$F_{y=1}$ „ „ „ Y = 1. „

e n z:

Bovenstaand vakwerk is echter onbruikbaar (beweeglijk) als het aantal velden oneven is, of indien het aantal velden n. verminderd met 2, door 3 deelbaar is. *)

6) ZIMMERMANN METHODE.

In het vakwerk wordt, evenals bij de Ritter-methode een snede over 3 staven aangebracht, waaronder de te berekenen staaf. (fig. 37).

R is de resultante der links van deze doorsnede aangrijpende krachten. (krachten en reacties zijn niet in de fig. ingeteekend), en wordt ontbonden in: P_1 & P_2.

*) Voor nadere omschrijving zie Müller-Breslau: Die neuere Methoden der Festigkeitslehre.

$$P_1 = \frac{R.c}{b} = \frac{M_1}{b} = \frac{H.y_1}{b}$$

$$P_2 = \frac{R.a}{b} = \frac{M_2}{b} = \frac{H.y_2}{b}$$

Hierna zijn de staafkrachten O, D, & U, te bepalen, door P_1 uit te zetten als aangegeven in fig. 37b, of fig. 37c.

P_1 valt hierbij boven punt 1, P_2 boven punt 2, terwijl de grootte van D langs staaf D valt.

De richting der ontbondenen, is in volgorde naar R. te rekenen.

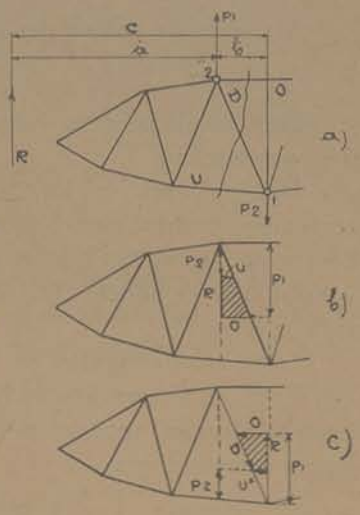


Fig. 37

Daar bij een vakwerk de veldafstand λ meestal constant is, kan men voor ieder knooppunt de ordinaat y van de momenten figuur nemen welke gelijk is aan de hierboven aangegeven krachten P, indien de poolafstand H (voor de werkelijke belasting) gelijk is aan:

$$H = \xi.\lambda$$

(ξ = een willekeurige waarde voor het verkrijgen van een overzichtelijke teekening).

Immers, $\frac{M}{\xi.\lambda} = y$, waaruit volgt: $\frac{M}{\lambda} = \xi.y$, wat overeenkomt met $P = \frac{M}{b}$ uit bovenstaande omschrijving.

Is de belasting gelijkmatig verdeeld, dan is de grootste ordinaat $y = \frac{g.L^2}{8.H}$.

Zijn de ordinaten y, bepaald, dan berekent men verder de staafkrachten volgens fig. 37.

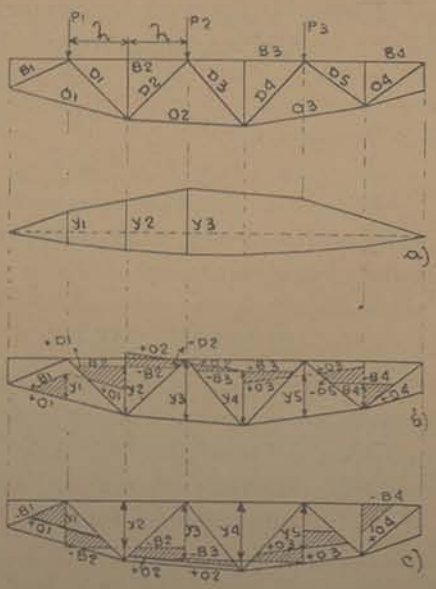


Fig. 38

Voorbeeld.

Voor den in fig. 38 geteekenden ligger is de momentenlijn voor de lasten en het eigen gewicht aangegeven in fig. a.

Voor de vergrooting der poolafstand H, wordt $\xi = 4$ gerekend, zoodat de ordinaten y, dus ook de op te meten staafkrachten met 4 zijn te vermenigvuldigen.

Men kan de ordinaten y, uitzetten vanaf de knooppunten der onderrand (fig. b) of vanaf de knooppunten der bovenrand (fig. c), de gevonden staafkrachten blijven hierbij gelijk.

Voor een vakwerk met verticalen, welke tot de hoofdconstructie behooren, is als volgt te handelen: (fig. 39).

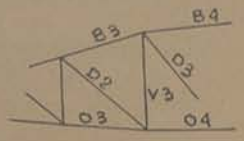


Fig. 39

Men voegt de 3 op het betreffende knooppunt vallende staven tezamen, (b.v. O3, O4 & D2 voor een last op den bovenrand, of B3, B4 & D3 voor een last op den onderrand).

De resultante vormt dan de verticale kracht in V3.

Diagonalen en randen worden verder geheel op de boven aangegeven wijze bepaald.

Er zij nog hieraan toegevoegd, dat bovenstaande methode alleen toegepast kan worden bij verticale belasting.

---

7) ANALYTISCHE METHODEN.

Het is verder mogelijk, de staafkrachten v/e vakwerk geheel te berekenen langs rekenkundigen weg, waarbij de staafspanningen worden uitgedrukt in hare horizontale en verticale projecties, of in hare hoeken met de horizontaal ontbondenen.

Deze methoden zijn niet alleen omslachtig, maar hebben geen nut in de praktijk.

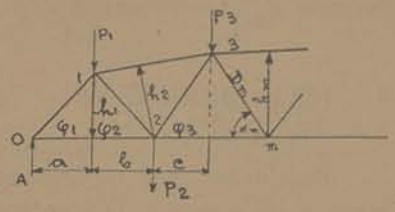


Fig. 40

Voor het berekenen der staafspanningen uit de momenten der uitwendige krachten t.o.z. van ieder knooppunt wordt, daar deze methode meermalen voorkomt, nog de volgende vereenvoudiging gegeven.

In fig. 40 is voor punt 2:

$M_2 = A.\ (a + b) - P_1\ .\ b$, of ook:

$M_2 = A.\ a + (A - P_1)\ .\ b$,

nu is: $A.\ a = M_1$ en $A - P_1 = Q_2$ zoodat men kan schrijven:

$M_2 = M_1 + Q_2\ .\ b$ waarna:

$M_3 = M_2 + Q_3\ .\ c$ enz:

Om een duidelijk overzicht te krijgen, plaatst men de geheele formuleering als volgt:

DWARSKRACHTEN Q.	MOMENTEN M.
Q_1 = Reactie A	$M_1 = Q_1 \cdot a \cdot$
$Q_2 = Q_1 - P_1$	$M_2 = M_1 + Q_2 \cdot b$
$Q_3 = Q_2 - P_2$	$M_3 = M_2 + Q_3 \cdot c$
$Q_4 = Q_3 - P_3$	$M_4 = M_3 + Q_4 \cdot d$
enz.	enz.

De randspanningen zijn hiernaar:

$$0—2 = \frac{M_1}{h_1}. \qquad 1—3 = \frac{M_2}{h_2}. \qquad \text{enz.}$$

De diagonalen worden bepaald, door Q. te ontbinden in de richting der betreffende diagonaal indien beide randen horizontaal zijn, of. bij hellende randen (fig. 40).

$$D_m = \frac{1}{\cos \alpha_m} \cdot \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right) \ldots\ldots 8)$$

Hierbij zijn h_m, h_{m-1} enz: de verticale afstanden der knooppunten tot de randen.

α_m is de hellingshoek der betreffende diagonaal.

Is het diagonaalverband als in fig. 39, dan is in bovenstaande formule h_m te vervangen door de lengte der verticale V_m.

---

8) HET BEREKENEN VAN SPANTEN MET GEBOGEN RANDSTAVEN.

Beschouwt men de knooppunten v/h vakwerk in fig. 41 als scharnierpunten, dan zijn de staafspanningen der onderrand te berekenen uit:

$$\sigma = \frac{S. \omega}{F} + \frac{S. f}{W}.$$

Hierbij is: f = pijlhoogte $= \pm \frac{L_1^2}{8. R}$

ω. = knikwaarde $= \frac{\sigma_d}{\sigma_k}$

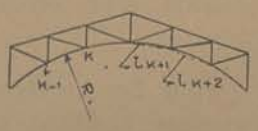


Fig. 41

Volgens deze berekening worden de staafspanningen vrij ongunstig.

Daar de onderrand een doorloopende staaf is, is het toelaatbaar de inklemmingsmomenten b/d knooppunten in rekening te brengen.

Deze knoopplaat-momenten welke bij trekstaven negatief en bij drukstaven positief zijn, worden globaal bepaald uit:

$$M_k = \frac{2}{3}. S. f \ldots\ldots 9)$$

Hierbij mag f. niet grooter zijn dan $\pm$ 0,1 . Lk.

S & f zijn de gemiddelde waarden der aansluitende staven, waarbij voor een rechte staaf; f. = 0, en voor een volwandige constructie S en f = 0. Hienaar is dus in fig. 42 $M_1 = \frac{2}{3} . S_1 . \frac{f_1}{2}$.

$M_2 = \frac{2}{3} . \left(\frac{S_1 + S_2}{2}\right) . \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)$. $M_4 = \frac{2}{3} . S_3 . f_3$.

Verder is de volgende waarde voor iedere staaf te bepalen:

$$\frac{x}{L_k} = \frac{1}{2} + (M_k - M_{k-1}) \frac{1}{8.S_k.f_k} .$$

waaruit de staafmomenten:

$$M_v = \frac{4.S_k \cdot f_k}{L_k^2} . x\,(L - x) + M_{k-1} + (M_k - M_{k-1}) . \frac{x}{L_k} . \ldots . \textit{10)}$$

Voorbeeld.

Voor de constructie in fig. 42 is:

$L_1 = 2{,}5$ Mr. $L_2 = 2{,}7$. $L_3 = 2{,}6$ Mr.

$f_1 = \frac{L^2}{8R} = 10{,}3$ cm. $f_2 = 12$. $f_3 = 11{,}3$ cm.

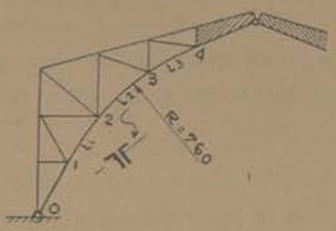


Fig. 42

Drukspanning in 0—1 = 40 ton. in 1—2 = 38 ton, in 2—3 = 36 ton, in 3—4, = 39 ton.

$M_1 = \frac{2}{3} . 38 . \frac{1}{2} . (10{,}3 + 0) = 131$ ton. cm.

$M_2 = 274$. $M_3 = 290$. $M_4 = \frac{2}{3} . 39 . 11{,}3 = 294$ ton. cm.

Hieruit volgt, bij positieve knoopplaat-momenten:

$$\frac{x}{L_{1-2}} = \frac{1}{2} + (274 - 131) . \frac{1}{-8.38.10{,}3} = 0{,}455.$$

$$\frac{x}{L_{2-3}} = \frac{1}{2} + (290 - 274) . \frac{1}{-8.36.12} = 0{,}495.$$

$$\frac{x}{L_{3-4}} = \frac{1}{2} + (294 - 290) . \frac{1}{-8.39.11{,}3} = 0{,}499.$$

Hierna volgen de veldmomenten:

$M_{1-2} = -4.38.10{,}3.0{,}455.0{,}545 + 131 + 143.0{,}455 = -194$ ton. cm.

$M_{2-3} = -4.36.12.0{,}495.0{,}505 + 274 + 16 . 0{,}495 = -150$ „

$M_{3-4} = -4.39.11{,}3.0{,}499.0{,}501 + 290 + 4.0{,}499 = -150$ „

Voor de doorsnede wordt voorloopig gekozen: 2◁150/100/14 met Jx = 1488. F = 66,4. $W_1 = 297$. $W_2 = 148$.

Knooppunt 2) Max: staafkracht = $S_{1-2} = -38$ ton.

$M_2 = +274$ ton.cm. (geeft in de bovenflens druk).

Het knooppunt is zijdelings door verband gesteund, zoodat geen knikwaarde in rekening wordt gebracht.

De optredende spanning in de ◁ ijzer is:

$$\sigma_b = -\frac{38000}{66{,}4} - \frac{274000}{297} = -573 - 927 = -1500 \text{ kg/cm}^2$$

Staaf 2—3).

Het veldmoment = —150 ton.cm. P = 36 ton.

$L = 270$ cm. $i = \sqrt{\frac{1488}{66{,}4}} = 4{,}73$. $\frac{L}{i} = 57$. $\omega = 1{,}233$.

$$\sigma_b = -1{,}233.\ \frac{36000}{66{,}4} + \frac{150000}{297} = -670 + 506 = -164 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\sigma_o = -1{,}233.\ \frac{36000}{66{,}4} + \frac{150000}{148} = -670 - 1020 = -1690 \text{ „}$$

In het algemeen zijn de staafspanningen door de veldmomenten hooger dan door de knooppunts-momenten, zoodat men in de velden waar dit wenschelijk is, een verstijving dient aan te brengen.

Bij niet te zware spantconstructies is het niet noodig deze berekening in haar geheel uit te voeren.

Men rekent dan voor gebogen randstaven, met gelijke veldlengten een gemiddeld moment van $\pm \frac{S.f.}{2}$, de hierdoor onstane spanningen worden dan bij die der staafkracht S. gevoegd, met inachtname v/d knikwaarde .ω.

---

§ 3) De gunstigste plaats der lichtkappen.

Voor een willekeurig punt op den vloer, vindt men de verlichtingsfactor ,a, door vanuit dat punt stralen te trekken naar de uiterste punten der lichtopeningen. Is de hiertusschen vallende boogmaat = ψ, (voor den straal 1) dan is .a, $= \frac{\psi}{\pi}$.

Voor de constructies in fig. 43 & 44 zijn voor div: punten v/d vloer deze waarden a, uitgezet, waarbij blijkt, dat bij een plaatsing der lichtkappen volgens fig. 44, de belichting v/d geheelen vloer meer gelijkmatig is.

Belichting door ramen in beide zijwanden is eveneens zeer gunstig, echter moet hierbij rekening worden gehouden, dat het

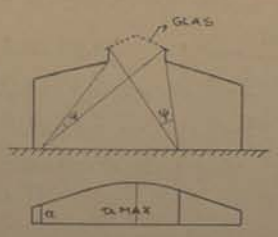


Fig. 43

licht niet ondervangen kan worden door naastliggende gebouwen.

Trekt men vanuit het onderste punt der lichtopening een lijn onder 45° dan mogen boven deze lijn geen belemmerende gebouwen, boomen, enz. uitsteken.

In Europa worden groote lichtvlakken zooveel mogelijk naar het noorden (eventueel het oosten) gelegd, omdat bij belichting uit het zuiden, te veel hinder van het zonlicht wordt ondervonden; bovendien worden de op deze wijze belichte ruimten des zomers te warm.

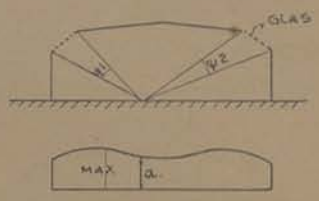


Fig. 44

Voor Indië zijn om dezelfde redenen lichtkappen boven op het dak te vermijden.

Als lichtkap-materiaal neme men draadgaas, tot een max: breedte van 80 cm, en een min: dikte van 6 m/m.

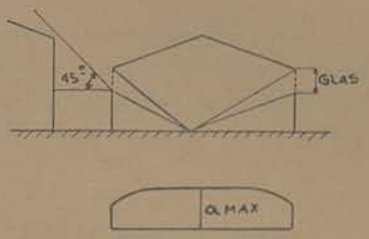


Fig. 45

---

§ 4) Liggers.

a) Algemeen.

Voor normale uitvoeringen van liggers of bruggen zijn de hieronder aangegeven systemen de meest gebruikelijke.

Men onderscheidt:

1)	parallel-dragers.	fig. 46 t/m 50.
2)	parabool-dragers.	,, 51.
3)	halfparabool-dragers.	,, 53.
4)	visch-vormige-dragers.	,, 52.
5)	Schwedler-dragers	,, 54.



Fig. 46



Fig. 47



Fig. 48



Fig. 49

PERPUSTAKAAN NASIONAL



Fig. 50



Fig. 51



Fig. 52



Fig. 53



Fig. 54



Fig. 55

Ook ziet men soms meer abnormale uitvoeringen toegepast, zooals b.v. „trapeziumvormige" liggers, of dubbelparabool-vormige volgens fig. 55, terwijl ook meermalen de z.g.n. Vierendeel-drager wordt aangetroffen. (zie hierover deel III).

Liggers met evenwijdige randen krijgen normaal een hoogte van 1/8 — 1/12 . L, waarbij een uitvoering der diagonalen, afwisselend links en rechts hellend aan te bevelen is.

Behalve dat hierdoor de doorbuiging kleiner wordt, dan bij liggers met gelijkhellende diagonalen, is over het algemeen het gewicht lager.

De gunstigste helling der diagonalen voor fig. 46/47 is 35°, terwijl deze voor fig. 48/49, ± 45° is.

Parabool-liggers hebben normaal een hoogte van 1/8,5 . L, en zijn ± 10% gunstiger in gewicht, dan bovengenoemde liggers, terwijl zij bovendien het voordeel hebben van een overal gelijke randdoorsnede.

Voor brugconstructies worden zij echter weinig meer toegepast, daar zij nogal sterk onderhevig zijn aan trillingen.

Half-paraboold ragers hebben een moderner aanzien dan parabool-liggers, en hebben tevens de voordeelen van den parallel-drager.

De normale hoogte is 1/8—1/12 . L; deze hoogte hangt bij bruggen af van de vrije doorlaat onder het bovenwindverband. (minstens 4,5 Mr).

Fig. 56 toont een liggertype van modernen vorm, dat echter weinig wordt toegepast.



Fig. 56

Dit liggertype is iets zwaarder dan een half-parabool-drager, doch is in aanmaak goedkooper.

Het is met succes toe te passen voor bruggen, waarvoor een kleine doorbuiging is toegestaan.

Een gunstige hoogte i/h midden = 1/6 — 1/8 . L.

Schwedler-dragers.

Wordt de bovenrand van een vakwerk zoo uitgevoerd dat voor een blijvende of rijdende belasting de min: diagonaalspanningen gelijk nul zijn, dan kunnen de hoofddiagonalen slap worden uitgevoerd.

De hoogten der verticalen van deze dragers welke naar den constructeur „Schwedler" zijn genoemd, moeten stuk voor stuk aan de hand van de belasting worden berekend.

---

b) Berekenen van liggers.

De berekening van statisch bepaalde liggers geschiedt voor rustende belasting met behulp v/e cremona of door de Ritter-methode.



Fig. 57

Hierbij rekent men evenals bij de spanten, een der opleggingen vrij beweeg-baar.

Voor de volgende, meer abnormale uitvoeringen, is de wijze van berekenen aangegeven.

1) K — VERBAND.

Het verband in fig. 57 is statisch bepaald, terwijl dat in fig. 58 inwendig enkelv. stat. onbepaald is, daar $2 . k < s + 3$.

Om dit laatste verband te kunnen berekenen, trekt men de in fig. 58 gestippelde hulpdiagonalen, waarna eerst de randspanningen worden bepaald. Hierna teekent men normaal de cremona.

Voor de kniklengte der verticalen is de halve staaflengte te rekenen. *).

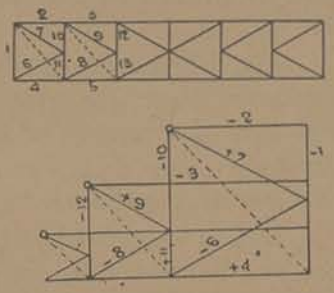


Fig. 58

2)

De constructie der ligger met gekruiste diagonalen volgens fig. 59 is zesvoudig statisch onbepaald (6 velden).

Men berekent deze ligger globaal door eerst een cremona voor de gedrukte diagonalen te teekenen, en daarna een idem voor de getrokken diagonalen. In de hierdoor ontstane vierhoeken worden lijnen getrokken evenwijdig aan deze diagonalen, waardoor de eerst gevonden staafspanningen worden gehalveerd en wel in trek en druk.

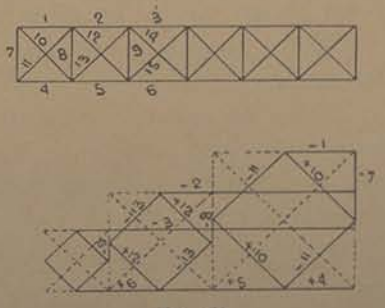


Fig. 59

*) Deze constructie is eenigszins beweeglijk. Zie ook (fig. 33).

Deze berekening is voor belangrijke constructies (bruggen e.d.) niet geschikt, daar bij doorbuiging de verdeeling der spanningen zich geheel zal wijzigen.

Men ziet wel eens in een paralleldrager een of twee middenvelden met gekruiste diagonalen uitgevoerd, waardoor de randspanningen i/h middenveld verkleind worden.

3)

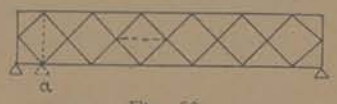


Fig. 60

Het vakwerk met gekruiste diagonalen in fig. 60 is statisch bepaald, indien in één veld een horizontale of verticale koppelstaaf wordt aangebracht.

Ligt het linker steunpunt in a, dan kan met de hierboven vallende eind-verticaal worden volstaan.

Dit systeem ziet men meermalen toegepast (z.g.n. tralieliggers) en is voordeeliger in uitvoering dan fig. 59, doch c . a .5 — 10% onvoordeeliger dan een enkelvoudig vakwerk.

4)

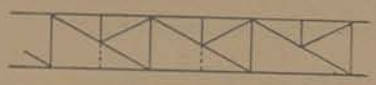


Fig. 61

Vakwerken met tusschenvormen (fig. 61) zijn alleen toelaatbaar als de hoofd-diagonalen zijdelings niet te slap zijn.

Bij brugconstructies verdient het aanbeveling, de tusschen-verticalen door de trekken tot aan den onderrand.

5)

Fig. 62 toont een windligger, welke achter een buitenmuur is geplaatst; deze constructie geeft een belangrijke vermindering der stijlmomenten, daar de windkrachten op den kopwand gedeeltelijk door den ligger naar de zijwanden worden overgebracht.

Als drukrand rekent men een gedeelte van het metselwerk.

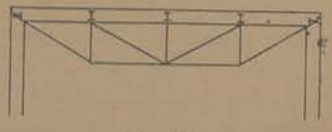


Fig. 62

Deze druk verdeelt zich hierbij over een dergelijke breedte, dat meestal een half-steens muur reeds voldoende is om hem op te nemen, indien men de hoekstijlen plaatst, als in fig. 62 is aangegeven.

Voor koppeling plaatse men een licht ◁ ijzer a/d binnenkant der muur.

Daar de ongelijke uitzetting van ijzer en metselwerk, bij temperatuurs-verhooging, een naar binnen buigen der muur zal veroorzaken, mag de hoogte v/d ligger niet minder wezen dan 1/6 — 1/7 . L.

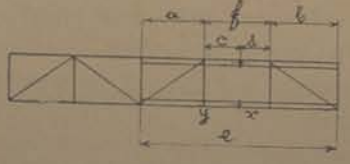


Fig. 63

6) LIGGERS MET ONTBREKENDE DIAGONALEN.

Bij het ontbreken van een diagonaal in den ligger (fig 63) dient een

der randen, (of ook wel beide) de verticaalkracht in het diagonaal-looze veld op te nemen.

Deze verticaalkracht Q is gelijk aan de reactie A, verminderd met de links v/h nulpunt aangrijpende krachten.

Het nulpunt wordt bepaald uit:

$$d = f.\frac{2a + 3f}{2e + 4f} \quad \ldots\ldots 11)$$

Men beschouwt dit punt als een scharnierpunt, en berekent het moment voor den buigingsvasten randstaaf uit:

$M_1 = Q.c$ en $M_2 = -Q.d.$

Zijn beide randen stijf uitgevoerd, dan rekent men per staaf Q. naar verhouding der traagheids-momten.

De randstaven krijgen verder nog de druk- of trekspanningen op te nemen, welke berekend worden uit de momentenvergelijking t.o.z. v/d punten, x.

Om de doorbuiging bij, y ' te bepalen, rekent men de doorbuiging van den ligger met diagonalen, vermeerderd met de som der buigingen der beide staafhelften welke als vrijdragers zijn te beschouwen en belast met Q. aan het einde.

---

7) DRIEHOEKIGE LIGGERS.

De eenvoudigste vorm van een ruimte-vakwerk is wel een driehoekige ligger.

Tegenover het voordeel van minder materiaal in vergelijking met een vierkante (koker) - ligger, staat het nadeel van te knikken schetsplaten, of te zweien ◁ ijzers.

Bij een driehoekige ligger moeten minsten 4 punten opgelegd worden, te weten:

een punt vast opgelegd, (3 onbekenden)
„ „ verschuifbaar, (2 „)
twee id. verrolbaar, (2 „)

Hierdoor wordt het aanstal reacties = 7 stuks

Uit de theorie der ruimte-vakwerken blijkt dat een dergelijk vakwerk enkelvoudig statisch onbepaald is.

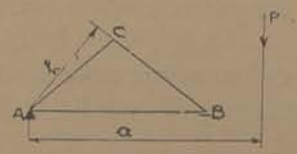


Fig. 64

Men kan echter zonder bezwaar ieder liggervlak als een afzonderlijk vakwerk beschouwen.

Is A. B. C. (fig 64) de doorsnede v/d ligger, en P een uitwendige last, dan is de kracht in C-D $= \frac{P.a}{h}$.

De door P in de beide andere velden veroorzaakte belastingen zijn eveneens uit de momenten-vergelijkingen te bepalen.

Rand C van ligger C-B, krijgt drukt, terwijl hierin van ligger A-C trek ontstaat, met het verschil is voor de rand-drukken te rekenen.

Ditzelfde geldt eveneens voor de beide randen A en B.

Het is verkeerd de randen bij de opleggingen in één punt samen laten komen, daar dan door de excentrische belasting, een verdraaiïng der geheele constructie zal optreden.



Fig. 65

Fig. 65 geeft hiervan een voorbeeld.

(De doorsnede v/e loopkraan, waarvan de 3 liggers in één punt uitkomen; bij belasting zal deze constructie den gestippelden stand aannemen).

---

8) VIERHOEKIGE LIGGERS.

Evenals de driekante ligger, is de vierhoekige- of kokerligger een ruimte-vakwerk, waarbij het aantal opleggingen eveneens 4 stuks is, met totaal 7 reacties. (zie boven).

Om een behoorlijk stijf geheel te verkrijgen, dienen de kruiselings gelegen randen te worden gekoppeld met minstens twee stuks dwarsverbanden.

Om dit (statisch onbepaalde) vakwerk te berekenen, beschouwt men, evenals bij de driehoekige ligger, ieder vlak afzonderlijk.

Werkt op de doorsnede een kracht P aangrijpend in punt E, dan ontbindt men deze in de richtingen E-B, en E-D.

Deze beide krachten, horizontaal- en verticaal ontbonden, geven de op de liggers C-D, D-B, en B-A vallende krachten.

De som der verticaal ontbondenen is gelijk 1, terwijl het verschil der beide horizontaal ontbondenen gelijk is aan 2. (fig. 66)

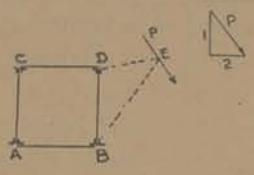


Fig. 66

Ligger C-A blijft spanning-loos, en kan eventueel vervallen; men dient dan echter de noodige steunpunten aan te brengen voor de beide horizontale liggers.

---

§ 5) Doorbuiging van Statisch bepaalde Vakwerken.

Met behulp der arbeids-vergelijkingen uit hoofdstuk II, is de doorbuiging v/e statisch bepaald vakwerk op eenvoudige wijze te bepalen.

Men rekent in de richting, en op het gegeven punt der doorbuiging, een kracht $X = 1$ ton, waarvoor de staafspanningen S_1 worden gevonden. (zonder de uitwendige lasten).

Voor de werkelijke belasting zijn de staafkrachten gelijk aan So, waaruit de lengte-veranderingen $\triangle s = \frac{So.s}{E.F}$ zijn te berekenen.

De doorbuiging δ van het gegeven punt is nu:

$$\delta = \Sigma.\ S_1.\ \triangle s = \sum \frac{S_1.\ So.\ s}{E.\ F}\ ^{\circ)} \quad \ldots\ldots 12)$$

Bij temperatuurs-verschil is $\triangle s = \frac{So.\ s}{E.\ F} + \xi.\ t.\ s =$

$= \frac{s}{E} . (\delta + \xi.E.t)$, zoodat totaal:

$$\delta = \sum \frac{S_1.\ So.\ s}{E.\ F} + \sum S_1.\ \xi.\ t.\ s.\ ^{*)} \quad \ldots\ldots 13)$$

Bestaat de werkelijke belasting op het vakwerk uit één enkele last P, aangrijpend in een punt a, dan rekent men de gedachte last X = 1, eveneens in dit punt. a.

De doorbuiging wordt dan gelijk aan:

$$\delta = \sum \cdot \frac{S_1^2.\ s}{E.\ F} \cdot P. \quad \ldots\ldots 14)$$

Rekent men So en S_1 in tonnen, de staaflengten s in cm, de doorsneden F in cm.^{2} en E in ton/cm^2 (= 2100.) dan wordt δ eveneens in cm. gevonden.

De doorbuiging van een parabool-ligger, belast met een gelijkmatig verdeelde belasting, is in het midden:

$$\delta = \frac{\sigma}{E} . L. \left(0{,}3466. \frac{L}{h} + 0{,}7724. \frac{h}{L}\right). \quad \ldots\ldots 15)$$

hierbij is σ de gemiddelde randspanning.

Een paralleldrager met gemiddelde randspanning σ_1, gemiddelde diagonaalspanning σ_2, en gemiddelde verticaalspanning σ_3 buigt door over een waarde:

$$\delta = \frac{L}{2.\ E} \cdot \left(\sigma_1 . \frac{L}{2.\ h} + \sigma_2 \left(\frac{h}{\lambda} + \frac{\lambda}{h}\right) + \sigma_3 . \frac{h}{\lambda}\right) \quad \ldots\ldots 16)$$

λ = overal gelijke veldwijdte.

Volgens deze formule wordt de doorbuiging van liggers zonder verticalen (fig. 48) geringer, daar hiervoor de laatste factor, $\sigma_3 . \frac{h}{\lambda}$ vervalt.

°) Zie voorbeeld bl. 47—49.
*) Zie ook formule 29—31.

§ 6) Spanningen in knoopplaten.

Over het algemeen is het niet noodig, de spanningen in de knoopplaten te controleeren, daar het aantal benoodigde nagels of bouten reeds voldoende afmetingen a/d platen geven, om de spanningen binnen toelaatbare grenzen te houden.

Bij normale lichte vakwerk-constructies, rekent men de schema- (systeem) - lijnen, op de nagellijnen der diverse profielen.

Voor nagel- of boutafstanden zijn b.v. de afstanden uit onderstaande tabel te rekenen.

diam : gat.	11	14	17	20	23	26 m/m
Hartafstand ;	40	50	60	65	75	80
Eind-afst :	20	25	30	35	40	45

a) Geboorde knoopplaten.

De totale afschuivende kracht welke op de in fig. 67 aangegeven nagels valt, is te bepalen uit:

$$R = \sqrt{P^2 + (0_1 - 0_2)^2}$$ of grafisch als aangegeven.

Ligt op het knooppunt een lasch, dan wordt iedere randstaaf afzonderlijk op de schetsplaat bevestigd, zoodat de plaat, behalve de resultante der staafkrachten, nog de beide randspanningen (01 & 02) moet opnemen.

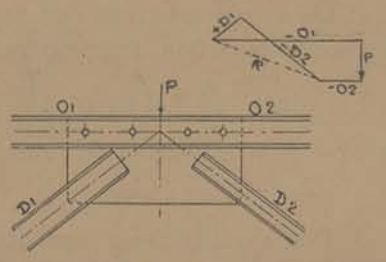


Fig. 67

Om deze laatste krachten op de schetsplaats zoo klein mogelijk te houden, is het aan te bevelen, een extra laschplaat op de randen aan te brengen, daar zonder deze lasch de randspanningen in de knoopplaat te hoog zijn.

Voorbeeld.

De gevaarlijke doorsnede van de in fig. 68 geteekende knoopplaat ligt in a-a, daar hierin de meeste nagels voorkomen.

De netto doorsnede hiervoor (bij trek in 01 & 02) is $F_n = 28$ cm².

Afstand a, tot het zwaarte-punt van deze doorsnede is gelijk aan 10 cm.

Voor dit punt wordt het traagheids-moment Jz der plaat gelijk aan $Jx + e^2 . F = 2800\ cm^4$.

Hieruit bepaalt men:

$$W_1 = \frac{2800}{14} = 200\ cm^3.$$

$$W_2 = \frac{2800}{16} = 175\ cm^3.$$

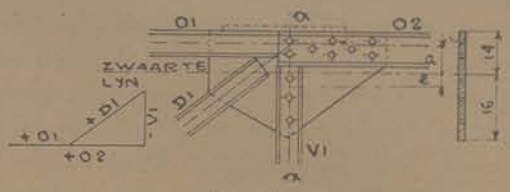


Fig. 68

De staafkracht in O_2 = 40 ton, waaruit $M_2 = 40.000 . .10 = 400.000$ kg . cm.

De randspanning in de bovenhelft v/d plaat is nu:

$$\sigma_b = + \frac{P}{F_n} + \frac{M}{W_1} = + \frac{40000}{28} + \frac{400000}{200} = + 3430.\ kg/cm^2$$

De spanning i/d onderrand =

$$\sigma_o = + \frac{P}{F_n} - \frac{M}{W_2} = + \frac{40000}{28} - \frac{400000}{175} = - 850.\ kg/cm^2$$

Plaats men een laschstrip op de bovenflens der beide kanaal-ijzers, dan zal het zwaartepunt der geheele doorsnede (inclusief laschstrip) dichter bij de schemalijn komen, zoodat afstand a, kleiner wordt.

Is de doorsnede der laschstrip = 16 cm^2, dan wordt a hierdoor $\pm$ 2 cm, en $W_1 = 390\ cm^3$.

De grootste randspanning wordt nu:

$$\sigma_b = \frac{40000}{28+16} + \frac{80000}{390} = + 1115\ kg/cm^2$$

Het is duidelijk, dat bovenstaande berekening de randspanningen slechts globaal bepaalt. De vormverandering van het knooppunt belet, naast andere oorzaken, een juist aangeven der spanningen.

Deze zullen in werkelijkheid vrijwel steeds minder zijn, dan die, welke volgens bovenstaande methode worden gevonden.

Men houde echter rekening met het volgende:

1e) Alle staafassen v/e vakwerk dienen zooveel mogelijk in hetzelfde platte vlak te liggen.

Een aansluiting als in fig. 69 is dus voor een hoofdstaaf van een vakwerk te vermijden, daar de staafas hiervan buiten het platte vlak ligt, en een moment veroorzaakt van S . x.

Dit moment veroorzaakt vrij aanzienlijke extra spanningen in den staaf en de bevestigingsnagels welke daarbij tevens op de koppen worden belast



Fig. 69

Bij bruggen of zware liggers moet men weleens tot deze constructie overgaan, daar beide profielen v/d staaf met een afzonderlijke knoopplaat worden aangesloten.

Om dan de werking van het momen op de knoopplaat onschadelijk te maken, dient men tusschen de beide platen vulstukken aan te brengen. (z.g.n. diafragma's. fig. 70).

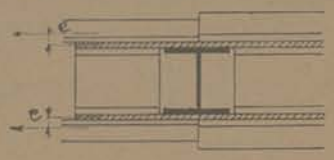


Fig. 70

2e) Het is wenschelijk de schemalijnen van profielen boven ◁ 80—80—8 op de zwaartelijnen der profielen te leggen, en niet op de nagellijnen, daar anders eveneens belangrijke momenten op de staven zullen optreden.

De schemalijnen dienen hierbij vanzelfsprekend in één punt samen te komen. (fig. 71)

Sluit men in fig. 71 staaf a, (dubbel ◁) met één nagel of bout aan, dan treedt in de geheele staaf een buigmoment op, van S . e.

Bij aansluiting met minstens 2 nagels komt dit moment alleen bij de einden voor (+ & —), waarbij de op één nagel vallende extra kracht ‚T' gelijk is aan:

$\frac{S \cdot e}{a}$ bij 2 nagels, of aan $\frac{S.e.a._{max:}}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots}$ bij meer dan 2 nagels.

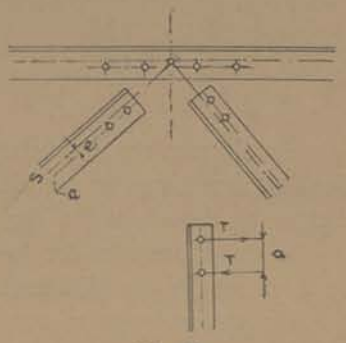


Fig. 71

Vallen de neutrale (schema-) lijnen niet in één punt op de knoopplaat samen, dan ontstaan hierop momenten, welke men berekent uit: $S_1 \cdot s_1 = S_2 \cdot s_2 = S_3 \cdot s_3$. S_3 is hierbij het verschil der beide randstaafkrachten. (fig. 72).

Men brengt hiertoe 2 schemalijnen in snijding, en bepaalt voor dit punt het moment der 3e staafkracht.

Dit extra moment wordt als volgt door de 4 aansluitende staven opgenomen.

Men bepaald voor iedere staaf de stijfheids-factor x uit $\frac{J}{L}$ der betreffende staaf, waarna het moment naar verhouding dezer x.-waarden over de 4 staven wordt verdeeld.

Draait men in fig. 72 een der beide diagonalen om, waarbij dus de afstaande flens a/d onderzijde komt te liggen, dan

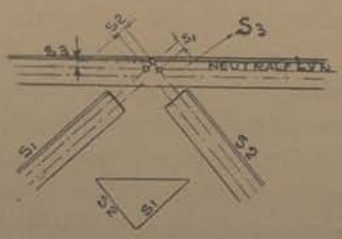


Fig. 72

zullen de snijpunten der neutrale lijnen dichter bij elkaar komen, waardoor de momenten: S . e, belangrijk worden verminderd.

3e) De kracht van een nagel verdeelt zich op de plaat over c.a. 30° met de staafas, zoodat de randen der knoopplaat niet binnen deze werkende breedte der nagels mogen vallen.

Fig. 73 geeft hiervan een voorbeeld.

De nagels in de aangesloten staaf verdeelen hare werking op de knoopplaat in den vorm van een gelijkbeenige driehoek, welke hare top in de eerste aangesloten nagel heeft.

In fig. 73a valt deze driehoek buiten de knoopplaat, in tegenstelling met fig. 73b, zoodat een uitvoering als in fig. 73a foutief is.

4e) Tenslotte is er rekening mede te houden dat bij een vaste oplegging de afstand van schemapunt tot onderkant oplegging niet te groot wordt genomen, daar bij zijdelingsche belasting (winddruk) een niet onbelangrijk moment op dit knooppunt ontstaat.

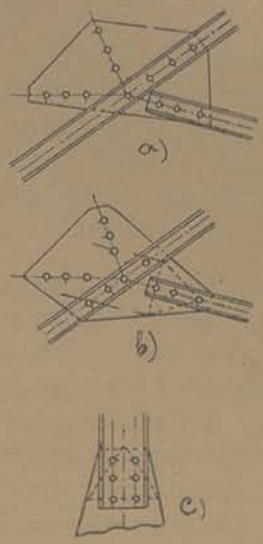


Fig. 73

Voorbeeld.

In fig. 74 is H = 300 kg. h = 30 cm, waaruit. M = 9000 kg-cm.

Voor de bovenrand = $xb = \frac{J}{L} = 1.30.$

.. .. onderrand = $xa = \frac{J}{L} = 0.70.$

$xa + xb = 2.$

$Mb = M. \frac{xb}{xb + xa} = 5900$ kgcm.

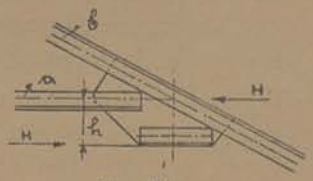


Fig. 74

Ma = 3100 kgcm.

Bij een W_{max} v/d bovenrand = 35 cm³ en v/d onderrand = 18,1 cm³ worden de extra randspanningen:

$\sigma_b = \frac{5900}{35} = -169$ kg/cm² $\quad \sigma_a = \frac{3100}{18,1} = +173$ kg/cm²

---

b) Voorwaarden voor goed geconstrueerde knoopplaten.

1e Het is voor profielen boven ◁ 80—80—8 noodzakelijk, de schemalijnen op de neutrale lijnen der div. profielen te laten vallen; tevens dienen de afstaande flenzen hierbij naar één richting te worden geplaatst.

2e De knoopplaatdikten zijn niet minder te nemen dan 5 m/m. Voor overspanningen van 14—18 Mr. rekent men globaal 8 m/m,

PERPUSTAKAAN NASIONAL

van 18—25 Mr. 9—12 m/m, van 25—35 Mr. 11—15 m/m, een en ander naar gelang de belasting van het vakwerk licht of zwaar is.

3e Trekt men door de eerste en laatste aansluitnagel van een staaf een gelijkbeenige driehoek dan mag deze driehoek niet buiten de knoopplaat uitsteken. (fig. 73c).

4e Rekent men de netto basis van deze driehoek als werkende knoopplaatbreedte = b, waarbij de dikte = d, dan mag: $\frac{S}{b.\,d.}$ niet meer wezen, dan de toelaatbare spanning.

5e Alle staven dienen zóó te worden aangesloten, dat een zoo groot mogelijk gedeelte van het staafoppervlak op de knoopplaat valt, afstaande flenzen van U—ijzers dienen dus met extra ◁ ijzers te worden aangesloten.

c) Gelaschte knoopplaten.

Door de groote besparing op de bewerking, op het gewicht en vooral ook op het teekenwerk, vinden gelaschte knoopplaten in den staalbouw meer en meer toepassing.

Bij het lasschen van staven op de knoopplaten, dient men er rekening mede te houden, dat de schema-lijnen der div. profielen op de zwaartelijnen moeten liggen, om het optreden van momenten op de lasschen te voorkomen.

Doordat de laschnaden aan beide staafvlakken vrij kort kunnen wezen, worden de afmetingen der knoopplaten kleiner dan bij geklonken staven.

Vulstaven kunnen onmiddellijk aan de randen worden gelascht, dus zonder knoopplaat, waarbij dan voor de randen het voordeeligst een T-ijzer, of $\frac{1}{2}$ balk-ijzer is te kiezen; speciale profielen voor te lasschen constructies zijn reeds i/d handel.

Daar het lasschen van staalbouwconstructies een op zich zelf staand iets is, wat een goede bestudeering vereischt, wordt hier volstaan met eenige

Algemeene gegevens.

De door een laschnaad overgebrachte kracht is: a . *l* maal de toelaatbare spanning.

Hieruit volgt, dat de gemiddelde spanning in de geheele lasch gelijk is aan:

$$\sigma = \frac{S}{\Sigma\,(a.\,l.)}.$$

l is hierbij de lengte der diverse laschnaden, verminderd met 2 . a.

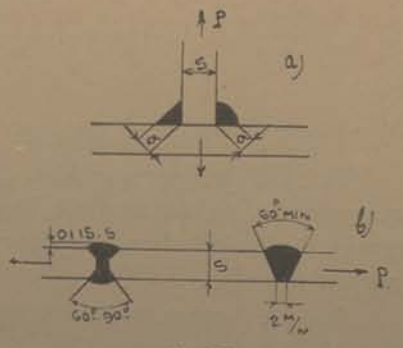


Fig. 75

omdat de eindhechtingen der naden niet voor opname van spanningen in aanmerking mogen komen.

De dikte . a. der laschnaad is min. 0,65 . s te nemen. (fig. 75).

Toelaatbaar is voor St : 37,

op trek : 750 kg/cm².

„ druk : 850 „

„ afschuiving 650 kg/cm².

De breukspanning van een lasch St : 37 bij een belasting volgens fig. a. en berekend uit $\frac{P}{F}$. moet minstens 2600 kg/cm² bedragen: voor St : 48, is deze spanning minstens 3400 kg/cm², en voor St : 52 minstens 3800 kg/cm²

Hierbij is F = 2 a *l*.

Bij een belasting volgens fig. b zij deze waarden 3700, 4800 en 5200 kg/cm².

Is een constructie geheel gelascht, dan is de gewichtsbesparing, 10 — 20 %, in vergelijking met geklonken werk.

---

§ 7) Driescharnier-Kappen.

a) Algemeen.

Driescharnierkappen zijn met voordeel te gebruiken voor hallen, kerken, of groote loodsen, terwijl zij tevens de geschikste constructies zijn voor bouwwerken op slappe ondergrond, dus daar waar verzakken der fundaties mogelijk is.

Men onderscheidt vakwerk-constructies en volwandige constructies. laatst genoemde zijn moderner en maken een rustiger indruk, hebben tevens een grootere sterkte bij brand, doch zijn in aanmaak duurder dan vakwerkconstructies.

Bij beide typen is er op te letten, dat de gordingen zóó worden uitgevoerd, dat zij tevens de door druk belaste onderrand steunen.

Deze gordingen kunnen daarbij worden uitgevoerd als liggers, of als enkele balken met schoren.

Daar een driescharnierkap uitwendig statisch bepaald is, heeft temperatuurs-verschil geen invloed op de staafkrachten.

Voor bruggenbouw is een driescharnier-constructie weinig geschikt, daar zij bij gedeeltelijke belasting aan vrij belangrijke vormveranderingen onderhevig is.

b) Reacties.

In fig. 76a, is de linkerhelft van het spant belast met P, waardoor reactie B in richting B-C loopt.

Daar de 3 krachten A, B, & P, onderling in evenwicht zijn, snijden zij elkaar in één punt, zoodat reactie A, te vinden is, door vanuit het snijpunt van B met P een lijn te trekken naar punt A, en P te ontbinden in richtingen A en B.

Is de belasting horizontaal, (fig. 76b) dan worden de voetreacties geheel op dezelfde wijze gevonden.

Voor krachten op de rechterhelft loopt reactie A in richting A-C, zoodat men bij tweezijdige belasting op ieder voetpunt 2 reacties vindt, welker resultante de totaal op het voetscharnier werkende kracht geeft (z.g.n.) Impost-druk).

Fig. 77 geeft hiervan een voorbeeld.

De diagonaal in het parallelogram, waarvan de zijden evenwijdig loopen aan A-C en C-B, is de totaal op het scharnier C werkende kracht. (zie stippellijn.)

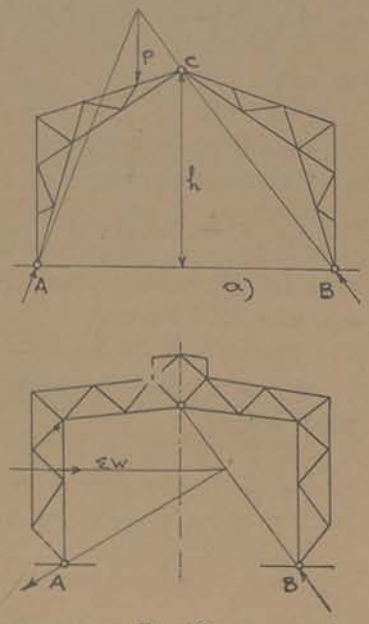


Fig. 76

Zijn alle uitwendige reacties bepaald, dan levert het bepalen der staafkrachten van een vakwerk volgens Cremona geen moeilijkheden meer op.

---

c) Impostlijn en Druklijn.

De snijpunten van een bewegende last P met het verlengde van A-C of C-B, vormen tevens de punten, waardoor de richtingen van de reacties A en B worden bepaald.

Deze punten vormen de z.g.n. *Impostlijn*, welke voor het bepalen der reacties kan worden benut.

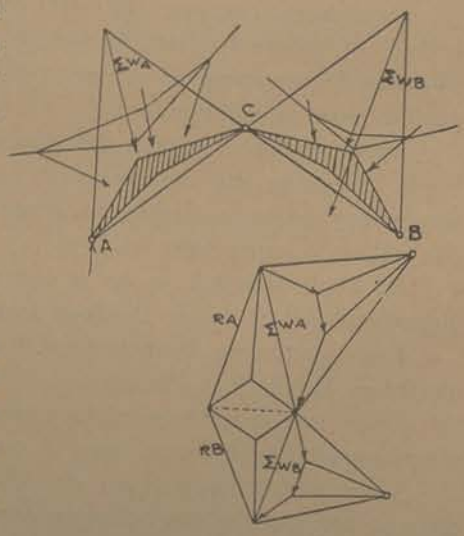


Fig. 77

De *druklijn* is de om of door de constructie gaande resultante-lijn der uitwendige krachten, en wordt benut om voor een willekeurig punt een momentenvergelijking op te stellen.

d) Volwandige constructies.

Om volwandige constructies te kunnen berekenen, bepaalt men eerst de reacties A en B, op de boven aangegeven wijze.

Hierna wordt een poolfiguur en stangenveelhoek geteekend als aangegeven in fig. 78, waardoor de DRUKLIJN wordt bepaald.

Deze druklijn is niets anders dan een vervangende krachten-lijn, en moet dus door het scharnierpunt C gaan.

De doorsnede van de boog wordt nu bepaald uit het grootste moment Ma., d.i. het product van een der krachten van de druklijn en hare afstand tot de staafas.

In fig. 78 loopt RA3 door scharnier C, zoodat het moment hier 0 is.

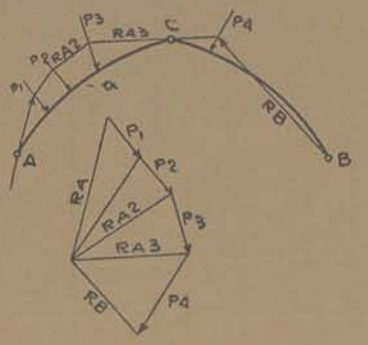


Fig. 78

Behalve met het moment M, wordt een doorsnede nog belast door een langskracht N, en een dwarskracht Q, welke men vindt door RA. (fig. 79) te ontbinden in krachten, evenwijdig en loodrecht op de gegeven doorsnede.

De dwarskracht Q wordt bij staalconstructies niet in rekening gebracht, zoodat de spanningen te bepalen zijn uit M en N.

Voor de bovenflens in fig. 79 welke door het moment een drukspanning krijgt is:

$\sigma_1 = -\frac{N}{F} - \frac{M}{W_1}$, terwijl voor de onderrand: $\sigma_2 = -\frac{N}{F} + \frac{M}{W_2}$.

Gaat RA2 tusschen de kernpunten der doorsnede door, dan krijgen σ_1 en σ_2 hetzelfde voorteeken.

Volgens Bnd. 2 vindt men de afstanden der kernpunten uit:

$$k_1 = \frac{W_2}{F} \quad \text{en} \quad k_2 = \frac{W_1}{F}.$$

Werken op een volwandige driescharnierkap alleen verticale lasten, dan zijn de op een bepaalde doorsnede werkende krachten eenvoudiger langs analytischen weg te bepalen.

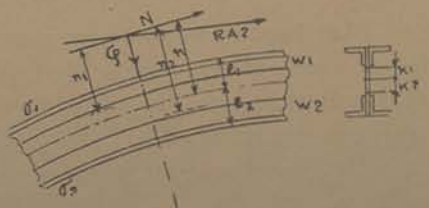


Fig. 79

Men beschouwt hiertoe overspanning A-B als een rechte balk en bepaalt voor de gegeven doorsnede het moment Mo voor de uitwendige belasting.

Voor den driescharnierkap is dit moment daarna te verminderen met het moment der horizontale voetreactie t.o.z. van het gegeven punt, zoodat:

$$M = Mo - H \,.\, y. \ldots\ldots 17)$$

H wordt bepaald als volgt:

Op den rechten balk A-B, treedt bij punt C een moment Mc op.

Bij den driescharnierkap is het moment hier 0, zoodat volgens formule 17, Mo = H . y.

Hieruit volgt (bij yc = f, fig. 80).

$$H = \frac{Mc}{f} = P.\frac{a.\,n.}{L.\,f.}$$

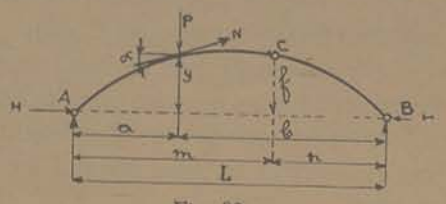


Fig. 80

Vult men deze waarde in formule 17 in, dan is onder last P (fig. 80) M = A . a — H . y. of:

$$M = P.\frac{a}{L}(b - \frac{n}{f}.y) \ldots\ldots 18)$$

Langskracht N = A. sin. α + H. cos α
Dwarskracht Q = A. cos α — H. sin α (zie ook formule 105)

Liggen de voetreacties A en B niet even hoog, (fig. 81) dan is H = Z . cos. α, waarbij $Z = \frac{Mc}{f}$.

Hierdoor wordt:
Av = Ao—Z . sin.α = Ao—H. tg.α
Bv = Bo+Z . sin.α = Bo+H. tg.α

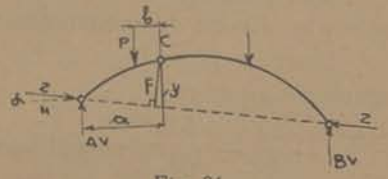


Fig. 81

Valt een enkele last P in het verlengde der lijnen B-C en A-m, dan is het moment voor punt m = Mo — H.y =
$y\,(\frac{L-p}{L}\cdot\frac{x}{y} - H) = 0$. (Fig 82)

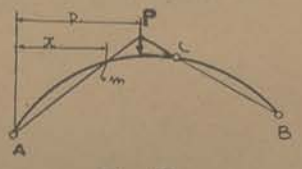


Fig. 82

Men bepaalt het moment van een enkele last voor een willekeurig punt grafisch het eenvoudigst, door de druklijnen te teekenen als in fig. 83.

Het moment voor punt m = —H . y_1.

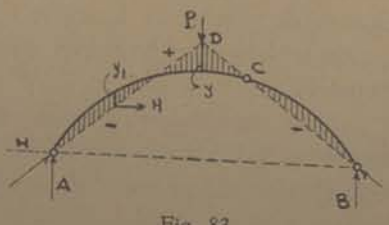


Fig. 83

Een horizontale kracht W op het scharnier (fig. 84), heeft als verticale reacties:

$$A = -B = \frac{W.f}{L} .$$

terwijl de horizontale reacties gelijk zijn aan:

$$Ha = \frac{W.m}{L} . \qquad Hb = \frac{W.n}{L} .$$

Grijpt de horizontale kracht niet in het scharnier aan, (fig. 85) dan ontbindt men haar in W_1 en W_2.

W_1 valt op punt C waarvoor de berekening der reacties gelijk wordt als in fig. 84. W_2 valt in haar geheel op voetscharnier A, zoodat deze ontbondene geen invloed op den boog doet gelden.

Naar Kögler' zijn de horizontale reacties voor W, bij niet even-hoog liggende scharnieren, het eenvoudigst te bepalen volgens de bij fig. 85 geteekende hulpfiguur.

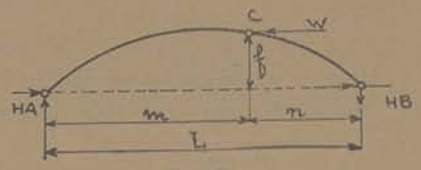


Fig. 84

Men vindt hiernaar voor:

$$Ha = W. \frac{a}{A_1 - A_2} .$$

$$Hb = W - Ha.$$

($A_1 - A_2$ = een willekeurig afstand).

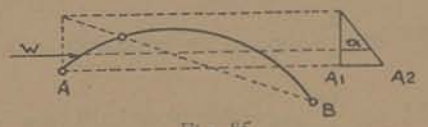


Fig. 85

Is de belasting der driescharnierboog een gelijkmatig verdeelde, dan is voor den recht gedachten balk A-B, het moment onder C = $\frac{g.L.a}{2}\left(1 - \frac{a}{L}\right)$ (fig. 86)

Daar bij een driescharnierboog het moment bij C = 0, wordt H = $\frac{Mc}{f}$, waaruit volgt:

$$H = g. \frac{a.(L-a)}{2.f} \quad \ldots\ldots\ 19)$$

Voorbeeld.

Voor den in fig. 86 geteekenden driescharnierboog is:

L = 12 Mr. f = 3 Mr.

a = 7 Mr. x = 3,5 Mr. y = 2,3 Mr.

Bij een gelijkmatig verdeelde belasting van g = 0,5 ton per meter wordt:

$H = \frac{Mc}{f} = \frac{0,5.g.a.(L-a)}{f} = 2,9$ ton.

Mxo = 0,5 . g . x. (L—x) = 0,25 . 3,5 . 8,5 = 7,44 Tonmeter.

Mx = Mxo —H . y = 7,44 — 2,9 . 2,3 = + 0,74 TMr.

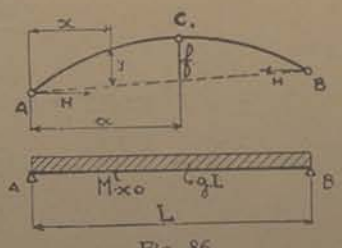


Fig. 86

Bevindt scharnier C zich op een afstand $a = \frac{1}{2} . L$, dan is bij volle belasting van g kg. per meter:

$$H = \frac{g . L^2}{8 . f} \quad \ldots\ldots \quad 20)$$

Het moment op afstanden $\frac{L}{4}$ vanaf A of B is hierbij 0, wanneer de boog een paraboolvorm heeft. (fig. 87).

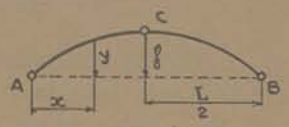


Fig. 87

De hoogten der ordinaten y zijn hierbij gelijk aan:

$$y = \frac{4 . f}{L^2} . x . (L - x).$$

Valt de gelijkmatig verdeelde belasting alleen op de halve boog-lengte, dan vindt men voor den paraboolvorm de waarden:

$$A = \frac{3}{8} . g . L. \qquad B = \frac{1}{8} . g . L.$$

$$H = \frac{g . L^2}{16 . f} .$$

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ op } \frac{L}{4} \text{ (onder de belasting)} = + \frac{g . L^2}{64} . \\ M \text{ op } \frac{L}{4} \text{ (op 2e booghelft)} = - \frac{g . L^2}{64} . \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

Heeft de driescharnierkap een cirkelboogvorm, met een scharnier in het midden, dan wordt voor de volle belasting g . L:

$$H = \frac{g . L^2}{8 . f} .$$

De momenten zijn afhankelijk van de pijlhoogte f en v/d straal r; in hiernevenstaande tabel zijn voor verschillende verhoudingen $\frac{f}{L}$ de momentenwaarden gegeven.

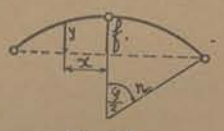


Fig. 88

De bij den boog behoorende meetkundige waarden zijn:

$$r = \frac{L^2 + 4 . f^2}{8 . f}$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} - a = f - r \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$a = \sqrt{r^2 - \frac{L^2}{4}} . \text{ (fig. 88)}$$

$\frac{f}{L}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2.5}$	$\frac{1}{2}$
m =	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,006	0,011	0,016	0,026
n =	1,02	1,02	1.03	1.04	1.05	1.08	1,12	1,20	1,28	1,41
s =	0,016	0,016	0,017	0,017	0,017	0,018	0,019	0,021	0,023	0,026

Volgens deze tabel is:

$M = -m \cdot g \cdot L^2$ (bij volle belasting)

$M = -s \cdot g \cdot L^2$ („ eenzijdige „)

$$N = n.H \begin{cases} \text{bij volle belasting wordt } H = \frac{g.L^2}{8.f}, \\ \text{bij eenzijdige belasting wordt } H = \frac{g.L^2}{16.f} \end{cases} \quad \ldots\ldots 22)$$

Volgens Melan' is de doorbuiging van een symetrische driescharnierboog in het midden:

$$\delta = \frac{L^3}{12.E.J} \cdot \frac{a}{L}\left\{\left(\frac{a}{L}\right)^3 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 + \frac{3}{40}\right\} - \frac{a\left\{8+3\left(\frac{L}{f}\right)^2\right\}}{24.E.F} \quad \ldots 23)$$

hierbij is:

a = afstand last tot voetscharnier $(< \frac{L}{2})$
L = totale overspanning.
J = het onveranderlijke traagh : moment v/d boog.
F = de „ doorsnede „ „

Bij een volle belasting van g . kg: per meter wordt:

$$\delta = \frac{g.L^2}{96.E.F} \cdot \left\{8+3\left(\frac{L}{f}\right)^2\right\} \quad \ldots\ldots 24)$$

---

e) Driescharnier-Vakwerken.

Om de grootste in het vakwerk optredende staafkrachten te bepalen teekent men hierin de z.g.n. druklijn. waarna met behulp der Ritter-methode voor iedere willekeurige staaf de betreffende staafkracht is te vinden.

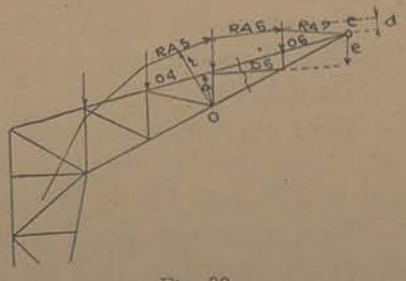


Fig. 89

Is in fig. 89 RA_5 de resultante der links van punt o aangrijpende uitwendige krachten, dan is de spanning in 04, $= -\frac{RA_5 \cdot r}{a}$.

Om de spanning in staaf D 6 te kunnen bepalen, dient de momentenvergelijking opgesteld te worden t.o.z. van punt C, zoodat:

$$D6 = + \frac{RA_6 . d}{e}.$$

Loopt de druklijn als in fig. 90, dan wordt staaf a eveneens bepaald uit het moment der links van Pn vallende krachten, welke in de figuur gelijk is aan kracht V maal hare loodrechte afstand tot het momentenpunt b.

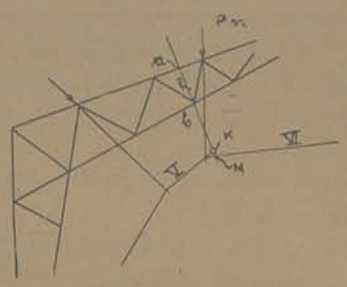


Fig. 90

Trekt men de loodrechte op a (= b-a) door tot aan het verlengde van kracht V, (snijpunt k), en ontbindt men V in dit punt in richtingen evenwijdig en loodrecht op staaf a, dan geeft de loodrecht ontbondene de dwarskracht Q, welke op punt b valt.

Zijn alle staafkrachten van het vakwerk te berekenen, dan wordt een volledig cremona geteekend, en kan de druklijn buiten beschouwing worden gelaten.

Voorbeeld.

Voor den in fig. 90a geteekende driescharnierkap is de spantafstand = 4 Meter, terwijl de totale belasting per spant

door dakbedekking = 2920 Kg.
„ plafond = 1800 „
„ eigengewicht = 3280 „

Totaal 8000 Kg; per knooppunt $= \frac{8000}{10} = 800$ Kg

Een sneeuwbelasting à 50 Kg. per M² grondvlak geeft per spant = 4000 Kg. of per knooppunt = 400 kg.

De dakhelling = 22°.

Door een winddruk à 150 kg/M² onder 10° met het horizontale vlak, komt per M² dakvlak $150 . \sin^2.(\alpha + 10) = 42$ kg. en per M² zijwand $150 . \cos^2 10° = 144$ kg.

Deze belastingen geven per knooppunt dakvlak = 360 kg, en per knooppunt zijwand = 1040 kg.

Winddruk aan de lij-zijde wordt niet gerekend.

Het berekenen der voetreacties voor de diverse belastingen geschiedt geheel op de in fig. 76 aangegeven wijze.

De totaal op het voetscharnier werkende kracht wordt bepaald uit de resultanten der horizontale en verticale reacties van deze verschillende belastingen.

Om de meest ongunstige spanningen welke in de verschillende staven kunnen optreden, te bepalen, moeten afzonderlijke cremona's worden geteekend voor:

1e. blijvende belasting (op het geheele spant)
2e. sneeuw links invloed op linkerhelft)
3e. sneeuw rechts (invloed idem)
4e. winddruk links (invloed idem)
5e. winddruk rechts (invloed idem)

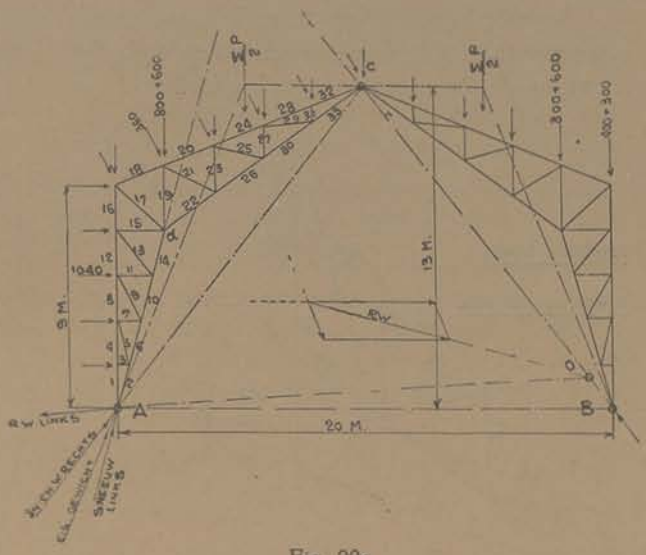


Fig. 90a

1e) CREMONA BLIJVENDE BELASTING.

(fig. 90b, 1)

Daar aan beide zijden v/h middenscharnier dezelfde belasting komt (= 4000 kg), loopt de druklijn H der totale belasting horizontaal door dit scharnier.

De snijpunten dezer horizontale met de resultanten $\frac{1}{2}.\Sigma P$, vormen de richtingspunten voor de reacties A en B.

Deze reacties horizontaal en verticaal ontbonden, geven:

H = 1540 kg. V = 4000 kg.

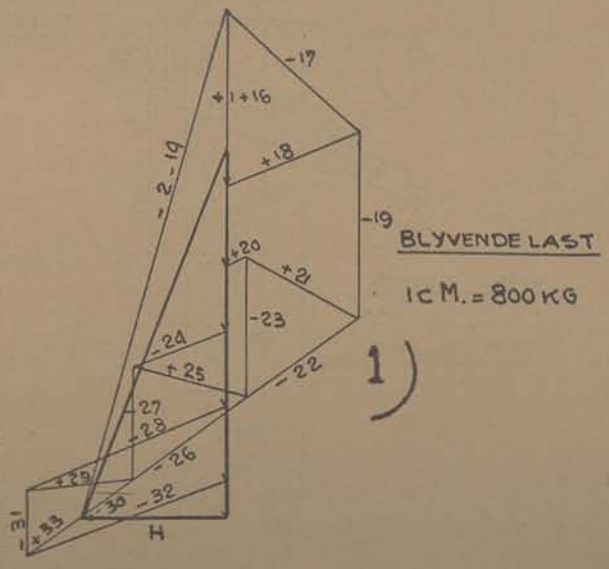


Fig. 90b

2e & 3e CREMONA'S SNEEUW LINKS EN SNEEUW RECHTS. (fig. 90b, 2 & 3).

Bij eenzijdige sneeuwbelasting loopt de reactie van het tegenovergelegen steunpunt in de richting van het middenscharnier.

Vanuit het snijpunt dezer kracht-richting met de resultante van de sneeuwlast, wordt een lijn getrokken naar het 2e steunpunt, door welker richting de 2e reactie wordt bepaald.

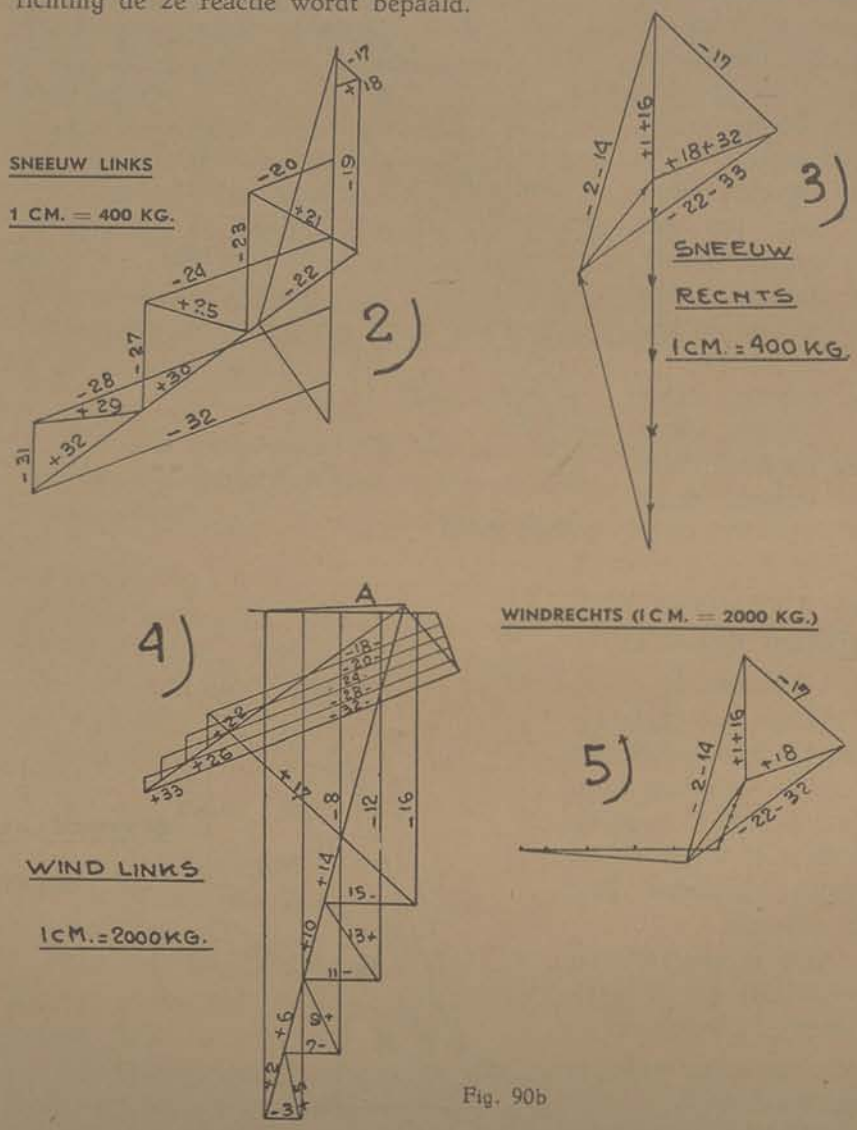


Fig. 90b

Bij volle (tweezijdige) belasting, is cremona 1) te gebruiken, met dien verstande, dat de staafkrachten hiervan zijn te vermenigvuldigen met 400/800 = 0,5.

4e. & 5e) WINDDRUK LINKS EN WINDDRUK RECHTS. (fig. 90b, 4 & 5).

Men bepaalt de resultanten van de windkrachten op de zijwand en op het dak. Deze met elkaar in snijding gebracht vormen het aangrijpingspunt der totale resultante RW, (wind op linker-spanthelft).

Resultante RW snijdt reactie B-C in punt o, waardoor de richting van reactie A (= A-o) wordt bepaald.

In onderstaande tabel zijn voor eenige staven de diverse krachten aangegeven, hieruit zijn de max. en min. eindwaarden te combineeren.

straaf.	blijv. last	sneeuw 2. knt.	idem links	idem rechts	wind links	wind rechts	S max. +	S max. —
1	+ 1500	+ 750	— 130	+ 880	— 13600	+ 3400	5780	12230
2	— 5600	— 2800	— 1500	— 1500	+ 14400	— 5800	8800	14200
3	—	—	—	—	— 1040	—	—	1040
4	+ 1500	+ 750	— 130	+ 880	— 13600	+ 3400	5780	12230
5	—	—	—	—	+ 1800	—	—	1800

enz.

Bij de staven aan de binnenzijde van het spant treden drukspanningen op, waardoor het noodzakelijk is knooppunt D' door een horizontale of verticale ligger te steunen.

Rekent men de kniklengte van deze randen van knooppunt tot knooppunt, dan dient ieder knooppunt afzonderlijk door een ligger of schoor te worden gesteund.

Statisch onbepaalde constructies.

§ 1 Arbeid.

De krachten in statisch onbepaalde constructies kunnen niet zonder meer bepaald worden met behulp van een der methoden aangegeven in hoofdstuk I.

Daar bij dergelijke constructies een of meerdere onbekende krachten (in- of uitwendig) aanwezig zijn, welke niet op de gewone wijze zijn te bepalen, dient men ter oplossing dezer onbekenden, gebruik te maken van de eigenschappen der vormverandering.

Vormverandering ontstaat door arbeid. De uitwendig op een vakwerk komende arbeid moet daarbij gelijk zijn aan de inwendig optredende arbeid wil de constructie in rust (evenwicht) zijn.

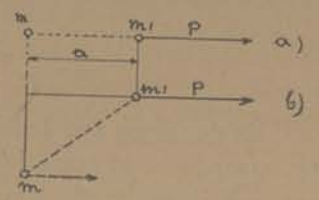


Fig. 91

a) Verschuivings-arbeid.

Wordt een punt m door de werking van een last P, verplaatst van m naar m', dan is de optredende arbeid gelijk aan kracht × weg, = P . a. (fig. 91a & b).

Afstand a is hierbij de verplaatsing van m in de richting der kracht

b) Virtueele arbeid.

De arbeid van eenige op één punt vallende willekeurige krachten, t.o.z. van een gemeenschappelijk draaipunt heet virtueel (willekeurig).

Voor de in fig. 92 geteekende krachten P_1 en P_2, aangrijpend op punt m, is de verschuiving van P_1 t.o.z. van punt m', in de richting van P_1, dus positief (+), terwijl de verschuiving van P_2 tegen haar richting in is. (—).

De virtueele arbeid voor punt m' is hierdoor gelijk aan:

Avirt: $= +P_1 . s_1 - P_2 . s_2 + P_3 . s_3$.

Is P_3 de resultante van P_1 en P_2, dan is

Avirt: $= +P_1 . s_1 - P_2 . s_2 = P_3 . s_3$.

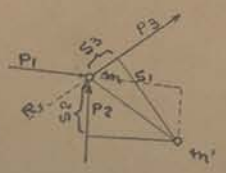


Fig. 92

c) Vormveranderings-arbeid.

Er zij ondersteld, dat de lasten P_1, P_2 en P_3 in fig. 92 de staafkrachten S op een bepaald knooppunt vormen bij een willekeurige belasting.

(Staafkracht S_3 is hierbij tegengesteld aan de richting der figuur te rekenen).

Bij deze staafkrachten S behooren de staaflengten s_1, s_2 en s_3, alsmede de lengte-veranderingen $\triangle_{s_1}$ $\triangle_{s_2}$ en $\triangle_{s_3}$.

Verschuift nu knooppunt m van m', dan dient de hierdoor ontstane arbeid gelijk en tegengesteld te zijn aan de arbeid van een uitwendige kracht welke punt m' terug wil verplaatsen naar m.

Noemt men deze uitwendige kracht = Q, en de verplaatsing van m-m' = δ, dan is de virtueele arbeid op knooppunt m:

$$\Sigma\ S.\ \triangle_s = Q.\ \delta.$$

Neemt men aan dat Q de resultante is van meerdere uitwendige krachten, dan wordt:

$$\Sigma\ Q.\ \delta = \Sigma S.\ \triangle_s \quad \ldots\ldots\ 25)$$

Daar in beide gevallen de staafkrachten door de belasting van 0 tot max. toenemen, is de verrichte arbeid:

$$A = \tfrac{1}{2}\ \Sigma\ Q.\ \delta = \tfrac{1}{2}\ \Sigma\ S.\ \triangle_s \quad \ldots\ldots\ 26)$$

hierbij is

$\frac{1}{2}\ \Sigma\ Q.\ \delta$ = uitwendig.

$\frac{1}{2}\ \Sigma S.\ \triangle_s$ = inwendig.

Deze arbeid heet *vormveranderings-arbeid* en is in waarde half zoo groot, als de hierboven aangegeven *verschuivings-arbeid*.

Voor een belaste staaf is de lengteverandering $\triangle s$ te bepalen uit: $\frac{S.s}{F.E}$, waarbij S = staafkracht en s is staaflengte.

Daar bij statisch onbepaalde constructies de werkelijke staafkracht niet vooruit kan worden berekend, daar ook Q nog onbepaald is, rekent men voorloopig voor Q (meestal de onbekende reactie) een kracht van 1 ton waarbij dan de staafkrachten S_1 behooren.

Voor deze last Q wordt nu de vormveranderings-arbeid:

$$A = \tfrac{1}{2} \sum \frac{S_1^2.s}{F.E} = \frac{\delta_1}{2} \quad \ldots\ldots\ 26a)$$

De door de werkelijke kracht Q (d.i. reactie X) veroorzaakte vormverandering wordt hiernaar

$$\delta = X.\ \delta_1.$$

Beschouwt men een statisch onbepaalde constructie zonder de onbekende reactie X, dus statisch bepaald en bij X beweegbaar, dan zal door de werkelijke belasting ter plaatse van X een doorbuiging plaats hebben groot δo

Deze doorbuiging te bepalen uit de vergelijking $\Sigma P . a.$ (zie verschuivings-arbeid). Hierbij is ΣP te herleiden in de staafkrachten So (voor de statisch bepaalde constructie) terwijl a de bij deze staafkrachten behoorende lengte-veranderingen zijn.

Daar voor een kracht So $\times$ S_1 de verandering $\triangle_{so}$ gelijk is aan So . $\triangle_{s_1}$ en $\triangle_{s_1}$ gelijk is aan $\frac{S_1 . s}{E.F.}$,wordt de verschuivings-arbeid der statisch bepaalde constructie;

$$Av = \sum \frac{So . S_1 . s}{E.F} \quad \ldots\ldots 27)$$

Brengt men dus tijdens deze belasting reactie X aan, dan moet hare kracht zoo groot zijn, dat het aangrijpings-punt weer op hare oorspronkelijke plaats der spanning-looze toestand terugkomt.

Hieruit volgt dat:

$$\delta o = X . \delta_1$$

wat gelijk is aan de „ELASTICITEITS-VERGELIJKING:

$$\sum \frac{So . S_1 . s}{E.F} = X . \sum \frac{S_1^2 . s}{E.F} .$$

Zoodat men de grootte der onbekende reactie kan bepalen uit:

$$X = \frac{\sum \frac{So . S_1 . s}{E.F}}{\sum \frac{S_1^2 . s}{E.F}} \quad \ldots\ldots 28)$$

§ 2) Enkelvoudig statisch onbepaalde constructies.

De in fig. 93 aangegeven constructies zijn alle statisch onbepaald, en daar het aantal te bepalen reacties 4 is, waartegenover 3 evenwichts-vergelijkingen staan, zijn deze constructies alle enkelvoudig statisch onbepaald.

Om de staafspanningen in deze vakwerken te kunnen berekenen, dient men eerst een dezer onbekende reacties op de in § 1 aangegeven wijze op te lossen, waartoe dus eerst de vakwerken als statisch bepaald worden beschouwd.

Hierdoor vervalt in fig. 93a de verticale reactie C, in fig. 93b de trekband, en in fig. 93c de horizontale voetreactie.

Voor deze statisch bepaalde constructies bepaalt men de reactie's met behulp der evenwichts-vergelijkingen:

$\Sigma H = O, \quad \Sigma V = O, \quad \Sigma M = O.$

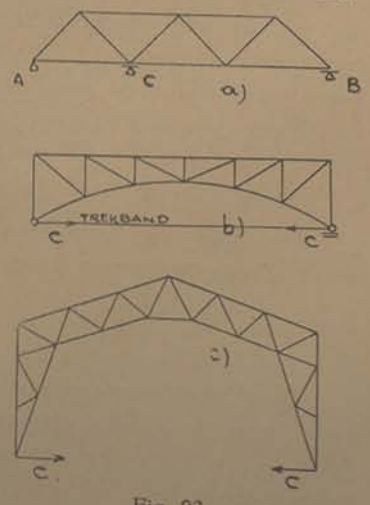


Fig. 93

De bij deze reacties en de werkelijke belasting behoorende staafkrachten So worden hierna berekend met behulp van een cremona of volgens de Ritter-methode.

Ter plaatse der 4e (onbekende) reactie is daarna een kracht te rekenen van X = —1 ton: tegengesteld aan de richting van C, waarvoor de reacties A_1 of A_1 en B_1 gelden.

De hierbij behoorende staafspanningen zijn S_1.

Volgens het in § 1 behandelde moet nu de uitbuiging van het vakwerk ter plaatse van C bij de statisch bepaalde constructie evenveel bedragen als de terugbuiging door reactie C veroorzaakt, waaruit volgt:

$\delta o = C \,.\, \delta_1$, waarbij δ_1 de terugbuiging is door X = —1 ton.

δo is te berekenen uit de verschuivings-arbeid:

$Avo = \delta o = \sum \frac{So \,.\, S_1 \,.\, s}{E \,.\, F}$, terwijl δ_1 berekend wordt uit de vormveranderings-arbeid: $2.Av_1 = \delta_1 = \sum \frac{S_1^2 \,.\, s}{E \,.\, F}$.

E = elasticiteits-modul = 2100.000 kg/cm².

F = doorsnede v/d staaf in cm².

Men bepaalt hierna:

$$C = \frac{\sum \frac{So \,.\, S_1 \,.\, s}{E \,.\, F}}{\sum \frac{S_1^2 \,.\, s}{E \,.\, F}} = \frac{\sum \frac{So \,.\, S_1 \,.\, s}{F}}{\sum \frac{S_1^2 \,.\, s}{F}} \quad \ldots\ldots 28a)$$

De staafkrachten So zijn de totale krachten, ontstaan door de belastingen: eigengewicht, sneeuw, wind en/of blijvende last.

Daar de juiste eindkrachten So—C . S_1 nog niet bekend zijn, worden de doorsneden F voorloopig geschat.

Blijkt na het bepalen der eindkrachten dat deze schatting zeer onzuiver is geweest, dan dient de berekening opnieuw te worden gemaakt.

Voorbeeld.

In fig. a van de in fig. 94 aangegeven constructie zijn de staafkrachten So ingevuld (ligger op 2 steunpunten) terwijl in fig. b de staafkrachten S_1 zijn aangegeven voor X = —1 ton.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Voorloopig wordt gekozen voor

staaf 1—9 2 . U NP88 met F = 22 cm²
staaf 0—11 2 ◁ 80-40-6 F = 14 „
de diagonalen 2 . U NP10 F = 27 „
de verticalen 2 . U NP6½ F = 18 „

Voor iedere staaf worden daarna de waarden $\frac{So.\ S_1.\ s}{F}$ en $\frac{S_1^2.s}{F}$ berekend, zooals in onderstaande tabel is aangegeven.

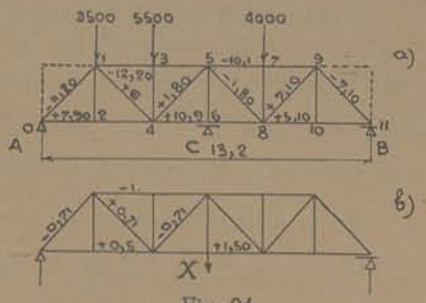


Fig. 94

Na het bepalen der algebraïsche sommen vindt men door deeling:

$$C = \frac{+\ 14.214}{+\ 1,732} = +\ 8 \text{ ton.}$$

Daar C positief is wordt hare richting tegengesteld aan de oorspronkelijk aangenomen richting voor X = — 1 ton.

Staaf.	Staaf-lengte	F = cM²	So By x = o	S_1 x = — 1 ton	$\frac{So.\ S_1.\ S}{F}$	$\frac{S_1^2.\ S}{F}$	S = So — S_1.x
0 — 1	3,11	27,—	— 11,20	— 0,71	+ 0,915	+ 0,058	— 5,52
1 — 2	2,20	18,—	—	—	—	—	—
0 — 2	„	14,—	+ 7,90	+ 0,50	+ 0,621	+ 0,039	+ 3,90
1 — 3	„	22,—	— 12,20	— 1,—	+ 1,220	+ 0,100	— 4,20
1 — 4	3,11	27,—	+ 6,—	+ 0,71	+ 0,490	+ 0,058	+ 0,32
2 — 4	2,20	14,—	+ 7,90	+ 0,50	+ 0,621	+ 0,039	+ 3,90
3 — 4	„	18,—	— 5,50	—	—	—	— 5,50
3 — 5	„	22,—	— 12,20	— 1,—	+ 1,221	+ 0,100	— 4,20
4 — 5	3,11	27,—	+ 1,80	— 0,71	— 0,147	+ 0,058	+ 7,48
4 — 6	2,20	14,—	+ 10,90	+ 1,50	+ 2,570	+ 0,353	— 1,10
5 - 6	„	18,—	—	+ 1,—	—	+ 0,122	— 8,—
5 — 7	„	22,—	— 10,10	— 1,—	+ 1,010	+ 0,100	— 2,10
5 — 8	3,11	27,—	— 1,80	— 0,71	+ 0,147	+ 0,058	+ 3,88
6 — 8	2,20	14,—	+ 10,90	+ 1,50	+ 2,570	+ 0,353	— 1,10
7 — 8	„	18,—	— 4,—	—	—	—	— 4,—
7 — 9	„	22,—	— 10,10	— 1,—	+ 1,010	+ 0,100	— 2,10
8 — 9	3,11	27,—	+ 7,10	+ 0,71	+ 0,582	+ 0,058	+ 1,42
8 — 10	2,20	14,—	+ 5,10	+ 0,50	+ 0,401	+ 0,039	+ 1,10
9 — 10	„	18,—	—	—	—	—	—
10 — 11	„	14,—	+ 5,10	+ 0,50	+ 0,401	+ 0,039	+ 1,10
9 — 11	3,11	27,—	— 7,10	— 0,71	+ 0,582	+ 0,058	— 1,42
				Σ	+ 14,214	+ 1,732	

PERPUSTAKAAN NASIONAL

De som der 3 reacties A, B en C, is dezelfde als die der reacties Ao en Bo der statisch bepaald gerekende constructie, zoodat de werkelijke reactie A gelijk is aan: Ao—C . A_1, terwijl B = Bo — C . B_1.

Met deze definitieve reacties wordt nu een nieuwe cremona geteekend, waarbij de werkelijke staafkrachten gelijk worden aan:

$$S = So - C . S_1.$$

Deze staafkrachten blijken c.a. de helft kleiner te wezen dan de krachten So, waarop de doorsneden F gebaseerd zijn.

Het verdient dus aanbeveling ter verkrijging eener lichtere constructie de doorsneden te herzien en de berekening te corrigeeren.

Voor bovenstaande constructie is de doorbuiging van punt C, (bij weglating der statisch onbepaalde reactie)

$$\delta o = \sum \frac{So . S_1 . s}{E . F} = \frac{1421,4}{E} = \frac{1421,4}{2100} = 0,68 \text{ cm.}$$

Men ziet wel eens X = + 1 ton in dezelfde richting als de te bepalen reactie aangebracht.

De staafkrachten S_1 veranderen hierdoor van voorteeken, waardoor reactie C in bovenstaande berekening gelijk wordt aan —8 ton.

De werkelijke staafkrachten S behouden echter dezelfde eindwaarde daar S = So — (— S_1 . — C)

Bij verdere beschouwing der figuren 93 a . b en c blijkt dat, door de aanwezige reactie C, de trekband in fig. b aan lengte-verandering onderhevig is, terwijl bij de beide andere figuren de aangrijpings-punten van C niet verschuifbaar zijn.

Deze verlenging der trekband heeft tot gevolg, dat de vrije oplegging een gedeelte δ_2 naar buiten uitzet, waardoor dus reactie C kleiner wordt.

Men dient deze trekband daarom als een onderdeel van het vakwerk te beschouwen, waarbij zij in het eerste geval belast is met X = 0, en in het tweede geval met X = —1 ton, waaruit staafkracht S_1 = + 1 ton.

De hierbij behoorende waarde $\frac{S_1^2 . s}{F}$ dient dus bij $\sum \frac{S_1^2 . s}{F}$ te worden gevoegd, om de juiste grootte van reactie C te vinden. (zie formule 34).

Een andere invloed welke de grootte van C kan wijzigen is temperatuurs-verandering.

Voor Holland rekent men als normaal temperatuurs-verschil ± 60° Fahrenheit, d.i. 35° Celcius, terwijl voor Indië met een verschil van 25° Celcius is te rekenen. Het werkelijke temperatuurs-verschil is inderdaad grooter, doch gerekend wordt dat bij een gemiddelde temperatuur, montage plaats heeft.

Alleen in bijzondere gevallen zooals b.v. bij ketelruimten, gebouwen voor smeltovens enz., dient dit verschil te worden verhoogd.

Men kan de temperatuurs-verandering als een belasting beschouwen, waardoor verkortingen of verlengingen in de diverse staven ontstaan.

De uitzettingscoefficient ξ voor vloeistaal = 0,000012 . s bij 1°.

Noemt men het temperatuurs-verschil in graden = t.
de staaflengte = s.
de staafkrachten voor X = — 1 ton = S_1.
en de elasticiteits-modul = 2100.000 kg/cm² = E
dan is de verschuivings-arbeid bij temperatuurs-verandering

$$\delta_3 = \Sigma S_1 . \xi . t . s . \ldots\ldots 29)$$

Daar in de meeste gevallen het temperatuurs-verschil voor alle staven van het vakwerk gelijk is, kunnen we $\Sigma S_1 . \xi . t . s$ vervangen door:

$$\delta_3 = \xi . t . L,$$

zoodat de kracht welke reactie C beinvloed gelijk is aan:

$$C_3 = \frac{\xi . t . L}{\sum \frac{S_1^2 . s}{E . F}} \ldots\ldots 30)$$

Bij een tweescharnierkap heeft temperatuurs-verschil geen invloed op de staafkrachten, wanneer een trekband aanwezig is welke vrij kan uitzetten, dus indien een der scharnier-punten in zijn geheel rust op een beweegbare oplegging.

De staafspanningen door C_3 vindt men uit $S_3 = C_3 . S_1$ of volgens cremona.

De totale reactie C, met inachtname van het temperatuurs-verschil wordt nu:

$$C_{max} = \sum \frac{So . S_1 . \rho}{S_1^2 . \rho} + \frac{\xi . t . L}{\Sigma S_1^2 . \rho} \ldots\ldots 31)$$

hierbij is $\rho = \frac{s}{E . F}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Voorbeeld.

Voor de in fig. 95 geteekende tweescharnier-constructie is voetreactie C te bepalen.

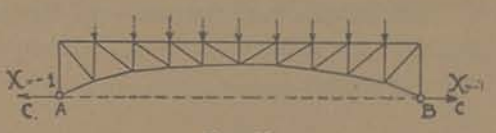


Fig. 95

Men berekent eerst de staafkrachten So voor de vrij opgelegde constructie en de werkelijke belasting.

Voor X = —1 ton worden hierna de staafkrachten S_1 bepaald.

Men vindt voor reactie:

$$C_1 = \frac{\sum \frac{So.\ S_1.\ s}{F}}{\sum \frac{S_1^2.\ s}{F}} \quad \text{(door de belasting)}$$

$$C_2 = \frac{\xi.\ E.\ t.\ \Sigma\ S_1.\ s}{\sum \frac{S_1^2.\ s}{F}} \quad \text{(door temperatuurs-verandering)}$$

Is deze temperatuurs-verandering voor alle staven even groot dan is:

$$C_2 = \frac{\xi.\ E.\ Fc.\ t.\ L}{\Sigma\ S_1^2.\ s} \ ^*)$$

Hierbij is Fc de gemiddelde randdoorsnede, en $\xi\ .\ E = 25$.

Zou een der steunpunten zich over een afstand $\triangle$ L kunnen verplaatsen, dan is C te verminderen met:

$$C_3 = \frac{E.\ \triangle\ L}{\sum \frac{S_1^2.\ s}{F}} \quad \ldots\ldots\ 32)$$

Voorbeeld.

Bij de in fig. 95a geteekende tweescharnierkap is de belasting per knooppunt door de:

Blijvende belasting	=	1450 kg.
Wind op dakvlak	=	360 ,,
,, ,, wand (bij d)	=	1250 ,,
,, ,, ,, (,, c)	=	620 ,,

*) C_1 kan positief of negatief zijn al naar gelang voor de temperatuur een vermeerdering of vermindering is gerekend.

Belasting door sneeuw en temperatuurs-verschil wordt buiten beschouwing gelaten, daar de berekening hiervoor geheel op dezelfde wijze geschiedt.

Blijvende belasting.

Voor de bij A of B vrij opgelegd gerekende constructie wordt voor deze belasting een cremona geteekend, waarvan de staafkrachten aangeduid zijn met Sp. (fig. b).

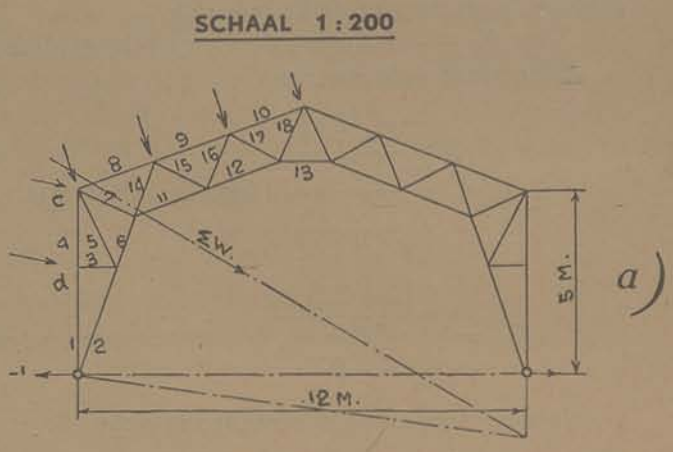


Fig. 95a

Voor X = —1 ton is in fig. d een cremona geteekend, waarvoor de staafkrachten S_1 gelden.

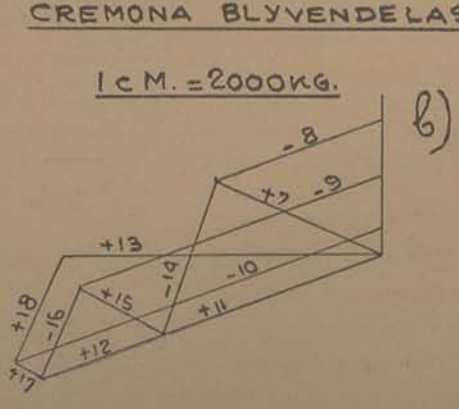
Winddruk.

Men rekent het tegenover de windzijde gelegen scharnier voorloopig los opgelegd.

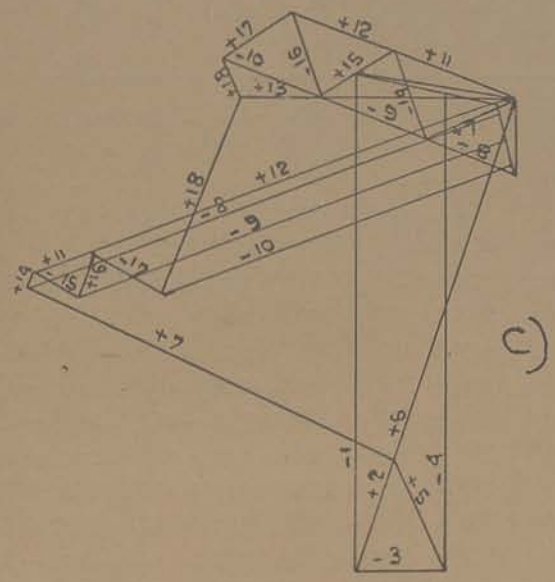
Dit scharnier is te kiezen, omdat hiervoor direct de totale eindreactie C gevonden wordt.

Immers is hier de eindreactie gelijk aan Xp + Xwh + Xwv. (fig. 95 b).

Hierbij zijn Xwh en Xwv de reacties voor de horizontaal en verticaal ontbondenen van W.



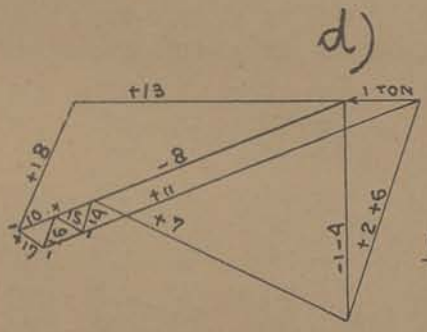
In nevenstaande tabel zijn voor de diverse staven de verschillende



CREMONA WINDBELASTING

1 C M. = 1000 KG.

Fig. 95a



CREMONA

- 1 TON

1 C M. = 1000 KG.

waarden voor S aangegeven, terwijl tevens de werkelijke eindspanningen voor de blijvende en de totale belasting zijn vermeld.

	Staaflengte s cm	Blijvende last Sp Ton	Door wind Sw. Ton	Totaal So Ton	Door H = −1 Ton S_i	Doorsnede F cm²	$S_i^2 . S / F$	$Sp\, S_i . S / F$	$So . S_i . S / F$	$Xp . S_i$	$X . S_i$	$Sp - Xp . S_i$	$So - X . S_i$
1	290	— 3,62	— 6,60	— 10,22	— 2,90	20	122	+ 152	+ 430	— 4,35	— 7,25	+ 0,73	— 2,97
2	310	—	+ 6,75	+ 6,75	+ 3,10	20	149	—	+ 324	+ 4,65	+ 7,70	— 4,65	— 0,95
3	100	—	— 1,22	— 1,22	—	10	—	—	—	—	—	—	— 1,22
4	210	— 3,62	— 6,40	— 10,02	— 2,90	20	88	+ 110	+ 305	— 4,35	— 7,25	+ 0,73	— 2,77
5	235	—	+ 1,60	+ 1,60	—	10	—	—	—	—	—	—	+ 1,60
6	145	—	+ 5,20	+ 5,20	+ 3,10	20	70	—	+ 115	+ 4,65	+ 7,75	— 4,65	— 2,55
7	165	+ 4,60	+ 5,55	+ 10,15	+ 3,75	10	232	+ 285	+ 630	+ 5,62	+ 9,37	— 1,02	+ 0,78
8	213	— 4,40	— 6,85	— 11,25	— 3,57	20	135	+ 167	+ 425	— 5,35	— 8,92	+ 0,95	— 2,33
9	213	— 8,33	— 6,30	— 14,63	— 4,15	20	184	+ 369	+ 645	— 6,24	— 10,39	— 2,09	— 4,24
10	213	— 10,25	— 5,20	— 15,45	— 4,75	20	240	+ 518	+ 780	— 7,15	— 11,90	— 3,10	— 3,55
11	200	+ 5,90	+ 7,10	+ 13,—	+ 4,82	15	310	+ 380	+ 835	+ 7,22	+ 12,04	— 1,32	+ 0,96
12	200	+ 9,50	+ 6,25	+ 15,75	+ 5,40	15	388	+ 685	+ 1130	+ 8,10	+ 13,50	+ 1,40	+ 2,25
13	152	+ 8,20	+ 3,90	+ 12,10	+ 4,68	10	333	+ 583	+ 862	+ 7,03	+ 11,71	+ 1,17	+ 0,39
14	157	— 4,40	+ 0,20	— 4,20	— 0,45	15	2	+ 21	+ 20	— 0,68	— 1,13	— 3,72	— 3,07
15	156	+ 2,62	— 0,70	+ 1,92	+ 0,45	10	3	+ 18	+ 13	+ 0,68	+ 1,13	— 1,54	+ 0,79
16	166	— 2,80	+ 0,60	— 2,20	— 0,50	10	2	+ 23	+ 18	— 0,75	— 1,25	— 2,05	— 0,95
17	148	+ 0,80	— 1,10	— 0,30	+ 0,45	10	2	+ 5	— 2	+ 0,68	+ 1,13	+ 0,12	— 1,43
18	173	+ 3,20	+ 2,85	+ 6,05	+ 1,83	10	6	+ 101	+ 192	+ 2,74	+ 4,57	+ 0,46	+ 1,48
18'	173	+ 3,20	+ 0,55	+ 3,75	+ 1,83	10	6	+ 101	+ 118	+ 2,74	+ 4,57	+ 0,46	— 0,82
17'	148	+ 0,80	+ 1,20	+ 2,—	+ 0,45	10	2	+ 5	+ 13	+ 0,68	+ 1,13	+ 0,12	+ 0,87
16'	166	— 2,80	— 1,20	— 4,—	— 0,50	10	2	+ 23	+ 33	— 0,75	— 1,25	— 2,05	— 2,75
15'	156	+ 2,62	+ 1,25	+ 3,87	+ 0,45	10	3	+ 18	+ 27	+ 0,68	+ 1,13	+ 1,54	+ 2,74
14'	157	— 4,40	— 1,30	— 5,70	— 0,45	15	2	+ 21	+ 27	— 0,68	— 1,13	— 3,72	— 4,57
12'	200	+ 9,50	+ 3,30	+ 12,80	+ 5,40	15	388	+ 685	+ 918	+ 8,10	+ 13,50	+ 1,40	— 0,70
11'	200	+ 5,90	+ 1,75	+ 7,65	+ 4,82	15	310	+ 380	+ 490	+ 7,22	+ 12,04	— 1,32	— 4,39
10'	213	— 10,25	— 4,40	— 14,65	— 4,75	20	240	+ 518	+ 743	— 7,15	— 11,90	— 3,10	— 2,75
9'	213	— 8,33	— 2,90	— 11,23	— 4,15	20	184	+ 369	+ 497	— 6,24	— 10,39	— 2,09	— 0,84
8'	213	— 4,40	+ 1,35	— 3,05	— 3,57	20	135	+ 167	+ 116	— 5,35	— 8,92	+ 0,95	+ 5,87
7'	165	+ 4,60	+ 1,35	+ 5,95	+ 3,75	10	232	+ 285	+ 367	+ 5,62	+ 9,37	— 1,02	— 3,42
6'	145	—	—	—	+ 3,10	20	70	—	—	+ 4,15	+ 7,75	— 4,65	— 7,75
5'	235	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—
4'	210	— 3,62	— 1,10	— 4,72	— 2,90	20	88	+ 110	+ 143	— 4,35	— 7,25	+ 0,73	+ 2,53
3'	100	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—
2'	310	—	—	—	+ 3,10	20	149	—	—	+ 4,65	+ 7,25	— 4,65	— 7,75
1'	290	— 3,62	— 1,10	— 4,72	— 2,90	20	122	+ 152	+ 198	— 4,35	— 7,25	+ 0,73	+ 2,53
						$\sum$	4199	+ 6251	+ 10412				

De reacties voor de blijvende en de totale belasting zijn volgens deze tabel:

$$Xp = \frac{+6251}{+4199} = +1{,}50 \text{ ton, en}$$

$$C_{totaal} = \frac{+10412}{+4199} = +2{,}50 \text{ ton.}$$

Daar deze reacties positief zijn, is hare richting tegengesteld aan die der oorspronkelijk aangenomen kracht van — 1 ton.

De werkelijke staafkrachten zijn voor de blijvende last:

$$S = Sp - Xp \,.\, S_1$$

en voor de gecombineerde blijvende- en windbelasting:

$$S = So - C \,.\, S_1$$

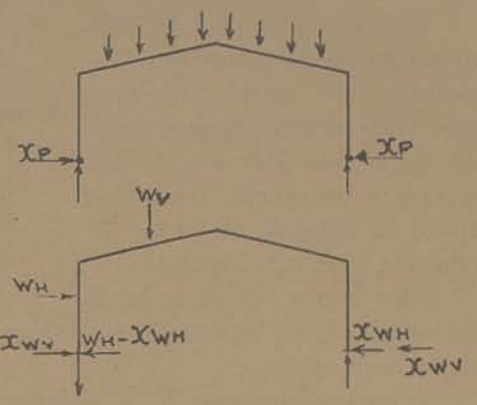


Fig. 95b

Beschouwt men het linkerscharnier in fig. 95a voor de statisch bepaalde constructie als vrij opgelegd, dan vindt men voor de staafkrachten Sw en So andere waarden.

De algebraïsche som der waarden $\frac{So \,.\, S_1 \,.\, s}{F}$ wordt hierdoor gewijzigd in 989 eenheden, waarna reactie C = + 0,24 ton.

Deze reactie grijpt echter aan op het linker-scharnier, en is de resultante uit Xp van de blijvende last, (= 1,5 ton) Xwv van de verticaal ontbondene der windkrachten (= 0,14 ton) en een tegengestelde kracht (als reactie van de horizontale windbelasting) welke gelijk is aan: 1,5 + 0,14 —0,24 = 1,4 ton. (fig. 95b).

De totale horizontale winddruk is 2240 kg, zoodat de reactie hiervoor op het rechter-scharnier gelijk wordt aan 2240 — 1400 = 840 kg.

Op dit rechterscharnier werken tevens de krachten Xp en Xwv, waardoor de totale reactie hier gelijk wordt aan 1,5 + 0,14 +0,84 = 2,5 ton.

Hieruit blijkt dus dat de rechterreactie steeds + 2,5 ton blijft, onverschillig of de losse oplegging rechts of links wordt aangenomen.

De staafkrachten Sw hebben echter bij aanname der losse oplegging links een andere waarde dan bij aanname dezer oplegging aan de rechterzijde, zoodat tevens de eindwaarden S zullen verschillen.

Over het algemeen zullen in het eerste geval de staafkrachten in de linkerhelft hooger en in de rechterhelft lager zijn dan in het tweede geval.

Het is daarom aan te bevelen bij niet loodrechte belasting de eindspanningen niet te berekenen uit $S = So - C \cdot S_1$, doch deze te bepalen volgens Cremona, aan de hand van de gevonden eindreacties.

Het spant in fig. 96 is aan beide stijlen scharnierend verbonden.

Door de inklemming der stijlvoeten zullen de stijlen een verplaatsing der spantopleggingen door vormverandering tegen willen gaan, waardoor dus op het spant een onbekende horizontale kracht C optreedt, welke op de volgende wijze is te bepalen.

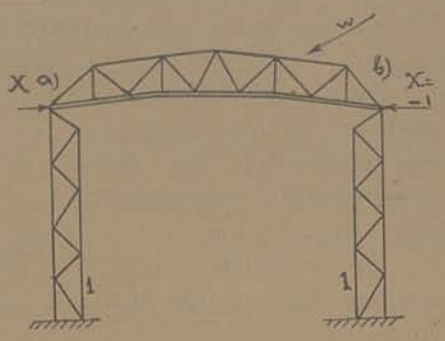


Fig. 96

Men rekent het spant bij B vrij opgelegd, en bepaalt de staafspanningen So in het spant, zoowel als in beide stijlen.

Hierna worden voor $X = -1$ ton de staafspanningen S_1 bepaald, waarbij $-X$ op de stijlen volgens fig. 96 en $-X$ op het spant tegengesteld aan deze richting wordt genomen.

Uit de verhoudingen der waarden $\sum \frac{So.\ S_1.\ s}{F}$ en $\sum \frac{S_1^2.\ s}{F}$ (inclusief de staven der beide kolommen) wordt daarna reactie C bij de spantoplegging gevonden *).

De liggerconstructie in fig. 97 is 2-voudig statisch onbepaald.

Verdeelt men echter de horizontaal ontbondene van P gelijk over beide steunpunten A en B, dan wordt deze constructie enkelvoudig statisch onbepaald.

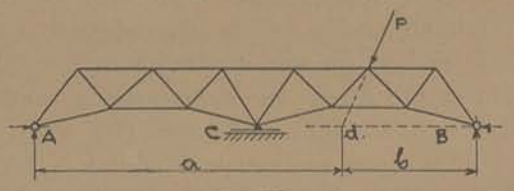


Fig. 97

Bij voorloopige weglating van het middensteunpunt, worden de reacties Ao en Bo:

$$Ao = \frac{Pv.\ b}{a+b}. \qquad Bo = \frac{Pv.\ a}{a+b}.$$

Voor Pv en H zijn de staafkrachten So te bepalen terwijl voor $X = -1$ ton in punt C de staafkrachten S_1 worden berekend.

Hierna is reactie C te bepalen uit $\dfrac{\sum \frac{So.\ S_1.\ s}{F}}{\sum \frac{S_1^2.\ s}{F}}$.

---

*) Deze berekening is alleen toe te passen als de onderrand van het spant sterk gebogen is, waardoor C vrij groot kan worden. Bij vlakke onderranden is C practisch nul.

Is het midden-steunpunt elastisch, wat het geval is wanneer hier b.v. een opvangbalk ligt met een lengte L_1 en belast met het spant in het midden, (fig. 98) dan zal dit oplegpunt door $X = -1$ ton over een afstand van $\frac{1 . L_1^3}{48 . J . E}$ doorbuigen.

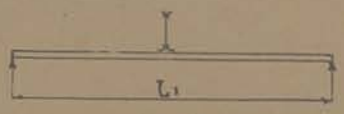


Fig. 98

De totale reactie C wordt dus kleiner, zoodat de werkelijke reactie gelijk wordt aan:

$$C = \frac{\sum \frac{So . S_1 . s}{F}}{\sum \frac{S_1^2 . s}{F} + \frac{L_1^3}{48 . J}} \quad \ldots\ldots 33)$$

Is de middenoplegging een stijl, welke door $X = -1$ ton een waarde δ_2 indrukt, dan is de verschuivings-arbeid $= \delta_2 . S_2$ ($S_2 = -1$ ton).

Hierdoor wordt:

$$C = \frac{\sum \frac{So . S_1 . s}{F}}{\sum \frac{S_1^2 . s}{F} + \frac{S_2^2 . s}{F}} \quad \ldots\ldots 34)$$

Een ander voorbeeld van vermindering van het aantal onbekende reacties is in fig. 99 aangegeven.

Windkracht W geeft bij gelijke verdeeling over beide portaalhelften in doorsnede 0 geen moment, doch alleen een verticaalkracht V.

De middenstaaf der onderrand is dus spanningloos, zoodat op punt 0 per helft de halve horizontale windkracht W en een onbekende verticaalkracht V optreedt.

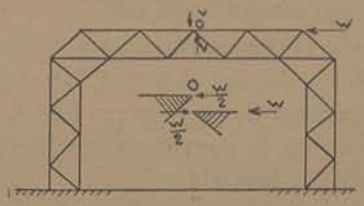


Fig. 99

Door $V = 1$ ton ontstaan per helft de staafspanningen S_1 welke in de beide helften aan elkaar tegengesteld zijn.

De staafkrachten So ontstaan door de windbelasting $\frac{W}{2}$ per helft.

Na het voorloopig bepalen der profielen vindt men;

$$V = \frac{\sum \frac{So . S_1 . s}{F}}{\sum \frac{S_1^2 . s}{F}}$$

Is het traagheidsmoment der stijlposten en der regels onveranderlijk, dan rekent men eenvoudiger volgens onderstaande formule.

$$V = \frac{W.\ h}{L\left(\frac{L}{3.\ n.\ h} + 2\right)} \quad \ldots\ldots\ 35)$$

hierbij is:

$n = \frac{J_2}{J_1}$, waarbij

J_2 = traagheidsmoment van de ligger.

J_1 = „ „ „ stijlen.

Als staafas wordt hierbij de zwaarteas der gezamenlijke randprofielen gekozen. (fig. 100).

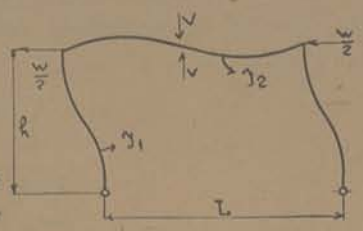


Fig. 100

---

§ 3) Meervoudig statisch onbepaalde constructies.

a)

De ligger in fig. 101 is tweevoudig statisch onbepaald, waarbij reacties C en D als statisch onbepaalde grootten worden gekozen.

Worden deze voorloopig op 0 gesteld, dan krijgt de ligger een overspanning $L_1 + L_2 + L_3$, voor welke overspanning de staafkrachten So der werkelijke belasting worden berekend.

Hierna worden voor een last $X = -1$ ton in punt C de staafkrachten S_1 en voor een last $X = -1$ ton in punt D de staafkrachten S_2 bepaald.

Voor de onbekende reacties C en D gelden nu de volgende elasticiteits-vergelijkingen.

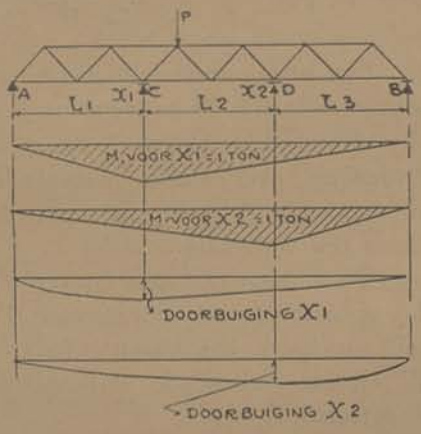


Fig. 101

$$\sum \frac{So.\ S_1.\ s}{E.\ F} - C.\sum \frac{S_1^2.\ s}{E.\ F} - D.\sum \frac{S_1.\ S_2.\ s}{E.\ F} = 0.$$

$$\sum \frac{So.\ S_2.\ s}{E.\ F} - C.\sum \frac{S_1.\ S_2.\ s}{E.\ F} - D.\sum \frac{S_2^2.\ s}{E.\ F} = 0 \quad \ldots\ldots\ 36)$$

Door in deze formules C om te werken in haar verhouding tot D, kunnen beide reacties C en D op eenvoudige wijze worden bepaald.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Bij symetrische vakwerken is $\sum \frac{S_1^2 . s}{E . F}$ gelijk aan $\sum \frac{S_2^2 . s}{E . F}$ zoodat, bij gelijke belasting op beide helften

$$C = D = \frac{\sum \frac{So . S_1 . s}{F}}{\sum \frac{S_1^2 . s}{F} + \sum \frac{S_1 . S_2 . s}{F}} \quad \ldots\ldots 36a)$$

Bij temperatuurs-verschil is aan de eerste vergelijking in formule 36 nog toe te voegen:

$$+ \Sigma S_1 . \xi . t . s.$$

en aan de tweede:

$$+ \Sigma S_2 . \xi . t . s.$$

Voor temperatuurs-verschil alleen gelden de volgende vergelijkingen, waarbij Ct en Dt de optredende reacties zijn *).

$$\left.\begin{aligned} Ct \sum \frac{S_1^2 . s}{E . F} + Dt \sum \frac{S_1 . S_2 . s}{E . F} - \xi . t . \Sigma S_1 . s = 0 \\ Ct \sum \frac{S_1 . S_2 . s}{E . F} + Dt \sum \frac{S_2^2 . s}{E . F} - \xi . t . \Sigma S_2 . s = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 37)$$

b)

De in fig. 102 geteekende constructie is eveneens tweevoudig statisch onbepaald, waarbij de horizontale voetreactie en de kracht in de trekband de onbekende reacties vormen.

Men berekent deze constructie eerst als statisch bepaald, dus zonder trekband en vrij opgelegd; de hierbij optredende staafkrachten zijn So.

Hierna worden de krachten S_1 voor $X = -1$ ton aan de voet en de krachten S_2 voor $X = -1$ ton ter plaatse van de trekband berekend.



Fig. 102

De elasticiteits-vergelijkingen voor de beide onbekende reacties zijn gelijk *aan formule* 36.

Men vindt de staafkrachten S uit:

$S = So - S_1 . C - S_2 . D.$

Daar voor dit geval in formule 37 $\xi . t \Sigma S_1 . s = \xi . t . L$ en $\xi . t \Sigma S_2 . s = 0$, gaat deze vergelijking over in:

(* Liggen de steunpunten even hoog dan is bij gelijke verwarming Ct en Dt = 0.

$$\left.\begin{aligned} Ct \sum \frac{S_1^2 . s}{F} + Dt \sum \frac{S_1 . S_2 . s}{F} - \xi . t . L . E = 0. \\ Ct \sum \frac{S_1 . S_2 . s}{F} + Dt \sum \frac{S_2^2 . s}{F} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 37a)$$

c)

Uit het bovenstaande blijkt, dat voor iedere onbekende reactie in een statisch onbepaalde constructie een extra elasticiteits-vergelijking dient te worden toegevoegd, wil men deze reactie kunnen bepalen.

Voor een veelvoudig statisch onbepaald vakwerk wordt dan de vergelijking voor de onbekende

reactie Xa;

$$La + \delta a = \Sigma\, Sa\, So.\rho - Xa.\, \Sigma\, Sa^2.\rho - Xb.\, \Sigma\, Sa.Sb.\rho - Xc.\, \Sigma\, Sa.Sc.\rho - \ldots\ldots + \Sigma\, Sa.\xi\, t.s$$

reactie Xb;

$$Lb + \delta b = \Sigma\, Sb.So.\rho - Xa.\, \Sigma\, Sb.Sa.\rho - Xb.\, \Sigma\, Sb^2.\rho - Xc.\, \Sigma\, Sb.Sc.\rho - \ldots\ldots + \Sigma\, Sb.\xi.t.s$$

reactie Xc;

$$Lc + \delta c = \Sigma\, Sc.So.\rho - Xa.\, \Sigma\, Sc.Sa.\rho - Xb.\, \Sigma\, Sc.Sb.\rho - Xc.\, \Sigma\, Sc^2.\rho - \ldots\ldots + \Sigma\, Sc.\xi.t.s$$

Enz. 38

hierbij is $\rho = \frac{s}{E.F}$

De waarden La, L_b enz; zijn de virtueele arbeidswaarden voor de betreffende steunpunten van het statisch bepaald gerekende vakwerk bij de diverse belastingen X = —1 ton.

Hiervoor is echter zonder bezwaar 0 te rekenen.

δa, δb enz. zijn de eventueele verschuivingen der oplegpunten, waarvoor in normale gevallen eveneens 0 wordt gerekend.

Het berekenen van meervoudig statisch onbepaalde constructies volgens bovenstaande elasticiteits-vergelijkingen wordt echter bij meer dan twee onbekenden te omslachtig, zoodat men beter de in de volgende § behandelde stelling van „**Maxwell**" kan toepassen, welke sneller en overzichtelijker deze onbekende reacties doet vinden.

§ 4) Het bepalen der reacties uit de buigingslijn.

a) Algemeen.

De onbekende steunpunts-reacties van een statisch onbepaalde constructie zijn eveneens te bepalen uit de verhoudingen der ordinaten van de buigingslijn, behoorende bij de statisch bepaald gerekende constructie.

Deze buigingslijn is op verschillende manieren te verkrijgen. Voor volwandige constructies of eenvoudige vakwerkliggers met evenwijdige randen teekent men het momentenvlak voor X = 1 ton (constructie vrij opgelegd) en rekent dit vlak opnieuw als belastingvlak, waarvoor dus een nieuwe momentenlijn is te teekenen.

Deze momentenlijn is de buigingslijn voor X = 1 ton, en behoort bij de vrij opgelegde constructie.

Voor vakwerken met niet evenwijdige randen of onsymetrische liggers bepaald men de buigingslijn het beste met behulp van het in hoofdstuk IV behandelde verschuivingsplan van Williot.

Na het opteekenen der buigingslijn berekent men de onbekende reacties met behulp van de:

b) Stelling van Maxwell.

Voor een belast lichaam vindt men in de verschuivingen de volgende verhoudingen, (fig. 103).

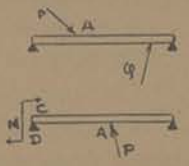


Fig. 103

1)

Door P = 1, verschuift punt B in richting Q evenveel, als A verschuift in richting P, door Q = 1.

2)

Door M = 1, verschuift A in richting P evenveel, als C-D draait (in boogmaat) wanneer P = 1 in A werkt.

Voorbeeld.

De buigingslijn in fig. 104 geeft in punt a een verschuiving δam. (voor P = 1).

De buigingslijn voor X = 1 in punt a geeft in punt m een buiging δma.

Daar X en P aan elkaar gelijk zijn volgt uit het bovenstaande: δam = δma.

Voor een willekeurige grootte van P is de doorbuiging bij a = P. δam.

Rekent men nu X = 1 opwaarts gericht, (als reactie), dan is de opbuiging van een willekeurige kracht Xa in punt a = Xa. δaa.

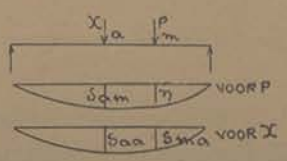


Fig. 104

Daar bij het aanwezig zijn van een steunpunt in a de hoogte van dit punt niet verandert, zoodat de uitbuiging hier 0 wordt, is P . δam = Xa. δaa, waaruit volgt: (bij meerdere lasten P)

$$Xa = \frac{\Sigma Pm.\ \delta ma}{\delta aa} \quad \ldots\ldots\ 39)$$

(zie ook form. 82)

Bij het voorgaande is δam vervangen door δma uit de buigingslijn voor X = — 1 ton, daar anders voor iedere last een extra buigingslijn zou moeten worden geteekend om δam te vinden.

Daar δma onder de lasten wordt opgemeten is de buigingslijn voor X = —1 ton tevens de invloedslijn voor reactie Xa.

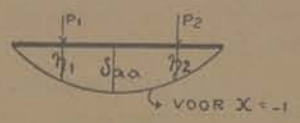


Fig. 105

Ter onderscheiding der diverse ordinaten δma is het wenschelijk deze aan te duiden met η_1, η_2, enz; zoodat in fig. 105 de doorbuigingen onder P_1 en P_2 gelijk zijn aan $P_1 . \eta_1$, en $P_2 . \eta_2$.

Voorbeeld.

Reactie X van het in fig. 106 geteekende vakwerk met evenwijdige randen is te bepalen.

Voor X = 1 ton wordt eerst de momentenfiguur geteekend. (fig. a).

De oppervlakte dezer figuur als belasting aangebracht, geeft een nieuwe momentenlijn, de buigingslijn welke tevens de invloedslijn voor reactie X is. (fig. b).

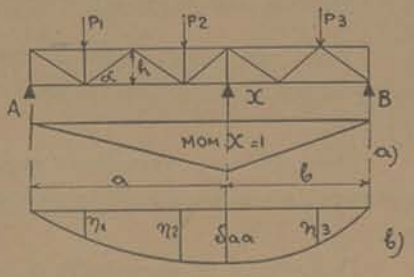


Fig. 106

Volgens formule 39 is deze reactie:

$$X = \frac{P_1 . \eta_1 . + P_2 . \eta_2 . + P_3 . \eta_3 .}{\delta aa} .$$

De schaal der teekening of de krachtenschaal hebben geen invloed op de verhoudingen van δaa en η, daar deze steeds constant blijven. Men kan dus volstaan met de verhouding der in de teekening opgemeten ordinaten.

Reacties A en B zijn gelijk aan de reacties van den ligger op 2 steunpunten, verminderd met de reacties welke door X worden verzaakt of;

$$A = Ao - \frac{X . b}{a+b} . \qquad B = Bo - \frac{X . a}{a+b} .$$

hierbij is $Ao = \frac{\Sigma P . x}{a+b}$

Uit het reeds behandelde volgt, dat bij een willekeurige belasting Σ P, de som der ordinaten van de buigingslijn voor Xa = — 1 ton gelijk is aan:

$$\Sigma Pm . \delta ma = \sum \frac{So . Sa . s}{E . F} = \Sigma So . Sa . \rho .$$

Voor de buigingslijn van Xb = — 1 wordt dit:

$$\Sigma Pm . \delta mb = \sum \frac{So . Sb . s}{E . F} = \Sigma So . Sb . \rho .$$

Uit het voorgaande volgt eveneens, dat de doorbuiging voor Xa = —1
onder punt a gelijk is aan: $\delta aa = \Sigma\ Sa^2 . \rho$.
„ „ b „ „ „ „ $\delta ba = \Sigma\ Sa. Sb. \rho$.

Voor Xb = — 1 worden deze waarden
onder punt a: $\delta ab = \Sigma\ Sa . Sb. \rho$
„ „ b: $\delta bb = \Sigma\ Sb^2 . \rho$

Bij temperatuursverschil wordt voor de buigingslijn van Xa = —1
$\delta at = \Sigma\ Sa. \xi. t. s$.

en voor de buigingslijn van Xb = —1;
$\delta bt = \Sigma\ Sb. \xi. t. s$.

Door deze doorbuigingen in de plaats te stellen voor de betreffende waarden in formule 38, krijgt men onderstaande, voor invloedslijnen meer overzichtelijke elasticiteits-vergelijkingen:

$La + \delta a = \Sigma Pm. \delta ma - Xa. \delta aa - Xb. \delta ab - Xc. \delta ac - \ldots\ldots + \delta at.$
$Lb + \delta b = \Sigma Pm. \delta mb - Xa. \delta ba - Xb. \delta bb - Xc. \delta bc - \ldots\ldots + \delta bt.$
$Lc + \delta c = \Sigma Pm. \delta mc - Xa. \delta ca - Xb. \delta cb - Xc. \delta cc - \ldots\ldots + \delta ct.$
. . . . . *40)*

Voor een balk of ligger met evenwijdige randen op 4 steunpunten waarbij X_1 en X_2 de onbekenden zijn, teekent men dus eerst de buigingslijnen voor X_1 en X_2 = —1 ton. (fig. 107).

Daar δa is $\delta b = 0$, kan men schrijven voor een last P;

$P. \delta ma - X_1. \delta aa - X_2. \delta ab = 0.$
$P. \delta mb - X_1. \delta ba - X_2. \delta bb = 0.$

Hieruit volgt:

$$\text{reactie} \qquad X_1 = P. \frac{\delta mb - \delta ma. \frac{\delta bb}{\delta ba}}{\delta ba - \delta aa. \frac{\delta bb}{\delta ba}}.$$

. . . . . *41)*

$$\text{reactie} \qquad X_2 = P. \frac{\delta ma - \delta mb. \frac{\delta aa}{\delta ba}}{\delta ba - \delta aa. \frac{\delta bb}{\delta ba}}.$$

Waarvoor ook is te schrijven:

$$X_1 = P. \frac{\delta mb. \delta ab - \delta ma. \delta bb}{\delta^2 ab. - \delta aa. \delta bb}$$

$$X_2 = P. \frac{\delta ma. \delta ab - \delta mb. \delta aa}{\delta^2 ab - \delta aa. \delta bb} \qquad \ldots\ldots\ 41a)$$

Na het bepalen der reacties zijn voor een volwandige constructie de momenten en voor de vakwerkligger de staafspanningen op de bekende wijze te berekenen.

Voorbeeld.

De ligger in fig. 107 is 2-voudig statisch onbepaald.

De veldafstanden zijn, L_1, L_2 en L_3.

Daar de ligger overal dezelfde doorsnede heeft, is de constructie met voldoende nauwkeurigheid als een enkele balk te beschouwen.

Voor X_1 en X_2 worden de buigingslijnen geteekend, door het momentenvlak voor —1 ton als belastingvlak te nemen en hiervoor de nieuwe momentenlijnen te teekenen.

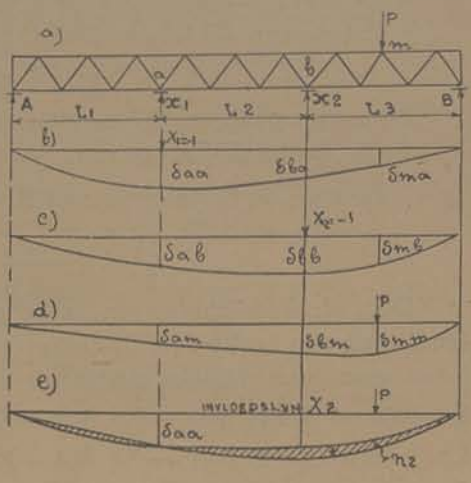


Fig. 107

Het max. moment bij a (voor $X_1 = -1$ ton) is: $\frac{(L_2 + L_3).\ L_1}{L_1 + L_2 + L_3}$.

Voor $X_2 = -1$ ton wordt dit $\frac{(L_1 + L_2).\ L_3}{L_1 + L_2 + L_3}$.

Men kan eventueel nog de balk op 2 steunpunten rekenen en belast door $P = 1$ ton waarvoor eveneens de buigingslijn wordt geteekend (fig. d).

Hierna volgen de elasticiteits-vergelijkingen:

$P.\ \delta am - X_1 . \delta aa - X_2 . \delta ab = 0.$

$P.\ \delta bm - X_1 . \delta ba - X_2 . \delta bb = 0.$

Volgens de stelling van Maxwell is:

$\delta am = \delta ma$

$\delta bm = \delta mb$

$\delta ab = \delta ba$, zoodat het niet noodig is deze laatste buigingslijn te bepalen, daar de ordinaten achter het gelijkteeken alle van de buigingslijnen voor X_1 of X_2 zijn.

De reacties zijn verder volgens formule 41-41a te bepalen.

Na bekendstelling van X_1 en X_2 bepaalt men reactie A uit:

$$A = Ao - \frac{X_1.(L_2 + L_3) + X_2.\ L_3}{L_1 + L_2 + L_3}.$$

Hierna zijn de werkelijke staafkrachten te bepalen volgens cremona, of te berekenen uit de momentenvergelijkingen.

Is P een rijdende last, of zijn meerdere lasten P op den balk aanwezig, dan wordt het op deze wijze berekenen der diverse reacties te omslachtig.

Men teekent dan beter voor iedere reactie een afzonderlijke invloedslijn, (fig. 107e) waaruit voor iedere willekeurige stand van P de betreffende reactie is te bepalen.

Hiertoe handelt men als volgt:

Het 2e lid van den teller in formule 41 bevat bij X_1, de waarde δ ma, vermenigvuldigd met een constante $a_1 \left(= \frac{\delta bb}{\delta ba} \right)$

Het 1e lid heeft de waarde δmb uit fig. c.

De noemer blijft steeds een onveranderlijke, welke wordt aangeduid met C.

Neemt men nu het product $\delta ma \,.\, a_1$ af van den boog uit fig. c dan ontstaat de invloedslijn voor reactie X_1.

Op dezelfde wijze is voor X_2 de invloedslijn te teekenen, welke in fig. 107e is aangegeven.

Duidt men de ordinaten dezer invloedslijnen onder de diverse lasten aan met η_1; η_2, enz., dan is:

$$X = \frac{1}{C} \cdot (P_1 . \eta_1 + P_2 . \eta_2 + \ldots\ldots)$$

Hierbij is met de positieve of negatieve waarde der ordinaten rekening te houden *).

---

*) Zie ook form. 114.

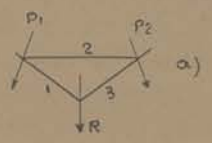
PERPUSTAKAAN NASIONAL

Doorbuiging van paralleldragers.

§ 1) De momentenlijn.

Ontbindt men in fig. 108b kracht P_1 in richting 1 en 2, en kracht P_2 in richting 2 en 3, dan zullen beide krachten 2 elkaar opheffen. 1 en 3 vormen dan de ontbondenen van P_1 en P_2 dus ook van R.

Brengt men ontbondenen 1—2 en 2—3 over in fig. a, waarin de krachten P_1 en P_2 op haar juiste plaats zijn geteekend, dan is de plaats van R in het snijpunt van 1 en 3.



Door in omgekeerde volgorde te werk te gaan, kan men dus uit R de krachten P_1 en P_2 bepalen.

Na het ontbinden van R in willekeurige richtingen 1 en 3 (fig. b) wordt sluitlijn 2 in fig. a bepaald.

Deze overgebracht in fig. b, geeft de grootten van P_1 en P_2.

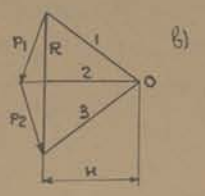


Fig. 108

Met behulp van de momentenlijn is het zeer eenvoudig het statisch moment van diverse krachten t.o.z. van een gegeven punt te bepalen.

Men neemt voor de samengevoegde krachten P in fig. 109b een willekeurige, horizontaal ontbonden kracht, d.i. een willekeurige poolafstand H.

Hierna trekt men de poolstralen 1, 2, 3, en 4 welke niets anders zijn dan ontbondenen voor P_1, P_2 en P_3.

Het aangrijpingspunt der resultante R (punt c) ligt in het verlengde der stralen 1 en 4 (fig. b en a).

Het moment van *alle* krachten t.o.z. van een willekeurig punt d, is nu R . r.

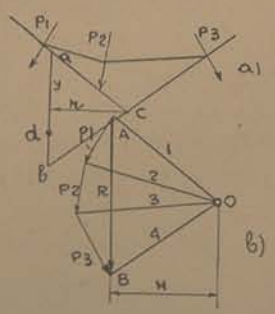


Fig. 109

Driehoek a-b-c is gelijkvormig aan driehoek A-B-O, zoodat r : ab = H : R. ab = y (uitgedrukt in de schaal der teekening).

Hieruit volgt voor het moment:

$$M = R . r = H . y.$$

Voorbeeld.

Voor den in fig. 110 geteekenden draagbalk is de schaal 1 : 200 terwijl als krachten-maatstaf 1 cm voor 8 ton is gerekend.

Bij aanname H = 20 ton, wordt de poolafstand 2,5 cm.

R grijpt in het snijpunt van 1 en 5 aan, terwijl men door de sluitlijn s uit fig. a over te brengen naar fig. b de reacties A en B kan bepalen.

Wordt nu het moment gevraagd voor de links of rechts van een gegeven punt vallende krachten, dan is inplaats van met R, met reactie A of B te rekenen.

Hierdoor wordt de ordinaat y tusschen de sluitlijn s en de onder dat punt vallende stang gemeten, inplaats van de ordinaat tusschen de uiterste stangen der veelhoek.

Voor de punten onder de lasten meten deze ordinaten, 0,62 ; 1,12 ; 1,54 ; en 1,20 cm, waardoor de hierbij behoorende buigmomenten gelijk worden aan:

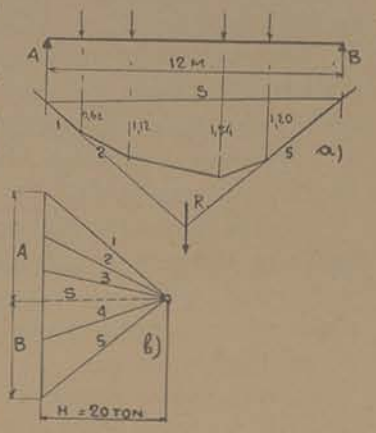


Fig. 110

$M_1 = H \cdot y_1 = 20.\ 1{,}24 = 24{,}8$ ton-meter.

$M_2 = H \cdot y_2 = 20.\ 2{,}24 = 44{,}8$ „ „

$M_3 = H \cdot y_3 = 20.\ 3{,}08 = 61{,}6$ „ „

$M_4 = H \cdot y_4 = 20.\ 2{,}40 = 48{,}0$ „ „

Daar de omlijning der momentenfiguur niets anders is dan een vervangend krachtenstelsel, is de dwarskracht in een bepaalde doorsnede grafisch te bepalen door de onder deze doorsnede vallende krachten verticaal te ontbinden.

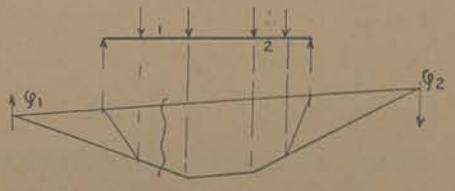


Fig. 111

Ligt het snijpunt der betrekkelijke stangen rechts, dan is de dwarskracht negatief, ligt het echter links (Q_1 in fig. 111) dan is de dwarskracht positief.

In fig. 112 grijpen eenige willekeurig verdeelde krachten op den bovenrand van een ligger aan.

Om hiervoor de krachten te bepalen welke in de knooppunten vallen, handelt men als volgt:

Met een willekeurige poolafstand H wordt een stangenveelhoek geteekend.

Daarna teekent men vanuit a en b een nieuwe stangenveelhoek welke onder de punten 1, 2, 3 enz. hare knikpunten krijgt. (in de figuur gestippeld).

Hierna is een nieuwe poolfiguur te teekenen met dezelfde poolafstand, doch waarvan de poolstralen evenwijdig loopen aan de gestippelde stangen.

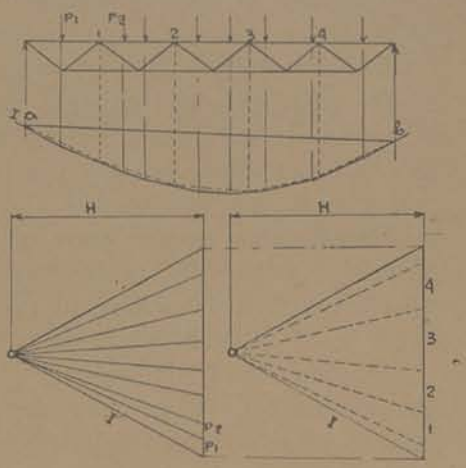


Fig. 112

Deze stralen snijden in de samengevoegde krachtenlijn de juiste grootten der boven de punten 1, 2, enz. komende lasten af.

---

§ 2) Grafisch bepalen der doorbuiging uit de momentenlijn.

Voor den vrijdrager in fig. 113 (schaal 1 : 30) worden de doorbuigingen gevraagd voor de punten 0, 1, 2, en 3.

Men bepaalt eerst de momenten voor deze punten, welke gelijk zijn aan:

$M_1 = P_1 \,.\, a.$

$M_2 = M_1 + (P_1 + P_2) \,.\, b.$

$M_3 = M_2 + (P_1 + P_2 + P_3) \,.\, c.$

$M_4 = M_3 + (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \,.\, d.$

Deze momenten worden als ordinaten uitgezet op een horizontale lijn, waarbij 1 cm = 50 tonmeter. (fig. b).

Hierna berekent men de oppervlakten en aangrijpingspunten der afzonderlijke momentenvlakken F_1, F_2, F_3 en F_4, waarbij de oppervlakten worden uitgedrukt in tonmeter × meter = tm^2.

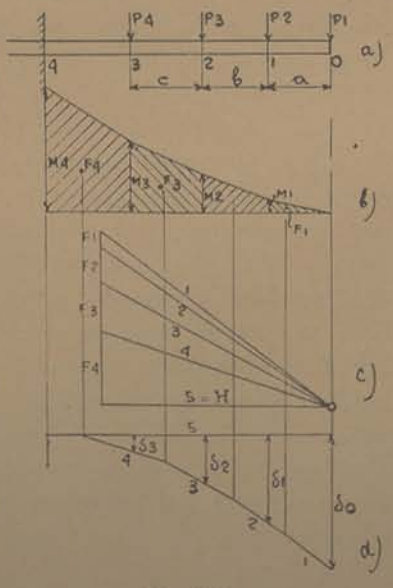


Fig. 113

Deze waarden F_1, F_2 enz. worden als krachten in een poolfiguur uitgezet waarbij b.v. 1 cm = 25 tm².

Neemt men nu voor poolafstand H (fig. c) $= \frac{E.\,J}{\text{schaal}}$, $= \frac{E.\,J}{30}$ tm², dan worden de doorbuigingen, d.z. de ordinaten der buigingslijn gevonden in de juiste grootten.

Daar deze niet zuiver zijn op te meten doet men beter voor H = b. v. $\frac{E.\,J}{300}$ te nemen, waardoor de doorbuigingen 10 × vergroot worden aangegeven.

Voor H is dan uit te zetten $\frac{E.\,J}{300} \cdot \frac{1}{25}$ cm.

Is het traagheidsmoment in alle velden niet even groot, dan is de poolafstand voor iedere doorsnede-verandering eveneens te wijzigen.

Voorbeeld.

In fig. 114 is $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 7{,}4$ ton.
Hiernaar is:

$M_1 = 7{,}4 \,.\, 1{,}2 = 8{,}14$ Tm.
$M_2 = 8{,}14 + 14{,}8 \,.\, 1{,}2 = 25{,}9$ „
$M_3 = 25{,}9 + 22{,}2 \,.\, 1{,}2 = 52{,}54$ „
$M_4 = 52{,}54 + 29{,}6 \,.\, 1{,}5 = 96{,}94$ „

Voor den balk wordt gekozen I NP 50 met Jx = 68740 cm⁴. Jx_1 (balk met 2 strippen) = 185000 cm⁴, Jx_2 (balk met 4 strippen) = 381000 cm⁴ $= \frac{38{,}1}{10^4}$ M⁴.

E = 2100.000 kg/cm² = $2{,}1 \,.\, 10^7$ T/m².

Door opmeten of berekenen vindt men voor de punten a en b de momenten 17 tonmeter en 45,9 tonmeter.

De schaal der teekening is 1 : 50.

Voor de oppervlakten der momentenfiguren 1 tot en met 6 wordt gevonden:

$F_1 = 0{,}5 \,.\, 8{,}14 \,.\, 1{,}1 = 4{,}48$ Tm², $F_2 = 7{,}54$ Tm², $F_3 = 13{,}47$ Tm², $F_4 = 32{,}31$ Tm², $F_5 = 14{,}77$ Tm², $F_6 = 112{,}11$ Tm²

Deze waarden worden uitgezet in een krachtenschaal 1 cm = 50 Tm², zoodat de poolafstanden H bij een 6-voudige vergrooting der doorbuiging gelijk worden aan:

PERPUSTAKAAN NASIONAL

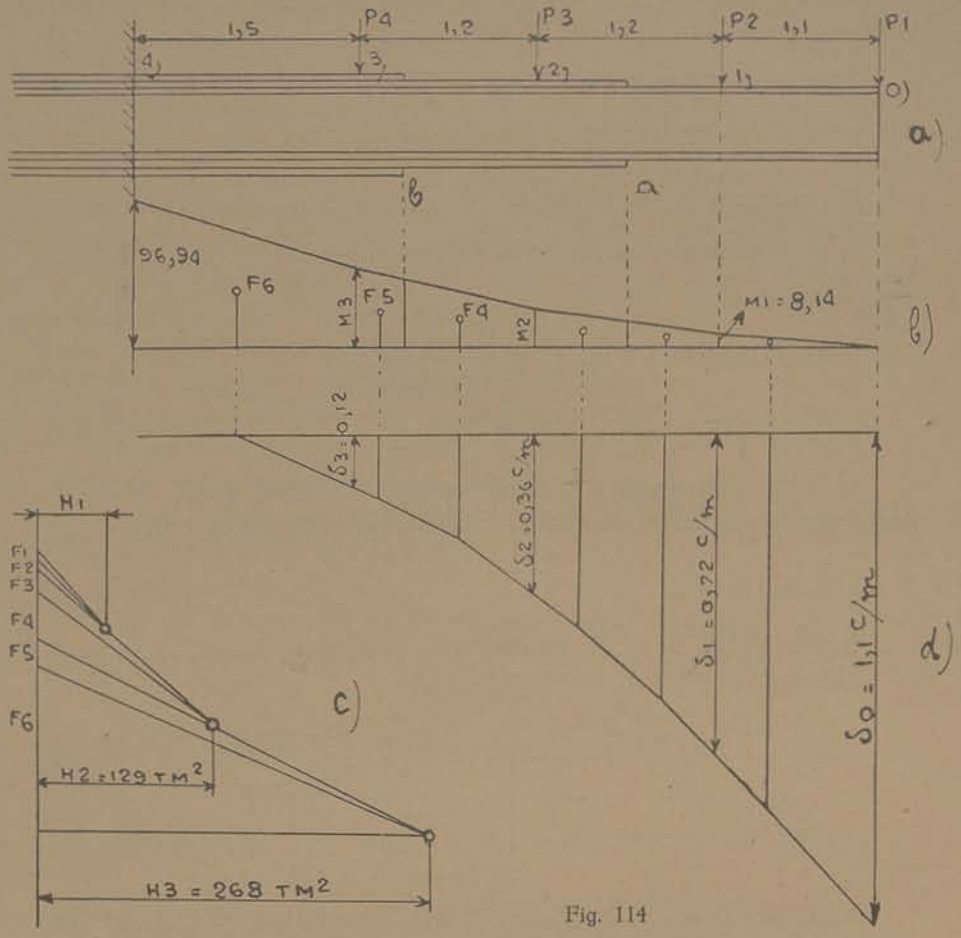


Fig. 114

$$H_1 = \frac{E.Jx}{50.6} = \frac{14,45.10^3}{300} = 48,2\ Tm^2 = \frac{48,2}{50} = 0,96\ cm.$$

$$H_2 = \frac{E.Jx_1}{50.6} = \frac{38,8.10^3}{300} = 129\ Tm^2 = \frac{129}{50} = 2,58\ cm.$$

$$H_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 5,35\ cm.$$

Na het trekken der stangenveelhoek als aangegeven in fig. d, zijn de doorbuigingen onder de lasten op te meten en wel 6-voudig vergroot; de juiste waarden zijn:

$\delta o = 1,10$ cm. $\delta_1 = 0,72$ cm. $\delta_2 = 0,36$ cm. $\delta_3 = 0,12$ cm.

Voor balken op 2 steunpunten is de doorbuiging geheel op dezelfde wijze te bepalen.

Is in fig. 115 de schaal der teekening 1 : 200, en H een willekeurige poolafstand, dan is bij een vergrooting van 10 : 1 der buigingslijn:

$$H_1 = \frac{E.\ J_1}{H.\ 200.10} \text{ en}$$

$$H_2 = \frac{E.\ J_2}{H.\ 200.10} \qquad \ldots\ldots\ 42)$$

De waarden J_1 en J_2 zijn te berekenen zonder aftrek der nagelgaten.

De buigingslijn is een gebogen lijn welke de binnenliggende kanten van den stangenveelhoek raakt.

Men kan eventueel met één poolafstand H voor de geheele poolfiguur volstaan, doch dan dienen de verschillende traagheidsmomenten met een bepaalde factor te worden vermenigvuldigd. (fig. 115a).

Hiertoe gaat men uit van een willekeurig traagheidsmoment Jo, dat het beste gelijk kan worden genomen aan het grootst voorkomende traagheidsmoment van den balk (= Ja).

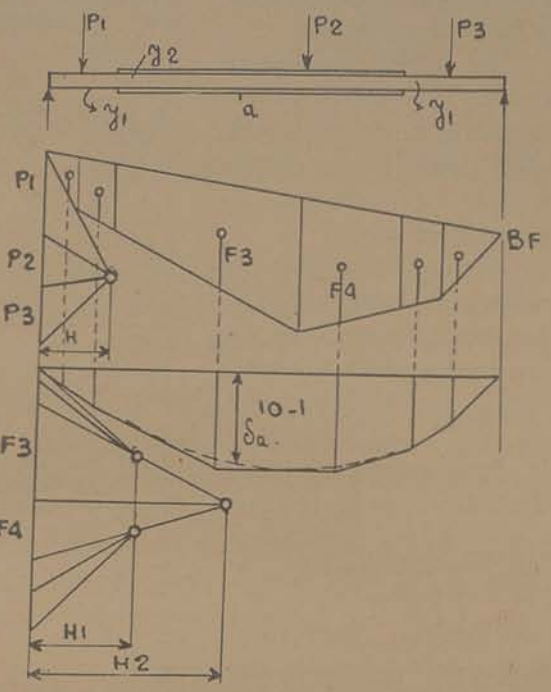


Fig. 115

Zijn de diverse traagheidsmomenten voor den balk Ja, Jb, enz. dan is:

$$a = \frac{Jo}{Ja} = 1\ , \qquad b = \frac{Jo}{Jb}\ , \qquad c = \frac{Jo}{Jc}\ , \text{ enz:}$$

De ordinaten der momentenfiguur worden met deze waarden voor het betreffende gedeelte vermenigvuldigd, waardoor Ma_1 = a.Ma, Mb_1 = b.Mb, enz.

Hierna zijn de oppervlakten F_1, F_2, enz. te berekenen waaruit met een constante poolafstand H_1, de buigingslijn is te bepalen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Voorbeeld.

De in figuur 115a geteekende balk met opgeklonken strippen is wat belasting en afmetingen betreft gelijk aan die uit figuur 115.

Ja = 21500 cm⁴

Jb = 15500 „

$$a = 1 \ , \quad b = \frac{21500}{15500} = 1{,}41 \ .$$

Met deze laatste waarde b is het gedeelte F_1 en F_3 van het momentenvlak te vermenigvuldigen.

De totale oppervlakten F (in Tm²) als krachten aangebracht, vormen met de poolafstand H_1 een nieuwe momentenlijn welke de buigingslijn vormt.

Rekent men voor de waarden F, 1 cm = 25 Tm² dan wordt bij een 5-voudige vergrooting der doorbuiging:

$$H_1 = \frac{E.\ Jo}{\text{schaal} \ . \ 5} .$$

Is deze waarde b.v. 62,5 Tm², dan is de uit te zetten afstand $\frac{62{,}5}{25} = 2{,}5$ cm.

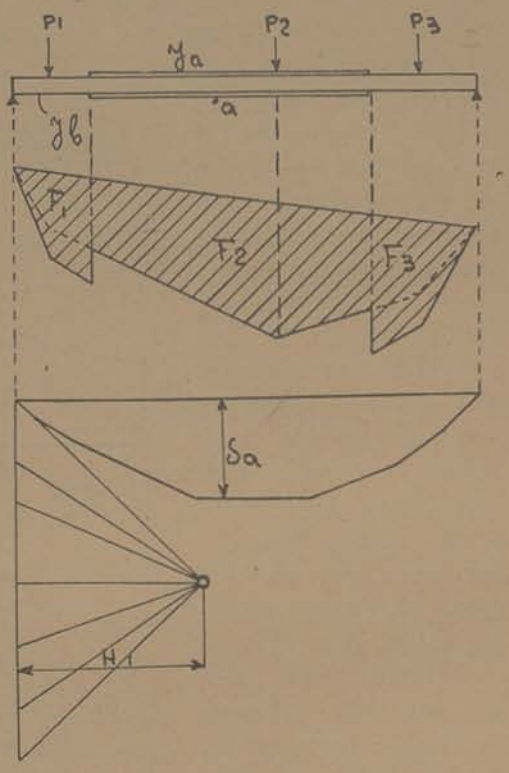


Fig. 115a

Volgens „Mohr" is de helling der buigings- of elastische lijn nog als volgt te bepalen.

Voor den balk met constant J-moment worden voor het momentenvlak als belastingvlak de reacties Va en Vb bepaald.

Neemt men voor H = E.J, (fig. 116) dan geeft de helling van S (uit Va/H) de grootte der hoek φ aan.



Fig. 116

Is het J-moment van den balk veranderlijk, dan neemt men voor H = E, en voor het belastingvlak $\frac{M}{J}$.

Volgens deze methode is dus de doorbuiging van een willekeurig punt van den balk te berekenen als Va en Vb bekend zijn.

Men stelt hiertoe de evenwichts-vergelijking op voor dat punt van het belastingvlak der momentenfiguur; H blijft hierbij constant.

De grootte der hoek φ verschijnt feitelijk in boogmaat, waarbij de helling in graden gelijk is aan $\frac{180.\varphi}{\pi}$.

Zonder bezwaar is echter de (meestal zeer geringe) helling in graden te berekenen uit $tg.\varphi = \frac{V}{H}$.

---

§ 3) Het berekenen der doorbuiging van balken uit het elastisch gewicht.

Volgens het reeds behandelde is de doorbuiging van een gegeven punt van een rechte balk te bepalen indien men het statisch moment van het links (of rechts) van dit punt vallende gedeelte van het momentenvlak deelt door E.J.

Deelt men eerst het betreffende momentenvlak door E.J welke waarde men het „Elastisch Gewicht" noemt en aanduidt met ‚*w*, dan grijpt deze kracht *w* in het zwaartepunt van het betreffende momentenvlak aan.

Is *r* de afstand van dit zwaartepunt tot aan het punt waarvoor de doorbuiging wordt gevraagd, dan is volgens Mohr de doorbuiging van dit punt $= w \,.\, r$.

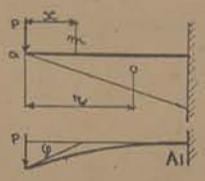


Fig. 117

Voorbeeld.

In figuur 117 is het moment van P op den balk $= P \,.\, L$. De oppervlakte der momentenfiguur is $\frac{P \,.\, L^2}{2}$. $w = \frac{P \,.\, L^2}{2.E.J}$ hieruit volgt de doorbuiging bij a;

$$\delta = \frac{P \,.\, L^2}{2.E.J} \,.\, \frac{2}{3} \,.\, L = \frac{P \,.\, L^3}{3.E.J} \quad \ldots \quad 43)$$

De buigingshoek welke punt a met de oorspronkelijke as maakt. is $\varphi = \frac{A_1}{E.J} = \frac{F}{E.J} = \frac{P.L^2}{2.E.J}$. hierbij is A_1 de reactie van het momentenvlak.

Voor een punt m op afstand x vanaf a is de doorbuiging gelijk aan de oppervlakte F van het gedeelte L-x der momentenlijn, vermenigvuldigd met de afstand van m tot het zwaartepunt van dit trapezium, of uitgewerkt:

$$\delta m = \frac{P}{6 . E . J}(2 L^3 - 3 . x . L^2 + x^3) \ldots\ldots \quad 44)$$

Hierbij is de draaiïngshoek der buigingslijn $\varphi m = \frac{P . (L^2 - x^2)}{2 . E . J}$.

Is deze draaiïngshoek b.v. 0,00062 (in boogmaat) dan is de grootte der hoek $\varphi m = \frac{180 . 0{,}00062}{\pi} = 0{,}0356^0 = 2' 8''$

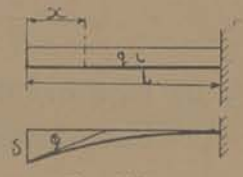


Fig. 118

Voor de gelijkmatig verdeelde belasting in fig. 118, is de inhoud van het momentenvlak $= \frac{q . L^3}{6}$, waarbij de afstand van het zwaartepunt tot het staafeinde gelijk is aan 3/4 . L.

De doorbuiging δ_1 is hiernaar $\frac{q . L^3}{6 . E . J} . \frac{3L}{4} = \frac{q . L^4}{8 . E J} \ldots\ldots \quad 45)$

De verdraaiïngshoek $\varphi = \frac{F}{E . J} = \frac{q . L^3}{6 . E . J}$.

Zou men in bovenstaande figuur onder het eindpunt der balk een steunpunt aanbrengen, dan is het elastisch gewicht voor deze reactie $w_2 = \frac{X . L^2}{2E . J}$. De opbuiging δ_2 hiervoor is $\frac{X . L^3}{3 . E . J}$, zoodat bij gelijkstelling van δ_1 en δ_2 reactie X gelijk wordt aan $\frac{3 . q . L}{8}$.

In figuur 119 is het balkmoment door P = P . a

De oppervlakte van het momentenvlak wordt hierdoor P . a . L.

Daar het zwaartepunt van dit vlak op $\frac{1}{2}$ L ligt, is de verschuiving δ tegen de richting van een eventueele reactie $X = \frac{P . a . L^2}{2 . E . J}$

De draaiïngshoek $\varphi = \frac{P . a . L}{E . J}$

Is een reactie X aanwezig, dan is $\delta_2 = w_2 . r_2 = \frac{X . L^2}{2 . E . J} . \frac{2L}{3} = \frac{X . L^3}{3 . E . J}$ hieruit volgt voor: $X = \frac{3 . P . a}{2 . L} \ldots\ldots \quad 46)$

Bij een balk op 2 steunpunten rekent men het momentenvlak der werkelijke belasting wederom als belastingvlak op een afzonderlijke balk, en bepaalt de hiervoor geldende reacties A_1 en B_1.

De doorbuiging van een bepaald punt wordt nu berekend uit het product van A_1 of B_1 en de afstand b tot het buigingspunt, verminderd met het moment F . a en verder deze waarde gedeeld door E.J.

(a is hierbij de afstand van het zwaartepunt tot het buigingspunt).

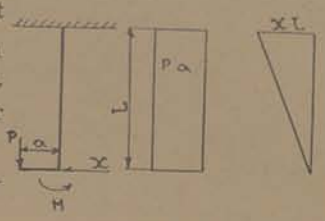


Fig. 119

Voor de gelijkmatig verdeelde belasting in figuur 120 is het buigmoment $\frac{q.L^2}{8}$.

De inhoud van het halve paraboolvlak $F = 2/3 . \frac{y.L}{2}$

Daar $y = \frac{q.L^2}{8}$ wordt $A_1 = B_1 =$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{q.L^2}{8} = \frac{q.L^3}{24}.$$

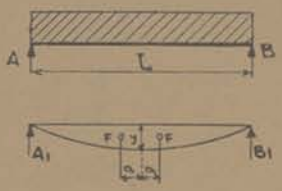


Fig. 120

$a = 3/16.L$, waarna de doorbuiging:

$$\delta = \left(A_1 . \frac{L}{2} - F . a\right) \cdot \frac{1}{E . J} \text{ of:}$$

$$\delta = \frac{q.L^3}{24} \cdot \frac{L}{2} - \frac{q.L^3}{24} \cdot \frac{3}{16} L = \frac{5}{384} \cdot \frac{q.L^4}{E.J} \quad \ldots\ldots \; 47)$$

Bij een enkele last P, is het moment $\frac{P.a.b}{L}$, terwijl uit de oppervlakte der beide driehoeken van het momentenvlak volgt:

$$A_1 = \frac{P.a.b}{6.L} \cdot (L+b) \text{ en}$$

$$B_1 = \frac{P.a.b}{6.L} \cdot (L+a) \text{, hieruit volgt:}$$

$$\delta = \frac{1}{E.J} \cdot \frac{P.a^2.b^2}{3.L} \quad \ldots\ldots \; 48)$$

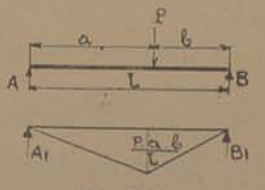


Fig. 121

Voor 2 gelijke lasten P op afstanden a vanaf de einden, is de doorbuiging onder de lasten:

$$\delta = \frac{1}{E.J} \cdot \frac{P.a^2}{6} \cdot (3L - 4a) \quad \ldots\ldots \; 49)$$

terwijl de max. doorbuiging (in het midden van den balk) gelijk is aan:

$$\delta m = \frac{1}{E.J} \cdot \frac{P.a}{24} (3L^2 - 4a^2) \quad \ldots\ldots \; 50)$$

Het moment op den vrij opgelegden balk in figuur 122 geeft een reactie A = —B = M/L. Voor A is M = 0, terwijl voor B, Mb = M, waarna voor de reacties van het momentenvlak volgt:

$$A_1 = \frac{M.\,L}{6}, \quad B_1 = \frac{M.\,L}{3}$$

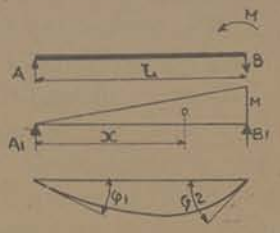


Fig. 122

De max. doorbuiging ligt op $x = \frac{1}{3} . L . \sqrt{3}$ waardoor

$$\delta max: = \frac{1}{E.\,J} . \frac{M.\,L^2}{27} . \sqrt{3} \ldots\ldots 51)$$

De hellingshoek der buigingslijn is bij A =

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{E.\,J} = \frac{M.\,L}{6.\,E.\,J}. \qquad \varphi_2 = \frac{M.\,L}{3.\,E.\,J}.$$

Voor 2 momenten op den balk (M_1 en M_2, fig. 123), wordt

$$A_1 = \frac{L}{6} . (2.\,M_1 + M_2) \qquad B_1 = \frac{L}{6} . (2.\,M_2 + M_1)$$

Op een afstand x van A is de doorbuiging:

$$\delta x = \frac{1}{6.\,E.\,J.\,L} \left\{ M_1.\,x.\,(2L^2 - 3L.\,x + x^2) + M_2.\,x\,(L^2 - x^2) \right\} \ldots\ldots 52)$$

Om de momenten en doorbuigingen van vast ingeklemde balken te bepalen, handelt men als volgt:

Men rekent den balk voorloopig los opgelegd, zoodat voor de in figuur 124 geteekende belasting, $Mo = \frac{P.L}{4}$.

De inhoud van het momentenvlak is hiervoor $\frac{P.L^2}{8}$, terwijl de reacties A_1 en B_1 gelijk zijn aan $\frac{P.L^2}{16}$.

Deelt men deze reacties door L, dan vindt men de momenten-hulpwaarden m_1 en m_2.

Voor fig. 124 is $m_1 = m_2 = \frac{P.L}{16}$.

Nu moeten balken met overal gelijkblijvend traagheidsmoment en volkomen ingeklemde einden (de inklemmingshoeken zijn hier dus 0), voldoen aan de vergelijkingen:

$$2M_1 + M_2 + 6 . m_1 = 0.$$
$$2M_2 + M_1 + 6 . m_2 = 0.$$

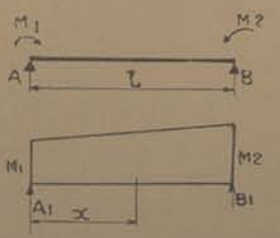


Fig. 123

Hieruit vindt men voor de inklemmingsmomenten:

bij A: $M_1 = -2.(2.m_1 - m_2)$.

bij B: $M_2 = -2.(2.m_2 - m_1)$.

Is $m_1 = m_2$ (bij symetrische belasting) dan is:

$$M_1 = M_2 = -\frac{P.L}{8}.$$

Het moment in het midden van den balk (onder P), is gelijk aan het moment van den vrijdrager ter plaatse, vermeerderd met de algebraische waarde van het linker of rechter steunpuntsmoment.

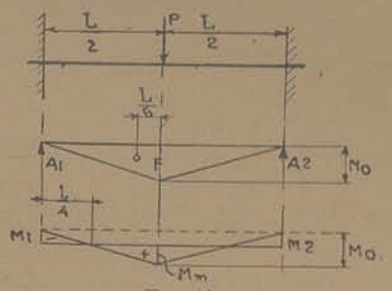


Fig. 124

Voor fig. 124 is dus:

$$Mm = Mo + M_1 = \frac{P.L}{4} - \frac{P.L}{8} = +\frac{P.L}{8}.$$

De doorbuiging van een willekeurig punt van den balk wordt nu bepaald uit de doorbuiging van den vrijdrager, verminderd met de opwaartsche buiging ontstaan door het inklemmingsmoment.

Men vindt voor den vrij opgelegden balk volgens het op de voorgaande bladzijden behandelde, onder P (fig. 124).

$$E.J.\delta m = A_1.\frac{L}{2} - F_1.a = \frac{P.L^2}{16}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{6}\right) = \frac{P.L^3}{48}.$$

Voor het steunpuntsmoment wordt de doorbuiging volgens dezelfde formuleering berekend, waarbij $A_1 = -M_1.\frac{L}{2} = -\frac{P.L^2}{16}$:

$$E.J.\delta_1 = -\frac{P.L^2}{16}.\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = -\frac{P.L^3}{64}.$$

Hierna volgt de werkelijke doorbuiging in het midden van den ingeklemden balk:

$$\delta m = \frac{1}{E.J}.\left(\frac{1}{48} - \frac{1}{64}\right).P.L^3 = \frac{P.L^3}{192\,E.J} \quad \ldots\ldots \quad 53)$$

Past men bovenstaande methode toe op een ingeklemde balk met een gelijkmatig verdeelde belasting, dan vindt men voor de vrij opgelegde constructie: (fig. 125).

$Mo = \frac{q.L^2}{8}$. De oppervlakte der paraboolfiguur is gelijk aan $\frac{2}{3}.L.y = \frac{q.L^3}{12}$. Hierdoor wordt $m_1 = m_2 = \frac{A_1}{L} = \frac{q.L^2}{24}$.

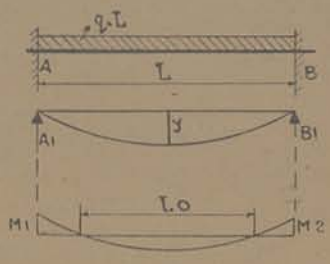


Fig. 125

Voor de ingeklemde balk is nu $M_1 = M_2 = \frac{q.L^2}{12}$, waaruit $Mm = Mo - M_1 = \frac{q.L^2}{24}$.

Daar $Lo = \frac{L.\sqrt{3}}{3} = 0{,}5774 . L$, wordt de grootste doorbuiging volgens het voorgaande:

$$\delta m = \frac{5.\ q.\ L^4}{384\ E.J} - \frac{q.L^4}{96\ E.J} = \frac{q.L^4}{384\ E.J} \quad \ldots\ldots\ 54)$$

De steunpuntsreacties A en B zijn verder gelijk aan:

$$A = Ao - \frac{M_1}{L} + \frac{M_2}{L}, \qquad B = Bo + \frac{M_1}{L} - \frac{M_2}{L}$$

Door de elastische vormverandering krijgen de inklemmingshoeken een bepaalde grootte, welke max. gelijk is aan de buigingshoeken der vrij opgelegde constructie.

Om deze reden zijn de momentenwaarden nog te vermenigvuldigen met een factor ξ, varieerend van 0 tot 1, al naar gelang de staafeinden geheel los opgelegd of vast ingeklemd zijn.

De inklemmingsmomenten zijn dan te berekenen uit:

$$2.\ M_1 + M_2 + 6 . \xi_1 . m_1 = 0.$$
$$2.\ M_2 + M_1 + 6 . \xi_2 . m_2 = 0.$$

Bij balken op 3 steunpunten is het middensteunpunt en het hierboven vallende moment het eenvoudigst op de volgende wijze te berekenen.

Men beschouwt den balk eerst op twee steunpunten, dus uitwendig statisch bepaald, en bepaalt ter plaatse van de weggenomen (midden-) reactie de doorbuiging δo voor de aanwezige belasting.

Nu wordt voor $X = -1$ ton de opbuiging berekend, welke gelijk is aan δ_1.

Daar de hoogte der oorspronkelijke opleggingen niet verandert, is de middensteunpuntsreactie te bepalen uit:

$$Xa = \frac{\delta o}{\delta_1} \cdot 1 \text{ ton.}$$

Voorbeeld.

De balk op 3 steunpunten uit figuur 205 is belast met een gelijkmatig verdeelde belasting à 0,5 ton per strekkende meter.

Berekend volgens het voorgaande is de doorbuiging van den balk op 2 steunpunten, ter plaatse van Xa:

$$\delta o = \frac{1}{E.\,J}\left(\frac{q.\,L^3}{24} \cdot L_1 - \frac{q.\,L_1^3}{24}(2L - L_1)\right) \ldots\ldots 55)$$

Is b.v. $L_1 = 2$ M, $L_2 = 4$ M, $L = 2 + 4 = 6$ M, dan wordt:

$$\delta o = \frac{1}{E.\,J} \cdot 0{,}5 \cdot 14{,}68\ Tm^3 = \frac{7{,}34}{E.\,J} \text{ Meter.}$$

Voor $Xa = -1$ ton is de opbuiging volgens formule 48:

$$\delta_1 = \frac{1}{E.\,J} \cdot \frac{L_1^2 . L_2^2}{3.\,L} = 3{,}55 . \frac{1}{E.\,J} \text{ Meter.}$$

Hieruit volgt dat de werkelijke reactie $Xa = \frac{7{,}34}{3{,}55} = 2{,}07$ ton.

De juiste reacties A en B zijn te bepalen volgens de op bl. 49 aangegeven wijze, waarna de grootte van het steunpunts-moment boven Xa te berekenen is met behulp van een momenten-vergelijking voor deze reacties en de belasting t.o.v. steunpunten Xa.

Een en ander is eveneens te berekenen met behulp der verdraaiïngshoeken φ van de vrij opgelegd gerekende balken L_1 en L_2. Volgens bl. 76 is de verdraaiïngshoek van een vrij opgelegde balk te berekenen uit $\frac{A_1}{E.\,J}$ of $\frac{B_1}{E.\,J}$, zoodat voor de gelijkmatig verdeelde belasting;

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{E.\,J} = \frac{F}{2E.J} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{q.\,L_1^3}{8} \cdot \frac{L_1}{EJ} = \frac{q.\,L_1^3}{24E.\,J}. \quad \varphi_2 = \frac{q.\,L_2^3}{24E.\,J}.$$

Nu is het onbekende middensteunpuntsmoment ontstaan door een tegenwerkende (verminderende) steunpuntsreactie, waarvoor het moment gelijk is aan $Ao_1 . L_1$ of $Bo_1 . L_2$.

De reactie bij het aangrijpingspunt van dit moment $M = \frac{M.L}{3}$ (fig. 122) zoodat de buigingshoek bij het middensteunpunt gelijk is aan:

$$\varphi_1 = -\frac{M.L_1}{3.E.J.} \text{ voor veld } L_1 \text{ en}$$

$$\varphi_2 = -\frac{M.L_2}{3.E.J.} \text{ voor veld } L_2 .$$

Daar de som der buigingshoeken boven dit middenpunt gelijk nul is, wordt:

$$\frac{M\ L_1}{3E.J} + \frac{M.L_2}{3E.J} = \frac{q.L_1^3}{24E.J} + \frac{q.L_2^3}{24E.J}$$

Hieruit volgt voor het moment boven Xa:

$$M = \frac{q\ (L_1^3 + L_2^3)}{8.(L_1 + L_2)} \quad \ldots\ldots\ 56)$$

De diverse reactie zijn verder gelijk aan:

$$A = \tfrac{1}{2} . q.L_1 - \frac{M}{L_1} . \qquad Xa = \tfrac{1}{2} . q.(L_1 + L_2) + \frac{M}{L_1} + \frac{M}{L_2} .$$

H O O F D S T U K IV

Het bepalen der doorbuiging van vakwerken.

§ 1) Verschuivingsplan van Williot.

a) Voor statisch bepaalde constructies.

De doorbuiging van een vakwerkconstructie is, zooals reeds vermeld, het eenvoudigst te bepalen met behulp van een verschuivingsplan van *Williot*.

Men berekent hierbij eerst de verlengingen of verkortingen der diverse staven, waaruit de verschuivingen der knooppunten worden bepaald.

Door aaneenvoeging dezer verschuivingen is voor het betreffende knooppunt de totale verschuiving (doorbuiging) te vinden.

Wordt in figuur 126 staaf a een waarde $\triangle a$ grooter, en staaf b een waarde $\triangle b$ kleiner, dan zullen bij draaiïng om de punten 1 en 2 de nieuwe eindpunten der staven in punt 3 samenvallen.



Fig. 126

Doordat de lengte-veranderingen meestal zeer klein zijn in verhouding tot de staaflengten, is het voldoende nauwkeurig aan het einde der verlenging resp. verkorting loodlijnen op te richten, welke elkaar eveneens in punt 3 zullen ontmoeten.

Zet men vanuit het oorspronkelijke punt 0 alleen de verlenging en verkorting uit, (fig. 127) dan vindt men de verplaatsing van het snijpunt uit de lijn 0-3.

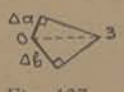


Fig. 127

De lengte-veranderingen $\triangle s$ worden berekend uit $\frac{S.s}{E.F}$; daar zij meestal nog geen milimeter bedragen, dient men haar op een vergrootte schaal uit te zetten.

Figuur 128 stelt een driehoek uit een vakwerk voor, waarvan alle punten verschuiven.

Punt a verschuift naar a' (a-a' is b.v. de verschuiving 0-3 uit figuur 127).

Punt b verplaatst zich naar b'; hierdoor zouden de denkbeeldige staafeinden c gelegen zijn in de punten 1 en 2.

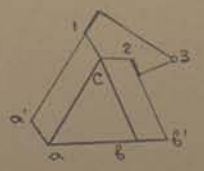


Fig. 128

Vanuit deze punten worden nu de lengte-veranderingen voor a-c en b-c uitgezet, waarna de hierop aangebrachte loodlijnen het snijpunt 3 doen vinden, dat de werkelijke plaats van c aangeeft na de vormverandering der staven.

Door alleen de vormverandering der verschillende staven op te teekenen krijgt men een constructie als figuur 129.



Fig. 129

Op het volgende is te letten:

De verlenging van een staaf is uit te zetten *in de richting* van het nieuw te bepalen knooppunt, terwijl de verkorting in *tegengestelde richting* wordt uitgezet. (dus naar het voorlaatste knooppunt toe).

Het is bij het teekenen van een Williot-plan voor een vakwerkconstructie noodzakelijk dat men de vormverandering van alle tot de hoofdconstructie behoorende staven in rekening brengt.

Verder verdient het aanbeveling het plan te beginnen vanuit een vast punt b.v. een oplegging of een punt dat slechts in één richting verschuift.

Ter onderscheiding zijn de verlengingen met dikke lijnen en de loodlijnen met dunne lijnen aan te geven.

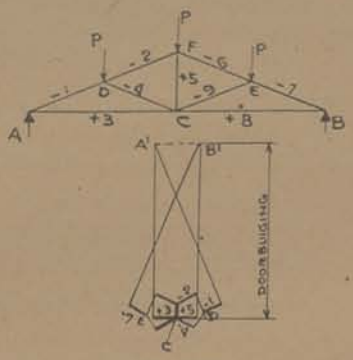


Fig. 130

Voorbeeld.

De doorbuiging van het in figuur 130 geteekende spant is te bepalen.

Als uitgangspunt voor het verschuivingsplan wordt nokpunt F gekozen.

Men bepaalt eerst de door de belasting veroorzaakte staafkrachten S, waarna voor iedere staaf de profielen worden bepaald.

Hiervoor zijn de lengte-veranderingen $\triangle s$ te berekenen uit $\frac{S.s}{E.F}$.

Deze waarden zijn in figuur 130 aangegeven als —1, —2, +3 enz.

Men begint met de verlenging +5 uit te zetten, hieraan worden de waarden —2, —4, en +3 voor de linkerhelft alsmede —6, —9 en +8 voor de rechterhelft toegevoegd.

Knooppunt D verschuift door —2 en —4, op het snijpunt der loodlijnen wordt —1 uitgezet. Door loodlijnen op —1 en +3 vindt men punt A'.

Voor de staven van de rechterhelft handelt men evenzoo, waardoor punt B' gevonden wordt.

Gaat men bij het opteekenen van het oplegpunt A uit, dan krijgt

het verschuivingsplan een andere gedaante: de doorbuiging der diverse knooppunten blijft echter steeds dezelfde waarde behouden.

Is in bovenstaand vakwerk de bovenrand gebogen, waardoor staaf 4 getrokken wordt, dan wordt de verlenging +4 aan de linkerzijde uitgezet (naar het nieuwe knooppunt toe), zoodat het verschuivingsplan een gedaante krijgt als in figuur 131.

Door de punten A', B' enz. horizontaal onder de betreffende knooppunten van het spant over te brengen, zijn de ordinaten der buigingslijn in de vergrootte schaal te vinden.

De horizontale verschuiving der losse oplegging is eveneens uit het plan op te meten en is gelijk aan de afstand A''—B'.

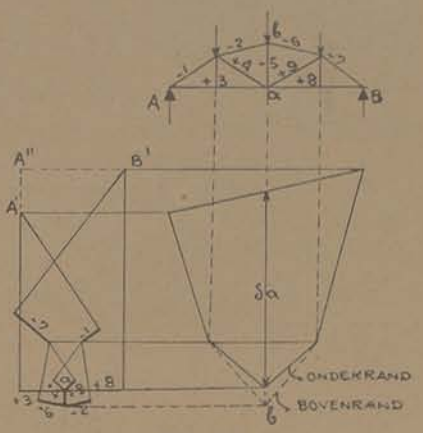


Fig. 131

Voorbeeld.

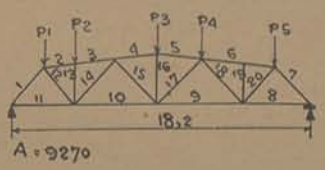
De max. doorbuiging van den in figuur 132 geteekenden ligger is te bepalen.

$P_1 = 3000$ kg. $P_2 = 3600$ kg. $P_3 = P_4 = 4000$ kg. $P_5 = 3000$ kg.

Voor deze lasten wordt een cremona geteekend, waarna de doorsneden F en de lengteveranderingen $\triangle s$ zijn te berekenen.

Een en ander is in onderstaande tabel aangegeven.

Staaf	Lengte cM.	Staafkr: Kg.	F=	$\triangle s$ in cM
1	280	— 13200	27	0,065
2	200	— 14000	27	0,050
3	260	— 14000	27	0,065
4	260	— 16300	27	0,072
5	260	— 16300	27	0,072
6	460	— 12400	27	0,100
7	280	— 12000	27	0,059
8	400	+ 8400	22	0,073
9	510	+ 16800	22	0,180
10	510	+ 14800	22	0,163
11	400	+ 9400	22	0,081
12	280	+ 6400	22	0,039
13	230	— 3600	18	0,021
14	370	— 1800	22	0,012
15	370	+ 1600	22	0,010
16	290	— 600	20	—
17	370	— 600	22	0,007
18	370	— 6000	27	0,035
19	230	—	18	—
20	280	+ 5500	22	0,033



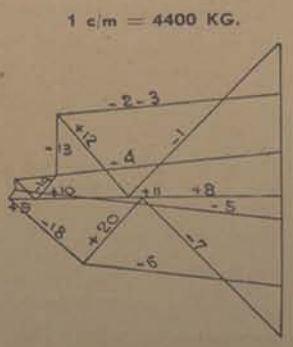


Fig. 132

Voor E is 2100.000 te rekenen; eventueel is hiervoor 1000.000 in te vullen, waardoor het verschuivingsplan 2,1 × vergroot wordt.

Als bruikbare vergrooting wordt hier 10 op 1 genomen, terwijl als uitgangspunt staaf 16 wordt gekozen *).

Na het opteekenen van het verschuivingsplan blijkt de max. doorbuiging (in het midden) 10,8 mm te bedragen.

De horizontale verschuiving van steunpunt B is 5,1 mm. (fig. 133).

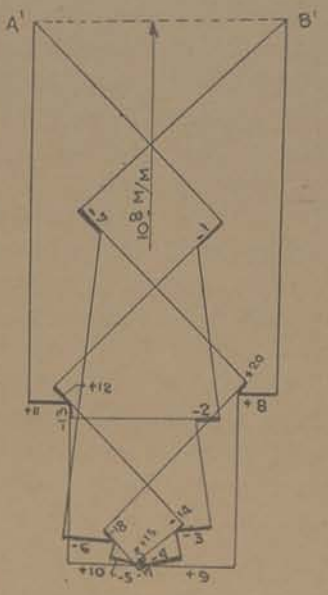


Fig. 133

Daar bij het berekenen der staafkrachten er van is uitgegaan, dat de knooppunten scharnierend zijn, zullen in werkelijkheid de doorbuigingen minder groot zijn.

---

b) Statisch onbepaalde constructies.

Zijn alle reacties van een statisch onbepaalde constructie bekend, dan vindt men de doorbuiging van een bepaald punt door voor de werkelijke staafkrachten een verschuivingsplan te teekenen.

Zijn de reacties niet bekend, dan teekent men eerst een verschuivingsplan voor het vakwerk op 2 steunpunten (statisch bepaald en belast met X = — 1 ter plaatse van de onbepaalde reactie); uit de hierbij behoorende buiginslijn is dan eerst de grootte der onbekende reactie te bepalen.

Voorbeeld.

De reacties van het in figuur 134 geteekende vakwerk op 3 steunpunten zijn te bepalen.

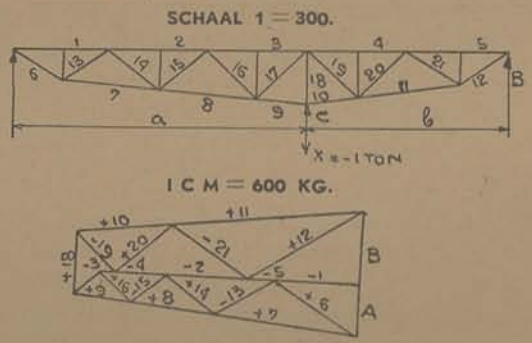


Fig. 134

Men rekent eerst X= — 1 ton, en teekent hiervoor de cremona waarbij $A_1 = \frac{1.b}{a+b}$, $B_1 = \frac{1.a}{a+b}$.

De staafdoorsneden voor de werkelijke staafkrachten worden voorloopig geschat, waarna de lengte-veranderingen worden bepaald voor de staafkrachten uit X = — 1 ton. (voor E is 1 te rekenen) (zie hoofdstuk II § 2)

---

*) Figuur 133 is op $\frac{2}{3}$ van deze waarde aangegeven, waardoor de vergrooting in de figuur gemeten 20 op 3 is.

Deze lengteveranderingen zijn in onderstaande tabel met een vergrooting $\frac{E}{100}$ aangegeven.

Hierna wordt het verschuivingsplan geteekend, (fig. 135) dat ter wille van de duidelijkheid in 2 helften is te splitsen.

Uit de bijbehoorende buigingslijn is nu voor iedere willekeurige belasting reactie C te bepalen, indien men uitgaat van de evenredigheid: *)

$$C = P. \frac{\eta}{\delta a}.$$

η = de ordinaat der buigingslijn onder P, δa de ordinaat onder X = — 1 ton.

Staaf	Lengte cM	S_1. Kg.	F.	$\triangle s = \frac{S_1 . s}{F . E}$.	Staaf	Lengte s	S_1.	F. in cM²	$\triangle s$ = Mr.
1	400	— 720	220	— 0,131	12	240	+ 1080	220	+ 0,144
2	400	— 1560	220	— 0,284	13	240	— 560	150	— 0,090
3	400	— 2120	220	— 0,386	14	265	+ 480	120	+ 0,106
4	400	— 2000	220	— 0,364	15	265	— 400	100	— 0,106
5	400	— 880	220	— 0,160	16	278	+ 350	100	+ 0,097
6	240	+ 800	220	+ 0,087	17	278	— 280	120	— 0,065
7	410	+ 1160	220	+ 0,216	18	210	+ 480	120	+ 0,084
8	410	+ 1840	220	+ 0,343	19	270	— 440	120	— 0,099
9	205	+ 2300	220	+ 0,214	20	240	+ 600	150	+ 0,096
10	208	+ 2320	220	+ 0,219	21	240	— 760	150	— 0,122
11	416	+ 1560	220	+ 0,295					

In figuur 135 is de ordinaat onder P = 2,2 cm, terwijl δa = 2,8 cm. De grootte der reactie C is dus $\frac{2,2 . P}{2,8} = 0,79 . P$ ton.

Daar voor E, 1 is gerekend, geven de ordinaten η niet de werkelijke doorbuigingen aan doch een E-voudige vergrooting. Bovendien zijn de lengteveranderingen in de figuur 1 op 200 uitgezet, zoodat de ordinaten nog met 200 moeten worden vermenigvuldigd.

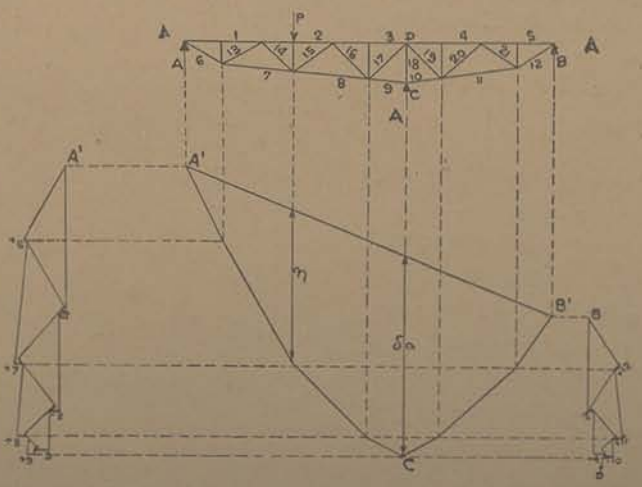


Fig. 135

*) Zie: stelling van Maxwell.

De werkelijke doorbuiging door X = — 1 ton voor den ligger op 2 steunpunten bedraagt dus:

$$\delta a = \frac{1000 \,.\, 200 \,.\, 2{,}8}{2100.000} = 0{,}27 \text{ cm.}$$

Na het bepalen der reactie C berekent men de oplegreacties A en B uit: $Ao = -\frac{C.\,L_2}{L}$ en $Bo = -\frac{C.\,L_1}{L}$, waarna door middel van een nieuwe cremona de werkelijke staafkrachten zijn te vinden.

Eenvoudiger is echter de buigingslijn als invloedslijn voor de staafkrachten te beschouwen, waaruit dan voor iedere willekeurige belasting de staafkrachten zijn op te meten. (zie hiervoor Hoofdstuk VII § 5).

De in fig. 136 geteekende tweescharnierkap is enkelvoudig statisch onbepaald.

Hierbij loopt tevens de onbekende reactie X horizontaal, inplaats van verticaal, zooals in fig. 135.

De buigingslijn, waaruit deze onbekende horizontale voetreactie X is te bepalen, is echter geteekend voor een verticale buiging, in dit geval de buiging der onderrand. (Voor de buigingslijn der bovenrand dient de sluitlijn een waarde $\triangle h$ te worden verschoven).

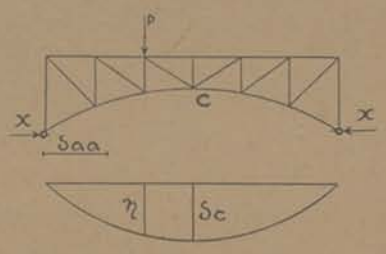


Fig. 136

Hierbij is als volgt gebruik gemaakt van de stelling van „Maxwell"

De verhoudingen van P en X op de doorbuiging en de uitbuiging van de constructie in fig. 137 is dezelfde als aangegeven in fig. 104.

P = 1 in punt m, geeft in ‚a' een uitbuiging = δam

X = —1 in punt a, geeft in ‚m' een doorbuiging = δma

Nu is: P . δma = X . δam, of bij X = P; δam=δma.

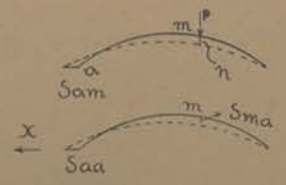


Fig. 137

X = — 1 geeft echter ook een verschuiving δaa, zoodat voor meerdere lasten P de volgende vergelijking ontstaat:

$$X \,.\, \delta aa = \Sigma\, Pm \,.\, \delta ma$$

De verschuiving van ‚a' $= \triangle L = \Sigma\, Pm \,.\, \delta ma - X.\, \delta aa$,

of bij $\triangle L = 0$

$$X = \sum P \,.\, \frac{\delta ma}{\delta aa} \quad \ldots\ldots \quad 57)$$

Men bepaalt dus voor fig. 136 de buigingslijn van den onderrand door voor $X = -1$ ton de staaflengte-veranderingen te berekenen uit:

$\triangle s = \dfrac{S_1 \,.\, s}{F.\, 1}$, en hiervoor een verschuivingsplan te teekenen.

Als uitgangspunt voor het Williotplan kan men b.v. punt ‚c' kiezen, de middenstaaf blijft hierbij verticaal.

Dit verschuivingsplan geeft de verticale doorbuiging van den onderrand en tevens de horizontale verschuiving van punt ‚a' in richting X. (fig. 137-137a).

Is de constructie symmetrisch dan teekent men de verschuiving alleen voor het halve vakwerk, waarvoor de horizontale verschuiving gelijk wordt aan: $\dfrac{\delta aa}{2}$ (δaa is uit te zetten als aangegeven in fig. 136).

Voor meerdere lasten P is nu de horizontale reactie:

$$X = \frac{1}{\delta aa}\,(P_1 \,.\, \eta_1 + P_2 \,.\, \eta_2 + \ldots\ldots \quad 57a)$$

Bij temperatuursverschil wordt:

$$X = \frac{\xi \,.\, t \,.\, L}{\delta aa} \quad \ldots\ldots \quad 58)$$

De spanningen hierbij worden dan $\pm\, S = X \,.\, S_1$.

Heeft de tweescharnierkap een trekband, dan is de lengteverandering hiervan in het verschuivingsplan bij te zetten. δaa wordt daardoor grooter, zoodat X kleiner wordt.

Voorbeeld.

De horizontale voetreactie H der blijvende belasting van de tweescharnierkap uit fig. 95a is met behulp van een verschuivingsplan te bepalen.

Voor $H = -1$ ton wordt de buigingslijn van den bovenrand geteekend, waartoe de lengteverandering $\triangle s$ der diverse staven worden berekend uit $\triangle s = \dfrac{S_1 \,.\, s}{E \,.\, F}$. Voor E wordt 1 gerekend, daar E geen invloed heeft op de verhouding der ordinaten van de buigingslijn.

In nevenstaande tabel is de grootte der lengte-veranderingen in meters aangegeven:

Staaf	s	S_i	F	σ	Δ s
1	290	— 2,90	20	— 0,145	— 0,420
2	310	+ 3,10	20	+ 0,155	+ 0,482
3	100	—	10	—	—
4	210	— 2,90	20	— 0,145	— 0,305
5	235	—	10	—	—
6	145	+ 3,10	20	+ 0,155	+ 0,225
7	165	+ 3,75	10	+ 0,375	+ 0,620
8	213	— 3,57	20	— 0,178	— 0,380
9	213	— 4,15	20	— 0,207	— 0,442
10	213	— 4,75	20	— 0,237	— 0,505
11	200	+ 4,82	15	+ 0,322	+ 0,642
12	200	+ 5,40	15	+ 0,359	+ 0,720
13	152	+ 4,68	10	+ 0,468	+ 0,710
14	157	— 0,45	15	— 0,030	— 0,047
15	157	+ 0,45	10	+ 0,045	+ 0,071
16	166	— 0,50	10	— 0,050	— 0,083
17	148	+ 0,45	10	+ 0,045	+ 0,067
18	173	+ 1,83	10	+ 0,183	+ 0,317

Met behulp van deze lengteveranderingen wordt een half verschuivingsplan geteekend (fig. 137a), waarbij de betreffende punten der bovenrand de volgende afstanden van sluitlijn s liggen:

uitganspunt plan = 108 mm
2e knooppunt = 100 mm
1e knooppunt = 65 mm

De horizontale afstand δaa van het halve verschuivingsplan blijkt 212,5 mm te bedragen.

Men bepaalt nu volgens formule 57a voor alle verticale las-

SCHAAL 1: 300

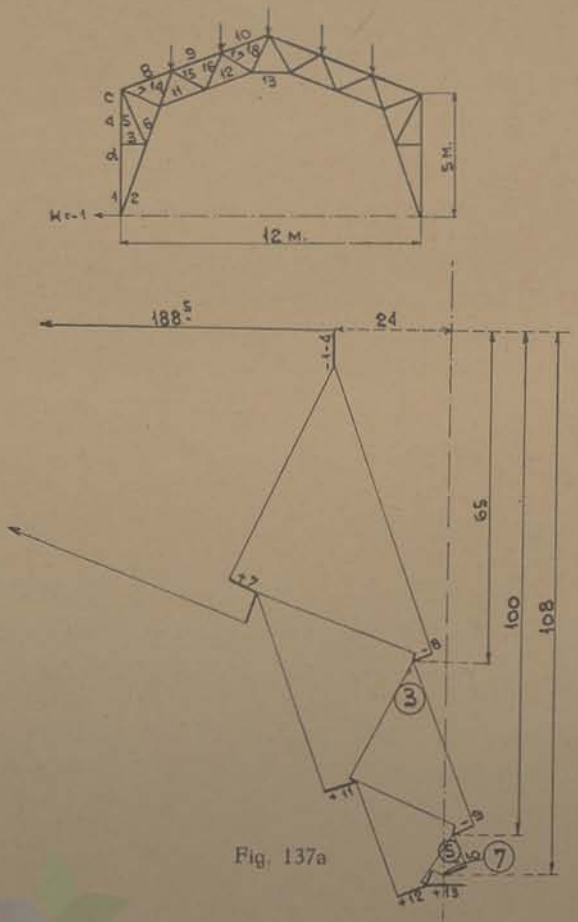


Fig. 137a

ten (= 1450 Kg. per knooppunt) de voetreactie H uit

$$\frac{\Sigma . P . \eta}{\delta aa} = \frac{1450 . (108 + 200 + 130)}{425} = 1{,}50 \text{ ton.}$$

Deze waarde voor H is dus dezelfde als verkregen volgens de methode der elasticiteits-vergelijkingen.

---

c) Verdraaiïng van vakwerken bij vormverandering.

Voor het geval dat een der opleggingen van het vakwerk zich niet verschuift in de richting der verbindingslijn der steunpunten, maar in een richting zooals b.v. in fig. 138 is aangegeven, moet met een verdraaiïng der geheele constructie om het vaste oplegpunt gerekend worden.

Bij belasting zal de doorbuiging der onderste knooppunten van het vakwerk in figuur 138 gelijk zijn aan de doorbuiging der horizontaal

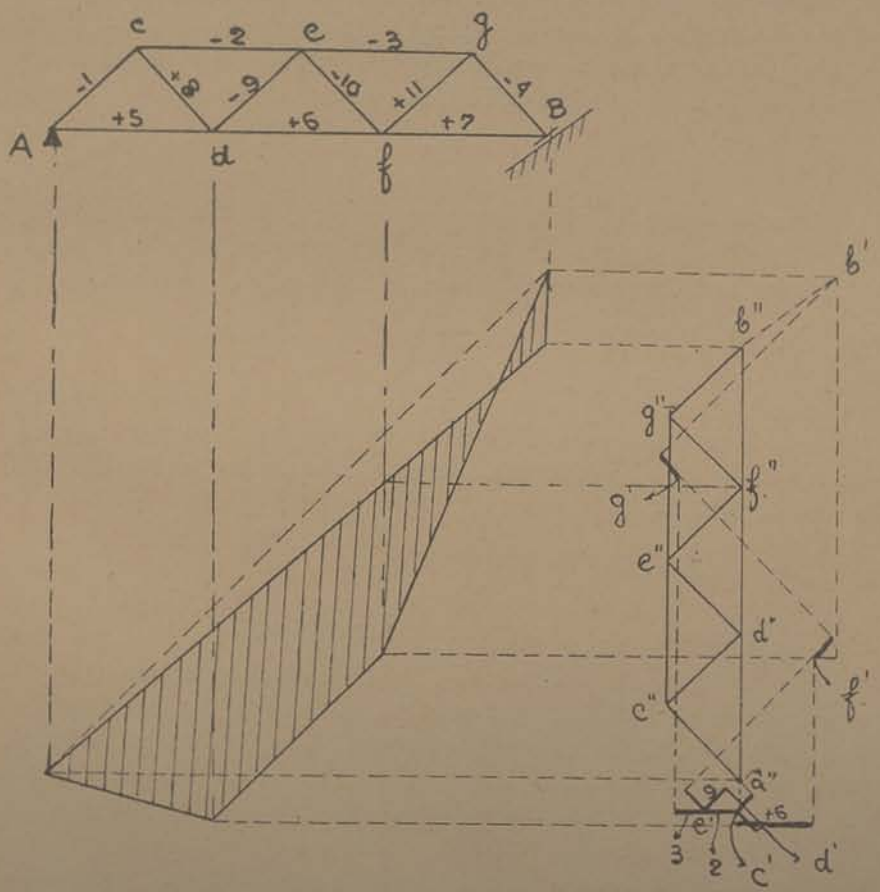


Fig. 138

opgelegd gerekende constructie verminderd met de opwaartsche werking der omhooggaande verschuiving van steunpunt B.

Men bepaalt als voren het verschuivingsplan waarbij in figuur 138 van staaf 2 is uitgegaan.

De oplegging bij B verschuift in de richting van het oplegvlak, terwijl oplegging A een vast scharnierpunt blijft.

In het verschuivingsplan wordt nu een hulpvakwerk geteekend met punt a'' als uitgangspunt.

Richting a''-b'' staat hierbij loodrecht op richting A-B, terwijl punt b'' bepaald wordt door vanuit b' een lijn te trekken evenwijdig aan de beweging van B.

De staven der hulpfiguur staan verder alle loodrecht op die der hoofdfiguur, zoodat beide figuren gelijkvormig zijn.

Door b'' over te halen op de buigingslijn, wordt de verticale opbuiging bepaald welke van de buigingslijn is af te trekken.

De verticale ordinaten in de geharceerde figuur geven dus voor de knooppunten der onderrand de verticale doorbuigingen.

De richting en grootte der verbindingen tusschen c'-c'', d'-d'', enz. geven tevens de afstanden aan, waarover de afzonderlijke knooppunten van het vakwerk zich tijdens de belasting zullen verplaatsen.

Daar de verticale doorbuiging van een punt direct uit de ordinaten der buigingslijn is op te meten, is het bepalen van punt b'' reeds voldoende, zoodat het niet noodig is de geheele hulpfiguur te teekenen.

Het hulpvakwerk kan eventueel ook bij de voorgaande gevallen waarbij alleen een horizontale verschuiving optreedt, worden ingeteekend, afstand b'-b'' wordt dan horizontaal, waardoor de buigingslijn onveranderd blijft.

---

§ 2) Methode der hoekveranderingen.

De methode der hoekveranderingen waaruit de doorbuiging of onbekende reactie van een vakwerk eveneens is te bepalen, komt in hoofdzaak voor bij de enkele stavenrij-methode, (het z.g.n. Stabzugverfahren van Müller-Breslau) en geeft een zuiverder en overzichtelijker figuur dan een verschuivingsplan van Williot.

Uit het te berekenen vakwerk wordt een stavenstelsel genomen (de bovenrand, onderrand of vulstaven) hetwelk aan de voorwaarde moet voldoen dat het einde van iedere staaf alleen met één andere staaf

PERPUSTAKAAN NASIONAL

verbonden is, dus slechts aan één volgende of voorgaande staaf aansluit.

Is de verschuiving der knooppunten van den bovenrand te bepalen, dan berekent men alleen de hoekveranderingen der bovenrand, terwijl voor de doorbuiging van alle knooppunten met de hoekveranderingen van het vulstavenverband is te rekenen.

Men bepaalt voor de betreffende stavenrij uit de staafkrachten S de lengteveranderingen $\triangle s$, de hoekveranderingen $\triangle \vartheta$, benevens de totaalhoeken ψ waarom de staven draaien.

Neemt men de laatste waarden voorloopig als bekend aan, dan is, uitgaande van een staaf s_1 welke door de vormverandering niet draait, zoodat ψ_1 hiervoor 0 is:

de verdraaiïng der 2e staaf: $\psi_2 = \psi_1 + \triangle \vartheta_1 = \triangle \vartheta_1$.
„ „ „ 3e „ $\psi_3 = \psi_2 + \triangle \vartheta_2$.
enz.

De hoekveranderingen $\triangle \vartheta$ worden bepaald uit de vormveranderingen $\triangle \alpha$ der afzonderlijke driehoeken waaruit het vakwerk is opgebouwd; voor deze veranderingen $\triangle \alpha$ gelden de volgende vergelijkingen (fig. 139).

$$\triangle \alpha_1 . E = (\sigma_1 - \sigma_2) . \operatorname{cotg} \alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) . \operatorname{cotg} \alpha_2.$$
$$\triangle \alpha_2 . E = (\sigma_2 - \sigma_3) . \operatorname{cotg} \alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) . \operatorname{cotg} \alpha_3.$$
$$\triangle \alpha_3 . E = (\sigma_3 - \sigma_1) . \operatorname{cotg} \alpha_2 + (\sigma_3 - \sigma_2) . \operatorname{cotg} \alpha_1. \quad \ldots\ldots \quad 59)$$

Daar $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^0$ is $\triangle \alpha_1 + \triangle \alpha_2 + \triangle \alpha_3 = 0$,

(dit geldt eveneens voor temperatuursveranderingen).

Uit deze hoekveranderingen wordt door samenvoeging per knooppunt de bij het knooppunt behoorende totaal-verandering $\triangle \vartheta$ gevonden.

In figuur 139 is deze verandering voor punt 5:

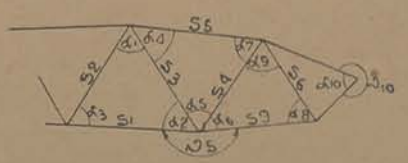


Fig. 139

$$E . \triangle \vartheta_5 = E . (\triangle \alpha_2 + \triangle \alpha_5 + \triangle \alpha_6) = (\sigma_2 - \sigma_3) \operatorname{cotg} \alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) .$$
$$. \operatorname{cotg} \alpha_3 + (\sigma_5 - \sigma_4) \operatorname{cotg} \alpha_7 + (\sigma_5 - \sigma_3) \operatorname{cotg} \alpha_4 + (\sigma_6 - \sigma_9) .$$
$$. \operatorname{cotg} \alpha_8 + (\sigma_6 - \sigma_4) \operatorname{cotg} \alpha_9.$$

Voor punt 10 wordt deze waarde $E . \triangle \vartheta_{10} = - E . \triangle \alpha_{10}$.

Is nu de verplaatsing en verdraaiïng van een staaf s_m te bepalen, (fig. 140) dan zet men evenals bij het Williot-plan bij het beginpunt dezer staaf de verschuiving uit van het eindpunt der voorlaatste staaf, (=a-c) en verschuift s_m evenwijdig aan haar as naar c.

Is $\triangle s_m$ de verkorting en ψ de draaiïngshoek, dan geeft c-d de plaats der belaste staaf a-b aan, na de vormverandering.

Afstand b-d is hierbij de totale verschuiving van het staafeinde.

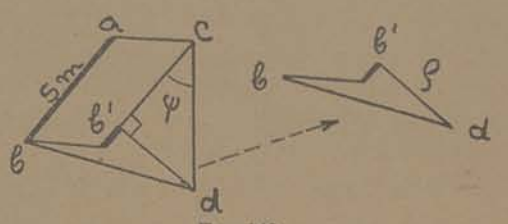


Fig. 140

Het is echter niet noodig hoek ψ in graden uit te zetten want voor den rechthoekigen driehoek is loodlijn b'-d ($= \rho$) gelijk aan ($s \pm \triangle s . \psi$ waarvoor globaal $s.\psi$ gerekend kan worden, zoodat punt d te vinden is door deze loodlijn naar links of naar rechts (naar gelang de verdraaiïng positief of negatief is) uit te zetten.

Uit de berekende hoekveranderingen van een vakwerk is het dus mogelijk voor een willekeurig knooppunt de doorbuiging te bepalen, daar uit de hoekveranderingen $\triangle \vartheta$ de totale eindverandering: (t.o.v. een vast aangenomen staaf):

$$E.\psi = \Sigma E. \triangle \vartheta \quad \text{of} \quad \psi = \Sigma \triangle \vartheta \ldots\ldots 60)$$

Hiernaar is in figuur 141, bij aanname dat staaf 3-4 niet van richting verandert:

$$E.\psi \text{ voor staaf } 3-4 = 0.$$
$$E.\psi \quad ,, \quad ,, \quad 3-2 = E. \triangle \vartheta_3 .$$
$$E.\psi \quad ,, \quad ,, \quad 2-1 = E. \triangle \vartheta_3 + E. \triangle \vartheta_2 .$$

De uit te zetten loodlijnen ρ worden nu bepaald uit $\frac{s.\ E.\ \psi}{E} \ldots 61)$

Met behulp dezer loodlijnen en de lengteveranderingen $\triangle s$ uit $\frac{S.s}{E.F}$ bepaalt men hierna op de gewone wijze het verschuivingsplan.

Voorbeeld.

Voor de in fig. 141 geteekende ligger zijn de doorbuigingen der bovenrandknooppunten te bepalen.

De bij de belasting behoorende staafkrachten S zijn in figuur a aangegeven.

Aan de hand van de doorsneden F, de staaflengten s, en de spanningen σ bepaalt men de lengte-veranderingen $\triangle s$ uit

$$\frac{S.s}{E.F}.$$

Ter verkrijging van een duidelijk overzicht is een en ander in afzonderlijke schema's ingevuld.

Daar staaf 3-4 nagenoeg horizontaal blijft, wordt punt 3 als uitgangspunt gekozen.

Voor de diverse hoeken van den bovenrand worden nu de waarden $E.\triangle\alpha$ berekend, welke in onderstaande tabel zijn aangegeven.

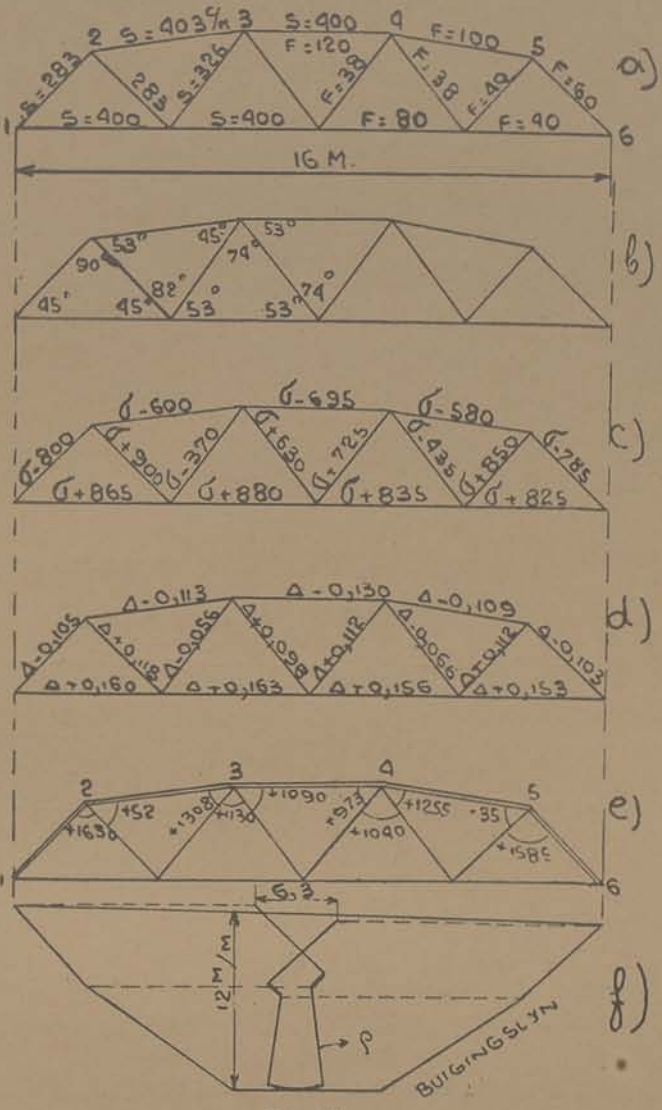


Fig. 141

Knooppunt	hoek α	E. $\triangle\alpha$	E. $\triangle\vartheta$
2	90°	(+865+800) cotg 45° + (+865−900) cotg 45° = + 1630	
2	53°	(−370−900) „ 82° + (−370+600) „ 45° = + 52	+1682
3	45°	(+900+600) „ 53° + (+900+370) „ 82° = +1308	
3	74°	(+880+370) „ 53° + (+880−630) „ 53° = +1130	
3	53°	(+725−630) „ 74° + (+725+695) „ 53° = +1090	+3528
4	53°	(+630+695) „ 53° + (+630−725) „ 74° = + 973	

enz.

Per knooppunt vindt men door samenvoeging dezer waarden:

$$E.\,\triangle\vartheta_2 = +\ 1682$$
$$E.\,\triangle\vartheta_3 = +\ 3528$$
$$E.\,\triangle\vartheta_4 = +\ 3268$$
$$E.\,\triangle\vartheta_5 = +\ 1550$$

Uitgaande van punt 3 worden de totale veranderingen E.ψ volgens formule 60:

voor staaf 3 — 4, $E.\psi = 0$
voor staaf 2 — 3 $E.\psi = E.\,\triangle\vartheta_3 = 3528.$
voor staaf 1 — 2 $E.\psi = +3528 + E.\,\triangle\vartheta_2 = 5210.$
voor staaf 4 — 5 $E.\psi = E.\,\triangle\vartheta_4 = 3268.$
voor staaf 5 — 6 $E.\psi = +3268 + E.\,\triangle\vartheta_5 = 4818.$

Uit deze laatste waarden (E. ψ) worden nu de uit te zetten loodlijnen ρ berekend, deze zijn:

(voor staaf 1 — 2) $\rho = \frac{s.\,E.\,\psi}{E} = \frac{283.5210}{2150.000} = 0{,}685$ cm.
„ „ 2 — 3 $\rho =$ „ $= \frac{403.3528}{2150.000} = 0{,}660$ „
„ „ 4 — 5 $\rho =$ „ $= \frac{403.3268}{2150.000} = 0{,}615$ „
„ „ 5 — 6 $\rho =$ „ $= \frac{283.4818}{2150.000} = 0{,}635$ „

Met behulp dezer loodlijnen en de lengteveranderingen $\triangle s$ teekent men het verschuivingsplan der bovenrand (figuur b).

Daar alle waarden in dit plan 2× te groot zijn genomen, verschijnt de doorbuigingslijn eveneens 2× vergroot.

De grootste doorbuiging van het vakwerk blijkt bij punt 3 te wezen en is 1,20 cm.

De horizontale verschuiving van oplegging B is 0,63 cm, en is gelijk aan de totale lengte-verandering der onderrand.

Voorbeeld.

Gevraagd de horizontale voetreactie te berekenen voor de blijvende belasting van de scharnierkap uit fig. 95 a.

De buigingslijn voor X = — 1 ton is hierbij volgens bovenstaande methode te bepalen.

De door de diverse staven ingesloten hoeken α zijn in fig. 141a aangegeven, waarbij voor de gesloten stavenrij het diagonaal-verband wordt gekozen. De hoekveranderingen zijn hiervoor alle aan één zijde (onderkant) te berekenen.

Bij dit stavenstelsel worden tevens de hoekveranderingen $\triangle\vartheta$ gelijk aan de veranderingen $\triangle\alpha$ met dien verstande, dat $\triangle\vartheta_2$, $\triangle\vartheta_4$, en $\triangle\vartheta_6$ van voorteeken wisselen.

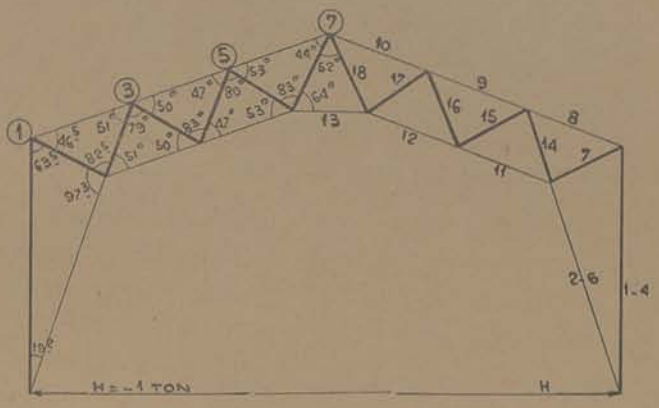


Fig 141a

De staafspanningen voor H = — ton zijn te ontleenen aan de tabel op blz. 54.

Men vindt voor:

E. $\triangle\vartheta_1$ = (+ 0,155 + 0,145). cotg 19,2° + (+0,155 — 0.375). cotg 97,3° =
0,30 . 2,87 — 0,22. — 0,126 = 0,834 ton/cm²

E. $\triangle\vartheta_2$ = — (— 0,178 — 0,375). cotg 46,5° — (— 0,178 + 0,03). cotg 51° =
+ 0,553 . 0,95 + 0,175 . 0,81 = 0,667 ton/cm²

E. $\triangle\vartheta_3$ = (+ 0,322 + 0,03). cotg 51° + (+ 0,322 — 0,045). cotg 50° =
+ 0,352 . 0,81 + 0,277 . 0,84 = 0,517 ton/cm²

E. $\triangle\vartheta_4$ = — (— 0,207 — 0,045). cotg 50° — (— 0.207 + 0,05). cotg 47° =
+ 0,252 . 0,84 + 0,157 . 0,93 = 0,358 ton/cm²

E. $\triangle\vartheta_5$ = (+ 0,359 + 0,05). cotg 47° + (+ 0,359 — 0,045). cotg 53° =
+ 0,409 . 0,93 + 0,314 . 0,75 = 0,615 ton/cm²

E. $\triangle\vartheta_6$ = — (— 0,237 — 0,045). cotg 53° — (— 0,237 — 0,183). cotg 44° =
+ 0,282 . 0,75 + 0,420 . 1,04 = 0,648 ton/cm²

E. $\triangle\vartheta_7$ = (+ 0,468 — 0,183). cotg 64° × 2 = 0,285 . 0,488 = 0,278 ton/cm²

Alle verdraaiïngen zijn positief, dus links om het knooppunt draaiend, waardoor de volgorde der knooppunten van links naar rechts gaande kan worden genomen. Als uitgangspunt voor de totale verdraaiïngen wordt knooppunt 7 gekozen.

In dit voorbeeld is echter de volgorde der knooppunten in tegengestelde zin genomen, zoodat de verdraaiïngen der hoeken naar rechts draaiend worden gerekend.

Staaf 10 verdraait een halve hoek E . $\triangle\vartheta_7$ = 0,139.

Men vindt voor de diverse knooppunten:

$\frac{1}{2}$. E . ψ_7 = = 0,139
E . ψ_6 = 0,139 + 0,648 = 0,787

$E.\psi_5 = 0{,}787 + 0{,}615 = 1{,}402$
$E.\psi_4 = 1{,}402 + 0{,}358 = 1{,}760$
$E.\psi_3 = 1{,}760 + 0{,}517 = 2{,}277$
$E.\psi_2 = 2{,}277 + 0{,}667 = 2{,}944$
$E.\psi_1 = 2{,}944 + 0{,}834 = 3{,}778$

De hierbij behoorende loodlijnen ρ worden bepaald uit: $\frac{s.E.\psi}{E}$ en zijn (bij E = 1, zie blz. 94).

voor staaf 1 + 4 = 5 . 3,778 = 18,89 cm
„ „ 7 = 1,65 . 2,944 = 4,86 „
„ „ 14 = 1,57 . 2,277 = 3,58 „
„ „ 15 = 1,57 . 1,76 = 2,76 „
„ „ 16 = 1,66 . 1,402 = 2,33 „
„ „ 17 = 1,48 . 0,787 = 1,17 „
„ „ 18 = 1,73 . 0,139 = 0,24 „

De lengte-veranderingen $\triangle s$ (voor E = 1) zijn te ontleenen aan de tabel op blz. 88.

Na het opteekenen van het halve verschuivingsplan (fig. 141b) wordt de voetreactie H bepaald uit:

$$\frac{\Sigma P.\eta}{\delta aa} = 1450 . \frac{108 + 202 + 130}{425}$$

$= 1{,}50$ ton.

Men vergelijke het verschuivingsplan van fig. 141b met dat uit fig. 137a. Het heeft dezelfde gedaante en dezelfde lengte der hulpordinaten, doch is overzichtelijker, en zuiverder te teekenen, daar in fig. 137a bij een scherpe snijding der hulplijnen de verschuiving van het betreffende knooppunt niet precies is te bepalen.

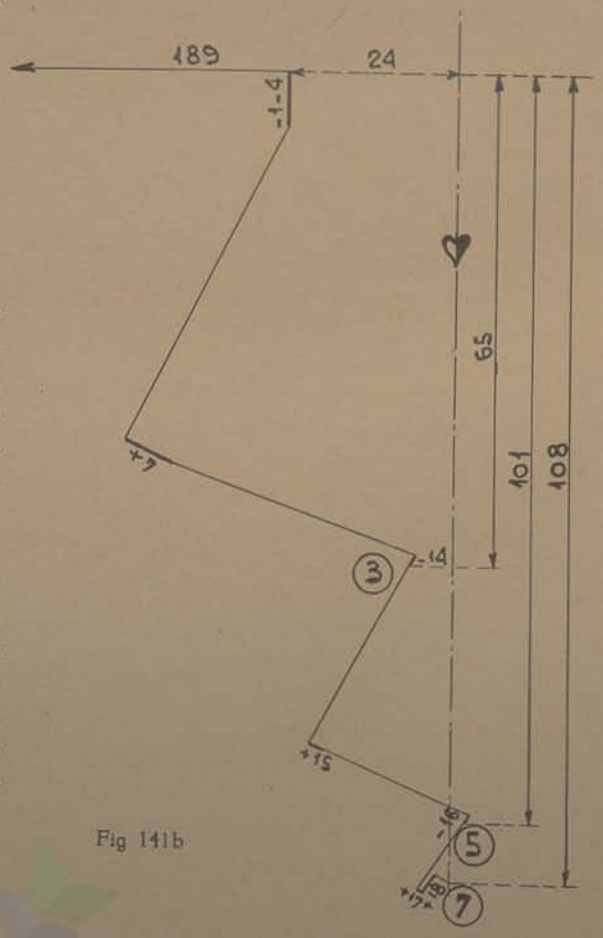


Fig 141b

Voorbeeld.

Voor dezelfde constructie wordt thans de bovenrand als stavenrij gekozen.

De veranderingen $\triangle\alpha_1 - \triangle\alpha_3$ $\triangle\alpha_5$ en $\triangle\alpha_7$ zijn te ontleenen aan de voorgaande berekening.

$\triangle\vartheta_1 = \triangle\alpha_1 + (-0{,}030 - 0{,}375)$ cotg $82{,}2° + (-0.030 + 0{,}178)$ cotg $51° = 0{,}834 - 0{,}056 + 0{,}130 = 0{,}908$

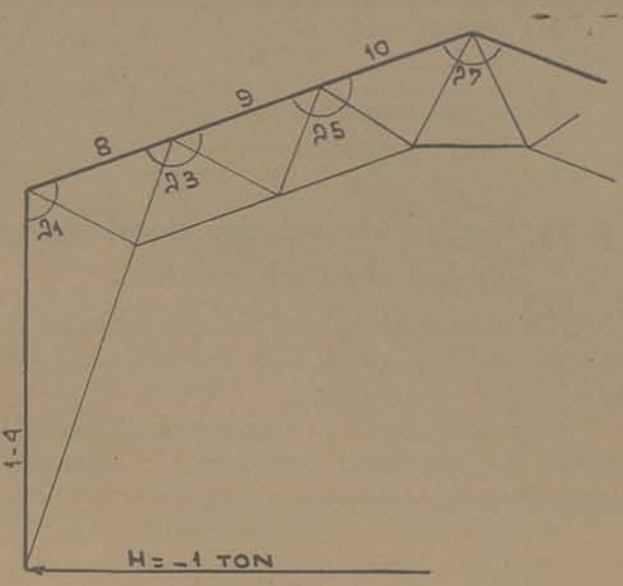


Fig. 141c

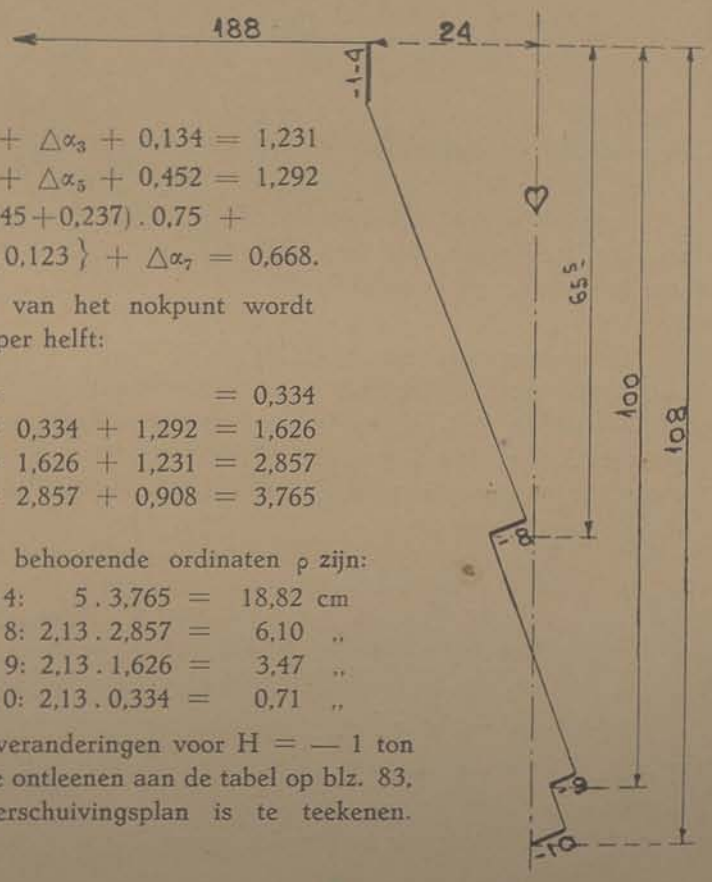


Fig. 141d

$\triangle\vartheta_3 = 0{,}58 + \triangle\alpha_3 + 0{,}134 = 1{,}231$

$\triangle\vartheta_5 = 0{,}225 + \triangle\alpha_5 + 0{,}452 = 1{,}292$

$\triangle\vartheta_7 = 2\{(0{,}045+0{,}237) \cdot 0{,}75 + (0{,}045-0{,}183) \cdot 0{,}123\} + \triangle\alpha_7 = 0{,}668.$

Uitgaande van het nokpunt wordt de verdraaiïng per helft:

$E \cdot \psi_7 = \quad = 0{,}334$

$E \cdot \psi_5 = 0{,}334 + 1{,}292 = 1{,}626$

$E \cdot \psi_3 = 1{,}626 + 1{,}231 = 2{,}857$

$E \cdot \psi_1 = 2{,}857 + 0{,}908 = 3{,}765$

De hierbij behoorende ordinaten ρ zijn:

voor staaf 1 — 4: $5 \cdot 3{,}765 = 18{,}82$ cm

„ „ 8: $2{,}13 \cdot 2{,}857 = 6{,}10$ „

„ „ 9: $2{,}13 \cdot 1{,}626 = 3{,}47$ „

„ „ 10: $2{,}13 \cdot 0{,}334 = 0{,}71$ „

De lengte-veranderingen voor H = — 1 ton en E = 1 zijn te ontleenen aan de tabel op blz. 83, waarna het verschuivingsplan is te teekenen. (fig. 141d)

De opgemeten ordinaten in fig. 141 moeten dezelfde zijn als die welke bepaald zijn in fig. 141b.

Men vindt weer voor H: $1450 . \left(\frac{180 + 200 + 131}{424}\right) = 1{,}50$ ton.

---

§ 3) Het berekenen der doorbuiging van vakwerken uit het elastisch gewicht.

De buigingslijn van een bepaalde randstaaf wordt hierbij beschouwd als een stangenveelhoek voor verschillende lasten ‚*w*' aangrijpend gedacht in de knooppunten.

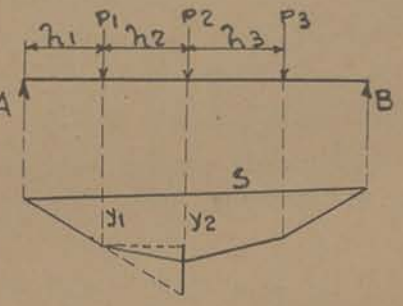
Deze gewichten ‚*w*' kunnen worden bepaald uit de hoekveranderingen der betreffende randstaven, de hellingshoeken der staven, hare totale lengten en bijbehoorende lengte-veranderingen.

Tot goed begrip dezer verhoudingen dient het volgende.

Tusschen poolafstand H in fig. 142 en de lasten P met hare momenten y_1, y_2 enz. bestaan t.o.v de sluitlijn s, de volgende verhoudingen:

$$P_m = H . \left(\frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda_m}\right) - \left(\frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_{m+1}}\right)$$

In fig. 143 is S_m, S_{m+1} enz. de randstaaf van een vakwerk. Men rekent een willekeurig assenstelsel x-y aangebracht, dat zoo is gelegen t.o. der randstaven, dat geen der staafhoeken met dit assenstelsel 90° is.



De onderste geknikte lijn is de buigingslijn met de sluitlijn s waarbij de waarden $\triangle y_m$ de doorbuigingen zijn. Rekent men de poolafstand voor deze buigingslijn = 1, dan is volgens het bovenstaande:

$$w_m = \frac{\triangle y_m - \triangle y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\triangle y_{m+1} - \triangle y_m}{\lambda_{m+1}} =$$

$$1 . (\text{tg}.\alpha_m - \text{tg}.\alpha_{m+1})$$

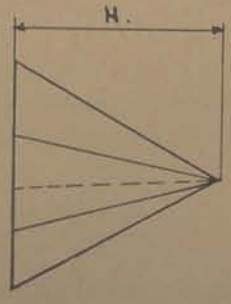


Fig. 142

Σw_m zijn dus vervangende krachten waarvoor een stangenveelhoek is te teekenen, die dan de buigingslijn voorstelt.

Door toepassing der vergelijking $y_{m-1} - y_m = s_m \cdot \sin \cdot \beta_m$ op de verschuivingen $\triangle y_{m-1} - \triangle y_m$, ontstaat na omwerking de volgende formule voor het Elastisch gewicht:

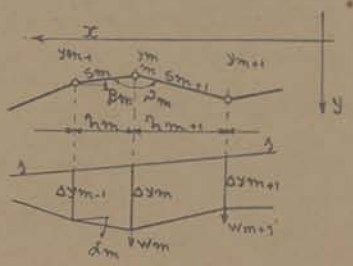


Fig. 143

$$w_m = \triangle \vartheta_m - \frac{\triangle s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m + \frac{\triangle s_{m+1}}{s_{m+1}} \cdot \operatorname{tg} \beta_{m+1} \quad \ldots\ldots \; 62)$$

Daar $\frac{\triangle s}{s} = \frac{S}{E.F} = \frac{\sigma}{E}$ wordt deze waarde (met E vermenigvuldigd):

$$E.w_m = E.\triangle \vartheta_m - \sigma_m . \operatorname{tg} \beta_m + \sigma_{m+1} \cdot \operatorname{tg} \beta_{m+1} \quad \ldots\ldots \; 62a)$$

(Bij temperatuursverschil zijn de spanningen hierin nog te vermeerderen met: $\sigma_1 = \xi . t . E$).

Is een der hoeken $\beta = 90°$, dan voegt men bij de verschuiving van het voorlaatste knooppunt de lengte-verandering $\triangle s$ der betreffende verticaal. Met deze waarde op schaal uitgezet, wordt dan de buigingslijn gewoon verschoven. Dit geldt alleen wanneer genoemde verticaal een hoofdstaaf is. (fig. 144).

Om dus met behulp van het elastisch gewicht de doorbuiging van een geconstrueerde ligger te bepalen, handelt men als volgt:

Bepaal voor de werkelijke belasting, of indien het om een statisch onbepaalde constructie gaat, voor $X = -1$ ton de staafkrachten ‚S, de spanningen σ , en de hoekveranderingen $E.\triangle\vartheta$ volgens de methode der hoekveranderingen.

Hierna bepaalt men de gewichten-‚*w*' met behulp der gegeven formule's en teekent voor deze waarden de momentenlijn, welke dan tevens de buigingslijn voorstelt.

Neemt men hierbij als poolafstand = ‚E' (voor de gewichten uit form. 62a) dan vindt men de ordinaten $\triangle y$ der buigingslijn

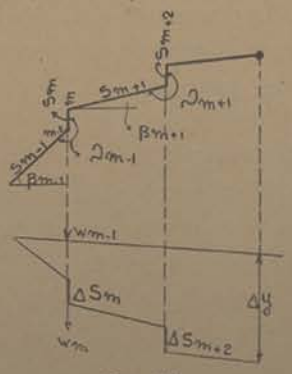


Fig. 144

in de schaal der teekening. Om dus bij een schaal 1 : 30 de vergrooting der doorbuiging 10 × de juiste waarde te kunnen opmeten, moet H gelijk worden aan $\frac{E}{10 \times 30} = \frac{2100.000}{300} = 7000$ Kg.

Zijn de ‚w'-gewichten geteekend in een schaal van b.v. 1000 Kg. = 5 mm, dan is poolafstand H gelijk aan 7 . 5 = 35 mm.

Worden de gewichten berekend volgens form. 62, (als getallen) dan is in bovenstaande poolafstand voor E = 1 in te vullen.

Is een randstaaf horizontaal (evenwijdig aan de x-x as, dan zijn hare hoeken $\beta = 0$, zoodat w_m gelijk wordt aan $\triangle \vartheta_m$.

Staan in het vakwerk eenige vulstaven verticaal en hebben deze invloed op het Elastisch gewicht, dan zou ‚w' voor het betreffende punt der rand oneindig groot worden (daar $\beta = 90°$, wordt tg. β oneindig groot).

Het beste bepaalt men dan ‚w' voor een andere randstaaf en berekent hierna de lengte-veranderingen $\triangle v$ der verticalen. Deze waarden worden dan, zooals reeds boven aangegeven, aan de ordinaten der eerste buigingslijn toegevoegd.

Voorbeeld.

In fig. 145 is de buigingslijn bepaald voor den onderrand der ligger waarbij alle hoeken $\beta = 0$, zoodat $w = \triangle \vartheta$ voor ieder punt.

De buigingslijn der bovenrand wordt bepaald door bij de buigingslijn der onderrand de lengte-veranderingen $\triangle v$ te voegen.

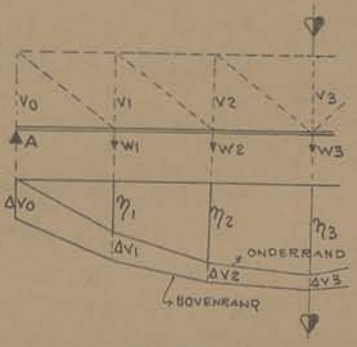


Fig. 145

In plaats van voor de elast. gewichten een poolfiguur en stangenveelhoek te teekenen, kan men ook de doorbuiging bepalen door een momentenvergelijking dezer gewichten op te stellen, op de wijze zooals op blz. 18 is aangegeven.

Men rekent hiertoe de gewichten op een enkele balk aangrijpend en bepaalt hiervoor reactie's A_w en B_w.

Voor de symetrische belasting in fig. 146 is: $A_w = Q_1 = w_1 + w_2 + w_3$

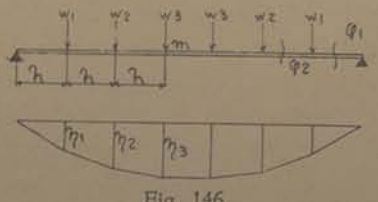


Fig. 146

Hiernaar worden de doorbuigingen:

$$\eta_1 = M_1 = Q_1 . \lambda$$
$$\eta_2 = M_2 = (Q_1 + Q_2) . \lambda$$
$$\eta_3 = M_3 = (Q_1 + Q_2 + Q_3) . \lambda$$

Voorbeeld.

Voor de in fig. 146a geteekende randconstructie van een willekeurige ligger is:

$E . w_1 = 0{,}1000$
$E . w_2 = 0{,}1500$
$E . w_3 = 0{,}2000$
$E . w_4 = 0{,}2500$
} alle gewichten in ton/cm².

$\lambda = 2$ M.

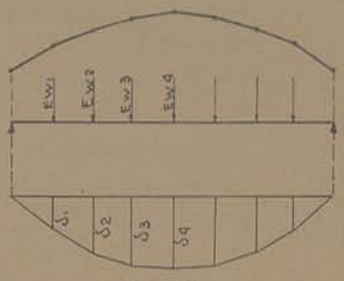


Fig. 146a

De grootte der poolafstand voor deze lasten, waarbij de doorbuigingen in haar juiste waarden zijn op te meten, wordt bij

$E = 2100$ t/cm² en een schaal $= 1 : 250$, gelijk aan $hw = \frac{2100}{250} = 8{,}4$ cm.

Wordt ‚w' op een krachtenschaal 1 cm² = 50 mm, uitgezet: dan is poolafstand $hw = 42$ cm.

De opgemeten doorbuigingen bedragen dan (in werkelijkheid):

$\delta_1 = 0{,}55$ mm. $\delta_2 = 1{,}—$ mm. $\delta_3 = 1{,}3$ mm. $\delta_4 = 1{,}4$ mm.

Berekend uit de momenten Mw wordt:

$Q_4 = \frac{E . w_4}{2} = 0{,}1250$
$Q_3 = 0{,}1250 + 0{,}2000 = 0{,}3250$
$Q_2 = 0{,}3250 + 0{,}1500 = 0{,}4750$
$Q_1 = 0{,}4750 + 0{,}1000 = 0{,}5750$

$Mw_1 : \lambda = Q_1 = 0{,}5750$
$Mw_2 : \lambda = Q_1 + Q_2 = 1{,}0500$
$Mw_3 : \lambda = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1{,}3750$
$Mw_4 : \lambda = Q_1$ t/m $Q_4 = 1{,}5000$

De doorbuigingen zijn hiernaar;

$$\delta_1 = \frac{Mw_1}{E} = \frac{Mw_1}{\lambda} — \frac{\lambda}{2100} = 0{,}575 . \frac{200}{2100} = 0{,}055 \text{ cm}$$
$\delta_2 = 1{,}05 . 0{,}095 = 0{,}10$ „
$\delta_3 = 1{,}375 . 0{,}095 = 0{,}131$ „
$\delta_4 = 1{,}500 . 0{,}095 = 0{,}143$ „

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Voorbeeld.

De doorbuiging der bovenrand van de in fig. 141c der vorige paragraaf behandelde kapconstructie is te bepalen, met dien verstande, dat de constructie vrij opgelegd is te beschouwen. De belasting H = — 1 ton.

Volgens formule 62a is het elastisch gewicht:

voor knooppunt 3 = 1,231 + (0,178 — 0,207). tg. 20°
= 1,233 — 0,029 . 0,364
= 1,223 t/cm²

voor knooppunt 5 = 1,292 + (0,207 — 0,237). tg. 20°
= 1,303 t/cm²

voor knooppunt 7 = 0,668 + 2. 0,237. tg. 20°
= 0,842 t/cm²

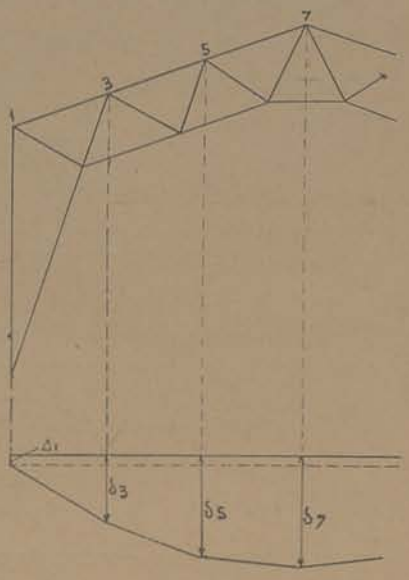


Fig. 146 b

Deze gewichten als lasten aangebracht op een enkele balk geven reactie A = B = 1,223 + 1,303 + 0,421 = 2,947.

Hieruit volgen de ordinaten voor de momentenlijn:

$\eta_3 = 2{,}947 \cdot 2 = 5{,}894$ cm

$\eta_5 = 5{,}894 + (2{,}947 - 1{,}223) \cdot 2 = 9{,}342$,,

$\eta_6 = 9{,}342 + 0{,}421 \cdot 2 = 10{,}184$,,

Om de doorbuiging der punten van den bovenrand te bepalen, dient bij deze ordinaten nog de verkorting der eindverticalen te worden toegevoegd. Deze zijn bij E = 1 gelijk aan: $\frac{P \cdot s}{F} = \sigma \cdot h = 0{,}72$ cm.

Men vindt nu voor:

$\delta_3 = 5{,}89 + 0{,}72 = 6{,}61$ cm

$\delta_5 = 9{,}34 + 0{,}72 = 10{,}06$,,

$\delta_7 = 10{,}18 + 0{,}72 = 10{,}90$,,

Deze waarden zijn dus gelijk aan de ordinaten der buigingslijn in fig. 137a of fig. 141a.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

De verschuiving van 2 willekeurige punten der stavenrij in de richting der verbindingslijn dezer punten is gelijk aan:

$$v = \sum_{1}^{n-1} y_m . E \triangle \vartheta_m + \sum_{1}^{n} . \frac{\sigma_m}{E} . e_m \quad \ldots\ldots 63)$$

hierbij is:

y_m de loodrecht op de verbindingslijn staande hoogte-ordinaat van punt m.

e_m = de op deze lijn vallende projectie der staaf m.

Voor de verschuiving der voetpunten van bovenstaande vrij opgelegd gerekende constructie wordt volgens deze formule: (bij een horizontale knooppunts-afstand e = 2 Mr en E = 1).

$$\delta aa = v = 2. (5 . 0{,}908 + 5{,}75 . 1{,}231 + 6{,}50 . 1{,}292) + 7{,}20 . 0{,}688 + 2 . 2. (-0{,}178 - 0{,}207 - 0{,}237) = 44{,}95 - 2{,}45 = 42{,}50 \text{ cm.}$$

De horizontale reactie H van het spant als tweescharnierkap en belast volgens fig. 137a is hieruit $1450 . \frac{13{,}22 + 20{,}12 + 10{,}90}{42{,}50} = 1{,}50$ ton.

Voor temperatuursverschil wordt, bij berekenen der verschuiving volgens form. 63

$$X_t = E . \frac{\xi . t . L}{v} \quad *)$$

Is een trekband aanwezig welke een waarde $\triangle L$ kan rekken dan is: X te verminderen met:

$$Xc = E . \frac{\triangle L}{v} . \quad °)$$

Het Elastisch gewicht is ook te bepalen langs geheel analytische weg.

Hierbij worden de hoekveranderingen $\triangle \vartheta$ buiten beschouwing gelaten en worden de gewichten bepaald volgens de $\frac{1}{\lambda}$ methode.

(Voor nadere omschrijving hieromtrent zie „Müller-Breslau": Die graphische Statik der Baukonstruktionen, 2e Band, 1e deel.)

---

*) Zie ook formule 30.
" " " 32.

H O O F D S T U K V.

Dragers met trekband.

Dit soort dragers is met voordeel te gebruiken voor lichte kraanbaan-constructies, voetbruggen of bordessen.

Door de trekband zijn deze constructies enkelvoudig statisch onbepaald, waardoor zij met behulp der vormveranderings-eigenschappen dienen te worden berekend.

Men rekent de trekband doorgesneden en ter plaatse van de doorsnede een kracht $Xa = -1$ ton, voor deze kracht wordt voor verschillende punten van den balk het moment bepaald, waarna de buigingslijn voor den balk wordt geteekend.

De doorbuiging van den balk veroorzaakt tusschen de einden van den doorgesneden trekband een uitbuiging δaa.

Deze uitbuiging is recht evenredig aan de verticale doorbuiging van den balk, zoodat bij een bepaalde belasting de kracht in de trekband gevonden wordt uit de verhouding der ordinaten van de buigingslijn van den balk en de uitbuiging δaa, of in een formule uitgedrukt:

$$Xa = \frac{1}{\delta aa} \cdot \Sigma P . \eta \ldots\ldots 64)$$

(Hierbij is η de bij een bepaalde last behoorende ordinaat der buigingslijn).

In bovenstaande formule is de invloed der lengteveranderingen van de verschillende staven verwaarloosd. Wordt deze invloed in rekening gebracht, dan is δaa met minstens 10% te verhoogen.

Juister is deze extra uitbuiging δa te berekenen uit $\sum \frac{Sa^2 . s}{F . E}$, waardoor

$$Xa = \frac{1}{\delta aa + v . \delta a} \cdot \Sigma P . \eta \ldots\ldots 64a)$$

v is hierbij een vermenigvuldigingsfactor, daar δa in de werkelijke waarde gevonden wordt, terwijl δaa (opgemeten) in een willekeurige schaal is aangegeven. Deze factor v is dus gelijk aan de opgemeten waarde gedeeld door de bij de figuur geplaatste berekende waarde voor δaa.

Het buigingsmoment in den balk voor een punt $m = Mo_m - Xa . y_m$.

Deze waarde omgewerkt geeft voor het moment:

$$M_m = \frac{y_m}{\delta aa} \cdot \Sigma P . \eta \ldots\ldots 65)$$

REPRODUCTIE NIET TOEGESTAAN

Hierbij is $\frac{y_m}{\delta aa}$ een vermenigvuldigingsfactor, daar voor het punt m de momentenlijn met $\frac{\delta aa}{y_m}$ is vermenigvuldigd, om een onveranderde Xa-lijn (buigingslijn) te behouden.

Voorbeeld.

Bij den in figuur 147 geteekende balk is het max. moment voor Xa = — 1 ton gelijk aan 1 . h.

Men deelt het hierbij behoorende momentenvlak in diverse strooken met oppervlakten f_1, f_2 enz. (in ton cm.) en bepaalt hiervoor de nieuwe momentenlijn (buigingslijn) door middel van poolfiguur en stangenveelhoek (poolafstand willekeurig).

De lengte der raaklijn δaa wordt nu bepaald door vanuit het midden van de sluitlijn loodlijnen te trekken op de richting der staven s. De uitbuiging δaa verschijnt daardoor in een willekeurige schaal.

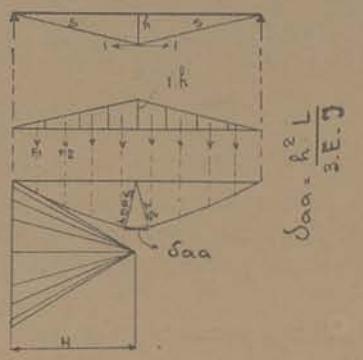


Fig. 147

Wil men de vormverandering door X = — 1 ton voor alle staven in rekening brengen, dan is δaa te vermeerderen met $\delta a = \sum \frac{S_1^2 . s}{F . 1}$.

Deze uitkomst is echter een werkelijke grootte, welke in de schaal der opgemeten waarde is te herleiden, waartoe men de verhouding v dezer opgemeten waarde, gedeeld door de berekende waarde als vermenigvuldigingsfactor rekent, zoodat totaal:

$$\delta t = \delta aa + v . \delta a.$$

De analytische waarde voor δaa wordt gevonden uit de bij de figuur geplaatste formule, waarbij J voorloopig geschat en voor E = 1 gerekend wordt.

Het moment voor een punt m wordt verder bepaald uit Mo_m — Xa . y, d.i. het moment der links van punt m liggende uitwendige krachten verminderd met Xa . y.

Teekent men de bij punt m behoorende invloedslijn, dan wordt de onder A uit te zetten ordinaat gelijk aan $\frac{x . \delta t}{y}$ (figuur 148).

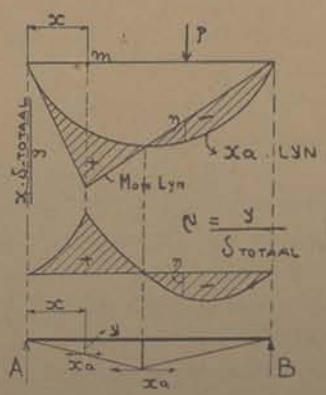


Fig. 148

Deze invloedslijn dient voor ieder punt afzonderlijk te worden opgeteekend omdat de noemer y voor de onder A uit te zetten ordinaat evenals afstand x voor ieder punt verschillend is.

Daar verder deze invloedslijn vermenigvuldigd is met $\frac{\delta t}{y_m}$, dienen de in de figuur opgemeten ordinaten vermenigvuldigd te worden met $\frac{y_m}{\delta \text{ totaal}}$ zoodat bij de invloedslijn voor een punt 1 deze vermenigvuldigingsfactor gelijk is aan: $\mho_1 = \frac{y_1}{\delta t}$, voor een punt 2 is $\mho_2 = \frac{y_2}{\delta t}$ enz:

Het moment voor een willekeurig punt is dus:

$$Mm = \mho . \Sigma\ P . \eta . \ldots . \quad 65a)$$

Behalve door het moment wordt de balk nog belast door een horizontale drukkracht gelijk aan Xa. De eindspanningen in den balk zijn tenslotte gelijk aan: $\pm \frac{M}{W} - \frac{Xa}{F}$.

Voorbeeld.

Voor den in figuur 149 geteekenden balk wordt het moment voor Xa = — 1 ton gelijk aan 1 . h.

De oppervlakte der momentenfiguur in diverse strooken verdeeld, welke als krachten zijn aan te brengen, geeft door middel van een poolfiguur met geheel willekeurige poolafstand de buigingslijn voor Xa = — 1 ton in een willekeurige schaal.

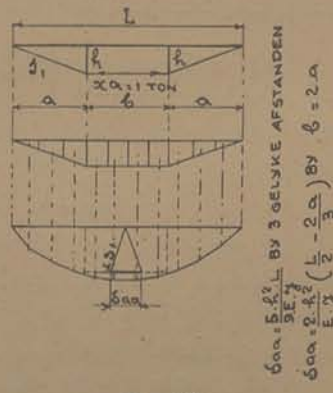


Fig. 149

Vanuit het middelpunt der sluitlijn worden nu 2 lijnen getrokken loodrecht op de richting der trekranden s_1, verder worden de loodrecht onder de verticalen liggende punten der buigingslijn horizontaal verbonden, waarop door de loodlijnen op s_1 een stuk δaa wordt afgesneden.

Vervolgens wordt de verschuiving berekend naar de bij de figuur geplaatste formule.

VERPLOEGAARD INTERNATIONAL

Men vindt nu voor een willekeurige last P de bijbehoorende kracht Xa in den trekband uit: $Xa = \mu . P . \eta$. (waarbij $\mu = \frac{1}{\delta t}$) , en η de in de teekening gemeten ordinaten zijn.

Het moment voor een willekeurig punt kan men bij rustende belasting het beste bepalen uit $M = Mo - Xa . y$ waarbij Mo het betreffende moment van den balk zonder trekband is.

Is de belasting echter een rijdende dan teekent men de invloedslijn voor ieder gegeven punt afzonderlijk, waarbij dan volgens het voorgaande de vermenigvuldigingsfactor $\mu = \frac{ym}{\delta t}$

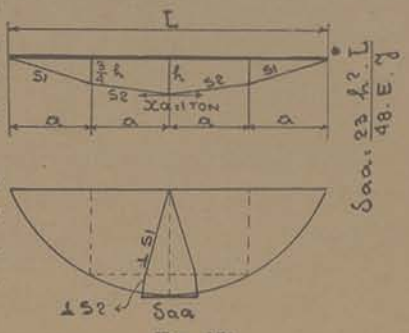


Fig. 150

Over het horizontale gedeelte van den trekband blijft de vermenigvuldigingsfactor onveranderd.

Voor de in figuur 150 en 151 geteekende dragers met trekband is nog de constructie der buigingslijn aangegeven alsmede de bijbehoorende formules voor het berekenen van δaa

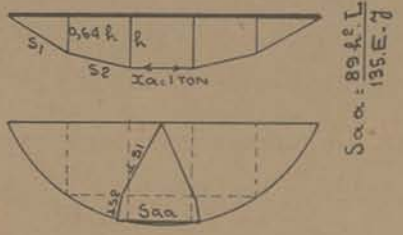


Fig. 151

Is het aantal velden grooter dan 5, dan rekent men de trekband paraboolvormig, waarbij:

$$\delta aa = \frac{8}{15} \cdot \frac{h^2 . L}{E . J} .$$

Voorbeeld.

Bij den in figuur 152 geteekenden balk zijn de spanningen in de verbandstaven voor Xa = — 1 ton in fig. b aangegeven.

De verticalen krijgen hierbij trek- terwijl de trekranden drukspanningen krijgen.

Men teekent voor deze last Xa = — 1 ton de momentenlijn (fig. c).

De momenten zijn hierbij gelijk aan de hoogten der verticalen, vermenigvuldigd met 1 ton.

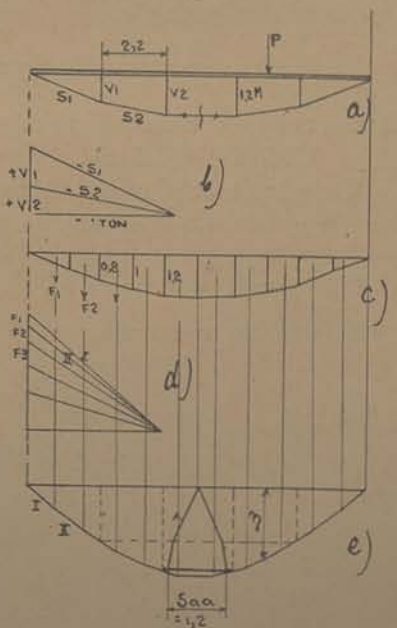


Fig. 152

Is de lengte van $V_1 = 0{,}8$ meter, dan is $M_1 = 0{,}8$ Ton-meter.

Deze momenten-figuur wordt als belastingvlak beschouwd waartoe zij in diverse deelen wordt verdeeld.

De oppervlakten dezer deelen zijn aangegeven als krachten F_1, F_2 enz. (figuur d) waarvoor een nieuwe momentenlijn, de buigingslijn wordt geteekend (figuur e).

Zoo is b.v. $F_3 = \frac{0{,}8+1}{2} . 1{,}1 = 0{,}99$ ton. m^2.

Nu worden de verticalen der balk op deze buigingslijn geprojecteerd, waarna de raakpunten aan de buigingslijn horizontaal worden verbonden.

De op deze wijze gevormde horizontale lijnen zijn de knikplaatsen, voor de hulplijnen T, welke loodrecht op de betreffende trekband staan.

Men vindt nu de waarde δaa in een willekeurige grootte, welke opgemeten b.v. 1,2 cm bedraagt.

De analytische waarde die bij figuur 151 is aangegeven levert voor δaa b.v. 80 cm bij $E = 1$, zoodat de vermenigvuldigingsfactor v gelijk is aan $\frac{1{,}2}{80} = 0{,}015$.

De verlengingen en verkortingen voor de verticalen en onderranden worden nu bepaald uit $\frac{S_1^2 . s}{E . F}$, waarbij eveneens voor $E = 1$ gerekend wordt en de vormverandering der balk zelf verwaarloosd kan worden daar deze zeer gering is.

Is de som dezer veranderingen $\left(= \sum \frac{S_1^2 . s}{F} \right)$ b.v. 20 cm, dan is de totale uitwijking in de willekeurige waarde uitgedrukt, gelijk aan $\delta t = 1{,}2 + 0{,}015 . 20 = 1{,}5$ cm.

De juiste kracht in den trekband wordt nu voor de werkelijke belasting (horizontaal ontbonden) gelijk aan:

$Xa = \frac{1}{1{,}5} . \Sigma P . \eta$, waarbij η de onder de lasten opgemeten ordinaten der buigingslijn in cm zijn.

H O O F D S T U K VI.

De volwandige tweescharnierboog

§ 1) Voetreactie's.

a) Algemeen.

De tweescharnierboog is enkelvoudig statisch onbepaald (in- en uitwendig), zoodat een der reactie's, in dit geval de horizontale voetreactie, bepaald dient te worden met behulp der vormverandering.

Heeft de boog een willekeurige vorm en een veranderlijk J-moment, dan beschouwe men haar voorloopig onbelast en als een horizontaal opgelegde gebogen staaf. (fig. 153a).

Belast men deze staaf met een last H_1 aan hare einden, dan is het moment voor punt ‚m'

$$Mm = H_1 . y_1 = - \frac{H}{\cos \alpha} . y . \cos \alpha =$$

$- H . y.$, de langskracht is:

$$Nm = H_1 . \cos (\varphi - \alpha) = \frac{H . \cos (\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}$$

Door deze kracht H_1 wordt het vrij opgelegde einde der boog een waarde $- \triangle H$ verschoven (horizontaal gemeten).

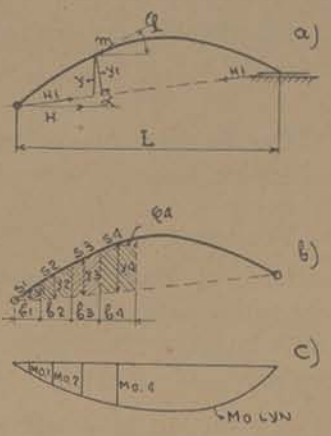


Fig. 153

Deze waarde is te bepalen door de boog in kleine rechte stukken ‚s' te verdeelen, en hiervoor de horizontale verschuivingen uit het Elastisch gewicht te bepalen.

Werken nu op den boog de lasten P_1, P_2 enz., dan geven deze een uitwijking der beide staafeinden in tegengestelden zin.

Maakt men $H = H_1 . \cos \alpha$ zoo groot, dat beide staafeinden op haar oorspronkelijke plaats blijven, dan is $\triangle H = 0$. Hierbij wordt het werkelijk buigmoment en de werkelijke langskracht op den boog:

$$M = Mo - H . y$$

$$N = No + \frac{H \cos (\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}$$

Verder is:

$$A = Ao + H . \operatorname{tg} \alpha$$

$$B = Bo - H . \operatorname{tg} \alpha \qquad \ldots\ldots 66)$$

Mo en No zijn de momenten en langskrachten voor de lasten P bij den vrij opgelegden gebogen balk.

Ter verduidelijking is voor deze waarden Mo, No enz. in fig. 154 een gebogen vrijdrager geteekend.

Voor de loodrechte lasten P zijn de steunpuntsreactie's momenten en verticale dwarskrachten gelijk aan die van den horizontalen vrijdrager. A-B.

Wordt Q ontbonden in de richting der staafas en een richting loodrecht hierop, dan vindt men de langskracht N en de op de boogdoorsnede vallende dwarskracht Q_1.

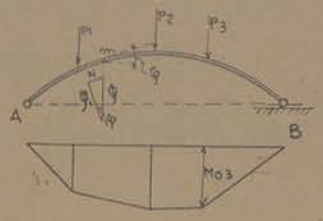


Fig. 154

Werken willekeurig gerichte krachten op den boog, dan bepaalt men hiervoor de resultante ‚R', waaruit de oplegreactie's worden gevonden.

Het moment voor een punt ‚d' wordt nu, (fig. 155).

$$A \,.\, a - P_1 \,.\, r$$

De dwarskracht voor punt ‚d' wordt op dezelfde wijze als boven, bepaald.

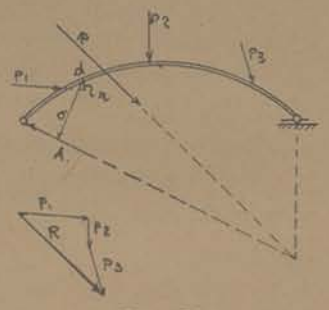


Fig. 155

b) Voetreactie's.

Uit het reeds behandelde volgt vrij nauwkeurig naar „Saliger" voor een willekeurige boog, met inachtname van temperatuursvermeerdering, en onverschuifbare voetscharnieren:

$$H = \frac{\Sigma . Mo . s' . y + E . \xi . t . L + \triangle t . \Sigma s'' . y}{\Sigma . s' . y^2 + \Sigma b'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 67)$$

Is een trekband aanwezig, zoodat de overspanning een waarde $\triangle L$ grooter wordt, dan is:

$$H = \frac{\Sigma Mo . s' . y + E . \xi . [(t - t_1) . L + \triangle t . \Sigma . s'' . y]}{\Sigma . s' . y^2 + \Sigma b' + \frac{E . L'}{E_1 . F_1}} \quad \ldots\ldots \quad 67a)$$

Hierbij is: (zie fig. 153b)

$\triangle t = t_u - t_o =$ temperatuursverschil van de onderrand en de bovenrand der boog.

Is dit verschil nul, dan vervalt in de formule de waarde $\triangle t \,.\, \Sigma \,.\, s'' \,.\, y$.

$t =$ temperatuur op neutrale lijn.

$\xi =$ uitzettings-coefficient.

$s' = \frac{s}{J}$ en $s'' = \frac{s}{h}$ voor het betreffende stuk, waarbij s de diverse recht gedachte stukken s_1, s_2 enz. zijn, J de bijbehoorende J-momenten en h = de bijbehoorende dikten (hoogten) van den boog.

$b' = \frac{b.\cos\varphi}{F}$.

t_1, E_1 en F_1 zijn de betreffende waarden voor den toegevoegden trekband.

Indien geen temperatuurs-verschil aanwezig is, geen verschuiving der scharnieren en geen trekband; wordt:

$$H = \frac{\Sigma\, Mo.\, y}{\Sigma\, y^2} \quad \ldots\ldots \quad 67b)$$

Grafisch bepaalt men voor een geheel willekeurige boog reactie H als volgt: (fig. 156)

Beschouw den balk bij B als horizontaal vrij opgelegd, en teeken de momentenlijn voor verschillende momenten Mo der werkelijke belasting.

Deel daarna den boog in diverse stukken s_1, s_2 enz. waarop de krachten F_1, F_2 enz. aangrijpen.

$$F_1 = \frac{Mo_1 . s_1}{J_1}\ ,\ F_2 = \frac{Mo_2 . s_2}{J_2} \text{ enz.}$$

Deze krachten zijn samengevoegd in fig. a, hierna wordt met een willekeurige poolafstand *r* een stangenveelhoek geteekend (fig. b), waarbij sluitlijn m behoort.

Nu rekent men $H_1 = -1$, waaruit de momenten y_1', y_2' enz. ontstaan.

Wederom teekent men met dezelfde poolafstand *r* en de krachten:

$\frac{y_1' . s_1}{J_1}$. $\frac{y_2' . s_2}{J_2}$ enz. op de bijbehoorende stukken ‚s', een stangenveelhoek waardoor afstand m_1 wordt gevonden. (fig. d).

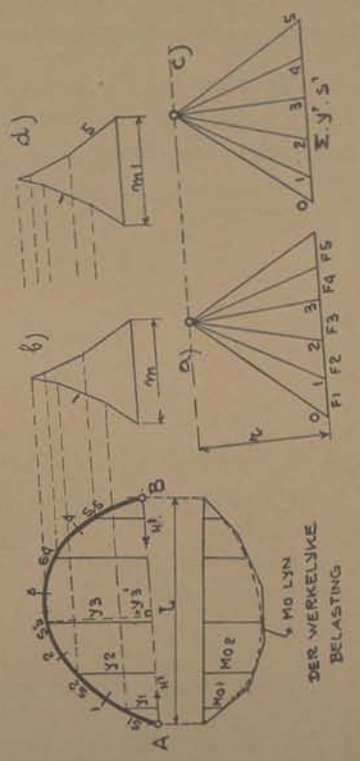


Fig. 156

Uit de verhoudingen van m en m_1 volgt voor de juiste waarde der voetreactie:

$$H_1 = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{m}{m_1 + \frac{1}{r} \cdot \sum \frac{b}{F}} \quad \ldots\ldots \quad 68)$$

De verschuivingen door $H_1 = -1$ en door Σ P kunnen eveneens met behulp van fig. 156 worden bepaald, waarbij, voor H_1

$$\triangle H_1 = \frac{1}{E} \left(r . m_1 + \sum \frac{b}{F} \right) \quad \ldots\ldots \quad 69)$$

en voor: Σ P. (van de vrij opgelegde constructie)

$$\triangle P' = \frac{r . m}{E} \quad \ldots\ldots \quad 70)$$

---

c) Bogen met symetrische vormen.

Daar in den staalbouw vrijwel steeds symetrische boogconstructies worden gebruikt met gelijkblijvend J, welke bovendien nog een cirkelboog- of paraboolvorm hebben, kan men volstaan met toepassing der hieronder vermelde vrij nauwkeurige benaderings-formule's.

Voor een vlakke cirkel- of paraboolvormige boog met pijlhoogte f wordt bij onverschuifbare lagers (fig. 157).

$$H = \frac{P . M_1 + \xi . t . L . E . J_1}{\frac{8}{15} . f^2 . L} . v \quad \ldots\ldots \quad 71)$$

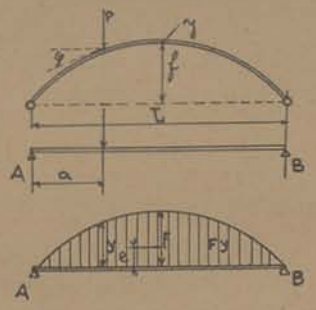


Fig. 157

hierbij is: $v = \frac{1}{1 + \frac{15}{8 . f^2} . \frac{J_1}{F_1}}$

$J_1 = J . \cos \varphi .$
$F_1 = F . \cos \varphi .$

(Globaal rekent men voor $\frac{J_1}{F_1}$, de waarde $\frac{J}{F}$ uit de nokdoorsnede).

M_1 = het moment op den rechten balk A-B door de belasting F_y, gemeten onder P.

Door temperatuursverschil alleen wordt de horizontale reactie

$$H_t = \frac{15}{8} . \frac{\xi . E . J_1 . t}{f^2} \quad \ldots\ldots \quad 72)$$

terwijl het moment $M_t = H_t . y$

Bij een of meerdere lasten P wordt formule 71 na omwerking (zonder temperatuurs-invloed):

$$H = \frac{3.v}{4.f.L} . \Sigma P.a.b \ldots\ldots \quad 73)$$

Is een trekband aanwezig welke een waarde $\triangle L$ kan rekken, dan wordt in bovenstaande formules v vervangen door v'.

$$v' = \frac{1}{1 + \frac{15}{8.f^2} . \frac{J_1}{F_1} \left(1 + \frac{F_1}{Fz}\right)} .$$

Fz = doorsnede trekband.

Bij gelijkmatige temperatuursverandering krijgt de boog met trekband geen extra horizontale kracht in de trekband.

Voor slanke boogvormen is v of v' globaal gelijk aan 1.

Uit het bovenstaande volgt voor P = 1 en a = b = $\frac{L}{2}$. Bij vlakke of parabolische bogen:

$H = \frac{3.L}{16.f} . v$, zoodat deze waarde tevens de hoogte der parabolisch verloopende invloedslijn voor reactie H is.

Voor een gelijkmatig verdeelde belasting g per meter over de geheele lengte der boog, is (figuur 157a):

$$H = \frac{v.g.L^2}{8.f} \ldots\ldots \quad 74)$$

Het moment ter plaatse van xy is gelijk aan M = Mo — H . y.

Bij volle belasting wordt voor dit punt:

$$M = \frac{(1-v).g.x.(L-x)}{2} .$$

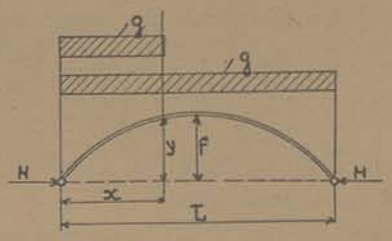


Fig. 157a

Een gedeeltelijke, gelijkmatige belasting over afstand x geeft:

$$\left.\begin{aligned} H &= \left(3-2.\frac{x}{L}\right) . \frac{g.x^2}{8.f} . v . \\ \text{Is } x &= \frac{L}{2} \text{, dan is } H = \frac{g.L^2.v}{16.f} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad 75)$$

Is de vorm der boog een halve cirkel, zoodat f = r en L = 2r, dan is voor een enkele last P in het midden (bij onveranderlijk J):

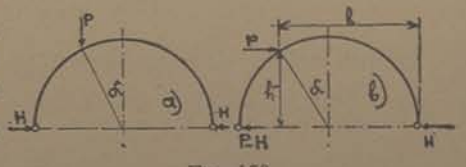


Fig. 158

$$H = \frac{P}{\pi}, \quad M \text{ onder } P = 0{,}1817 \,.\, P \,.\, r \qquad \ldots\ldots 76)$$

Staat P uit het midden, (fig. 158a) dan is:

$$H = P.\frac{\cos^2 . \alpha}{\pi}, \text{ terwijl M onder } P = P \,.\, r \left(\frac{\cos^2 . \alpha}{2} - \frac{\cos^3 . \alpha}{\pi}\right) \ldots 76a)$$

Staat P horizontaal, dan wordt (fig. 158b).

$$H = 2 \,.\, \frac{P}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\cos^2 . \alpha}{4} + \frac{\sin \alpha \,.\, \cos \alpha}{2} - \frac{\cos^3 \alpha}{4}\right) \ldots\ldots 77)$$

$$M \text{ onder } P = \frac{P}{2} \,.\, b \,.\, \cos \alpha - H \,.\, h.$$

De verticale reacties A en B zijn gelijk aan $\pm \frac{P}{2} \,.\, \cos \,.\, \alpha$

Voorbeeld.

De horizontale voetreactie van den figuur 154 geteekenden twee-scharnierboog is te bepalen, temperatuursverschil is buiten beschouwing te laten.

L = 28 Mr. f = 6 Mr.

P_1 = 13,5 ton, P_2 = 2,5 ton, P_3 = 3 ton.

De afstanden der lasten tot aan het linker-steunpunt zijn:

a_1 = 4 Mr, a_2 = 12 Mr, a_3 = 18.

Daar de boog een cirkelboogvorm heeft, wordt volgens form. bl. 38 straal r gelijk aan:

$$\frac{28^2 + 4 \,.\, 6^2}{8 \,.\, 6} = 19^1/_3 \text{ meter.}$$

De ordinaten onder de lasten meten hierbij 3,35, 5,95 en 5,6 Mr.

1e OPLOSSING.

(volgens formule 67b).

Daar de belasting verticaal is zijn de momenten Mo gelijk aan de momenten van den vrij opgelegden rechten balk A-B.

Reactie Bo $= \frac{1}{L} \,.\, (4 \,.\, 13{,}5 + 12 \,.\, 2{,}5 + 18 \,.\, 3) = 4{,}85$ ton

„ Ao = 19 — 4,85 = 14,15 „

Hieruit volgen de momenten: (fig. 154)

Mo_1 = 14,15 . 4 = 56,6 Tmr.

Mo_2 = 56.6 + 0,65 . 8 = 61,8 „

Mo_3 = 61,8 — 1,85 . 6 = 50,7 „

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Voor de berekening der waarden M . y mag geen knik in het betreffende gedeelte der momentenlijn voorkomen, zoodat de Mo-momenten kunnen worden bepaald onder het midden der stukken s_1, s_2 enz. waaruit de boog is opgebouwd.

Voor de bijbehoorende ordinaten y zijn dan de hierboven vallende booghoogten te meten.

Men vindt voor $Mo_I = 29$ Tmr, $Mo_{II} = 59{,}70$, $Mo_{III} = 56{,}30$ en $Mo_{IV} = 23{,}65$ Tmr.

$y_I = 1{,}80$ Mtr, $y_{II} = 5$. Mr. $y_{III} = 5{,}9$ Mr. $y_{IV} = 3{,}65$ Mr.

Volgens formule 67b is nu:

$$H = \frac{29 \,.\, 1{,}80 + 59{,}7 \,.\, 5 + 56{,}3 \,.\, 5{,}9 + 23{,}65 \,.\, 3{,}65}{1{,}80^2 + 5^2 + 5{,}9^2 + 3{,}65^2} = 10{,}15 \text{ Ton.}$$

2e OPLOSSING.

(Grafisch volgens fig. 156).

Voor de lengten s worden de volgende opgemeten waarden aangenomen: $s_1 = 5{,}3$ Mr. $s_2 = 8{,}6$ Mr. $s_3 = 6{,}1$ Mr. $s_4 = 11{,}55$ Mr.

Daar alleen de verhouding tusschen m en m_1 en niet de verschuiving der opleggingen gevraagd wordt, is voor J = 1 te rekenen.

Voor de lengten s zijn de bijbehoorende Mo-momenten onder het midden der betreffende staaflengten te berekenen.

Men vindt voor:

$F_1 = 29 \,.\, 5{,}3 = 153.$ $\quad F_2 = 59{,}70 \,.\, 8{,}65 = 510$

$F_3 = 56{,}3 \,.\, 6{,}1 = 344.$ $\quad F_4 = 23{,}65 \,.\, 11{,}55 = 274$

Als poolafstand r wordt 6 cm genomen, waardoor voor de lengte der sluitlijn m = 5,07 cm wordt gevonden.

Voor H = — 1 ton zijn de momenten Mo gelijk aan de lengten der booghoogten boven de aangrijpings punten van bovenstaande momentenvlakken, zoodat $Mo_I = y_1 = 1{,}80$ Tmr, $Mo_{II} = 5$ Tmr, $Mo_{III} = 5{,}9$ Tmr, $Mo_{IV} = 3{,}65$ Tmr.

De krachten y . s worden hierdoor gelijk aan:

$S_1 = 1{,}80 \,.\, 5{,}3 = 9{,}5.$ $\quad S_2 = 5 \,.\, 8{,}6 = 43.$

$S_3 = 5{,}9 \,.\, 6{,}1 = 36.$ $\quad S_4 = 3{,}65 \,.\, 11{,}5 = 42.$

Deze waarden uitgezet met dezelfde poolafstand r geven een lengte der sluitlijn m_1 van 0,50 cm.

Nu moet nog de waarde $\sum \frac{b}{F}$ bepaald worden, waarbij F de boog doorsnede is, en Σ b door L vervangen kan worden, omdat deze waarde afgeleid is van $\triangle L = \frac{L \,.\, 1}{E \,.\, F}$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Wegens de geringe invloed wordt deze laatste factor verwaarloosd, waarna men de grootte van H vindt uit:

$$H = \frac{m}{m_1} = \frac{5{,}07}{0{,}50} = 10{,}15 \text{ ton.}$$

3e OPLOSSING.

volgens formule 73.

De verhouding tusschen J en F heeft op de grootte van v weinig invloed, globaal kan men echter 1/50 tot 1/100 rekenen.

Men vindt voor $v = \dfrac{1}{1 + \dfrac{15}{288} \cdot \dfrac{1}{100}} = \pm 1.$

Hieruit volgt voor H

$$H = \frac{3}{24.28}\,(13{,}5 \,.\, 4 \,.\, 24 + 2{,}5 \,.\, 12 \,.\, 16 + 3 \,.\, 18 \,.\, 10) = 10{,}2 \text{ Ton.}$$

---

§ 2) De Impostlijn.

De snijpunten der reactie's met een rijdende last P liggen op de z.g.n. Impostlijn, welke evenwijdig ligt aan de verbindingslijn A-B. De afstand dezer lijn tot A-B $= \dfrac{4 \,.\, f}{3 \,.\, v}$ . . . . . *78)*

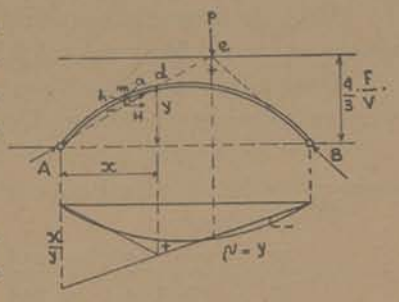


Fig. 159

Men kan, door deze lijn uit te zetten, direct het moment en de horizontale reactie's voor een last P in ieder willekeurig punt bepalen, indien men vanuit het snijpunt van P met de impostlijn de reactie's A en B trekt. Voor een punt m' is dan het moment: $M = a \,.\, A = h \,.\, H$.

INVLOEDSLIJNEN.

Met behulp der impostlijn is het teekenen der invloedslijnen vrij eenvoudig. De H-lijn is zooals reeds aangegeven, een paraboolvormige lijn met hoogte $z = \dfrac{3}{16} \cdot \dfrac{L}{F} \,.\, v$ . . . . . *79)*

Nu is voor een punt ‚d' het moment nul, als de enkele last P boven het snijpunt ‚e' staat van het verlengde van A-d met de Impostlijn. Dit punt ‚e' is het z.g.n. lastscheidings-punt voor d, daar bij verder plaatsen van P het voorteeken van Md veranderd.

Uit fig. 159 is verder zonder meer de constructie der invloedslijn te volgen.

Een voortschrijdende, gelijkmatig verdeelde last dient tot aan het lastscheidingspunt te worden opgesteld om Md max. of Md min. te vinden.

Voert men de kernpunten in de figuur in, waardoor het mogelijk is, ineens de randspanningen te bepalen met inachtname der langskrachten, dan is voor punt ‚b' (fig. 160).

$$Mb = Mo_b - H \cdot y_b = y_b \cdot \left(\frac{Mo_b}{y_b} - H\right)$$

voor punt u geldt:

$$Mu = y_u \cdot \left(\frac{Mo_u}{y_u} - H\right)$$

Mo_b en Mo_u zijn de betreffende vrijdragermomenten van den rechten balk, ter plaatse van b en u.

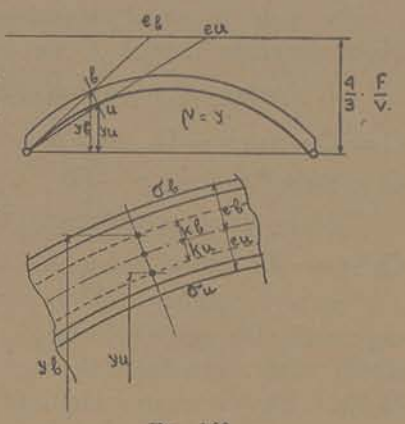


Fig. 160

Door de snede over de kernpunten verticaal te nemen, krijgt men voor Mo_b en Mo_u gelijke uitkomsten, yo en y_u zijn hierbij de vermenigvuldigingsfactoren ‚v' voor de op te meten ordinaten.

De spanningen in de uiterste vezels zijn zooals reeds bij de volwandige driescharnierkap is aangegeven,

$$\sigma_b = \pm \frac{Mu}{Wb} \qquad \sigma_u = \pm \frac{Mb}{Wu}$$

De spanning in de uiterste bovenvezel is dus het moment der uitwendige krachten t.o.z. van het onderste kernpunt ‚u' en gedeeld door het weerstandsmoment van het bovenste gedeelte.

Hierbij is:

$$Wb = \frac{J}{e_b} \qquad Wu = \frac{J}{e_u}$$

verder is de:

$$\text{kernafstand } k_b = \frac{Wu}{F} \qquad k_u = \frac{Wb}{F}$$

Indien de juiste afmetingen van den boog nog niet bekend zijn, rekent men volgens „Hütte" voor een plaatijzeren boog met ◁ -ijzeren randen voor de kernafstand $k_b = k_u = \frac{5}{12} \cdot h_1$, h_1 = hoogte plaat $= \pm \frac{1}{50} L$.,

$f = \frac{1}{9}$ à $\frac{1}{12} \cdot L$. Verder is de totale hoogte h van den boog $= \pm 1{,}1 \cdot h_1$.

Voor v in formule 73 moet dan worden ingevuld:

$$v = \frac{1}{1 + \frac{25}{64} \cdot \frac{h_1 \cdot h}{f^2}} \quad \ldots\ldots \quad 80)$$

De nagelafstand e (fig. 161) is afhankelijk van de dwarskracht en is globaal gelijk aan $\frac{N}{Q} \cdot h_n$ (met als max. waarde 6 . d).

N = de per nagel toelaatbare belasting. (voor de juiste afstand ‚e' zie deel II).

De dwarskracht (bij verticale belasting)

$Q = Qo \cdot \cos\varphi - H \cdot \sin\varphi$ of

$Q = \sin\varphi\,(Qo \cdot \operatorname{cotg}\varphi - H)$. . . . . 81)

Voor temperatuursverschil wordt,

$Q_t = -H_t \cdot \sin\varphi$.

φ = de hellingshoek ter plaatse van de doorsnede. De waarde 1 . cotg φ in fig. 161 wordt uitgezet in dezelfde eenheid als de H-lijn. De vermenigvuldigingsfactor $\eta = \sin\varphi$.

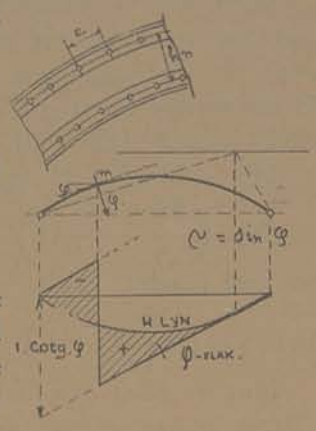


Fig. 161

Door de vormverandering der boog verandert ook de hoogte der ordinaat ‚y', zoodat de berekening van M uit Mo — H . y eveneens onzuiver wordt.

De geringe invloed van $\triangle y$ is echter alleen bij zeer vlakke bogen in rekening te brengen. (zie hiervoor Müller-Breslau bd. II deel II).

Onderstaande tabel is ontleend aan Saliger: „Die Praktische Statik" en geldt voor vlakke twee-scharnierkappen (paraboolvorm) bij verschillende belastingen:

Kracht	Belasting g (volle bel.)	g (benaderd)	g (op 1 helft)	idem benaderd	temperatuur t^0
A =	$\frac{g \cdot L}{2}$	—	$\frac{3 \cdot g}{8} \cdot L$	—	—
B =	$\frac{g \cdot L}{2}$	—	$\frac{g}{8} \cdot L$	—	—
H =	$\frac{v \cdot g}{8} \cdot \frac{L^2}{f}$	$\frac{g}{8} \cdot \frac{L^2}{f}$	$\frac{v \cdot g}{16} \cdot \frac{L^2}{f}$	$\frac{g}{16} \cdot \frac{L^2}{f}$	$\frac{15.v.E.J.\xi.t_0}{8.f^2}$
M (i/d top)	$\frac{(1-v)\,g}{8} \cdot L^2$	0	$\frac{(1-v)\,g}{16} \cdot L^2$	0	$\frac{-15.v.E.J.\xi.t^0}{8.f}$
$M\frac{1}{4}$	$\frac{3(1-v)\,g}{32} \cdot L^2$	0	$\frac{(4-3v)\,g}{64} \cdot L^2$ $\frac{(2-3v)\,g}{64} \cdot L^2$	$\pm \frac{g}{64} \cdot L^2$	$\frac{-45.v.E.J.\xi.t^0}{32.f}$

Hierbij is $t^0 = t - t_1$

HOOFDSTUK VII.

De twee-scharnier vakwerkconstructie.

§ 1) Voetreactie H.

De tweescharnier-vakwerkconstructie is enkelvoudig statisch onbepaald, zoodat de onbekende reactie, in dit geval de horizontale voetreactie met behulp der vormveranderings-eigenschappen dient te worden bepaald.

Uit de in hoofdstuk II behandelde Elasticiteits-vergelijkingen volgt bij onverschuifbare voetscharnieren:

$$H = \frac{\Sigma\ Pm\ .\ \delta ma}{\delta aa} + \frac{\delta at}{\delta aa}\ .\ (\text{fig. } 137)$$

hierbij is:

$\Sigma\ Pm\ .\ \delta ma = \Sigma\ So\ .\ Sa\ .\ \rho$ (vrije vertic. doorbuiging in richting P).

$\delta aa = \Sigma\ Sa^2\ .\ \rho$ („ horizontale verschuiving).

$\delta at = \Sigma\ Sa\ .\ \xi\ .\ t\ .\ s$ (idem door temperatuurs-verschil).

$$\rho = \frac{s}{E\ .\ F}\ .$$

Kan een der scharnieren zich over een afstand δa verplaatsen, b.v. door de vormverandering van een aangebrachte trekband, dan is:

$$H = \frac{\Sigma\ Pm\ .\ \delta ma}{\delta aa} + \frac{\delta at}{\delta aa} - \frac{\delta a}{\delta aa} \quad \ldots\ldots \quad 82)$$

Men kan, om de onbekende reactie H te vinden, een verschuivingsplan teekenen volgens Williot of volgens de enkele stavenrij-methode; zijn echter alleen verticale lasten aanwezig, dan is de buigingslijn eenvoudiger uit het elastisch gewicht *„w" der* diverse staven te bepalen.

Wegens de geringe invloed wordt het elastisch gewicht der vulstaven meestal verwaarloosd, zoodat alleen met het gewicht-*w* der randen is te rekenen.

Deze gewichten worden onder de diverse knooppunten als lasten op een rechten balk A-B uitgezet, waarvoor dan een momentenlijn (de Mw-lijn) is te teekenen.

Uit de momenten dezer gewichten zijn de doorbuigingen δm der diverse knooppunten te bepalen, eveneens is hieruit de horizontale verschuiving δaa voor $H = 1$ ton te berekenen waarna uit de verhoudingen dezer beide waarden de werkelijke voetreactie H voor de lasten P kan worden gevonden.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

§ 2) Elastisch gewicht.

Het op een knooppunt vallend elastisch gewicht wordt bepaald uit:

$$w_m = \frac{-\triangle' s_m}{h_m} = \frac{-\triangle s_m}{r_m},$$

voor een punt van den onderrand en

$$w_n = \frac{+\triangle' s_n}{h_n} = \frac{+\triangle s_n}{r_n}.$$

voor een punt van den bovenrand. . . 83)

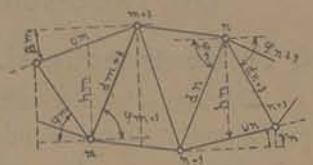


Fig. 162

Hierbij is $\triangle' s = \triangle s . \sec . \alpha$,
h = verticaal, terwijl r de loodrechte afstand van het draaipunt tot staaf s is.

Wenscht men het elastisch gewicht van alle staven, dus inclusief de vulstaven in rekening te brengen, dan is het per knooppunt vallende gewicht: (fig. 162)

$$w_m = \frac{-\triangle' o_m + \triangle' d_m + \triangle' d_{m+1}}{h_m}$$

en

$$w_n = \frac{+\triangle' u_n - \triangle' d_n - \triangle' d_{n+1}}{h_n} \quad \ldots . 83a)$$

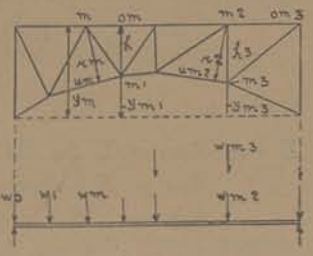


Fig. 162a

(Deze gewichten zijn ontwikkeld uit form. 62).

$\triangle' o = \triangle o . \sec \beta$
$\triangle' u = \triangle u . \sec \gamma$
$\triangle' d = \triangle d . \sec \varphi$

$$\sec . \alpha = \frac{1}{\cos . \alpha}$$

Daar $\triangle s$ voor een willekeurige staaf gelijk is aan $\frac{S . s}{E . F}$, is het elastisch gewicht ‚*w*' voor een willekeurig punt (bij H = — 1) gelijk aan

$$\frac{1 . y}{r} \cdot \frac{s}{E . F} \cdot \frac{1}{r} = \frac{y . s}{E . F . r^2}$$

Voor de in figuur 162a gegeven knooppunten is volgens deze formule:

$$w_m = \frac{y_m \cdot u_m}{E . F_m{}^u . r_m{}^2} \qquad w_{m_2} = \frac{y_m . u_{m_2}}{E . F_{m_2}{}^u . r_2{}^2}$$

$$w_{m_1} = \frac{y_{m_1} \cdot o_m}{E . F_m{}^o . h^2} \qquad w_{m_3} = \frac{y_{m_3} . o_{m_3}}{E . F_{m_3}{}^o . h_3{}^2} \quad \ldots . 83b)$$

De afstanden y zijn hierbij de momenten voor H = — 1 ton.
u_m enz. zijn staaflengten.

Men teekent nu de momentenlijn voor alle krachten w (bij H = — 1 ton) met als poolafstand hw = de schaal van het elastisch gewicht, vermenigvuldigd met een factor a' wanneer b.v. voor E in het elastisch gewicht $\frac{E}{a}$ is gerekend.

Bij toepassing van formule 83a-b worden dan de doorbuigingen gevonden in de schaal der teekening. (fig. 162b).

Wil men bij een schaal 1 op 200 de doorbuiging 10× vergroot opmeten, dan wordt poolafstand $hw = \frac{a}{200 . 10}$, vermenigvuldigd met de krachtenschaal voor w. Is voor w =1, b.v. 5 cm gerekend en wordt voor E = 10.000 ingevuld, dan is hw = $\frac{210 . 5}{200 . 10} = 5{,}25$ cm.

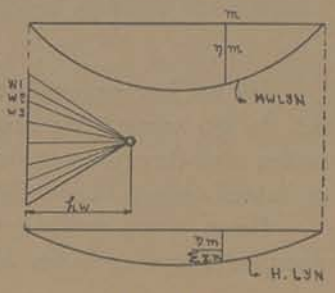


Fig 162b

Bij de in fig. 162c aangegeven buigingslijn der knooppunten van de bovenrand, is de totale doorbuiging t.o.v. de voetscharnieren gelijk aan de doorbuigingen η. vermeerderd met de indrukking Δh_o of Δh_n. der eindverticalen. Voor het bepalen der H-lijn is bij belasting op de bovenrand met deze ordinaten δ rekening te houden.

Uit de ordinaten der buigingslijn wordt nu de horizontale reactie H als volgt bepaald.

De horizontale verschuiving δ aa voor H is — 1 ton is gelijk aan $\Sigma Sa^2.\rho$

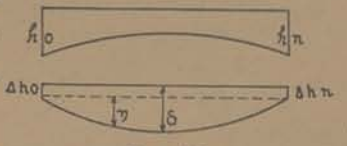


Fig. 162c

Vervangt men Sa̧ door $\pm \frac{y}{r} . 1$, dan wordt δaa gelijk aan $\sum \frac{y^2}{r^2} . s . \frac{1}{E . F} = \Sigma\, z_m$.

Hierbij is dus z het bij het knooppunt behoorende elastisch gewicht, vermenigvuldigd met y, of $z_m = w_m \cdot y_m$.

Wordt, zooals in de meeste gevallen geschiedt, voor E = 1 gerekend, dan is het elastisch gewicht, dus ook z, E × vergroot.

Men bepaalt dan δaa uit $\sum \frac{zm}{E}$, tevens is de verticale doorbuiging $\delta m = \frac{\eta m}{E}$. (bij constructies zonder eindverticalen)

Aan de hand van het bovenstaande is nu (bij E = 1) te schrijven voor:

$$H = \frac{\Sigma Pm . \delta ma}{\delta aa} = \frac{\Sigma Pm . \eta m}{\Sigma z_m} \quad \ldots\ldots \quad 84)$$

Een gelijkmatige verwarming geeft:

$$H_t = \frac{\delta at}{\delta aa} = \frac{\xi\, t\, L}{\frac{\Sigma z_m}{E}} = \frac{\xi\, .\, E\, .\, t\, .\, L}{\Sigma z_m} \quad \ldots\ldots\ 85)$$

Is een trekband aanwezig met doorsnede Fz dan is:

$$H = \frac{\Sigma P_m\, .\, \eta_m}{\left(\Sigma z_m + \frac{L}{F_z}\right)} \quad \ldots\ldots\ 86)$$

Uit het bovenstaande volgt in het algemeen dat men de z.g.n. H-lijn, d.i. de lijn waaruit de reacties H rechtstreeks zijn op te meten, vindt indien men de ordinaten der Mw deelt door Σz_m, en deze waarden als ordinaten op een nieuwe lijn uitzet. (fig. 162b).

Beter is nog poolafstand hw met Σz_m te vermenigvuldigen, waardoor het opteekenen der Mw-lijn kan vervallen.

Bij de twee-scharnierkap in fig. 162e is voor H = — 1 ton bij aanname E, Fo & Fu = 1, waarbij voor de overal gelijke veldwijdten λ = 1 wordt ingevuld: °)

$$w_o = \frac{1}{h} \qquad z_o = \frac{h^2}{h^2} = 1.$$

$$w_1 = \frac{y_1 + h}{h_1^2} \qquad z_1 = \frac{y_1^2 + h^2}{h_1^2}$$

$$w_2 = \frac{y_2 + h}{h_2^2} \qquad z_2 = \frac{y_2^2 + h^2}{h_2^2}$$

$$w_3 = \frac{2\, .\, y_3}{h_3^2} \qquad z_3 = \frac{2\, .\, y_3^2}{h_3^2}\ .$$

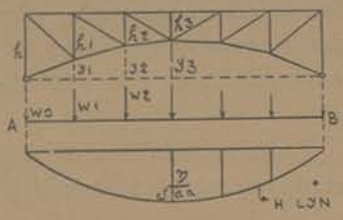


Fig. 162e

verder is:

$$\Sigma z_m = 2\, .\, (z_0 + z_1 + z_2) + z_3$$

(Uit de figuur blijkt dat w_o voor het bepalen der η-lijn niet noodig is, z_o is echter wel aan Σz toe te voegen *).

In een dergelijk geval met overal gelijke veldafstanden is het eenvoudiger inplaats van een poolfiguur en stangen-veelhoek te teekenen, de ordinaten der M_w-lijn te berekenen uit de momenten der elastische gewichten.

Men krijgt dan voor bovenstaand voorbeeld (fig. 162e)

$$M_1 = A - w_o = \frac{\Sigma w_m}{2} - w_o = Q_1\, .\, \lambda$$

$$M_2 = \left(\frac{\Sigma w_m}{2} - w_o\right) .\, 2 - w_1\, .\, 1 = (Q_1 + Q_2)\, .\, \lambda \text{ enz.}$$

Voor λ is daarbij de werkelijke veldafstand in te vullen.

°) De invloed der vul- en eindstaven is hierbij verwaarloosd.

*) Zie voorbeeld bl. 125.

Is een gelijkmatig verdeelde belasting g. t/m aanwezig, dan komt per veld g. λ ton, waardoor voor de geteekende H-lijn de totale voetreactie gelijk is aan: (fig. 162e)

$$H = g \,.\, \lambda \,(2H_1 + 2H_2 + H_3).$$

Müller-Breslau vermenigvuldigt bij het berekenen van w, alle factoren met een constante waarde Fc, welke meestal gelijk aan de meest voorkomende randdoorsnede wordt genomen.

Hierdoor wordt de berekening iets eenvoudiger, daar dan verschillende malen de waarde $Fc/F = 1$ voorkomt.

Hiernaar wordt het elastisch gewicht met invoering van Fc:

$$E \,.\, F_c \,.\, w_m = \frac{ym \,.\, sm}{r_m^2} \,.\, \frac{Fc}{Fm} \,. \qquad z_m = E \,.\, Fc \,.\, w_m \,.\, ym$$

verder is:

$$\delta m = \frac{\eta m}{E \,.\, Fc}, \qquad \delta aa = \frac{1}{E \,.\, Fc}\left(\Sigma z_m + \frac{Fc}{Fz} \,.\, L \right). \quad *)$$

$$H = \frac{\Sigma Pm \,.\, \eta m}{\Sigma z_m + \dfrac{Fc}{Fz} \,.\, L} \quad \ldots\ldots \quad 86a) \; *)$$

Komen de onder- en bovenrand op een wijze samen zooals in figuur 162f is aangegeven, dan is het elastisch gewicht van de onderrand te berekenen voor het loodrecht boven punt 2 gelegen punt 1 der staaf s_2, zoodat:

$$E \,.\, Fc \,.\, w_2 = \frac{Fc \,.\, y_1 \,.\, s_1}{F_1 \,.\, r_1^2} + \frac{Fc \,.\, y_2 \,.\, s_2}{F_2 \,.\, r_2^2} \,.$$

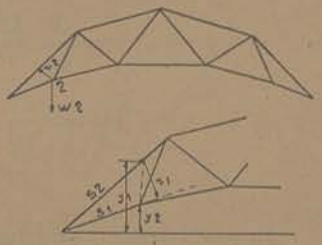


Fig. 162 f

Neemt men hierbij voor alle randen de doorsnede gelijk, waarbij dus Fc de gemiddelde doorsnede is voor de beide randen, dan wordt bovenstaande formule

$$E \,.\, Fc \,.\, w_2 = \frac{y_1 \,.\, s_1}{r_1^2} + \frac{y_2 \,.\, s_2}{r_2^2} \quad \ldots\ldots \quad 87)$$

$$z_m = \frac{y_1^2 \,.\, s_1}{r_1^2} + \frac{y_2^2 \,.\, s_2}{r_2^2}$$

Voor temperatuursverschil geldt bij invoering van $Fm = Fc$

$$Ht = \frac{\xi \,.\, E \,.\, t \,.\, L \,.\, Fc}{\Sigma \, z_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 88)$$

---

*) De factor $\frac{Fc}{Fz} \,.\, L$ vervalt indien geen trekband aanwezig is.

Bij evenwijdig loopende randen heeft de boog nagenoeg constante waarden voor h en F. (fig. 162g)

Neemt men voor $\frac{Fc}{Fm} = 1$, dan wordt, bij een gemiddelde veldwijdte λ,

$$\frac{E \,.\, Fc \,.\, w_m}{\lambda} = \frac{y_m}{h^2} \,. \qquad z_m = y_m{}^2 \,.$$

Fc is daarbij de gemiddelde randdoorsnede.

$$Ht = \frac{\xi \,.\, E \,.\, t \,.\, L \,.\, Fc \,.\, h^2}{\lambda \,.\, \Sigma\, z_m} \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \qquad 89)$$

Heeft deze boog een paraboolvorm, dan kan men de ordinaten y uitdrukken in de pijlhoogten f, ($y = \frac{4f \,.\, x \,.\, (L-x)}{L^2}$) zoodat na vereenvoudiging, de vergelijking voor den paraboolvormigen H-lijn:

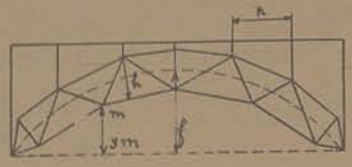


Fig. 162g

$$H = \frac{3}{4} \,.\, \frac{a \,.\, b}{f \,.\, L} \,.\, v \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \qquad 90)$$

hierbij is $v = \frac{1}{1 + \frac{15}{32} \,.\, \frac{h^2}{f^2}} = \sim 1$

$$z = \frac{3}{16} \,.\, \frac{L}{f} \,.\, v \;(= \text{Pijlhoogte der H lijn})$$

$$Ht = \frac{15}{16} \,.\, \frac{\xi \,.\, E \,.\, t \,.\, Fc \,.\, h^2}{f^2} \,. \,. \,. \,. \,. \qquad 91)$$

In onderstaand voorbeeld is de totale voetreactie bepaald uit:

$$H = P \,.\, \frac{\Sigma \,.\, \delta ma}{\delta aa}$$

De doorbuiging der bovenrand is hierbij $\eta + \triangle h$

Verschuiving $\Sigma\, z_m$ is daardoor te vermeerderen met $\sum_1^n \triangle' d_m$.

De totale horizontale verschuiving wordt dan gelijk aan

$$\delta aa = \Sigma\, z_m + \Sigma\, \triangle' d_m \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \qquad 92)$$

hierbij is:

$$\triangle' d_m = \triangle d_m \,.\, \sec.\varphi \,.$$

BIBLIOTHEEK TU DELFT

Voorbeeld.

De voetreactie H voor de blijvende belasting der in fig. 95a geteekende tweescharnierkap is met behulp van de elastisch-gewicht-methode te berekenen.

Men begint voor H = — 1 ton de staafkrachten s en de lengte-veranderingen $\triangle s$ te bepalen, waarbij voor E = 1 wordt gerekend.

(Deze waarden kunnen ontleend worden aan de tabel op bl. 83).

Hierna worden voor alle knooppunten de elastische gewichten bepaald, waarbij volgens onderstaande formule

$$w_1 = \frac{1}{h_1} . (\triangle' u_1 - \triangle' d_1 - \triangle h_1 . \text{tg}. (90° - \alpha_0) . \quad \ldots . 93)$$

De overige gewichten worden berekend volgens formule 83a.

Men vindt voor:

$$w_1 = \frac{1}{5} (0.707 . \text{sec}. 70,8 - 0,62 . \text{sec}. 26,5 + 0,725 . \text{tg}. 70,8) = 0.710$$

$$w_2 = + \frac{0,380}{1,2} + \frac{0,62 - 0.047}{1,2 \cos . 20°} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0,747 .$$

$$w_3 = + 0,535 + \frac{0,144 - 0,082}{1,28} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0,583 .$$

$$w_4 = 0,266. \qquad w_5 = 0,704 . \qquad w_6 = 1,047$$

$$w_7 = \frac{0,710 - 2 . 0,317 . \text{sec}. 64°}{1,55} = - 0,477$$

Hieruit volgt voor $\Sigma w = 2 . (0,71 + 0,747 + 0,583 + 0,266 + 0,704 + 1,047) - 0,477 = 7,637$. fig. (162h)

De momenten dezer gewichten onder de knooppunten zijn gelijk aan:

$$\eta_3 = (3,818 - 0,71) . 2 - 0,747 . 0,43 = 5,89.$$
$$\eta_5 = 3,108 . 4 - 0,747 . 2,43 - 0,583 . 2 - 0,266 . 0,5 = 9,32.$$
$$\eta_7 = 3,108 . 6 - 0,747 . 4,43 - 0,583 . 4 - 0,266 . 2,45 -$$
$$- 0,704 . 2 - 1,047 . 0,74 = 10,18.$$

Om de doorbuigingen δ van den bovenrand der vrij opgelegde constructie te bepalen moeten de waarden η nog vermeerderd worden met de verkorting der eindverticalen, welke gelijk is aan 0,72 cm. (zie bl. 102), zoodat de totale doorbuigingen der bovenrand gelijk zijn aan:

$$\delta_3 = 5,89 + 0,72 = 6,61 \text{ cm.}$$
$$\delta_5 = 9,32 + 0,72 = 10,04 \text{ ,,}$$
$$\delta_7 = 10,18 + 0,72 = 10,90. \text{ ,,}$$

(Men vergelijke deze waarden met die der vorige berekeningen dezer tweescharnierkap).

Thans is de horizontale uitbuiging δaa (voor H = — 1 ton) te bepalen.

Men vindt voor:

z_1 (punt 1)	= 5 .	0,710 =	3,55.
z_2	= 4,25 .	0,747 =	3,17.
z_3	= 5,75 .	0,583 =	3,33.
z_4	= 4,90 .	0,266 =	1,30.
z_5	= 6,50 .	0,704 =	4,55.
z_6	= 5,63 .	1,047 =	5,90.
		totaal	21,80.

Hieruit volgt:

$\Sigma z_m = 2 . 21,80 - 7,20 . 0,477$

$= 40,15.$

Deze waarde dient nog vermeerderd te worden met de verlenging $\triangle L$ der geheele overspanning door de veranderingen $\triangle d$.

Men vindt voor $\Sigma \triangle' d_m$:

$\triangle L = 2.$ (0,62 sec. 26,5° — 0,047. sec. 71° + 0,071. sec. 30° — 0,083. sec. 67° + 0,067. sec. 33° + 0,317. sec. 64°) = 2,40.

Hieruit volgt totaal voor δaa = 40,15 + 2,40 = 42,55 cm.

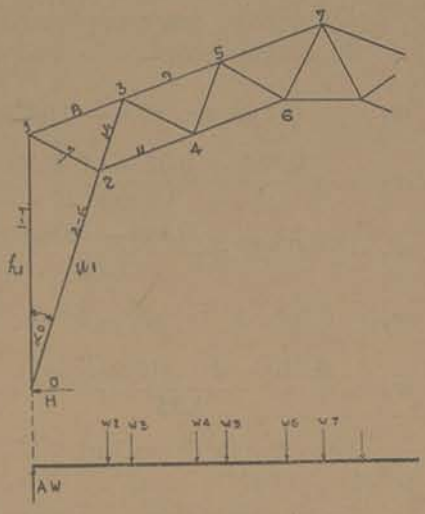


Fig. 162h

Voetreactie H wordt hierdoor

$$P. \frac{\Sigma Mw}{\Sigma z_m + \Sigma \triangle' d_m} =$$

$$1450 . \frac{2 . 6,61 + 2 . 10,04 + 10,90}{42,55} = 1,50 \text{ ton.}$$

Invloedslijnen

Om voor een gegeven constructie op eenvoudige wijze de dwarskrachten, momenten of staafspanningen te bepalen, maakt men gebruik van z.g.n. invloedslijnen.

Vooral bij constructies met bewegende lasten is toepasing van invloedslijnen ten zeerste aan te bevelen.

Men onderscheidt:

1) Invloedslijnen voor reacties.
2) „ „ dwarskrachten.
3) „ „ momenten.
4) „ „ de doorbuiging.

Uit de invloedslijnen voor de dwarskrachten worden die der vulstaven opgebouwd, terwijl de randstaven worden gevonden uit de invloedslijnen der momenten.

§ 1) Invloedslijnen voor volwandige constructies.

a) Reacties en dwarskrachten.

Staat in figuur 163 een enkele last $P_1 = 1$ ton boven A, dan is reactie A = 1 ton.

Bij plaatsing van P_1 boven B wordt A = 0, terwijl P_1 op $\frac{1}{2}$. L een reactie A = B geeft van 0,5 ton.

De invloedslijn voor reactie A of B verloopt dus rechtlijnig van 1 tot 0 (fig. 163)

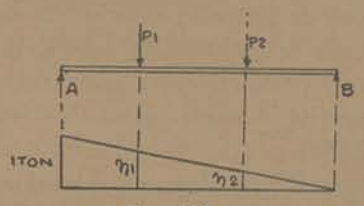


Fig. 163

Voor een willekeurige grootte van P_1 wordt $A = P_1 \cdot \eta_1$

Hierbij is η_1 de ordinaat der invloedslijn voor P = 1 ton.

Meerdere lasten P geven als reactie $A = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 +$ . . . . enz.

Bewegen in figuur 163 beide lasten P zich, dan vindt men max. A door P_1 boven A te plaatsen, terwijl max. B wordt gevonden door P_2 boven B te plaatsen; zoodat, (bij onveranderlijke afstand tusschen P_1 en P_2). Max. $A = P_1 + P_2 \cdot \eta_2$. Max. $B = P_2 + P_1 \cdot \eta_1$.

η_1 en η_2 zijn de bij de betreffende stand behoorende ordinaten der invloedslijn.

De A-lijn.

Een andere methode, welke direct de totale reactie A doet vinden is de volgende (fig. 164).

Moment $B.L = P_1.a + P_2.b + P_3.c = R.d.$

In de geteekende poolfiguur en stangenveelhoek zijn de driehoeken o.m.n. en g.f.h. gelijkvormig, waaruit volgt:

$d : H = y : R$ of

$d.R = H.y.$

Maakt men H gelijk aan L, dan is $d.R = L.y. = L.B.$, of $y =$ reactie B.

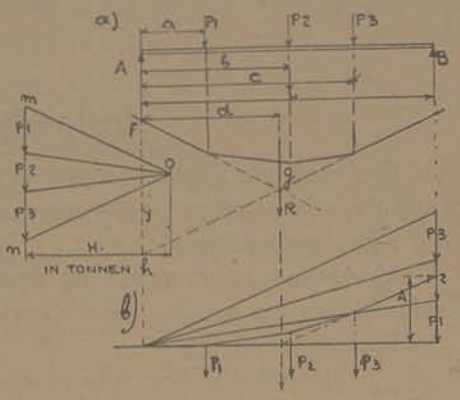


Fig. 164

In fig. 164b is op deze wijze reactie A bepaald voor den gegeven stand der lasten.

Men teekent hierbij de 1e poolstraal o-n horizontaal ter verkrijging van een meer overzichtelijke figuur.

Ordinaat y blijft daarbij de grootte der reactie A, gemeten onder B.

Door de stangenveelhoek dus ook de lasten in omgekeerde volgorde te plaatsen, is reactie B direct onder B op te meten of ook reactie A onder punt A (figuur 165a).

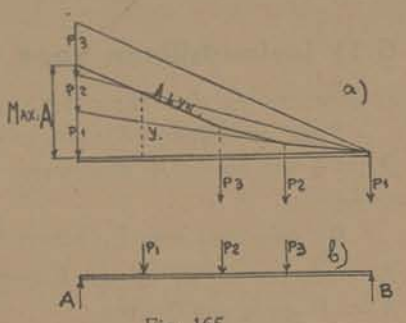


Fig. 165

De op deze wijze verkregen stangenveelhoek waarbij P_1 boven A geplaatst wordt om A max. te vinden, wordt aangeduid als de *A-lijn*.

Voor den in figuur 165b gegeven stand der lasten P wordt de bijbehoorende reactie A gelijk aan de boven de eerste last vallende ordinaat y. Rijden de lasten verder naar A toe, dan blijft reactie A steeds gelijk aan de boven deze last P_1 vallende ordinaat zoodat A max. ontstaat bij P_1 boven steunpunt A (fig. 165a).

De in deze figuur opgemeten ordinaat y boven P_1 van fig. b, is dus dezelfde als reactie A uit figuur 164b, indien stand en grootte der lasten in beide figuren dezelfde is.

Daar de grootste dwarskracht in een gegeven punt gevonden wordt, door de lasten tot aan dat punt op te stellen, is de A-lijn tevens de max. dwarskrachtenlijn.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

De plaatsing der eerste last boven een gegeven punt m heet *„grondstelling"*.

Het kan echter voorkomen dat de tweede last boven dit punt moet worden geplaatst om ter plaatse de max: dwarskracht Q te vinden.

Dit is het geval als $A_1 - P_1$ grooter is dan A_m.

Hierbij is A_1 de ordinaat der A-lijn onder de verschoven last P_1, waarbij P_2 boven punt m staat.

Am is de ordinaat der A-lijn voor punt m.

Voor een gelijkmatig verdeelde belasting q per meter is de A-lijn een parabool, met de top in B en in A een ordinaat van 0,5.q.L. (zie figuur 172).

De A-lijn voor den indirect belasten balk is geheel dezelfde als voor den direct belasten balk.

Het kan hierbij eveneens voorkomen dat de tweede last boven een dwarsdrager dient te worden geplaatst, om voor het betreffende veld de grootste dwarskracht te vinden.

Men stelt hiertoe P_1 boven de gegeven dwarsdrager, (fig. 166 aan de onderzijde) en teekent voor één veldlengte de stangenveelhoek op dezelfde wijze als de A-lijn.

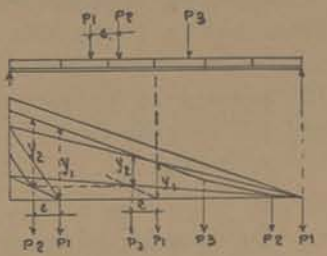


Fig. 166

Staat P_1 boven den dwarsdrager, dan is de dwarskracht zooals boven aangegeven, de boven deze dwarsdrager vallende ordinaat y_1.

Staat echter P_2 boven den dwarsdrager, dan geldt voor de dwarskracht de ordinaat tusschen de A-lijn en de voor één veld geteekende stangenveelhoek.

Is deze ordinaat grooter dan y_1 dan moet met de verschoven laststelling gerekend worden.

Men kan dit als volgt in een formule uitdrukken:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Bij } \dfrac{\Sigma P}{P_1} > \dfrac{L}{\lambda} \text{ is de tweede last boven den dwarsdrager te plaatsen.} \\ \text{Is } \dfrac{\Sigma P}{P_1+P_2} > \dfrac{L}{\lambda} \text{ dan plaatse men de derde last enz:} \end{array}\right\} \quad 94)$$

$\lambda =$ veldwijdte
$>$ grooter
$<$ kleiner.

Voorbeeld.

Voor den in figuur 167 geteekenden balk blijkt uit de grootte der ordinaten dat het voor de max: dwarskracht in de punten 1 en 2 noodig is de tweede last boven deze punten te plaatsen, terwijl de max: dwarskracht in punt 3 optreedt, als P_1 hierboven staat.

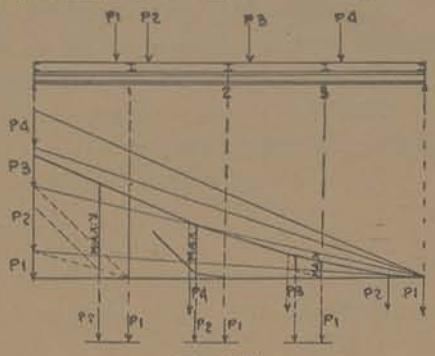


Fig. 167

(Een en ander geldt natuurlijk voor de lasten van rechts komend. Komen de lasten van links op den balk, dan teekene men de B-lijn).

Is het aantal zich op den balk bevindende lasten slechts gering dan berekent men de reacties het eenvoudigst volgens de in figuur 163 aangegeven wijze, welke in figuur 168 nader is aangegeven.

$A = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2$

$B = P_1 \cdot \eta_3 + P_2 \cdot \eta_4$

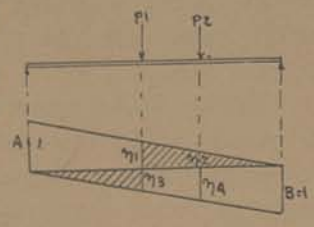


Fig. 168

De dwarskracht voor een punt links van c (fig: 169) is $A = P. \eta_1$, voor een punt rechts van c ; $B = P. \eta_2$, voor punt m blijft de dwarskracht $A - P = P. \eta_2$. (Geharceerde figuur).

Men trekt onder het gegeven punt een scheidingslijn, waarbij ter verduidelijking de in aanmerking komende vlakken worden geharceerd. Voor meerdere lasten P is dus Qm de algebraische som ($\Sigma P. \eta$.) der ordinaten, opgemeten in de geharceerde gedeelten.

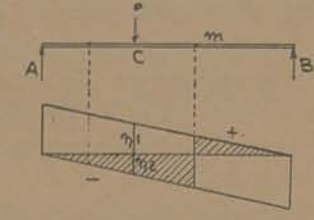


Fig. 169

Om bij een indirecte belasting de dwarskracht voor een veld tusschen twee dwarsdragers te bepalen , handelt men als volgt.

Verbindt in het betreffende veld de beide invloedslijnen als in fig: 170 is aangegeven.

De dwarskracht in dit veld verloopt voor een willekeurige last P van negatief (P links van het veld) tot positief (P rechts van het veld).

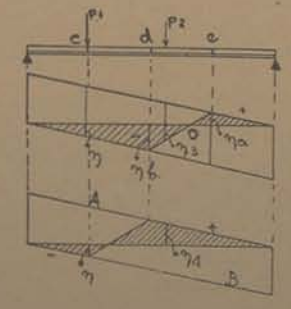


Fig. 170

Staat P boven het overgangspunt 0, dan is de dwarskracht in het betreffende veld eveneens 0.

Bij den in figuur 170 geteekenden stand der lasten P_1 en P_2 is dus volgens het bovenstaande de dwarskracht in:

veld d—e $= -P_1 \cdot \eta - P_2 \cdot \eta_3$.
veld c—d $= -P_1 \cdot \eta + P_2 \cdot \eta_4$.

In figuur 171 zijn voor ieder veld de overgangslijnen voor den indirect belasten balk geteekend.

Het hangt hierbij van de plaats der te bepalen dwarskracht af, met welk overgangs-lijn is te rekenen.

In ieder veld vindt men echter een punt waarbij de dwarskracht van voorteeken gaat wisselen. (het z.g.n. nul-punt).

Is nu een bewegende gelijkmatig verdeelde belasting aanwezig dan moet deze tot aan dit nulpunt worden opgesteld om de grootste positieve of negatieve dwarskracht in dat veld te veroorzaken.

Bij een voortschrijdende gelijkmatig verdeelde *directe* belasting à g/Mr is de max: dwarskracht voor punt c (figuur 172), gelijk aan de inhoud van het invloedsvlak c-d-b, vermenigvuldigd met g, of $A = \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot L}$

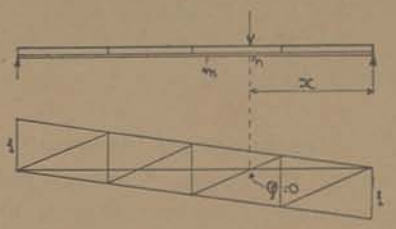


Fig. 171

Zooals reeds vermeld is bovenstaande reactie of dwarskracht eveneens te bepalen uit de ordinaat van een parabolische A-lijn, waarvan de hoogte bij A gelijk is aan $0{,}5 \cdot g \cdot L$

Ordinaat y onder punt c geeft dan direct de grootte der reactie $A_c = \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot L}$

Men construeert deze parabool het eenvoudigst door van de rechte lijn D-B diverse punten over te halen op D-A. $(D\text{-}A = 0{,}5 \cdot g \cdot L)$.

Vanuit deze punten op D-A trekt men stralen naar punt B, welke de loodlijnen uit de oorspronkelijke punten der lijn D-B zullen snijden.

Deze snijpunten vormen tevens de raakpunten voor den parabool. (fig. 172d).

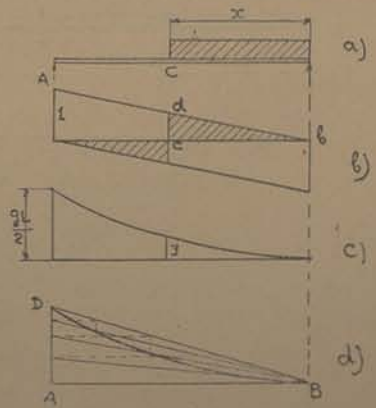


Fig. 172

Is er behalve de rijdende last nog een blijvende gelijkmatig verdeelde belasting aanwezig, dan is de A-lijn nog te vermeerderen met de invloedslijn der blijvende belasting, welke in fig. 173a is aangegeven.

Figuur b geeft de combinatie van beide lijnen, waarbij tevens voor een willekeurig punt c de max. en min. dwarskracht is aangegeven.

Voorbeeld.

Max. reactie A voor de in fig. 174 aangegeven constructie is te berekenen.

P_1 en P_2 op onveranderlijke afstand van elkaar zijn rijdende lasten van respectievelijk 3 ton en 1,5 ton.

Op een afstand van 0,6 Mr voor en achter deze lasten beweegt zich een gelijkmatig verdeelde belasting g = 400 kg. per strekkende meter.

Balken C-A en A-B zijn bij A afzonderlijk opgelegd.

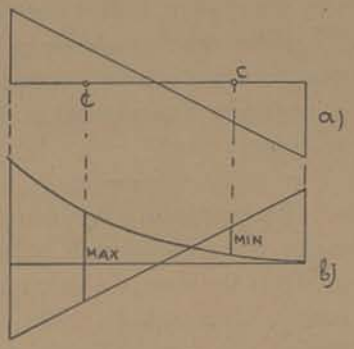


Fig. 173

Men begint met de grootste last boven de dichtst bij A zijnde dwarsdrager te plaatsen, en rekent voor de hoogte der invloedslijn onder A. 1 ton = b.v. 3 cm.

Tusschen de dwarsdragers kan geen knik in de invloedslijn voorkomen, zoodat de overgangslijnen 1, 2 en 3 zijn aangebracht.

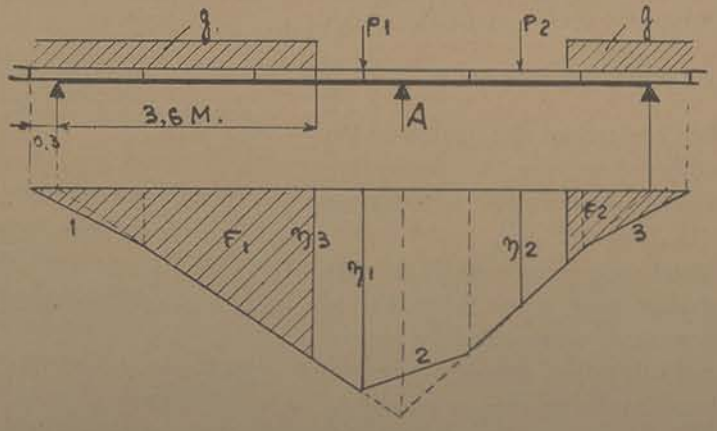


Fig. 174

Uit het reeds behandelde volgt dat:

$$A = P_1 \cdot \gamma_1 + P_2 \cdot \gamma_2 + (F_1 + F_2) \cdot g =$$

$$\frac{3 \cdot 2{,}65 + 1{,}5 \cdot 1{,}55}{3} + \left(\frac{3{,}6 \cdot 2{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}75}{2 \cdot 3} + \frac{1{,}15 \cdot 1 + 0{,}55 \cdot 0{,}8}{2 \cdot 3} \right) \cdot 0{,}4$$

$= 4{,}07$ ton.

Zou men in bovenstaande berekening last P_2 het dichtst bij reactie A plaatsen, dan zou blijken dat de totale reactie A kleiner wordt dan 4,07 ton.

Tevens zal blijken dat iedere andere stand der belasting, een kleinere reactie A zal veroorzaken, zoodat het in een dergelijk geval steeds afdoende is wanneer men direct de grootste last zoo dicht mogelijk bij A plaatst.

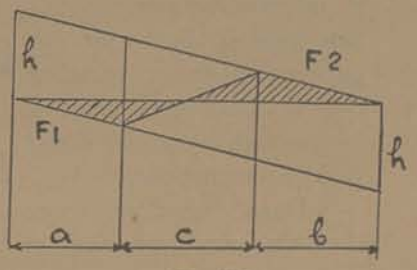


Fig. 175

Heeft een invloedsvlak een gedaante als aangegeven in figuur 175, dan berekent men de oppervlakten der positieve en negatieve gedeelten het eenvoudigst volgens onderstaande formule.

$$\left.\begin{aligned} F_1 = \frac{h}{2} \cdot \frac{a^2}{a+b}, \; F_2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{b^2}{a+b} \\ F_2 - F_1 = \frac{h}{2} \cdot (b - a). \end{aligned}\right\} 95)$$

---

b) Invloedslijnen voor momenten.

Het moment voor een last P_1 in een punt c is $\frac{P_1 \cdot a \cdot b}{L} = A \cdot b$ (fig. 176).

Reactie A wordt hierbij bepaald uit de invloedslijn voor A = 1 ton.

Door dus deze reactie met b te vermenigvuldigen, wordt het moment voor punt c bepaald, zoodat $Mc = P_1 \cdot y$.

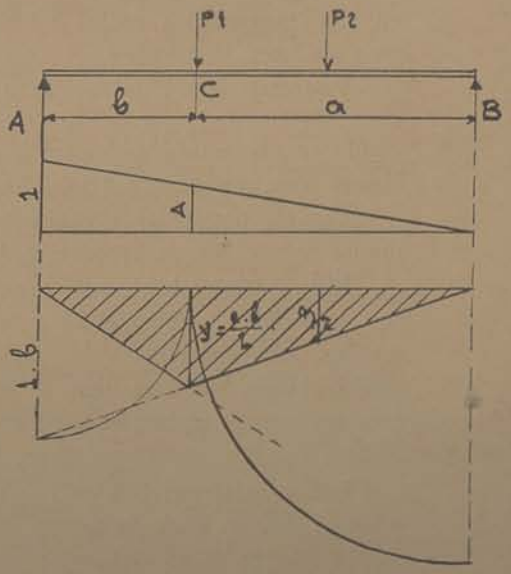


Fig. 176

Op eenvoudige wijze construeert men deze invloedslijn door omcirkelen van punt c; y wordt dan $\frac{a \cdot b}{L}$ d.i. het moment voor P = 1 ton.

Het blijft gelijk of men punt c om A of om B laat draaien, ordinaat y verandert hierbij niet van grootte.

Bevindt zich nog een tweede last op den balk (P_2) dan is het extra moment voor punt c gelijk aan $P_2 \cdot \eta_2$.

Wenscht men het moment voor beide lasten voor het punt onder last P_2 te bepalen dan dient dus eerst dit punt te worden omgecirkeld, zoodat onder dit punt de grootste ordinaat valt.

Hierna wordt het moment berekend uit $P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2$.

Daar de omgecirkelde afstanden a of b lengtematen zijn, dient de grootte der ordinaten in de schaal der teekening te worden opgemeten.

Wordt een balk door P indirect belast, fig. 177 dan bepaalt men voor een gegeven punt m tusschen twee dwarsdragers, eerst de invloedslijn voor de direct belaste constructie.

Daar tusschen twee dwarsdragers geen knik in de invloedslijn mag voorkomen, moeten de onder deze dwarsdragers vallende punten der invloedslijn rechtlijnig worden verbonden.

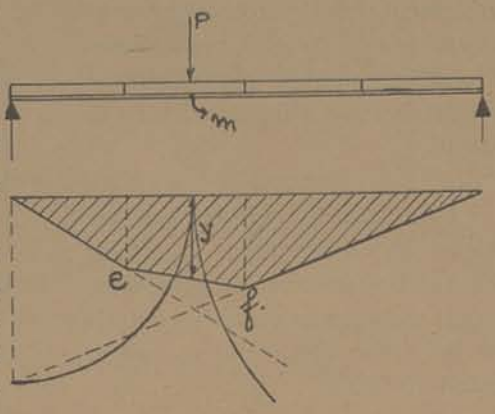


Fig. 177

Voor een last P boven punt m is nu het moment P . y.

Is een belasting gedeeltelijk gelijkmatig verdeeld, met q per meter, dan is voor een punt a (fig. 178) Ma = q . F.

F is de oppervlakte van het geharceerde invloedsvlak waarvan de hoogte zoowel als de breedte in de schaal der teekening is te meten.

Men kan dus ook de werkelijke oppervlakte van het momentenvlak vermenigvuldigen met de schaal der teekening in het kwadraat.

Is b.v. in figuur 178 de schaal 1-200 en F = 3 cm², dan is Ma = $3 . 2^2 . 0{,}4$ = 4,8 ton-meter.

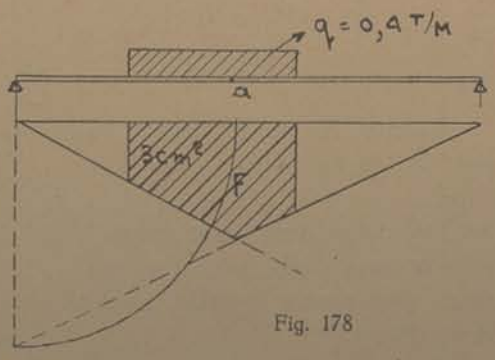


Fig. 178

Ter verduidelijking is voor het opmeten in de schaal der teekening het volgende opgemerkt.

1e) Bij het bepalen der reacties voor lasten P, heeft de schaal der teekening geen invloed.

2e) Bij het bepalen der reacties voor een gelijkmatig verdeelde belasting moet de opgemeten lengte van het invloedsvlak met de schaal worden vermenigvuldigd.

3e) Bij het bepalen der momenten voor lasten P moeten de opgemeten ordinaten steeds met de schaal der teekening worden vermenigvuldigd.

4e) Bij het bepalen der momenten voor een gelijkmatig verdeelde belasting moeten de opgemeten lengten, zoowel als de hoogten van het invloedsvlak met de schaal worden vermenigvuldigd.

Staat op een balk een bewegende lastengroep, dan kan men voor een punt a (fig. 179) het max. moment vinden, door een bepaalde last op dat punt te plaatsen.

Men vindt deze last door van uit dat punt een lijn // aan A-O te trekken.

De kracht door deze lijn aangewezen zal dan bij plaatsing boven het betreffende punt hierin het grootste moment veroorzaken.

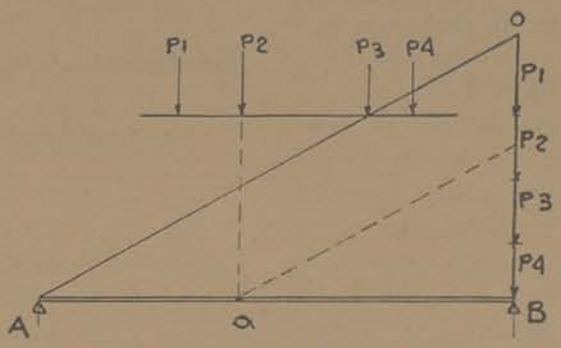


Fig. 179

Valt de lastengroep buiten de lengte A-B, dan bepale men groepsgewijze max. Ma.

Men kan echter ook voor punt a een invloedslijn teekenen waarbij de zwaarste last voorloopig boven dit punt wordt geplaatst.

Daarna onderzoekt men met behulp van een stukje transparantpapier, waarop de lasten op afstand zijn aangegeven, of een andere eventueel omgekeerde stand der lasten niet een nog grooter moment veroorzaakt.

Voorbeeld.

Is in figuur 180, $P_1 = 2$ ton, $P_2 = 10$ ton en $P_3 = 5$ ton, dan zal bij omgekeerde volgorde der lasten het moment voor punt a (te berekenen uit $P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3$) grooter zijn.

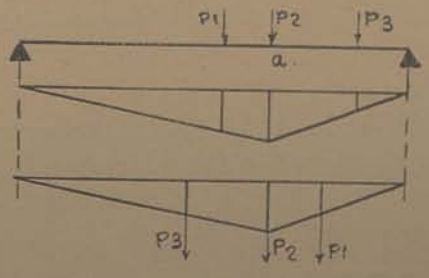


Fig. 180

Rekenkundig bepaalt men voor een lastengroep het max. balkmoment Mc als volgt. (punt c is voorloopig nog onbekend).

Daar max. Mc steeds onder een last zal optreden, ligt de resultante van de in figuur 181 op den balk vallende lasten P, op gelijke afstand van het balkmidden, als het betreffende punt c.

Men deelt de afstand van R tot de dichtstbij zijnde of eventueel volgende last in 2 gelijke afstanden ‚e' welke aan beide zijden vanaf het midden worden uitgezet. Men bepaalt hierna het moment:

$$Mc = \frac{R}{L}\left(\frac{L}{2} - e\right)^2 - \sum_{1}^{c} P \,.\, a \,. \,. \,. \,. \,. \quad 96)$$

M max. vindt men door de afstanden e voor verschillende lasten te probeeren *).

Is de belasting in fig. 181a indirect, dan plaatst men Pc boven den dichtst bij het midden zijnde dwarsdrager. Afstanden e worden dan ongelijk en wel e_1 links en e_2 rechts. Het grootste moment onder den dwarsdrager wordt dan:

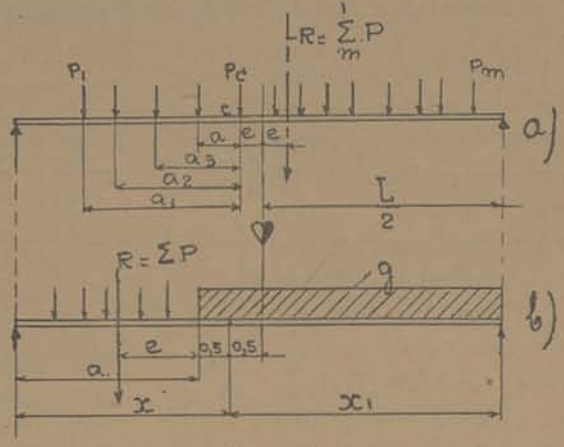


Fig. 181

$$Mmax. = \frac{R}{L}\left(\frac{L}{2} - e_1\right) \cdot \left(\frac{L}{2} - e_2\right) - \sum_{1}^{c} P \,.\, a \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad 97)$$

Is de belasting gedeeltelijk gelijkmatig verdeeld, (fig. b) dan is het grootste moment voor een punt c op dezelfde wijze te bepalen, waarbij:

$$Mmax. = \frac{g \,.\, x \,.\, x_1}{2} + \frac{x_1}{L} \cdot \left(\Sigma P \,.\, \frac{a}{2} - \Sigma P \,.\, e\right) \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad 98)$$

Deze formule geldt alleen als $x > a$.

Voorbeeld.

Voor de in figuur 182 geteekende balkbrug is de overspanning L = 13,2 Mr. De raddrukken P_1 en P_2 zijn 8 en 5 ton.

Bovendien is de brug belast met een gelijkmatig verdeelde belasting à 400 kg./M².

*) Zie ook de max momentenlijn.

De hartafstand der beide hoofdliggers is 2,5 meter.

Men vindt als belasting per strekkende meter balklengte $\frac{400 \cdot 2,5}{2}$ = 500 kg.

Hierdoor wordt (bij een schaal 1-200) max. reactie $A = Q_1 = 8 \cdot 0,92 + 5 \cdot 0,65 + 0,5 \cdot 2 \times \left(\frac{0.43 \cdot 0,5 + 0.58 \cdot 3,8 + 0,1 \cdot 0,5}{2}\right)$ = 11,86 ton. (fig. a).

Max $Q_2 = 8 \cdot 0,7 + 5 \cdot 0,45 + \frac{0,5 \cdot 2}{2} \times (0,42 \cdot 0,8 + 0,38 \cdot 2,5 + 0,1 \cdot 0,5) = 8,54$ ton.

$Q_3 = \ldots = 5,45$ ton.

De max. momenten ontstaan bij volle belasting.

Voor de enkele lasten zijn de ordinaten met 200 te vermenigvuldigen, terwijl voor de gelijkmatig verdeelde belasting geldt dat 1 cm² = 2 . 2 = 4 M².

Bij q = 0,5 ton per meter wordt dus 1 cm² gelijk aan 4 . 0,5 = 2 Tm.

Max. $M_1 = 2 \cdot (8 \cdot 0,48 + 5 \cdot 0,37) + 0,5 \cdot 4 \times \left(\frac{0,2 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 3,9 + 0,1 \cdot 0,5}{2}\right) = 10,88 + 1,37 = 12,25$ Tmr. (fig. d)

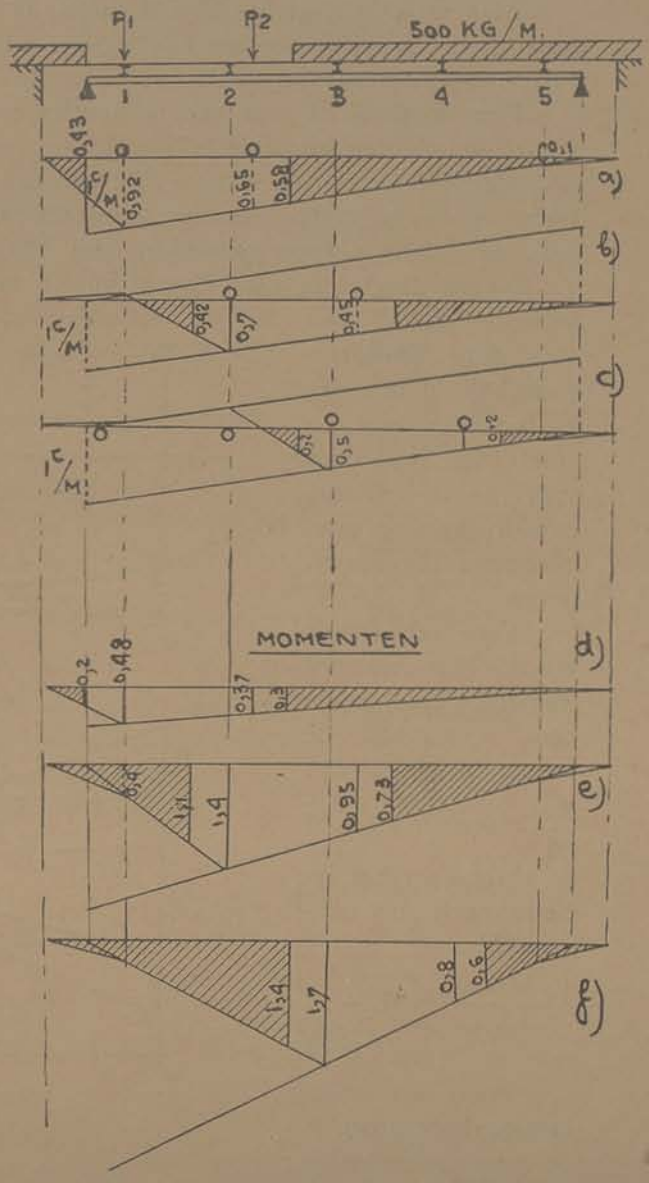


Fig. 182

Max $M_2 = 2 \cdot (8 \cdot 1,4 + 5 \cdot 0,95) + \frac{2}{2} (1,1 \cdot 1,45 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,73 \cdot 2,5 + 0,2 \cdot 0,5) = 32 + 3,8 = 35,8$ Tm.

Max $M_3 = 2 \cdot (8 \cdot 1,7 + 5 \cdot 0,8) + (1,4 \cdot 2,75 + 0,6 \cdot 1,15 + 0,15 + 0,15) = 35,2 + 4,84 = 40,04$ Tm.

De max. momentenlijn.

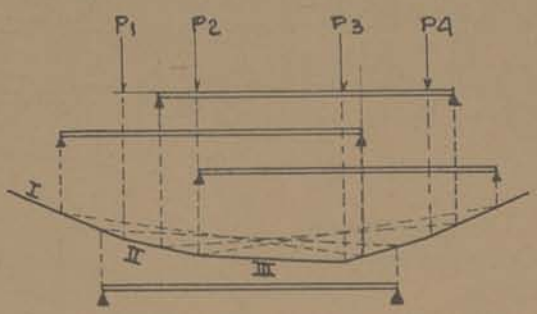
Het max. moment voor verschillende punten van den balk is eveneens te bepalen met behulp van poolfiguur en stangenveelhoek.

Men verschuift hierbij de balk onder de lasten, in plaats van de lasten over den balk, waardoor kan worden volstaan met één momentenfiguur met verschillende sluitlijnen s.

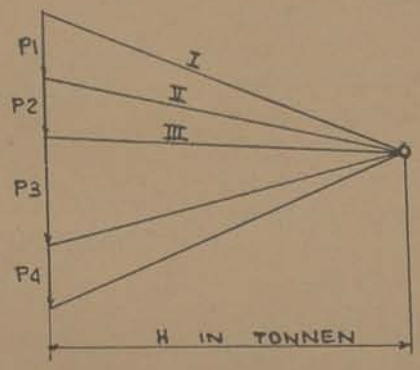
Deze methode is zeer aan te bevelen wanneer geen gelijkmatig verdeelde belasting aanwezig is.

Men teekent op de reeds in fig. 110 aangegeven wijze een poolfiguur, en momentenlijn, waarna onder verschillende standen van den balk, de sluitlijn s wordt getrokken. (fig. 183)

Na op deze wijze voor diverse punten de grootste ordinaat y te hebben bepaald, kan men deze ordinaten, vermenigvuldigd met H, uitzetten op een aparte lijn, waardoor voor de betreffende punten direct de max. momenten zijn aangegeven.



Voor een enkele last P is deze max. momentenlijn een parabool, waarvan de hoogte gelijk is aan $\frac{P \cdot L}{4}$; een ordiniaat M op afstand x vanaf het einde heeft een moment $Mx = \frac{4 \cdot Mmax}{L^2} \cdot x \cdot (L - x)$. 99)



Voor een willekeurige lastengroep is de max. momentenlijn voldoende nauwkeurig aangegeven met 2 halve parabolen, waartusschen een recht stuk van 0,12 . L. (fig. 184).

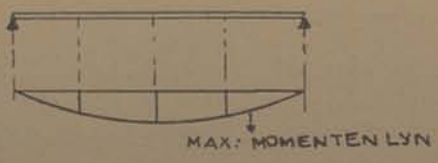


Fig. 183

De meermalen in berekeningen voorkomende verhouding, $\frac{Mx}{Mmax}$ is gelijk aan: $\frac{x.(2.d-x)}{d^2}$ . . . . *100)*

Bestaat een lastengroep uit 2 gelijke lasten P, met onderlinge afstand b, dan is de vorm der max. momentenlijn als in fig. 185

Deze momentenlijn bestaat dus eveneens uit 2 halve parabolen met een recht tusschenstuk van 0,5 . b.

De grootste ordinaat is hierbij gelijk aan:

$$Mmax = \frac{P}{8.L}.(2.L-b)^2, \ldots\ldots\ldots 101)$$

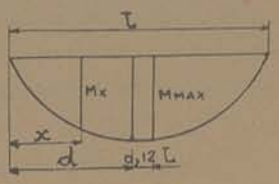


Fig. 184

De afstand van dit moment tot aan het midden van den balk is gelijk aan 1/4 . b.

Bovenstaande formule geldt alleen als b/L niet grooter is dan 0,586.

Is b . > 0,586 . L, dan treedt het max. moment op, bij één last P in het midden van den balk, zoodat:

$$Mmax. = \frac{P.L}{4}.$$

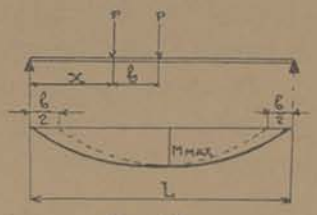


Fig. 185

Zijn de lasten ongelijk, (P_1 en P_2), dan wordt de max. momentenlijn als aangegeven in figuur 186.

Men bepaalt hierbij eerst de plaats der resultante R en de afstanden t en t_1.

$$\text{Booghoogte } II = \frac{R}{4.L}.(L-t)^2$$

$$\text{Booghoogte } I = \frac{R}{4.L}.(L-t_1)^2$$

$$Mx = \frac{R}{L}.\left\{(L-t_1)-x\right\}.x \ldots\ldots 102)$$

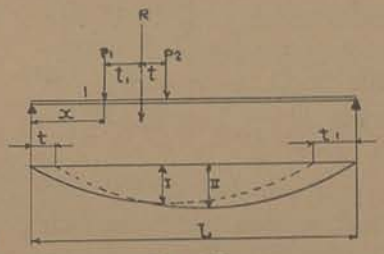


Fig. 186

Is de belasting een gelijkmatig verdeelde, dan is het max. moment = $\frac{g.L^2}{8}$, waarbij voor een punt x:

$$Mx = \frac{g.x}{2}.(L-x) \ldots\ldots 103)$$

De momentenlijn is hierbij weer een parabool. (fig.187)

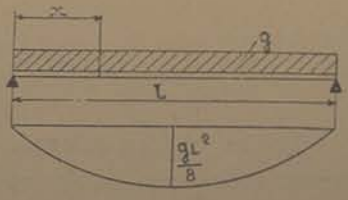


Fig. 187

c) Invloedslijnen voor balken met overstekende einden.

Voor balken met overkragende einden is de constructie der invloedslijnen geheel als boven aangegeven.

Om de reacties te bepalen, wordt onder A of B 1 ton uitgezet, waarna de invloedslijn verlengd wordt tot onder de scharnierpunten. (fig. 188)

Evenzoo doet men voor de invloedslijnen der momenten, waarvoor de fig. 188e en f een voorbeeld voor de punten H en O geven.

De dwarskrachten volgen eveneens uit de in de figuren c en d gegeven voorbeelden.

Voor de invloedslijnen van de overkragende einden geldt het volgende (fig. 189).

Is de actie op het scharnier = 1, (fig. g), dan is voor een punt k de dwarskracht Q = 1, terwijl Mk voor D = 1 gelijk is aan 1 . x.

Is de belasting hierbij indirect dan teekent men de invloedslijnen als aangegeven in figuur h.

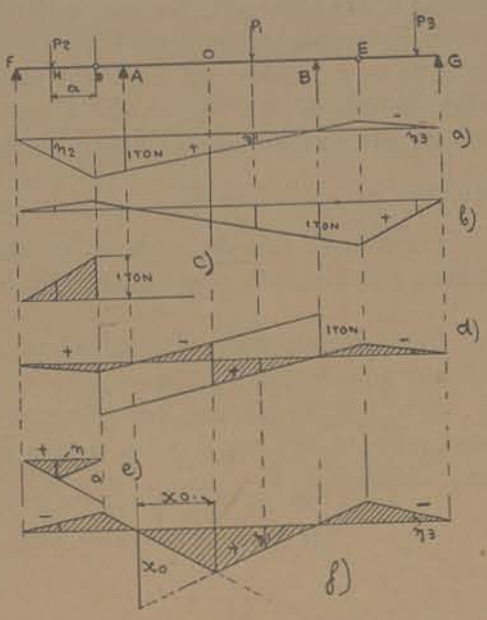


Fig. 188

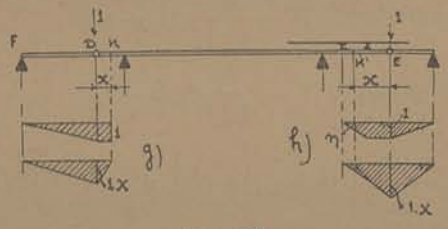


Fig. 189

De max. momentenlijn.

Treden bij een rustende belasting niet alle lasten tegelijk op, dan teekent men voor iedere mogelijke belasting de momentenlijn, waarna hieruit de max. momentenlijn is te bepalen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Bij de in fig. 190 gegeven balkligger zijn P_1, P_3 en P_5 blijvende lasten, terwijl P_2, P_4 en P_6 afzonderlijk kunnen optreden.

Men teekent voor iedere mogelijke belasting de momentenlijn, zooals in fig. a, b en c is aangegeven.

Vervolgens worden de diverse positieve en negatieve ordinaten aaneengevoegd, waardoor de max. en min. momentenlijn ontstaat volgens figuur d.

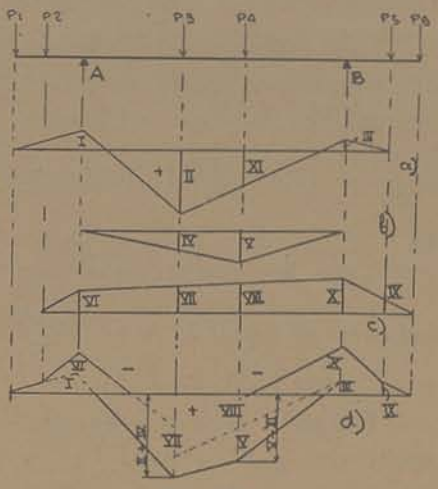


Fig. 190

Treedt er behalve een blijvende belasting à g ton per meter, nog een willekeurige, gelijkmatig verdeelde belasting à p ton per meter op, dan wordt de max. momentenlijn als aangegeven in fig. 191.

Fig. a is hierbij de momentenlijn voor p over afstand L, terwijl fig. b de momentenlijn voor g over de geheele lengte van den balk is.

Verder is fig. c de momentenlijn voor p over de lengte van het overstek b.

De hoogte der uit te zetten ordinaten is hierbij:

$$\left.\begin{aligned} \text{Voor } 1+2 &= \frac{(g+p)\,.\,b^2}{2}\,. \\ \text{,, } \quad 3 &= \frac{g\,.\,L^2}{8}\,. \\ \text{,, } \quad 4 &= \frac{(g+p)\,.\,L^2}{8}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 104)$$

Hierdoor wordt reactie:

$$B \text{ max.} = \frac{(g+p)\,.\,(L+b)^2}{2\,.\,L}\,.$$

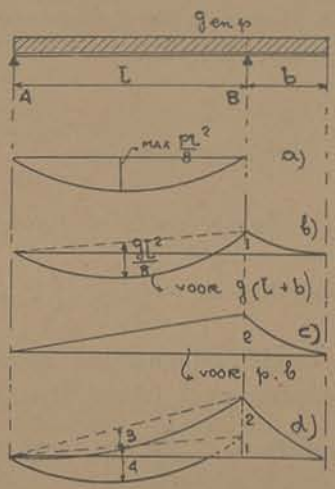


Fig. 191

Voorbeeld.

Gevraagd de max. momenten te berekenen voor den in figuur 192 aangegeven balk met overkragende einden.

Lasten P zijn twee gelijke en bewegende raddrukken à 7 ton per rad.

De blijvende gelijkmatig verdeelde belasting g = 0,35 ton per strekkende meter.

De afstanden der diverse overspanningen zijn in de figuur aangegeven.

a) Het eigengewicht tusschen de steunpunten geeft voor het moment een parabool met hoogte $\frac{g \cdot L^2}{8} = 17500$ KgM. (ordinaat 1)

Voor het eigengewicht van het overstek wordt $M = -\frac{g \cdot a^2}{2}$ $= -1580$ kgM. (ord. 2).

Drager b heeft een eigengewicht van $g \cdot b = 2800$ kg, en een moment in A van $-1400 \cdot 3 = -4200$ kgM. (ordinaat 3).

De geharceerde figuur geeft nu de max. momentenlijn voor het eigengewicht aan.

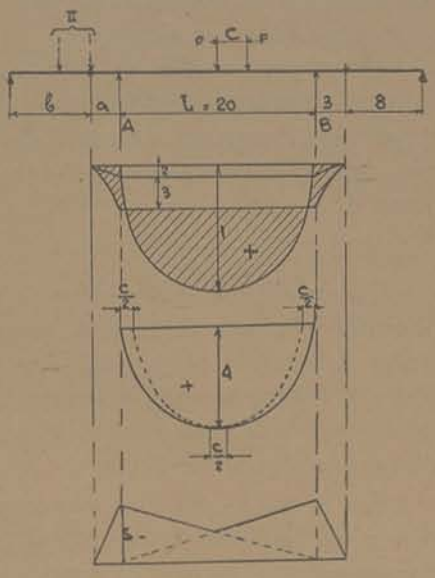


Fig. 192

b) *Raddrukmomenten.*

Zooals reeds in figuur 185 is aangegeven, is de paraboolhoogte voor $M_{max.} = \frac{P}{2 \cdot L} \cdot \left(L - \frac{c}{2}\right)^2 = 60.000$ KgM. (ordinaat 4).

Het ongunstigste negatieve moment komt voor bij P boven het scharnierpunt (stand II), waardoor op dit scharnier een actie ontstaat van $P + \frac{P \cdot (b-c)}{b} = 11380$ Kg.

Het hierdoor veroorzaakte moment boven A $= -11380 \cdot 3 = -34140$ KgM. (ordinaat 5).

Men vindt nu voor het grootste negatieve moment;

$M_{min.} = -1580 - 4200 - 34140 =$
-39920 KgM.

$M_{max.} = +17500 - 5780 + 60000$
$= +71720$ KgM.

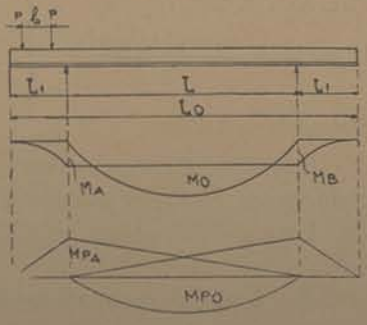


Fig. 192a

Is voor een kraanbalk de totale lengte Lo gegeven waarbij de plaatsing der steunpunten willekeurig kan zijn, dan make men de afstanden dezer steunpunten zoo, dat het optredende max. negatieve moment evengroot wordt als het optredende max. positieve moment.

Men heeft dus voor de blijvende belasting (fig. 192a), Ma = Mb = Mo of $\frac{g \cdot L_1^2}{2} = g \cdot \frac{L^2}{8} - g \cdot \frac{L_1^2}{2}$.

Hieruit volgt na omwerking:

$$L_g = 0{,}586 \cdot Lo.$$

Voor het rijdende lastenpaar wordt $Mp_a = Mp_o$ of

$$P.\ (L_1 + L_1 - b) = \frac{2 \cdot P}{4 \cdot L}\left(L - \frac{b}{2}\right)^2$$

Voor L_1 kan men schrijven $\frac{Lo - L}{2}$, waarna volgt:

$$2 \cdot L \cdot (Lo - L) - 2 \cdot b \cdot L = L^2 - \frac{2 \cdot b \cdot L}{2} + \frac{b^2}{4},$$

of vereenvoudigd: $-3 \cdot L^2 + L\ (2 \cdot Lo - b) - \frac{b^2}{4} = 0.$

Door in deze formule Lo en b in te vullen, is de gunstigste lengte L_p voor de rijdende belasting te vinden.

Bij gelijktijdig optreden van g en P wordt L gemiddeld: $\frac{Lg + Lp}{2}$.

Bij een balk met opgebouwde kraagarm is voor een punt 1 het moment $M_1 = P \cdot c$ (figuur 193).

Reactie $A = -\frac{P \cdot c}{L}$. $B = +\frac{P \cdot c}{L}$.

Het moment M_1 is voor de momentenlijn te splitsen in Ma = A . a en Mb = B . b.

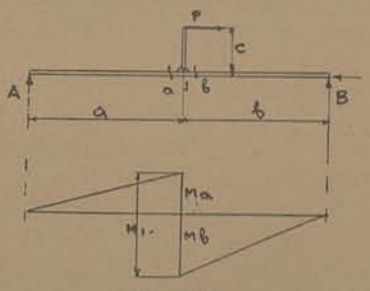


Fig. 193

---

d)

Invloedslijnen voor driescharnierbogen.

1) ALGEMEEN.

In het hoofdstuk over driescharnierkappen is vermeld, dat voor een willekeurig punt b:

$$Mb = M_{ob} - H \cdot y.$$

Voor het scharnierpunt c in fig. 194 is $M_c = M_{oc} - H \cdot f$, waaruit volgt bij $M_c = 0$, $H = \frac{M_{oc}}{f}$.

Hierbij is M_{oc} het moment voor punt c van den rechten balk A-B.

Vermenigvuldigt men dus de momentenlijn voor den rechten balk met 1/f, dan krijgt men de z.g.n. H -lijn van de driescharnierboog.

Is afstand m = n, dan heeft deze H-lijn een hoogte onder c van $\frac{L}{4 \cdot f}$ (fig. 195).

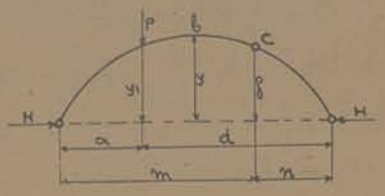


Fig. 194

Bij L = 30 Mr, f = 5 Mr en P in c = 20 ton, wordt $H = \frac{30}{4 \cdot 5} \cdot 20 = 30$ ton.

Invloedslijnen voor reacties.

De invloedslijnen voor de verticale reacties zijn geheel gelijk aan die van den rechten balk A-B.

Liggen de voetscharnieren niet even hoog, dan ontbindt men de druklijn in verticale richting en in richting A-B.

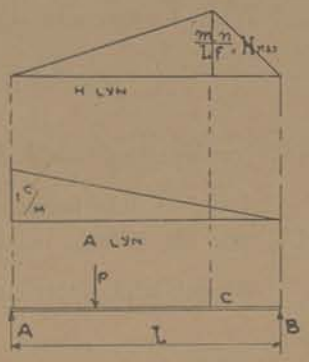


Fig. 195

De verticale reacties worden dan gelijk aan: (fig. 196).

$$Av = V_{oa} + Z \cdot \sin \alpha = V_{oa} + H \cdot tg \alpha$$

$$Bv = V_{ob} - Z \cdot \sin \alpha = V_{ob} - H \cdot tg \alpha$$

$$Z = \frac{M_{oc}}{f}, \quad H = \frac{M_{oc}}{n}.$$

In fig. b is de invloedslijn voor Z, in fig. c die voor H geteekend.

Is de belasting niet verticaal, dan zijn Za en Zb, of ook Ha en Hb niet even groot.

Bij een dergelijke belasting welke meestal niet verrijdbaar is, kan men de driescharnierkap het beste berekenen volgens de methode aangegeven in § 7, hoofdstuk I.

Invloedslijnen voor momenten.

Het grootste moment voor een punt m (fig. 196) = Mo — Z . yf = Mo — H . y_m.

In fig. d is voor dit punt de invloedslijn van den enkelen balk geteekend, hiervan is af te trekken de waarde H . y_m, d.i. de invloedslijn voor H, welke met y_m is vermenigvuldigd.

Het geharceerde vlak in fig. e geeft dan de invloedslijn voor Mm van den driescharnierboog.

De opgemeten ordinaten zijn verder te vermenigvuldigen met de grootte der lasten P en de schaal der teekening.

In fig. f is de invloedslijn uit fig. e nog eenmaal aangegeven, waarbij alle ordinaten vanaf een horizontale lijn zijn uitgezet.

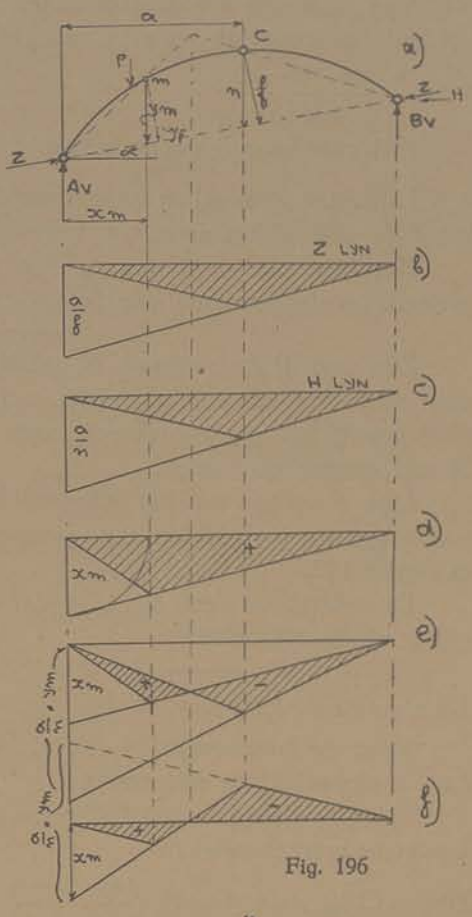


Fig. 196

Dwarskrachten (fig.197).

Om de dwarskracht in een gegeven doorsnede te bepalen, handelt men als volgt.

Bepaal de hellingshoek β der raaklijn aan het gegeven punt, alsmede de dwarskracht Q_{om} in punt m van den rechten balk A-B.

Men trekt de druklijn A-N welke evenwijdig aan de raaklijn loopt, en bepaalt hieruit reactie H.

Hierna vindt men voor de dwarskracht:

$$Q_m = Q_{om} \cdot \cos\beta - H \cdot \frac{\sin \cdot (\beta - \alpha)}{\cos \cdot \alpha}$$

deze waarde is ook gelijk aan:

$$Q_m = Q_{om} \cdot \cos\beta - H \cdot (\sin \cdot \beta - \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\beta).$$

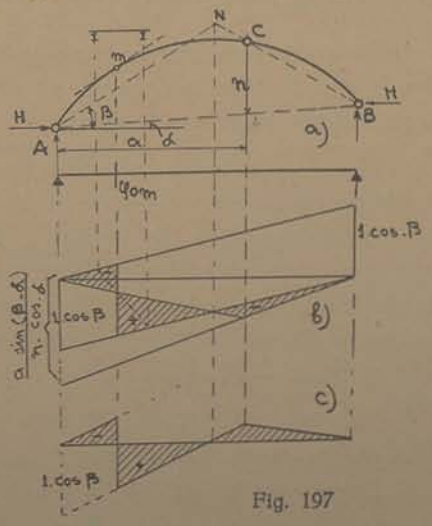


Fig. 197

Om de invloedslijn voor Q_m te teekenen, bepaalt men dus eerst de Q_{om} lijn, vermenigvuldigd met cos. β.

Van deze lijn wordt afgenomen het met sin. $(\beta - \alpha)$ vermenigvuldigde invloedsvlak voor H, waarvan de ordinaat onder A, gelijk is aan: $\frac{a \,.\, \sin \,.\, (\beta - \alpha)}{n \,.\, \cos \,.\, \alpha}$.

(Bij evenhoog liggende scharnieren vervalt hoek α.)

Ligt punt m tusschen twee dwarsdragers, (indirecte belasting), dan krijgt de invloedslijn de in fig. b gestippelde overgang.

Zet men alle ordinaten op een horizontale as uit, dan heeft de invloedslijn de gedaante van figuur c.

Een last P in snijpunt N, geeft voor punt m geen dwarskracht, zoodat, indien N links van C ligt, de dwarskracht onder punt N van voorteeken wisselt.

Ligt N rechts van het scharnierpunt C dan krijgt de invloedslijn een gedaante als in figuur 198.

De constructie dezer lijn is verder geheel gelijk als in fig. 197.

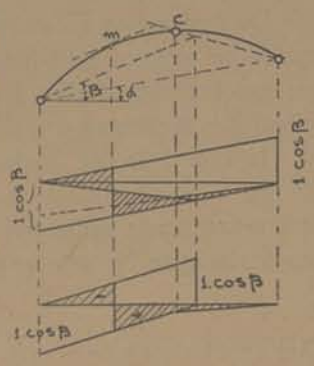


Fig. 198

Langskrachten.

Voor de langskracht N van vlakke bogen is globaal H te rekenen.

Beter is echter, vooral bij bogen met grootere hoogten, deze langskracht te berekenen uit:

$$Nm = Q_{om} \,.\, \sin\, \beta + H \,.\, \frac{\cos \,.\, (\beta - \alpha)}{\cos \,.\, \alpha} = Q_{om} \,.\, \sin\, \beta + Z \,.\, \cos \,.\, (\beta - \alpha)$$

De constructie der invloedslijn is geheel als bij Q (fig. 199), echter wordt nu de met cos. $(\beta - \alpha)$ vermenigvuldigde waarde Z met de eerste factor samengevoegd.

Heeft men voor een driescharnierboog op de een of andere wijze de horizontale reacties H bepaald, dan kan men zonder van invloedslijnen gebruik te maken de diverse momenten, langs- en dwarskrachten berekenen uit:

$Mo = M_{om} - H \,.\, y_m$

$Nm = Q_{om} \,.\, \sin\, \beta + H \,.\, \cos\, \beta$

$Q_m = Q_{om} \,.\, \cos\, \beta - H \,.\, \sin\, \beta$ ..... *105)*

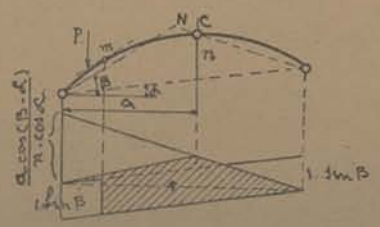


Fig. 199

Deze waarden gelden bij evenhoog liggende voetscharnieren.

Liggen deze scharnieren niet even hoog, dan wordt: (fig. 197-199)

$$Mo = M_{om} - H \cdot y_m.$$

$$Nm = Q_{om} \cdot \sin \beta + Z \cdot \cos (\beta - \alpha).$$

$$Qm = Q_{om} \cdot \cos \beta - Z \cdot \sin (\beta - \alpha). \quad \ldots\ldots 105a)$$

2) METHODE VAN PROF. KÖGLER.

De invloedslijnen voor horizontale krachten op een driescharnierboog zijn het beste te bepalen volgens de methode van Prof. Kögler.

Reacties.

In figuur 200a is een kracht W = 1 aangegeven, aangrijpend op een hoogte h van steunpunt A.

Is h = 0, dan is reactie $H_a = 1$, terwijl bij h = f, reactie $H_a = 0{,}5$.

Voor B verloopen deze reacties van 0 tot 0,5. (fig. b en c)

Voor de uit het moment H . h ontstane verticale reacties is in fig. d de invloedslijn geteekend, welke voor reactie A zoowel als B geldt.

Vmax. (bij W in punt c) is $1 \cdot \frac{f}{L} = \alpha$

Momenten.

Staat W *boven* een punt m dan is $M_m = Ha \cdot y - Va \cdot x$.

Is voor dit punt m reactie $H_a = 1$ dus h = 0, dan is M = 1 . y, terwijl bij W vlak onder punt c, zoodat h = f, het moment gelijk is aan $0{,}5 \cdot y - \alpha \cdot x$.

Deze grenswaarden zijn in fig. e aangegeven.

Ligt W is 1 *onder* punt m, dan vindt men op dezelfde wijze voor h = 0, het moment M = 0, en voor h = f: $M = \alpha \cdot x' - \frac{y}{2}$

Voor beide gevallen wordt het moment voor het overeenkomstige punt op de rechterheft:

voor h = 0, $M_{bm} = 0$.

voor h = f, $M_{bm} = \alpha \cdot x - \frac{y}{2}$

Voor de beide eerste gevallen zijn de invloedslijnen gecombineerd aangegeven in fig. g. De geharceerde figuur is hierbij het voor punt

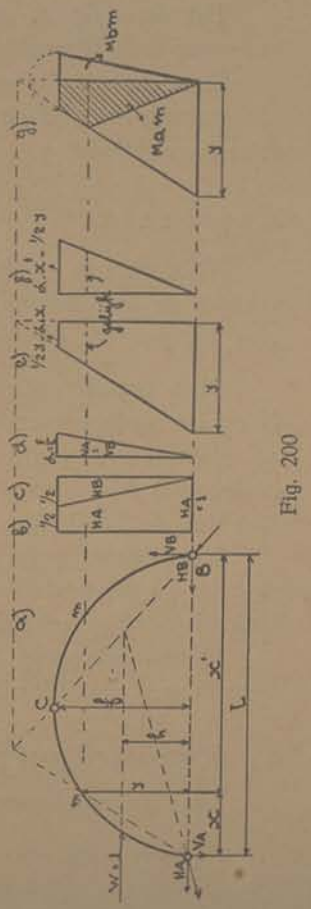


Fig. 200

m geldende invloedsvlak, waarbij dus de ordinaten y_m der beide figuren elkaar bedekken.

De invloedslijn voor M_{bm} vindt men door omcirkelen der ordinaat onder C welke gelijk is aan $0{,}5 \cdot y - \alpha \cdot x$. (fig. g).

---

3) VEREENVOUDIGDE METHODE.

Door *Müller-Breslau* is in plaats van den vervangenden rechten balk A-B een kortere balk A'-N toegepast, waarvan de lengte als volgt wordt bepaald. (fig. 201).

Uit het voorgaande blijkt dat het snijpunt N van de lijnen A-m en B-C de plaats aangeeft, waar een kracht geplaats kan worden, die in m geen moment veroorzaakt.

Tot dit nulpunt nu laat *Müller-Breslau* een kortere balk loopen waarvoor de invloedslijnen worden bepaald.

Deze invloedslijnen zijn dan gelijk aan die van het gedeelte A-N van den driescharnierboog.

Voorbeeld.

Voor punt m in fig. 201 wordt gevraagd de invloedslijnen te teekenen voor het moment en de dwarskracht.

Men bepaalt eerst de snijpunten N op de reeds eerder aangegeven wijze, waarbij men voor het moment de balklengte A'-N en voor de dwarskrachten de balklengte A'-N_1 vindt.

Voor deze gedachte balklengten worden op de reeds bekende wijze de invloedslijnen geteekend.

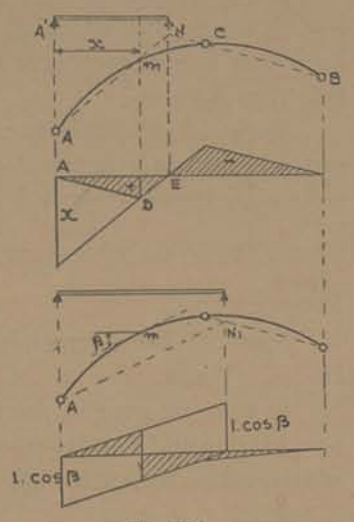


Fig. 201

Door verlenging der stukken D-E tot onder het scharnierpunt bepaalt men de invloedslijnen voor den geheelen driescharnierboog.

---

4) KERNMOMENTEN.

De max. randspanningen, welke ten slotte optreden zijn te bepalen uit:

$$\sigma_1 = -\left(\frac{N}{F} + \frac{M}{W_1}\right). \quad \text{en}$$

$$\sigma_2 = -\left(\frac{N}{F} - \frac{M}{W_2}\right).$$

Hierbij zijn W_1 en W_2 de bij een onsymetrische behoorende weerstandsmomenten.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Bij toepassing dezer formules is het noodig de langskrachten N te weten waarvoor dus ook een invloedslijn geteekend dient te worden.

Teekent men echter de invloedslijnen der momenten ineens voor de kernpunten K_1 en K_2 dan is de langskracht N vanzelf in rekening gebracht.

In een gegeven doorsnede zijn de kernafstanden k_1 en k_2 volgens bl. 35 te vinden uit:

$$k_1 = \frac{W_2}{F} \qquad k_2 = \frac{W_1}{F} \quad . \text{ (fig. 79)}$$

In het algemeen geldt voor k:

$$k = \frac{W}{F} = \frac{J}{F \,.\, e} = \frac{i^2}{e} .$$

Hierbij is e de afstand van den rand tot de zwaartelijn, terwijl voor F de netto doorsnede is in te vullen.

Men kan nu voor de spanningen invullen:

$$\sigma_1 = -\frac{M_1}{W_1} = -\frac{N \,.\, n_2}{W_1} = -\frac{N}{F} \cdot \frac{n_2}{k_2} .$$

$$\sigma_2 = +\frac{M_2}{W_2} = +\frac{N \,.\, n_1}{W_2} = +\frac{N}{F} \cdot \frac{n_1}{k_1} . \qquad \ldots\ldots 106)$$

In figuur 204 zijn de constructie-punten voor deze gewijzigde momentenlijn aangegeven.

Inplaats van $M = Mo - H \,.\, y$ is nu te rekenen:

$M_1 = Mo_1 - H \,.\, y_1$.

$M_2 = Mo_2 - H \,.\, y_2$.

Daar men bij deze methode 2 lastscheidingspunten heeft (N_1 en N_2) krijgen de vervangende balken eveneens 2 lengten en wel L_1 voor den balk tot boven N_1 en L_2 voor den balk tot boven N_2.

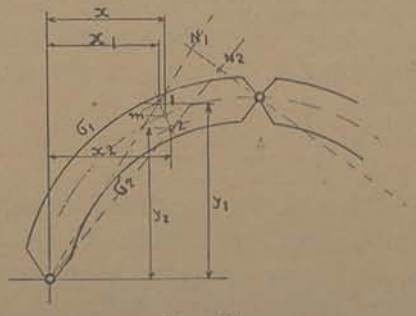


Fig. 204

Om tot een voorloopige aangave der profielen te komen kan men de belasting P_1, P_2 enz. het beste herleiden in een gelijkmatig verdeelde van p kg. per meter.

Bij een scharnierpunt in het midden wordt dan de horizontale

$$\left.\begin{array}{l} \text{reactie } H = \dfrac{(g+p) \,.\, L^2}{8 \,.\, f} \,. \\ \text{Mmax. op } L/4 = \sim + 0{,}019 \,(g + p) \,.\, L^2. \\ \text{Mmin} = \sim - 0{,}019 \,(g + p) \,.\, L^2. \end{array}\right\} \ldots\ldots 107)$$

Het voorloopige weerstandsmoment op L/4 wordt dan:

$$W = \frac{1}{\sigma} (M + H . k)$$

Hierbij is k gelijk aan 0,35 —0,40 maal de booghoogte h.

Na het bepalen der voorloopige profielen dient de berekening te worden gecorrigeerd.

(Voor knikzekerheid van de geheele boog raadplege men deel II en IV van dit werk).

---

e) Invloedslijnen voor balken op meerdere steunpunten.

1) BALKEN OP DRIE STEUNPUNTEN.

In het hoofdstuk over statisch onbepaalde constructies is aangetoond, dat een onbekend steunpunt te bepalen is, door de vormveranderingsvergelijkingen voor dat punt op te stellen:

Zoo is voor een balk op 3 steunpunten:

$$Xa = \frac{\Sigma Pm . \delta am}{\delta aa} \quad \ldots\ldots \quad 108)$$

Hierbij is: (fig. 205)

Pm de last in punt m, δam de doorbuiging bij a (voor P in m) van den balk op twee steunpunten.

δaa de door- of opbuiging ter plaatse van de onbekende reactie door een kracht X is één ton.

Voor den in fig. 205 geteekenden balk op 3 steunpunten is bij voorloopige weglating van het middensteunpunt, het moment voor een last Xa = —1 ton,

$$M = \frac{1 . L_1 . L_2}{L}$$

Het hierdoor ontstane momentenvlak met oppervlakte F wordt als belasting aangebracht op een aparte balk ter lengte A-B.

De hierbij behoorende momentenlijn, aangegeven in fig. c is dan tevens de buigingslijn voor den balk op twee steunpunten.

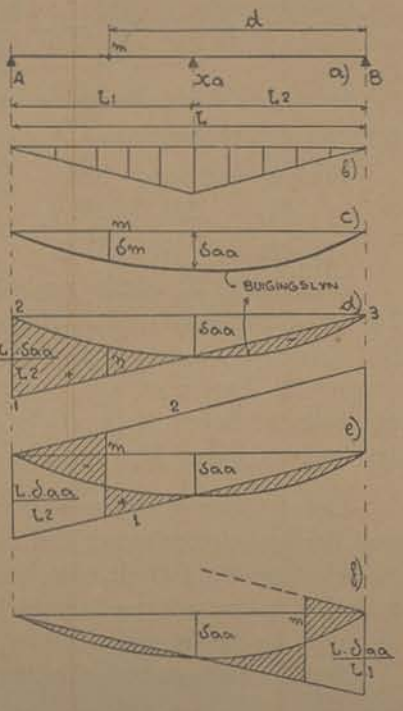


Fig. 205

Daar deze buigingslijn verkregen is met een willekeurige poolafstand, verschijnt de doorbuiging δaa eveneens in een willekeurige grootte.

A - l ij n.

Voor een last P in een punt m van den balk op 3 steunpunten is reactie $A = \frac{P \cdot d - Xa \cdot L_2}{L}$ (fig. 205)

P boven Xa geeft reactie A is 0, terwijl P in het 2e veld voor A een negatieve reactie geeft.

Voor den balk op 2 steunpunten verloopt de reactie van 1 (boven A) tot 0 (boven B).

Om dus voor deze laatste lijn boven Xa een hoogte te krijgen van δ aa, dient ordinaat 1 onder A nog met $\frac{L \cdot \delta aa}{L_2}$ te worden vermenigvuldigd.

Drukt men Xa uit in de waarde $\frac{P \cdot \delta m}{\delta aa}$ (fig. c), dan vindt men voor $A = \left(\frac{P \cdot d}{L} - \frac{P \cdot \delta m \cdot L_2}{\delta aa \cdot L}\right) \cdot \frac{L \cdot \delta aa}{L_2} = \eta$.

De geharceerde figuur (fig. d) is dus het invloedsvlak voor reactie A.

Daar alle waarden met $\frac{L \cdot \delta aa}{L_2}$ zijn vermenigvuldigd, moeten de opgemeten ordinaten η door deze waarde worden gedeeld.

Men vindt nu voor den balk op 3 steunpunten.

$$\text{Reactie } A = \frac{L_2}{L \cdot \delta aa} \cdot \Sigma P \eta \ldots\ldots \quad 108a)$$

Waarden δaa en η zijn hierbij willekeurige afstanden, de onderlinge verhouding blijft echter een constante waarde.

Om reactie B te bepalen, teekent men een nieuwe figuur met onder B een ordinaat $\frac{L \cdot \delta aa}{L_1}$

Hierdoor wordt reactie

$$B = \frac{L_1}{L \cdot \delta aa} \cdot \Sigma P \cdot \eta \ldots\ldots \quad 108b)$$

Q - l ij n.

Door in figuur e lijn 2 evenwijdig aan 1 te trekken, vindt men de dwarskrachtenfiguur, welke alleen geldt voor punten in veld L_1.

De dwarskrachtenlijn voor veld 2 wordt bepaald uit de invloedslijn voor reactie B.

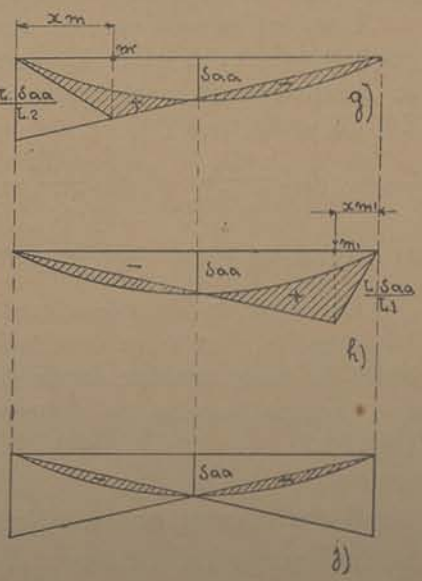


Fig. 206

De vermenigvuldigingsfactoren zijn in beide gevallen gelijk aan die der reacties A of B.

De momentenlijn (fig. 206 g & h).

De invloedslijnen voor de momenten zijn eveneens voor de beide velden afzonderlijk te teekenen.

Men gebruikt hiertoe de invloedslijnen der reacties, waarbij vanaf het punt onder m deze invloedslijnen rechtlijnig verloopen tot 0 onder A

Daar verder het moment voor een gegeven punt gelijk is aan A . x (of B . x) dienen van deze invloedslijnen de ordinaten vermenigvuldigd te worden met; $x_m \cdot \frac{L_2}{L \cdot \delta aa}$ of $x_{m_1} \cdot \frac{L_1}{L \cdot \delta aa}$, zoodat voor een punt m in veld L_1:

$$Mm = \frac{L_2}{L \cdot \delta aa} \cdot x_m \cdot \Sigma P \cdot \eta$$

voor een punt m_1 in veld L_2:

$$Mm_1 = \frac{L_1}{L \cdot \delta aa} \cdot x_{m_1} \cdot \Sigma P \cdot \eta \quad \ldots\ldots 109)$$

Ma-lijn. (fig. j).

Door de negatieve momentenvlakken der velden L_1 en L_2 uit fig. g en h aaneen te voegen, ontstaat de momentenlijn voor het balkgedeelte boven het middensteunpunt.

Daar het moment voor dit punt gelijk is aan A . L_1 of B . L_2 wordt de vermenigvuldigingsfactor voor $\Sigma P \cdot \eta$ gelijk aan:

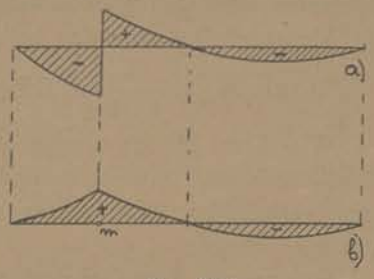


Fig. 207

$$L_1 \cdot \frac{L_2}{L \cdot \delta aa} \text{ of } L_2 \cdot \frac{L_1}{L \cdot \delta aa} \ldots\ldots 110)$$

2) ALGEMEENE GEDAANTE.

Zet men de dwarskrachtenfiguur 205-e uit op een horizontale scheidingslijn, dan krijgt deze invloedslijn de gedaante als aangegeven in fig.207-a, de verticale ordinaten zijn in beide figuren gelijk.

Evenzoo kunnen de ordinaten der momenten worden uitgezet. (fig . b).

Bij balken met gelijke veldwijdten, zijn de waarden $\frac{L_1 \cdot \eta}{L \cdot \delta aa}$. en $\frac{L_1 \cdot x \cdot \eta}{L \cdot \delta aa}$ de bij een bepaald punt behoorende onveranderlijke grootten.

„*Griot*", stelde deze waarden voor verschillende punten van den balk in tabellen samen, waardoor men, met behulp der hierin genoemde factoren a, op zeer eenvoudige wijze de dwarskrachten of momenten voor een balk op 3 steunpunten kan bepalen. (zie tabel bl. 160).

---

3) BALKEN MET VERSCHILLEND TRAAGHEIDSMOMENT.

Is het lengteverschil tusschen de velden L_1 en L_2 vrij groot, dan is het voordeeliger een doorloopende balk te nemen met verschillende traagheidsmomenten.

Hierdoor wordt de vorm der buigingslijn, dus ook de doorbuiging δaa gewijzigd. (fig. 208).

Men schat voorloopig de onderlinge verhouding der traagheidsmomenten in beide velden, voor veld L_2 neme men b.v. een enkele balk met traagheidsmoment J_1, terwijl voor het grootere veld L_1 deze balk voorzien wordt van een of meerdere strippen, waarbij het totale traagheidsmoment gelijk is aan J_2.

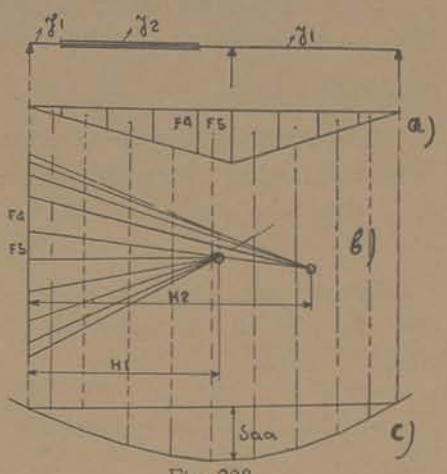


Fig. 208

De verhouding $\frac{J_2}{J_1} = \beta$.

Na het opteekenen der momentenlijn voor Xa = 1 ton, (fig. 208a) wordt het momentenvlak als voren in strooken F_1, F_2, enz. verdeeld.

Poolafstand H, waarmede de buigingslijn wordt bepaald, krijgt nu echter 2 waarden, en wel H_1 voor den enkelen balk met J_1, en H_2 ($= H_1 . \beta$) voor den balk met opgeklonken strippen.

Is δaa bepaald, dan handelt men verder geheel als in figuur 205 is aangegeven.

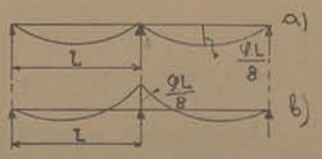


Fig. 209

4) STEUNPUNTS-VERLAGING.

Bij vergelijking van een ligger op 2 steunpunten met een idem op 3 steunpunten blijkt dat bij beiden het max. moment bij een gelijkmatig verdeelde belasting gelijk is aan $\frac{(g+p) . L^2}{8}$.

Dit max. moment treedt bij den balk op 2 steunpunten in het veld op, terwijl bij den balk op 3 steunpunten dit max. moment boven het middensteunpunt voorkomt, waarbij het veldmoment kleiner is. (bij gelijke veldlengten = 0,07 . Q . L).

Zou men het middensteunpunt iets laten zakken, dan wordt het moment hierboven verminderd, terwijl de veldmomenten worden vergroot.

De gunstigste toestand voor den balk is, wanneer veld- en steunpuntsmomenten aan elkaar gelijk zijn.

Daar de verhouding tusschen een rijdende last p en het eigengewicht van den balk veranderlijk is, berekent men globaal de meest geschikte verlaging van het middensteunpunt met behulp van onderstaande formule:

$$v = \frac{(P+g) \cdot L^4}{24 \cdot E \cdot J} \left(0{,}163 + 0{,}151 \frac{g}{p+g}\right) \ldots\ldots \textit{111)}$$

(L is hierbij volgens fig. 209).

Door toepassing dezer formule worden de steunpuntsmomenten 16% tot 30% kleiner dan bij evenhoog liggende steunpunten, al naar gelang de waarde $\frac{g}{p+g}$ bij 0 of 1 ligt.

Bovenstaande formule is echter alleen toe passen, als geen andere verzakking der steunpunten kan optreden.

Wordt een elastisch middensteunpunt over een afstand δa ingedrukt, dan wordt Xa een waarde

$$\frac{\delta a}{\delta aa} = 3 \cdot E \cdot J \cdot \frac{\delta a \cdot L}{L_1^2 \cdot L_2^2} \text{ kleiner. } \ldots \textit{112)}$$

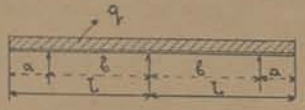


Fig. 210

Wil men de 3 steunpunten van een doorloopende balk (fig. 210) op een dergelijke afstand van elkaar plaatsen dat de 3 reacties evengroot worden, dan wordt bij een gelijkmatig verdeelde belasting het overstekende gedeelte $a = 0{,}3055 \cdot L$ . . . . *113)*

---

5) BALKEN MET 4 STEUNPUNTEN.

Men bepaalt, evenals bij den balk op 3 steunpunten het momentenvlak voor —1 ton ter plaatse van de onbekende reacties.

Daar de balk tweevoudig statisch onbepaald is, worden dus twee momentenvlakken geteekend, en wel één voor Xa = — 1 ton, en één voor Xb = — 1 ton.

Voor deze momentenvlakken worden de buigingslijnen bepaald, waarbij de poolafstanden voor de oppervlakten F even groot zijn.

Voor de onbekende steunpunten Xa en Xb heeft men nu de volgende vergelijkingen: (zie ook bl. 63)

$$Pm \,.\, \delta am - Xa.\ \delta aa - Xb.\ \delta ab = 0.$$
$$Pm \,.\, \delta bm - Xa.\ \delta ba - Xb.\ \delta bb = 0.$$

Hierbij is: (fig. 211)

δam = de doorbuiging bij a door $Pm = -1.$
δaa = „ „ „ a „ $Xa = -1.$
δab = „ „ „ a „ $Xb = -1.$

Na omwerking volgt voor de hoogten der verschillende ordinaten der Xa- of Xb lijn: (fig. 212)

(waarbij $\delta am = \delta ma = \eta a$, $\delta bm = \delta mb = \eta b$.)

$$Xa = \frac{\delta bb}{\delta bb \,.\, \delta aa - \delta^2 ab} \cdot \left(\eta a - \frac{\delta ab}{\delta bb} \cdot \eta b \right).$$

$$Xb = \frac{\delta bb}{\delta bb \,.\, \delta aa - \delta^2 ab} \cdot \left(\eta b \,.\, \frac{\delta aa}{\delta bb} - \eta a. \frac{\delta ab}{\delta bb} \right) \ldots\ldots \quad 114)$$

Deze ordinaten geven voor de Xa-lijn in punt Xa een hoogte 1 en in punt Xb een hoogte 0.

Voor de Xb-lijn gelden deze waarden in omgekeerde volgorde.

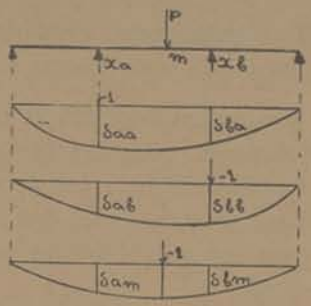


Fig. 211

De op deze wijze verkregen invloedslijnen voor de onbekende reacties Xa en Xb, zijn in fig.212-f en -g aangegeven.

Voor een willekeurige lastengroep geldt:

$$Xa = \Sigma P \,.\, \eta \qquad Xb = \Sigma P \,.\, \eta$$

A-lijn en dwarskrachtenlijn.

In het algemeen is de dwarskracht voor een punt m in het eerste veld te bepalen uit:

$$Q_m = Q_{om} - \left(Xa. \frac{L_2 + L_3}{L.} + Xb \,.\, \frac{L_3}{L} \right), \text{ waarvoor men kan schrijven}$$

$$Q_m = \frac{L_3}{L} \left\{ Q_{om} \cdot \frac{L}{L_3} - \left(Xa. \frac{L_2 + L_3}{L^3} + Xb \right) \right\}.$$

Voor Q_{om} zet men onder $Xb = 1$ (ton) uit, onder $Xa = \frac{L_2 + L_3}{L_3}$ en onder A een hoogte $\frac{L}{L_3}$.

De verbindingslijn tusschen deze 3 punten is steeds een rechte lijn. (fig. h)

De ordinaat-hoogten der gebogen Xa lijn zijn met de zelfde vermenigvuldigingsfactor uit te zetten, zoodat deze, met in achtname der invloed van Xb gelijk zijn aan Xa. $\frac{L_2 + L_3}{L_3} + Xb.$

Men vermenigvuldigt dus de bij een bepaald punt behoorende ordinaat der Xa-lijn met $\frac{L_2 + L_3}{L_3}$ en voegt hieraan toe de algebraische waarde van de bij dat punt behoorende ordinaat Xb.

Hierdoor ontstaat het in fig. 212i geharceerd aangegeven invloedsvlak voor reactie A.

Dit invloedsvlak is tevens te gebruiken voor het bepalen der dwarskrachten in het eerste veld, waartoe dan onder het gegeven punt een scheidingslijn getrokken wordt.

In fig. j is deze invloedslijn voor de dwarskracht in punt 2 aangegeven.

Daar verder onder A een reactie $A = 1 . \frac{L}{L_3}$ is uitgezet dienen alle ordinaten nog met $\frac{L_3}{L}$ te worden vermenigvuldigd, zoodat voor een punt m de dwarskracht:

$$Qm = \frac{L_3}{L} . \Sigma P . \eta . \ldots\ldots 115)$$

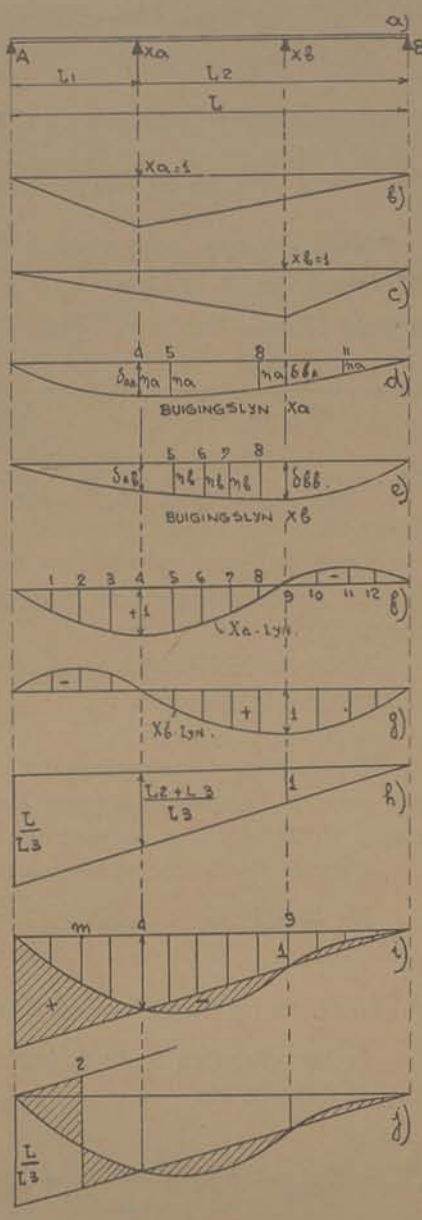


Fig. 212

Is voor het rechter-eindveld de invloedslijn geteekend, dan is de vermenigvuldigings-factor voor $\Sigma P . \eta = \frac{L_1}{L}$

Voor een punt m in het 2e veld is

$$Qm = \frac{L_3}{L}\left\{ Qom \cdot \frac{L}{L_3} + \left(Xa \cdot \frac{L_1}{L_3} - Xb \right) \right\}$$

Doordat voor de dwarskracht de ordinaten onder A en boven B weer gelijk zijn aan $\frac{L}{L_3}$, is de rechte Q_{om}-lijn gelijk aan die van het eerste veld.

Voor de gebogen lijn geldt de waarde, $Xa \cdot \frac{L_1}{L_3} - Xb$.

Men vermenigvuldigt dus de bij een bepaald punt behoorende reactie Xa met $\frac{L_1}{L_3}$, en vermindert deze uitkomst met de algebraische waarde van Xb.

Hierdoor krijgt dan punt 9 (fig. 213) een hoogte gelijk aan $-Xb = -1$ en punt 4 een hoogte van $+ Xa. \frac{L_1}{L_3} = + \frac{L_1}{L_3}$.

Is $L_1 = L_3$, dan is de hoogte boven punt 4 eveneens $+1$.

Het geharceerde gedeelte in fig. 213 is het invloedsvlak voor Qm in het 2e veld, waarbij onder het punt m een verticale scheidingslijn is te trekken.

Men vindt nu Qm uit $\frac{L_3}{L} \Sigma P \cdot \eta$.

Voor balken met 3 gelijke veldafstanden zijn in de hierachter volgende tabellen van *Griot*, de constant blijvende verhoudingen uitgewerkt aangegeven, zoodat men de bij een gegeven doorsnede behoorende dwarskracht direct kan bepalen uit $\Sigma P \cdot \alpha$.

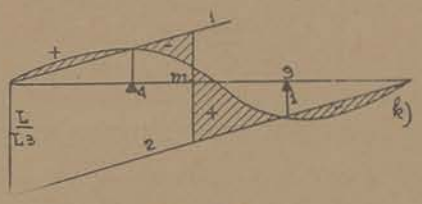


Fig. 213

Invloedslijnen voor de momenten.

Voor het linker-buitenveld, (fig. 214-a) geldt voor een gedachte last 1 punt in m : $M = A \cdot x_m$

Om de invloedslijn te teekenen bepaalt men eerst op de bovenaangegeven wijze de A-lijn, (fig. a) en trekt onder het gegeven punt de sluitlijn o-m'.

Het moment voor de diverse krachten t.o.v. dit punt is nu

$$Mm = \frac{L_3}{L} \cdot x_m \cdot \Sigma P \cdot \eta \ldots\ldots \quad 116)$$

Bij het middelste veld geldt voor het moment t.o.v. een punt m (fig. b).

$$Mm = x_m \cdot \frac{L_3}{L} \cdot \left\{ \text{Mom.} \frac{L}{L_3} \cdot \frac{1}{x_m} - \left(Xa \cdot \frac{L_1}{L_3} \cdot \frac{L - x_m}{x_m} + Xb \right) \right\}.$$

Onder A wordt weer de waarde $\frac{L}{L_3}$ uitgezet, waarna men voor het gegeven punt de bijbehoorende hoogten der gebogen lijn voor alle punten berekent uit de formule:

$$Xa \cdot \frac{L_1}{L_3} \cdot \frac{L - x_m}{x_m} + Xb.$$

Voor ieder willekeurig punt in het 2e veld moet dus een andere gebogen lijn worden geteekend, daar x_m steeds een andere waarde heeft; Xa en Xb zijn hierbij de betreffende ordinaten der invloedslijnen voor Xa of Xb.

Het geharceerde vlak in fig. b is dus het invloedsvlak voor het moment van een punt m in het 2e veld, waarbij de vermenigvuldigingsfactor voor ΣP gelijk is aan:

$$x_m \cdot \frac{L_3}{L} \cdot \eta.$$

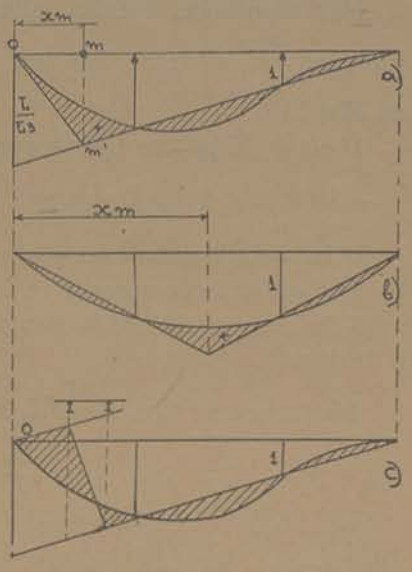


Fig. 214

6) ALGEMEENE GEDAANTE.

Door de dwarskrachten- en momentenfiguren uit fig. 212, 213 en 214 op horizontale scheidingslijnen uit te zetten, ontstaan de meer bekende gedaanten der invloedslijnen volgens fig. 215.

Steunpuntsverlaging.

De meest gunstige verlaging der beide middensteunpunten is te bepalen uit:

$$v = \frac{L^4}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{p + 1.8 \cdot g}{5900} \right) \ldots . \quad 117)$$

Hierbij is de verhouding der veldafstanden 6-7-6 tot 8-9-8.

L is totale balklengte.

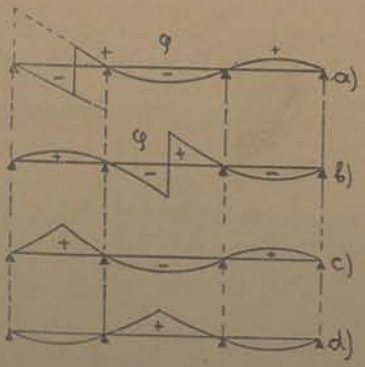


Fig. 215

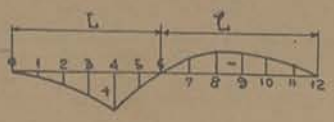
De grootste buigmomenten zijn daarbij:

$$Mmax. = \frac{L^2}{118} (1{,}35 . p + g) \ldots\ldots 118$$

f) Tabellen voor balken op meerdere steunpunten.

Op de volgende bladzijden zijn de door *Griot* berekende ordinaten a voor balken met 2 en 3 gelijke veldwijdten aangegeven.

(Onderstaande figuren zijn voorbeelden voor de invloedslijnen der momenten t.o.v. de punten 4).





Men vindt de dwarskracht Q uit: Σ P . a of Σ g . x . a.

De momenten zijn te bepalen uit: Σ P . a . L. of Σ g . x . a . L.

L is in beide figuren de veldlengte.

Voorbeeld.

Voor den in fig. 216 geteekenden balk wordt in punt 8 de max. dwarskracht en het grootste positieve en negatieve moment gevraagd, voor de rijdende lasten P_1 en P_2.

Voor snede 8 worden alle in de tabel onder punt 8 vallende ordinaten vanaf —0,025 (punt 1) tot —0,007 (punt 17) uitgezet. De zwaarste last wordt nu boven punt 8 geplaatst.

Men vindt voor + Mmax. = L. Σ P . a = 8 . 6. (0,152 + 0,48) = +9,6. Tm.

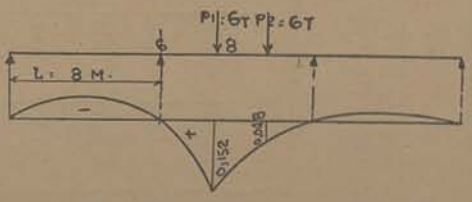


Fig. 216

De grootste som der negatieve ordinaten komt voor in veld 1 en is gelijk aan 8 . 6. (—0,058 — 0,058) = —5,57 Tm.

Voor Q 8 vindt men na het trekken der scheidingslijn onder punt 8; P . a = 6. (0,69 + 0,31) = 6 ton.

BALKEN MET 2 GELIJKE VELDWIJDTEN.

Last in punt of Hoogte	Ordinaten der invl: lijn voor M in Ton.Mtr bij. P = 1 Ton — Bij een snede in punt:											Q Ton	Moment gelijkmatigverdeelde Belasting, g		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		Totaal	Vak. 1	Vak. 2
1	**0.132**	0,098	0,063	0,029	—0,006	—0,041	—0,034	—0,027	—0,020	—0,014	—0,007	0,793	0,049	—	—
2	0,099	**0.198**	0,130	0,062	—0,006	—0,074	—0,062	—0,049	—0,037	—0,025	—0,012	0,593	**0.069**	—	—
3	0,068	0,135	**0.203**	0,104	0,005	—0,094	—0,078	**—0.063**	**—0.047**	**—0.031**	**—0.016**	**0.406**	0,063	—	—
4	0,040	0,080	0,121	**0.161**	0,034	—0,093	—0,077	—0,062	—0,046	—0,031	—0,015	0,241	0,028	—	—
5	0,017	0,034	0,052	0,069	**0.086**	—0,064	—0,053	—0,042	—0,032	—0,021	—0,011	0,103	—0,035	—	—
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**—0.125**	—0,0625	—0,0625
7	—0,011	—0,021	—0,032	—0,042	—0,053	—0,064	**0.086**	0,069	0,052	0,034	0,017	—0,064	—0,035	—	—
8	—0,015	—0,031	—0,046	—0,062	—0,077	—0,093	0,034	**0.161**	0,121	0,080	0,040	—0,093	0,028	—	—
9	**—0.016**	**—0.031**	**—0.047**	**—0.063**	**—0.078**	—0,094	0,005	0,104	**0.203**	0,135	0,068	—0,094	0,063	—	—
10	—0,012	—0,025	—0,037	—0,049	—0,062	—0,074	—0,006	0,062	0,130	**0.198**	0,099	—0,074	**0.069**	—	—
11	—0,007	—0,014	—0,020	—0,027	—0,034	—0,041	—0,006	0,029	0,063	0,098	**0.132**	—0,041	0,049	—	—

BALKEN MET 3 GELIJKE VELDWIJDTEN

Last in punt of Hoogte	Ordinaten der invl. lijn voor M in Ton.Mtr bij P = 1 Ton — bij een snede in punt									Q in tonnen		Gelijkm. verdeelde - belasting. g moment		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	L_1	L_2	Totaal	Vak 1.	Vak 2.
1	**0,132**	0,097	0,062	0,027	—0,008	—0,043	—0,034	—0,025	—0,016	0,790	0,054	0,053	—	—
2	0,098	**0,196**	0,127	0,059	—0,010	—0,079	—0,063	—0,046	—0,030	0,588	0,099	**0,078**	—	—
3	0,067	0,133	**0,200**	0,100	0, —	**—0,100**	**—0,080**	**—0,058**	**—0,038**	0,400	0,125	0,075	—	—
4	0,039	0,078	0,117	**0,157**	0,029	—0,099	—0,078	—0,058	—0,037	0,235	0,124	0,044	—	—
5	0,017	0,033	0,050	0,066	**0,083**	—0,068	—0,054	—0,040	—0,025	0,099	0,085	—0,014	—	—
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1—	**—0,100**	—0,067	—0,050
7	—0,010	—0,019	—0,029	—0,038	—0,047	—0,057	**0,087**	0,064	0,042	—0,057	0,864	—0,031	—	—
8	**—0,013**	**—0,026**	**—0,040**	**—0,053**	**—0,066**	—0,079	0,036	**0,152**	0,100	—0,079	0,691	0,011	—	—
9	—0,0125	—0,025	—0,038	—0,050	—0,063	—0,075	0,008	0,092	**0,175**	—0,075	0,500	**0,025**	—	—
10	—0,009	—0,018	—0,027	—0,036	—0,045	—0,054	—0,003	0,049	0,100	—0,054	0,309	0,011	—	—
11	—0,004	—0,009	—0,013	—0,018	—0,022	—0,026	—0,004	0,019	0,042	—0,026	0,136	—0,031	—	—
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**—0,100**	—0,050	—0,067
13	0,003	0,006	0,009	0,011	0,014	0,017	0,003	—0,011	—0,025			—0,014	—	—
14	0,004	0,008	0,012	0,016	0,021	0,025	0,004	—0,017	—0,037			0,044	—	—
15	**0,004**	**0,008**	**0,0125**	**0,017**	**0,021**	**0,025**	**0,004**	**—0,017**	**—0,038**			0,075	—	—
16	0,003	0,007	0,010	0,013	0,017	0,020	0,003	—0,013	—0,030			**0,078**	—	—
17	0,002	0,004	0,005	0,007	0,009	0,011	0,002	—0,007	—0,016			0,053	—	—

In onderstaande tabel zijn nog voor den doorloopenden balk met gelijke veldafstanden en belast met een gelijkmatig verdeelde belasting de grootste steunpunts-reacties en -momenten aangegeven.

Tevens is het max. positieve veldmoment aangegeven met M op een afstand x vanaf het linker steunpunt.

GELIJKMATIG VERDEELDE BELASTING.

	AANTAL STEUNPUNTEN						Verm: Factor
	3	4	5	6	7	8	
M_3	0,1250	0,1000	0,1071	0,1053	0,1058	0,1057	$-\ g\,.\,L^2$
M_3	—	0,1000	0,0714	0,0790	0,0770	0,0775	,,
M_4	—	—	0,1071	0,0790	0,0865	0,0845	,,
M_5	—	—	—	0,1053	0,0770	0,0845	,,
M_6	—	—	—	—	0,1058	0,0775	,,
T_1	0,3750	0,4000	0,3930	0,3947	0,3942	0,3944	g . L
T_2	1,2500	1,1000	1,1428	1,1317	1,1346	1,1337	,,
T_3	0,3750	1,1000	0,9286	0,9736	0,9616	0,9650	,,
T_4	—	0,4000	1,1428	0,9736	1,0192	1,0070	,,
M	0,0703	0,0800	0,0772	0,0780	0,0777	0,0778	$g\,.\,L^2$
x	0,3750	0,4000	0,3930	0,3950	0,3940	0,3944	L

M = grootste (eind-) veldmoment.

---

§ 2) Invloedslijnen voor vakwerken.

a) Algemeen.

De randspanningen worden bepaald uit de invloedslijnen der momenten, terwijl de spanningen in de vulstaven te vinden zijn uit de invloedslijnen der dwarskrachten.

De op een bepaald knooppunt samenkomende rand- en vulstaven zijn met elkaar in evenwicht, zoodat het ook mogelijk is de randstaven te herleiden uit de reeds gevonden dwarskracht.

Bij een rijdende belasting als in figuur 218 kan men dus de A-lijn construeeren, waarna door ontbinden van Qm in de richting der staven s en u, de spanningen in de staven 1, 2, 3 en 4 kunnen worden bepaald.

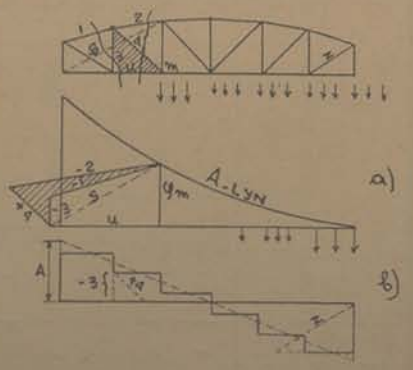


Fig. 218

In figuur a is +4 tevens de max. staafkracht voor staaf 4 terwijl — 3 de min. staafkracht voor staaf 3 is.

Is de belasting een gelijkmatig verdeelde en blijvend (eigengewicht), dan ontbindt men Qm uit de betreffende dwarskrachtenfiguur. (fig. 218b)

Het is echter eenvoudiger voor de diverse staven van een vakwerk een invloedslijn te teekenen.

Dit geschiedt voor de vulstaven, door een dwarskracht van 1 ton te ontbinden in de richting der diagonalen.

Voor den in fig. 219 geteekenden paralleldrager zijn de invloedslijnen geteekend voor D_1, D_2, enz.

Staafkrachten D_1, D_2 en D_3 zijn gelijk aan $P \cdot \eta_1$, terwijl D_4 tot en met D_7 gelijk zijn aan $P \cdot \eta_2$.

Om de invloedslijn voor een randstaaf te teekenen, cirkelt men evenals bij den rechten balk het in aanmerking komende momentenpunt om, zoodat onder A het moment $1 \cdot x$ ontstaat. (fig. 219).

Het moment onder het momentenpunt c krijgt dan de waarde $\frac{x.1.(L-x)}{L}$ wat gelijk is aan y_{max}.

De kracht in staaf u is nu $+\frac{Mc}{h} = \frac{y_{max}}{h}$.

Volgens het voorgaande is voor last P in punt d het moment in punt c gelijk aan $P \cdot y$, waardoor de hierdoor ontstane extra staafkracht u gelijk is aan $\frac{P \cdot y}{h}$.

Aangezien h en y beide in de schaal der teekening zijn aangegeven kan men volstaan met de verhouding der in de teekening opgemeten waarden.

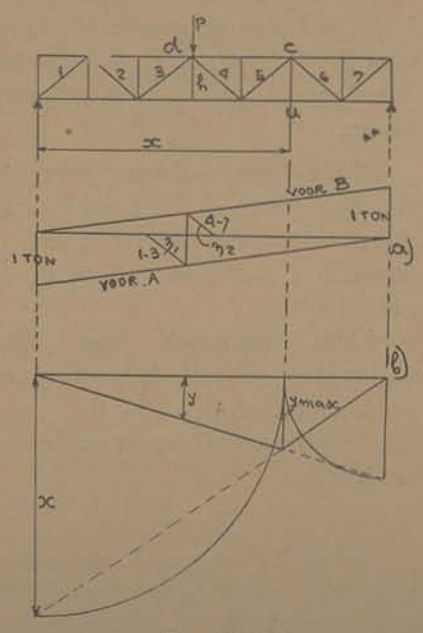


Fig. 219

Deelt men de om te cirkelen afstand x_m door de hoogte h, en zet men x/h als ordinaat onder A uit, dan geeft de betreffende hoogte y direct de grootte der staafkrachten u voor P = 1 aan, zoodat $u = P \cdot y$.

De in figuur 219a gegeven invloedslijn voor de diagonalen is alleen te gebruiken bij enkele lasten, zoodat beter een constructie is te nemen als aangegeven in fig. 220, welke bij iedere willekeurige belasting is toe te passen.

Doordat hierbij onder A een hoogte $\frac{1}{\cos . \alpha}$ is uitgezet, kunnen de ordinaten onder de lasten verticaal worden opgemeten.

De spanning in staaf 3 is dus de algebraïsche som uit $\Sigma P . \eta$.

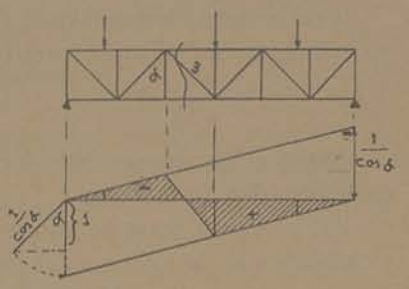


Fig. 220

b) Invloedslijnen voor randstaven.

Figuur 221 geeft de invloedslijn voor staaf 0 aan, de waarde x/h is hierbij de staafkracht voor 0 bij een kracht in A van 1 ton, zooals boven is aangegeven.

Om de invloedslijn voor staaf u te teekenen wordt onder A een ordinaat x/r uitgezet.

In plaats van de ordinaten onder A te berekenen uit x/h voor A = 1 ton, is het in de meeste gevallen eenvoudiger een cremona te teekenen voor A = 1 ton, of B = 1 ton waardoor eveneens deze ordinaten worden bepaald, welke voor A onder A en voor B onder B zijn uit te zetten.

Men kan volstaan met één cremona (voor A = 1 ton) omdat onder het momentenpunt m een ordinaat ligt, welke voor A en B = 1 evengroot is.

Het verlengde van A'-m' vormt dan vanzelf de ontbrekende ordinaat onder B.

Staafkracht 0 wordt nu bepaald uit $\Sigma P . \eta$.

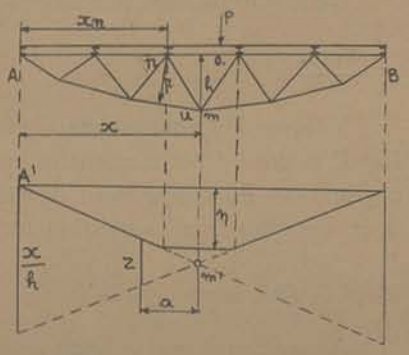


Fig. 221

Voor $\Sigma P . \eta$. moet de grootst mogelijke waarde gevonden worden, wat gemakkelijk is te bereiken indien men de rijdende lasten op afstand op een stukje transparant-papier uitzet; door probeeren op de invloedslijn is dan de max. waarde $\Sigma P . \eta$. te vinden.

In het algemeen wordt de max. staafkracht gevonden, door de grootste last boven de grootste ordinaat te plaatsen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Daar tusschen de knooppunten geen knik in de invloedslijn mag voorkomen, kan men voor de boven een veld vallende krachten volstaan met de hierbij behoorende resultante, welke dan vermenigvuldigd wordt met de hieronder vallende ordinaat.

Is de belasting een gelijkmatig verdeelde, dan zijn de randstaven het zwaarst belast bij volle belasting.

Men vermenigvuldigt de inhoud van het betreffende invloedsvlak met de belasting-eenheid, (zie hierover ook bl. 134).

Is in figuur 222, q = 3 ton/meter, en de hoogte der ordinaat onder A = 4,06 ton (d.i. de staafspanning S voor A = 1) dan is de werkelijke staafkracht S gelijk aan

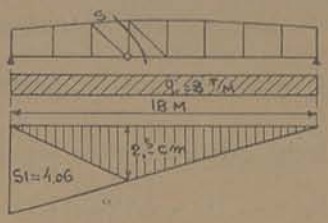


Fig. 222

$$3.\ \frac{18.\ 2{,}5}{2} = 67{,}5 \text{ ton.}$$

In figuur 223 is het verschil der invloedslijnen voor staaf 0 aangegeven bij een belasting aan de bovenzijde en idem aan de onderzijde.

Voor een rijdende last P is de gevaarlijke laststelling bij een belasting aan de onderzijde boven knooppunt 4 terwijl bij een belasting aan de bovenzijde knooppunt 5 de gevaarlijke laststelling geeft.

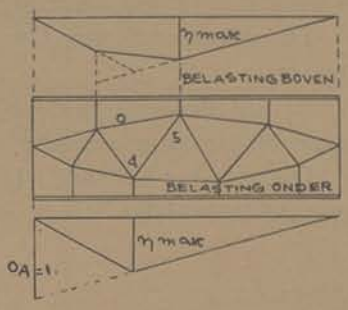


Fig. 223

---

c)

Invloedslijnen voor diagonalen.

Volgens de Ritter-methode is de spanning in staaf D_1 (fig. 224) voor A = 1 ton gelijk aan $\frac{l' \cdot x}{r}$, of voor B = 1 ton:

$$D_1 = -\frac{1.\ x_1}{r}.$$

Zet men deze waarden onder A' en boven B' uit, dan snijden de invloedslijnen bij verlenging elkaar onder punt i.

Staat nu een last P rechts van de gegeven doorsnede, dan gelden voor D de ordinaten der lijn $\frac{x}{r}$, staat P links, dan gelden voor D zooals in figuur 224 is aangegeven de ordinaten der lijn $\frac{x_1}{r}$.

Voor de overgang tusschen beide lijnen trekt men de verbindingslijn welke ligt onder de eindpunten der randstaaf aan de belastingzijde.

De uit de cremona voor A = 1 ton gevonden staafkracht D wordt, onverschillig of zij positief of negatief is onder de horizontale lijn A' uitgezet.

Daar de staafkracht D uit de cremona voor B = 1 ton in bovenstaand geval een ander voorteeken heeft zet men haar bij B' naar boven uit.

Het gedeelte A'-e krijgt hetzelfde voorteeken als $\frac{x_1}{r}$, terwijl het gedeelte e-B het teeken krijgt van $\frac{x}{r}$, dus van de staafkracht D uit A = 1 ton.

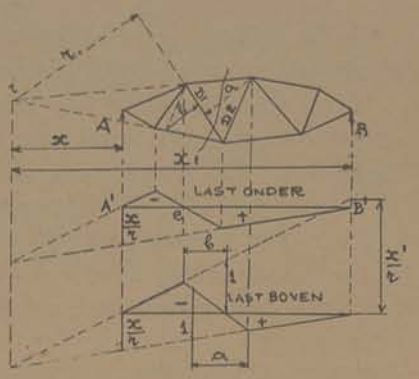


Fig. 224

Het kan voorkomen dat een diagonaal D voor A = 1 ton zoowel als voor B = 1 ton hetzelfde voorteeken heeft.

De staafspanningen Da en Db worden dan in dezelfde richting uitgezet.

In een dergelijk geval blijkt het snijpunt i der betreffende randstaven binnen de spanwijdte van het vakwerk te liggen. (fig. 227).

Ligt dus het snijpunt i buiten de spanwijdte van het vakwerk, dan krijgt de invloedslijn steeds een positief en een negatief gedeelte.

Voorbeeld.

Op den in figuur 224a geteekenden ligger rijden 2 loopkranen met raddrukken à 15,5 ton.

De kranen bevinden zich aan de onderzijde der ligger op een apart aangebrachte balk welke is opgehangen aan de 3 op den ligger aansluitende spanten, zooals in de betreffende doorsnede is aangegeven.

De op den ligger vallende raddruk door de excentrische aansluiting der kraanbalk wordt als volgt berekend.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

P_2 op het spant $= \frac{(0,4+0,6).15,5}{0,6}$ = 25,8 ton.

P_3 (opwaartsche reactie) = 25,8—15,5 = 10,3 ton.

Oplegreactie spant bij aansluiting aan ligger door de raddruk $P_2 = \frac{25,8 \,.\, 23,4}{24}$ = 25,2 ton.

De werkelijk op den ligger vallende raddruk is nu 25,2 — 10,3 = 14,9 ton.

Men teekent voor A = 1 ton een cremona en zet de gevonden staafspanningen als ordinaten voor de invloedslijnen der betreffende staven onder A uit.

Daar in de figuur voor 1 ton = 0,5 cm is gerekend, dienen de ordinaten der invloedslijnen met 2 te worden vermenigvuldigd.

Een en ander is in figuur 224a uitgewerkt, waarbij de volgende staafkrachten worden opgemeten.

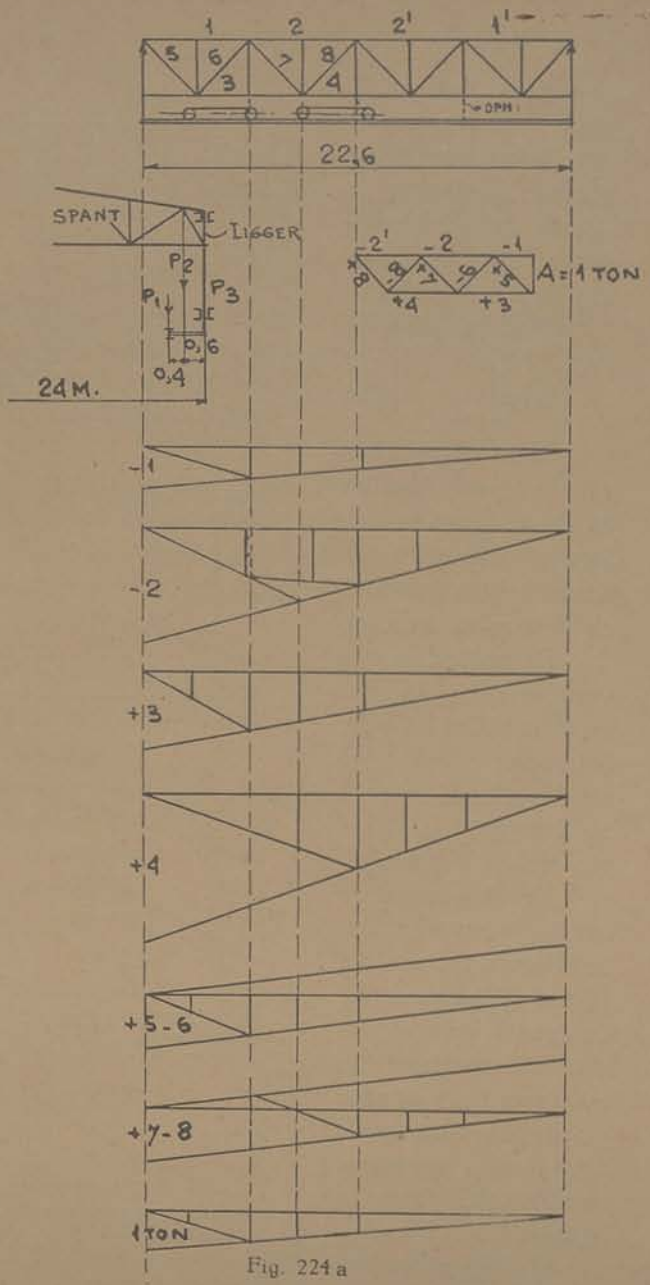


Fig. 224 a

Staaf 1. 14,9 . 2. (0,42 + 0,35 + 0,28 + 0,15) = — 35,8 ton.
Staaf 2. 14,9 . 2. (0,75 + 0,55 + 0,70 + 0,65) = — 79. ton.
Staaf 3. 14,9 . 2. (0,76 + 0,67 + 0,50 + 0,37) = + 68,5 ton.
Staaf 4. 14,9 . 2. (1,00 + 0,70 + 0,75 + 0,45) = + 89. ton.
Staaf 5/6. 14,9 . 2. (0,53 + 0,47 + 0,36 + 0,27) = ± 48,5 ton.
Staaf 7/8. 14,9 . 2 (0,36 + 0,28 + 0,16) = ± 24. ton.

Max. reactie A = 14,9. 2. (0,17 + 0,38 + 0,32 + 0,28) = 34,40 ton.

Voorbeeld.

Voor den in figuur 224b geteekenden ligger met bewegende belasting à 500 kg, per strekkende meter zijn de staafkrachten te bepalen.

Overspanning L = 12 Mtr.

Schaal = 1-200.

Men begint met een cremona voor A en B = 1 ton te teekenen, waarvan de staafkrachten onder A en B worden uitgezet.

De randen en ook verticaal 7 zijn het zwaarst belast bij volle belasting daar de staafkrachten voor A en B hierbij het zelfde voorteeken hebben.

De diagonalen en overige verticalen zijn te belasten tot aan het lastscheidingspunt (nulpunt) en wel één maal van rechts of één maal van links al naar gelang de max. positieve of negatieve staafkrachten zijn te bepalen.

De opgemeten oppervlakten der invloedslijnen worden vermenigvuldigd met ‚g' en de schaal der teekening.

De max. staafkrachten bedragen nu.

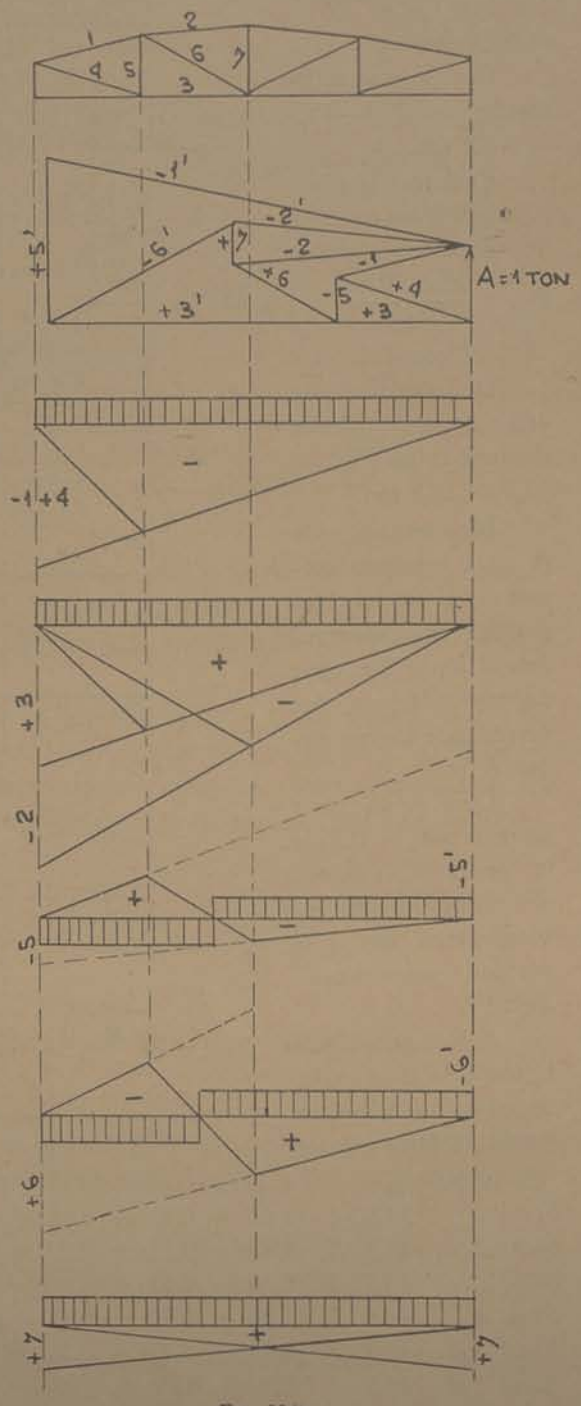


Fig. 224b

Staaf 1-4	6 . 1,45 . 0,5 . 2 . 0,5	= ± 4,35 ton
Staaf 2	6 . 1,70 . 0,5 . 2 . 0,5	= — 5,10 ,,
Staaf 3	6 . 1,42 . 0,5 . 2 . 0,5	= + 4,25 ,,
Staaf 5	3,6 . 0,3 . 0,5 . 2 . 0,5	= — 0,54 ,,
Staaf 5	2,4 . 0,57 . 0,5 . 2 . 0,5	= + 1,56 ,,
Staaf 6	3,8 . 0,82 . 0,5 . 2 . 0,5	= + 1,56 ,,
Staaf 6	2,2 . 0,71 . 0,5 . 2 . 0,5	= — 0,78 ,,
Staaf 7	6 . 0,28 . 0,5 . 2 . 0,5	= + 0,84 ,,

(een eenvoudiger methode om de staafkrachten voor een bewegende gelijkmatig verdeelde belasting te bepalen is nog aangegeven op bl. 172).

---

d)

Invloedslijnen voor verticalen.

Behooren de verticalen tot de hoofdconstructie, waaruit zij niet verwijderd kunnen worden, zonder dat het verband der constructie verbroken wordt, dan zijn de invloedslijnen op dezelfde wijze te bepalen als bij de diagonalen, dus met behulp van een cremona voor A of B = 1 ton.

Voorbeeld.

In fig. 225 zijn de invloedslijnen geteekend voor de verticalen V_1, V_2 enz. De ordinaten V_{1A} . V_{2A} zijn ontleend aan de cremona.

Rijdt de belasting over den onderrand, dan gelden als overgangspunten van de invloedslijnen, de onder de knooppunten der onderrand gelegen punten van de invloedslijnen.

Men brengt een snede aan over 3 staven, waaronder de betreffende verticaal, hierdoor wordt de bedoelde randstaaf aangegeven.

Voor lasten op den bovenrand vallen deze overganspunten onder de door de snede aangegeven bovenrand.

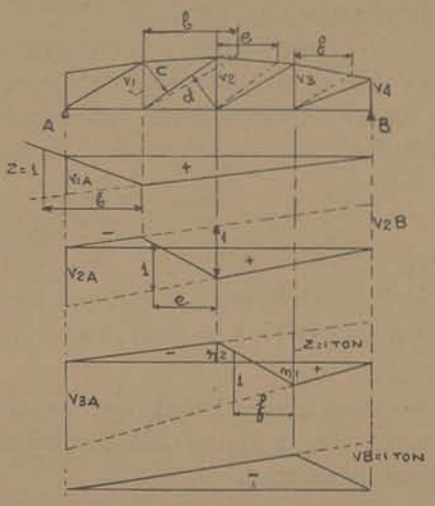


Fig. 225

Daar de staafkrachten zoowel positief als negatief kunnen zijn, houde men rekening met:

$$+ V_{max.} = P \,.\, \Sigma + \eta_{max.}$$
$$- V_{max.} = P \,.\, \Sigma - \eta_{max.}$$

Kunnen de verticalen als hulpstaven worden beschouwd, dan worden de invloedslijnen voor een belasting aan de onderzijde als aangegeven in figuur 226a. (staaf V_1)

*) Zie voor de aangegeven afstanden a, b, enz. onder f.)

Staaf V_2 is een onderdeel van de hoofdconstructie, de invloedslijn wordt daarom ontleend aan de cremona voor A = 1 ton.

Last P heeft echter, indien deze zich over den bovenrand beweegt, een extra invloed op V_2 en wel over het gedeelte 1-1'.

De max. invloed hierbij op V_2 is boven punt 2. waarbij de extra staafkracht = — P.

De constructie der invloedslijn is dus als in figuur b, waarbij aan de oorspronkelijke invloedslijn boven punt 2' de grootte —1 is toegevoegd, verloopend tot 0 onder de punten 1 en 1'.

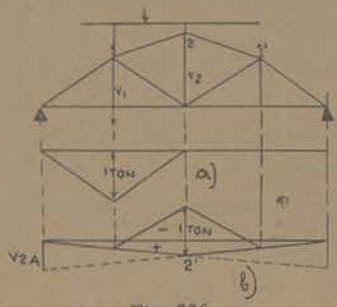


Fig. 226

De liggervorm in fig. 227 geeft voor staaf D een drukspanning zoowel voor A = 1 als voor B = 1 ton.

Beide staafkrachten worden dus naar één richting uitgezet.

Voor een last op den onderrand worden voor de overgangslijn de punten a' en b' onder de betreffende onderrand overgehaald.

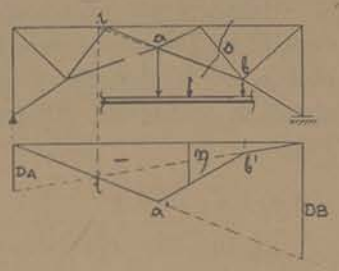


Fig. 227

---

e)

Invloedslijnen voor vakwerken met tusschenstaven.

Voor een vakwerk met tusschenstaven zijn in figuur 228 de invloedslijnen geteekend.

Daar in dit voorbeeld alle diagonalen een helling hebben van 45° is het niet noodig een cremona voor A = 1 ton te teekenen.

Men bepaalt eerst de invloedslijnen voor het hoofdsysteem, op de boven aangegeven wijze.

Voor staaf 6 geldt het niet geharceerde gedeelte, terwijl voor staaf 5 dit gedeelte aan 6 moet worden toegevoegd.

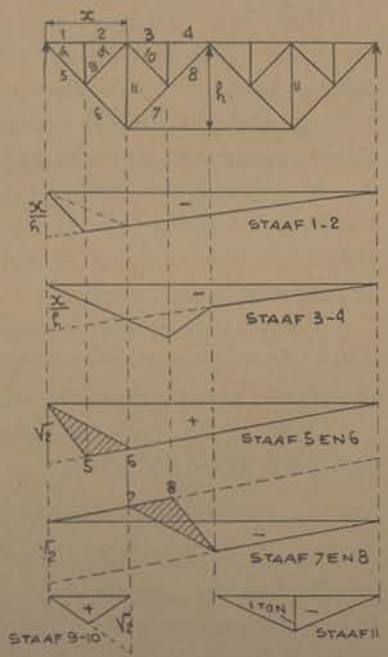


Fig. 228

Evenzoo zijn voor de staven 7 en 8 de betreffende invloedslijnen geteekend.

Figuur 229 geeft de invloedslijnen voor een driedeelig tusschenverband.

De constructie der invloedslijnen is verder geheel gelijk als boven.

Staat dus een last in veld 1, dan geldt voor D_2 de invloedslijn van het hoofdsysteem.

Staat deze last rechts van V_2, dan geldt eveneens deze invloedslijn.

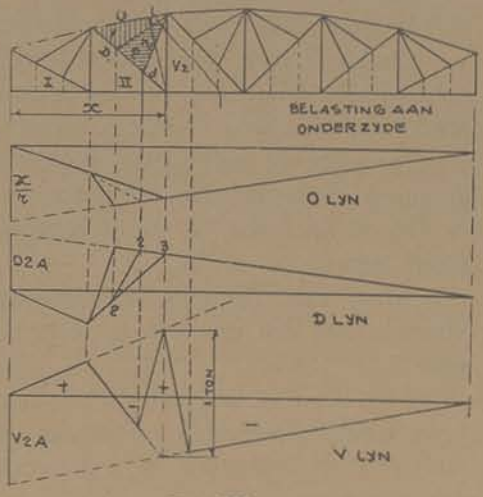


Fig. 229

---

f)

Bijzondere methoden.

Zet men in figuur 230 afstand a = h uit vanaf het snijpunt der invloedslijnen, dan volgt uit de verhouding van x tot a:

$$z : \frac{x}{h} = a : x \text{ waaruit}$$

$$z \,.\, x = \frac{x \,.\, a}{h} \text{ of } z = \frac{a}{h} = 1.$$

Hierbij is $\frac{x}{h}$ de staafkracht in staaf 0 voor A = 1.

Het bovenstaande geldt eveneens voor de invloedslijnen der onderrand, waarbij h vervangen wordt door V, zoodat

$$\frac{x}{h} = \frac{x}{V}.$$

Ook bij vulstaven is deze vergelijking toe te passen, men handelt dan zooals in fig. 224 en 225 is aangegeven.

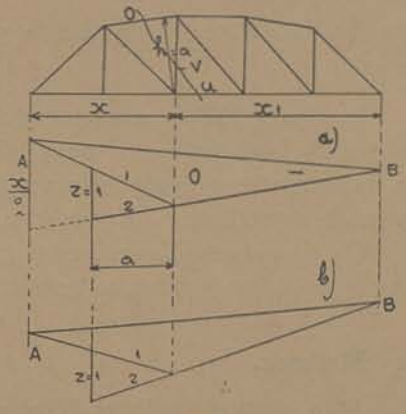


Fig. 230

De gestippelde diagonalen zijn hierbij evenwijdig te trekken aan de voorlaatste getrokken diagonalen.

Bij toepassing van deze methode is het niet noodig een cremona te teekenen, doch kan men volstaan met alleen 1 ton verticaal uit te zetten op afstand a, b, enz. vanaf het betreffende knooppunt.

Door verlenging der beide beenen 1 en 2 (fig. 230b) tot onder de reacties wordt dan de gezochte invloedslijn bepaald.

Sluitlijn A-B zal hierbij een willekeurige stand aannemen, wat echter geen bezwaar is bij het verticaal opmeten der ordinaten.

Wat betreft fig. 225 zij nog opgemerkt dat bij een belasting aan de bovenzijde de gestippelde diagonalen vanuit de bovenrand worden getrokken terwijl bij een belasting aan de onderzijde deze diagonalen vanuit de knooppunten der onderrand zijn te trekken.

In figuur 231 is de verticaalkracht links van staaf D = 1 ton.

Ontbindt men deze kracht in de richting der diagonaal en der belaste rand, dan kan men eveneens op eenvoudige wijze de invloedslijn voor den diagonaal teekenen, door de ontbondene Do of Du voor Q = 1, verticaal uit te zetten.

Men kan dus hierbij eveneens volstaan met een cremona te teekenen voor A = 1 ton.

Het bepalen van het snijpunt der betreffende randstaven zooals in figuur 224 is aangegeven, is in dit geval dan niet meer noodig.

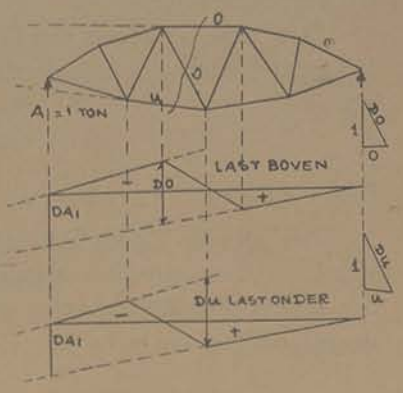


Fig. 231

---

g) Bijzondere methoden voor een bewegende belasting.

In figuur 171 is aangetoond, dat voor een rijdende last P op een indirect belaste balk een punt in ieder veld gevonden wordt, waarbij de dwarskracht overgaat van positief in negatief, zoodat bij P boven dit punt, de dwarskracht Q voor het geheele veld = 0.

Op de volgende manieren is nog dit nulpunt N voor vakwerken met niet evenwijdige randen te bepalen.

1e Methode.

Men vindt dit nulpunt N voor een diagonaal door in het betreffende veld de door de snede getroffen randstaaf tegenover de belastingzijde te verlengen tot boven de oplegreacties A en B en deze punten te verbinden met de einden 1 en 2 der belaste randstaaf. (fig. 232).

Het snijpunt N der verlengingen dezer lijnen geeft voor P de plaats waarbij de spanning in staaf D = 0.

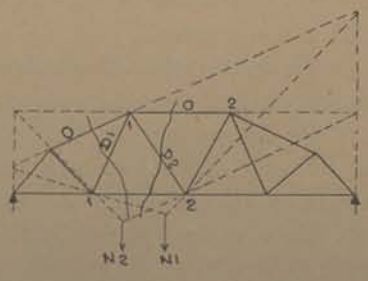


Fig. 232

Om bij een gelijkmatig verdeelde belasting de max. dwarskracht voor een diagonaal D te vinden moet dus deze belasting tot aan het bijbehoorende nulpunt worden geplaatst.

Voor den paraboolligger in fig. 233 zijn de invloedslijnen der staafkrachten D en V met behulp dezer methode aangegeven voor een rijdende, gelijkmatig verdeelde belasting van p kg/Mtr.

Aan de cremona voor A = 1 ton zijn de staafkrachten O_A en U_A ontleend, evenals de staafkrachten D_A en V_A.

Door voor de vulstaven de N-punten te bepalen is het niet noodig een cremona voor B = 1 te teekenen of het snijpunt i der randen te bepalen daar de keerpunten der invloedslijnen onder de N-punten liggen, waardoor het snijpunt der overgangslijn met de D_B -lijn wordt bepaald.

De grootste staafkracht D vindt men nu uit ± p . F.

Hierbij is F de oppervlakte van het momentenvlak onder of boven de sluitlijn.

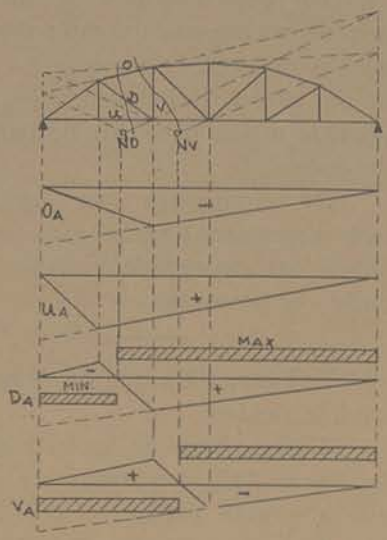


Fig. 233

Ligt de belasting aan de bovenzijde van den ligger, (fig. 234) dan zijn de nulpunten der invloedslijnen voor het berekenen der max. en min. staafkrachten eveneens aan de bovenzijde te bepalen.

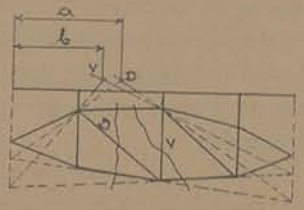


Fig. 234

2e Methode.

Verlengt men de betreffende bovenrand naar links tot boven A, en de onderrand naar rechts (boven B) en trekt men de diagonalen 1-2 en 3-4, dan geeft het snijpunt dezer diagonalen het punt waaronder de belasting van voorteeken verandert. (fig. 235b).

Loopt hierbij diagonaal D in den in de figuur gestippelden stand, dan dient toch 3-4 getrokken te worden als aangegeven in de figuur.

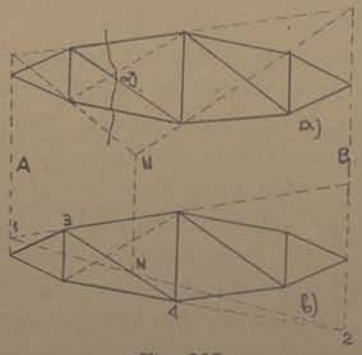


Fig. 235

Beide hulpdiagonalen moeten dus steeds in de zelfde richting hellend zijn.

In figuur 235 heeft het boven of onder liggen der belasting geen invloed op de staafkrachten in de diagonalen, wel op die der verticalen.

Tot goed begrip is in figuur 236 nog de constructie der nulpunten volgens deze methode aangegeven en wel in fig. a met de belasting aan de bovenzijde in fig. b met de belasting aan de onderzijde.

De eindpunten der gestippelde hulp-diagonalen liggen steeds loodrecht boven het knooppunt van de belaste onder- of bovenrand.

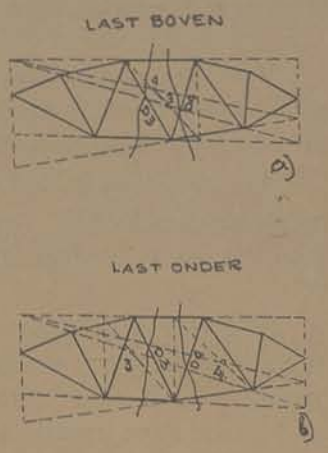


Fig. 236

In figuur 237a zijn de nulpunten bepaald voor een ligger met evenwijdige randen.

Teekent men de invloedslijnen der diagonalen zooals aangegeven in figuur 220, dan zullen de nulpunten van beide constructies onder elkaar moeten vallen.

Bij nadere beschouwing blijken beide figuren dezelfde constructie te bezitten.

Immers zijn in beide gevallen de verbindingen 1-2 niets anders dan de boven aangegeven hulpdiagonalen.

De max. dwarskracht voor een bewegende gelijkmatig verdeelde belasting kan men ook zonder invloedslijnen bepalen door voor de nulpunten de bijbehorende parabool-ordinaten volgens figuur 172 te teekenen.

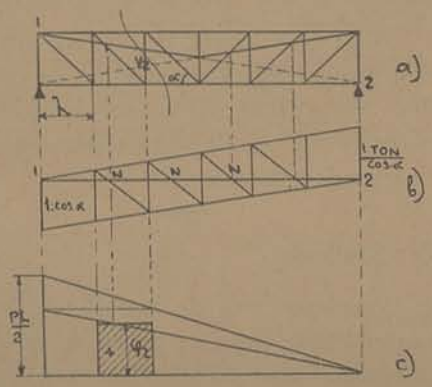


Fig. 237

Men krijgt dan voor b.v. het 2e veld een constructie als in figuur 237c. Bij bovenliggende belasting is $Q_2 = V_2$.

Bij onderliggende belasting ontstaat V_{max}. wanneer de belasting tot aan het nulpunt van het 3e veld wordt geplaatst.

Voor de diagonaalspanningen heeft in bovenstaande ligger het boven- of onder liggen der belasting geen invloed.

Men kan deze diagonaalspanningen ook als volgt bepalen.

Zet (bij gelijke veldwijdten) onder de eerste verticaal de waarde $\frac{p}{2}(L-\lambda)$ uit (fig. 238) waarna de paraboolpunten e', f' enz. onder de verticalen worden bepaald.

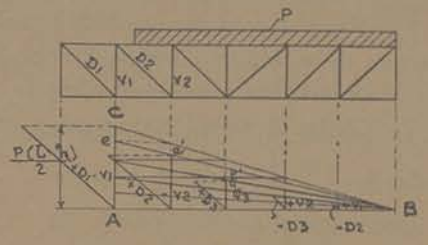


Fig. 238

De ordinaten onder deze verticalen zijn de bij het betreffende veld behoorende max. dwarskrachten voor de bewegende gelijkmatig verdeelde belasting.

(Het bewijs dat de hoogten dezer ordinaten gelijk zijn aan die onder de nulpunten der bovenstaande methode is op eenvoudige wijze uit de gelijkvormigheid der beide parabolen te leveren).

Ontbindt men de op deze manier gevonden dwarskracht in de richting van D, dan vindt men de max. in D optredende staafkracht.

De onder het rechtereindpunt van D opgemeten ordinaat Q geldt dus voor de van rechts komende gelijkmatig verdeelde belasting welke tot aan het nulpunt is geplaatst.

Een van links komende last geeft in D een drukspanning, welke max. gelijk is aan — D_2. (Zie D_2 in rechterhelft)

De grootste trekspanning in D_1 treedt op bij volle belasting, terwijl min. $D_1 = 0$.

In figuur 239 is voor eenige velden de dwarskracht op de boven aangegeven wijzen bepaald waarbij de constructie der invloedslijn nog verder vereenvoudigd is.

Ontbindt men Q onder het nulpunt in de richting der diagonaal, en trekt men de in ieder veld aangegeven gestippelde hulpdiagonalen, dan blijken deze in de figuren a en b evenwijdig te loopen.

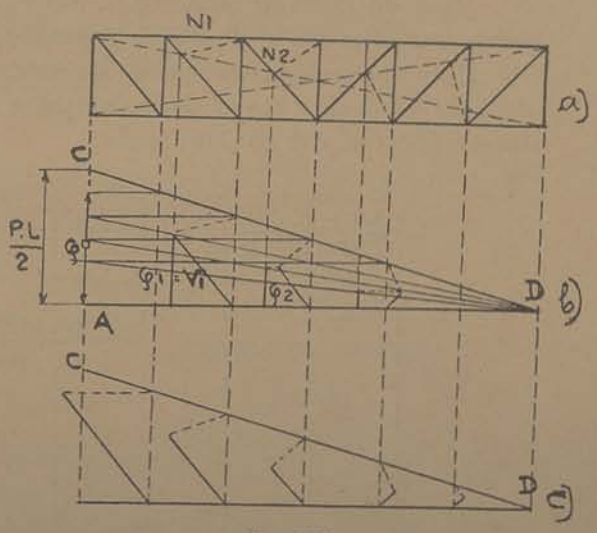


Fig. 239

Hieruit volgt, dat men kan volstaan met alleen de lijn C-D te trekken en de bewerking uit te voeren als in figuur c is aangegeven.

Deze methode is dus wel de meest eenvoudige en is ook toe passen bij liggers met niet evenwijdige randen.

Voorbeeld.

Voor den in figuur 240 geteekenden brugligger zijn op de bekende wijze de nulpunten bepaald voor de mobiele belasting p Kg/Mtr.

Naar deze punten worden de gestippelde hulpdiagonalen getrokken.

Onder A wordt max. reactie $A = \frac{p \cdot L}{2}$ uitgezet, waarna door ontbinden der onder de knooppunten vallende dwarskrachten in de richting der betreffende diagonalen en gestippelde hulpdiagonalen de max. en min. staafkrachten in de diagonalen worden gevonden.

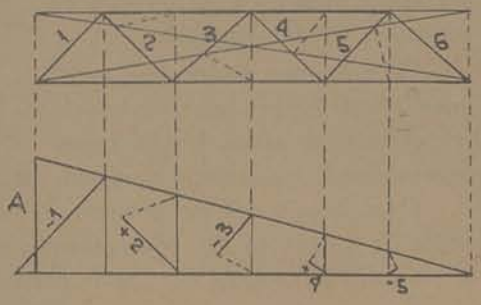


Fig. 240

Voorbeeld.

De ligger van de voetbrug in figuur 241 heeft een rijdende belasting van 400 Kg/Mtr.

$A = 0{,}5 \cdot p \cdot L.$

Voor de blijvende belasting bepaalt men de staafkrachten uit de cremona of uit de dwarskrachtenfiguur, evenzoo zijn de grootste randspanningen uit de cremona der volle belasting te bepalen.

Voor de rijdende belasting à 400 kg/Mtr. worden de hulpdiagonalen getrokken als in de figuur is aangegeven.

Deze dun geteekende staven zijn hierbij de hulpdiagonalen tusschen de links en rechts boven de opleggingen verlengde betreffende randstaven (zie fig. 235 en 236).

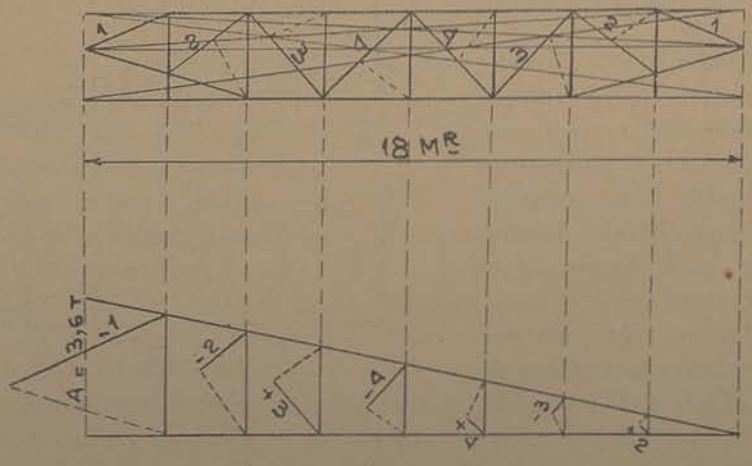


Fig. 241

Men vindt voor:

staaf 1 = — 4,8 ton.	staaf 3 = + 2,05 of — 0,5 ton.
„ 2 = — 1,5 of + 0,4 „	„ 4 = — 1,65 of + 0,70 „

§ 3) Invloedslijnen voor vakwerken met overstekende einden.

*1) Randstaven. *)*

Evenals bij de voorgaande constructies bepaalt men de invloedslijnen der randstaven met behulp van een cremona voor A of B = 1 ton, of men bepaalt de uit te zetten ordinaten onder A of B uit de momenten-vergelijking voor het tegenover de te bepalen randstaaf gelegen punt.

Voor staaf 0, in fig. 244 wordt hiernaar $0_A = \frac{x \cdot 1}{r}$.

Staat een last boven het overkragende gedeelte, dan wisselt de invloedslijn voor 0 van voorteeken.

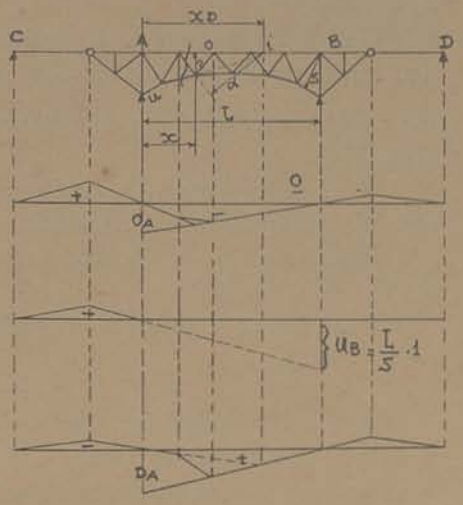


Fig. 244

Voor staaf u in fig. 244 is eveneens de invloedslijn geteekend: staat een belasting hierbij op het gedeelte A-D, dan is de invloed op u = nul.

De invloedslijn voor de randen van het overstekende gedeelte bepaalt men als volgt (fig. 245.)

Reken G = 1 ton en teeken voor het overkragende gedeelte de cremona.

Voor staaf 0 vindt men

$O_G = \frac{x \cdot 1}{r}$.

Punt c is het eindpunt der invloedslijn voor 0, daar bij een last in het 1e veld vanaf A, staaf 0 spanningloos wordt.

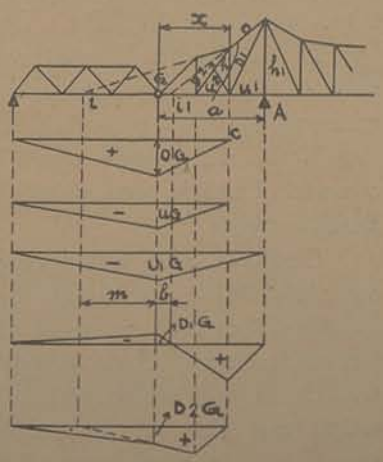


Fig. 245

*) Voor de invloedslijnen der reacties zie gedeelte c van § 1.

Voor staaf u is om de zelfde reden als momentenpunt het beginpunt van staaf 0, waarbij $u_G = \frac{x \cdot 1}{h}$.

Evenzoo vindt men voor staaf u_1: $u_{1G} = \frac{a}{h_1} \cdot 1$.

De verdere constructie der invloedslijnen is zonder meer uit de figuur te volgen.

---

2) Vulstaven.

Om de invloedslijnen der vulstaven te bepalen past men evenals bij den ligger op 2 steunpunten een cremona of een momentenvergelijking toe t.o.v. het nulpunt der randstaven (punt i), waardoor $D_A = \frac{x_D \cdot 1}{d}$ (fig. 244).

Voor de vulstaven D_1 en D_2 van het overstek zijn in fig. 245 eveneens de invloedslijnen geteekend.

Hierbij is D_{1G} het product b . 1 gedeeld door de loodrechte afstand van i_1 tot D_1.

D_{2G} is het product m . 1, gedeeld door de loodrechte afstand van punt i tot D_2.

Ligt het snijpunt der randstaven ongunstig (buiten de teekening), dan kan men zooals in figuur 246 is aangegeven, een kracht van één ton direct ontbinden in de richting der diagonaal en der betreffende onder- of bovenrand.

Het bepalen van het snijpunt i is dan niet meer noodig.

Voor een rijdende last op den bovenrand ontbindt men dus 1 ton in richting 0 en Do.

D_A is hierbij de staafkracht voor A = 1 ton, bepaald volgens cremona.

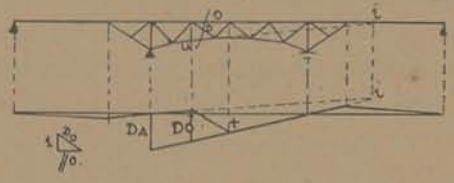


Fig. 246

Voor de staven van het overstek handelt men geheel op dezelfde wijze.

Ontbindt men in doorsnede a-a (fig. 247) een kracht 1 in richting D en 0 en zet men onder het eindpunt van D de gevonden waarde D' uit, welke verbonden wordt met D_G uit de cremona voor G is 1 ton, dan kan eventueel, door verlenging der verbindingslijn punt i worden bepaald.

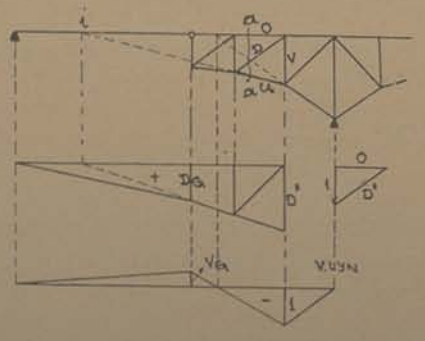


Fig. 247

3)

Invloedslijnen voor een verticaal boven de steunpunten.

Zijn de hellingshoeken der onderranden α en α_1 (figuur 248) dan is:

$$U \,.\, \cos \,.\, \alpha = U_1 \,.\, \cos \,.\, \alpha_1 = \frac{Mc}{h}.$$

Nu is voor staaf V:

$$V = -C - \frac{Mc}{h} (tg \,.\, \alpha + tg \,.\, \alpha_1).$$

Men teekent dus de C-lijn en trekt hiervan het Mc-vlak af, waarvoor

$$a_1 = U \,.\, \sin \alpha + U_1 \,.\, \sin \alpha_1 =$$

$$\frac{a}{h} (tg \,.\, \alpha + tg \,.\, \alpha_1) \;.\;.\;.\;.\;. \;\; 119)$$

Het geharceerde gedeelte is nu het invloedsvlak voor staaf V.

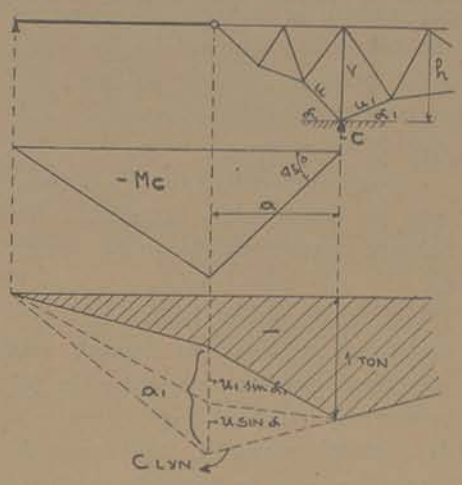


Fig. 248

§ 4) Invloedslijnen voor driescharnier-vakwerken.

a) Verticale lasten.

De invloedslijnen der horizontale en verticale voetreacties zijn geheel gelijk aan die der volwandige driescharnierbogen, zoodat voor het bepalen dezer lijnen verwezen wordt naar § 1 van dit hoofdstuk.

De invloedslijnen voor de staven worden als volgt bepaald.

Men teekent evenals bij de voorgaande constructies een cremona voor A = 1 ton en een voor C = 1 ton. (A en C verticaal).

De staafkrachten hiervoor worden onder A en C als ordinaten uitgezet.

Men kan eventueel deze staafspanningen berekenen volgens Ritter door een snede over 3 staven aan te brengen; voor het snijpunt van 2 van de 3 staven wordt dan het moment van de 3e staaf bepaald, waaruit bij deeling door de loodrechte afstand de 3e staafkracht gevonden wordt.

Voor C = 1 ton ontstaat bij A een reactie van 0,5 ton, (bij gelijke helften) en een horizontale reactie $\frac{1 \,.\, L}{4 \,.\, f}$ ton, zoodat men eenvoudiger doet alleen voor deze horizontale reactie een cremona te teekenen. Bij de hierdoor veroorzaakte staafkrachten wordt dan de halve waarde der bijbehoorende staafkracht voor A = 1 ton (verticaal) bijgeteld.

Voorbeeld.

In figuur 249 is 0_A de staafkracht in staaf 0 voor A = 1 ton, terwijl 0c die voor C = 1 ton is.

Verlengt men de door het momentenpunt m gaande lijn A-m tot aan het verlengde van lijn B-C, dan geeft snijpunt e_1 de plaats aan waaronder het bijbehoorende nulpunt N is gelegen.

Voor den onderrand U is eveneens de invloedslijn geteekend, het nulpunt dezer invloedslijn ligt onder e_2.

Om de invloedslijn voor een diagonaal te teekenen bepaalt men eerst het snijpunt i der door de bijbehoorende snede a-a getroffen randen, hierna verbindt men i met A, waardoor e is te bepalen; onder e ligt weer het bijbehoorende nulpunt waarbij de invloedslijn van positief in negatief overgaat.

D_A is de staafkracht in D voor A = 1 ton, terwijl DC voor C = 1 ton geldt.

Komt de belasting op de bovenrand voor, dan worden de eindpunten van staaf 0 als punten der sluitlijn overgehaald.

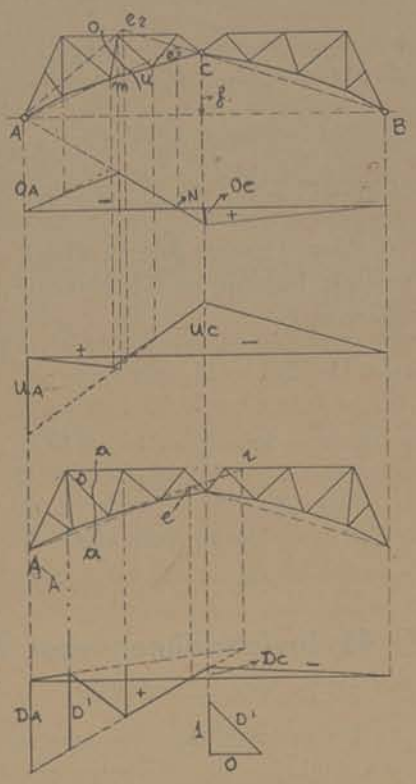


Fig. 249

Ligt punt i zoover van C verwijderd dat e rechts van C komt te liggen, dan is de vorm der invloedslijn als in figuur 250.

Figuur 251 geeft eenige invloedslijnen voor een driescharnierkap met verticalen. De constructie is verder geheel als boven aangegeven.

Is een belasting gelijkmatig verdeeld (q . kg per meter) dan is de onder deze belasting vallende oppervlakte van het invloedsvlak te vermenigvuldigen met q en met de schaal der teekening. (zie voorbeeld bl. 165).

In het algemeen zal een blijvende belasting g. kg. per Mr. en een bewegende gelijkmatig verdeelde belasting p . kg per Mr. aanwezig zijn.

Voor de max. en min. staafspanningen is dan met de volle belasting $q = g + p$ te rekenen over het positieve gedeelte en met g over het negatieve gedeelte of omgekeerd.

Met verwijzing naar hetgeen bij de invloedslijnen voor vakwerken is vermeld, kan men eventueel volstaan met alleen een cremona voor A = 1 ton te teekenen; na verbinding der ordinaat S_A met het nulpunt onder e wordt vanzelf de grootte S_C gepasseerd.

Het is zelfs mogelijk bij toepassing der waarde z = 1 ton (zie omschrijving op bl. 171) de cremona voor A = 1 ton ook te laten vervallen indien men de invloedslijnen teekent als in figuur 252b is aangegeven.

Ontbindt men 1 ton in richting D en O' dan wordt a gelijk aan de veldafstand λ (fig. a).

Aan te bevelen is deze methode echter niet, daar de figuur hierdoor niet zuiver is te teekenen.

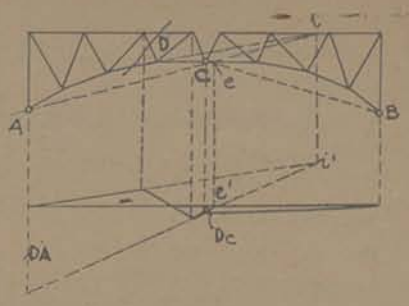


Fig. 250

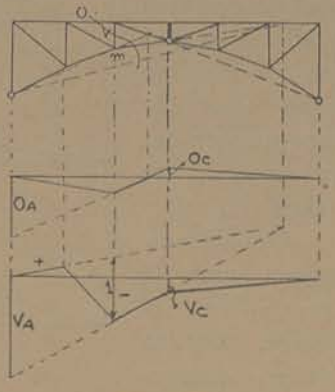


Fig. 251

Voorbeeld.

Voor de brugconstructie in fig. 253 zijn de staafkrachten door middel van invloedslijnen te bepalen.

L = 24 Meter. λ = 3 Mtr. f = 3,3 Mtr.
g per meter ligger = 0,3 ton.
p „ „ „ = 0,4 „

Men teekent een cremona voor A = 1 ton waarvan de gevonden staafspanningen in onderstaande tabel zijn aangegeven.

Hierna worden de staafkrachten voor C = 1 ton bepaald uit:

$$S_C = 0,5 \cdot S_A + S_H .$$

Voor $H = \frac{1 \cdot L}{4 \cdot f} = 1,82$ ton

is eveneens een cremona te teekenen.

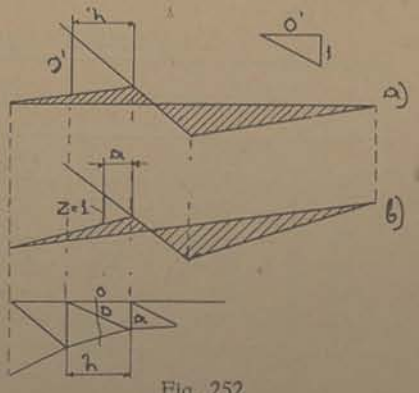


Fig. 252

PERPUSTAKAAN NASIONAL

De lastscheidingspunten voor den bovenrand worden gevonden door de verbindingslijnen uit A door de knooppunten der onderrand te trekken, terwijl voor den onderrand deze punten worden gevonden door deze lijnen door de knooppunten der bovenrand te treken (fig. a).

Om de nulpunten voor de diagonalen te vinden, worden sneden aangebracht als a-a, terwijl voor de verticalen, sneden als a-b zijn aan te brengen. (fig. h).

De getroffen randen worden hierbij verlengd tot zij elkaar in i snijden.

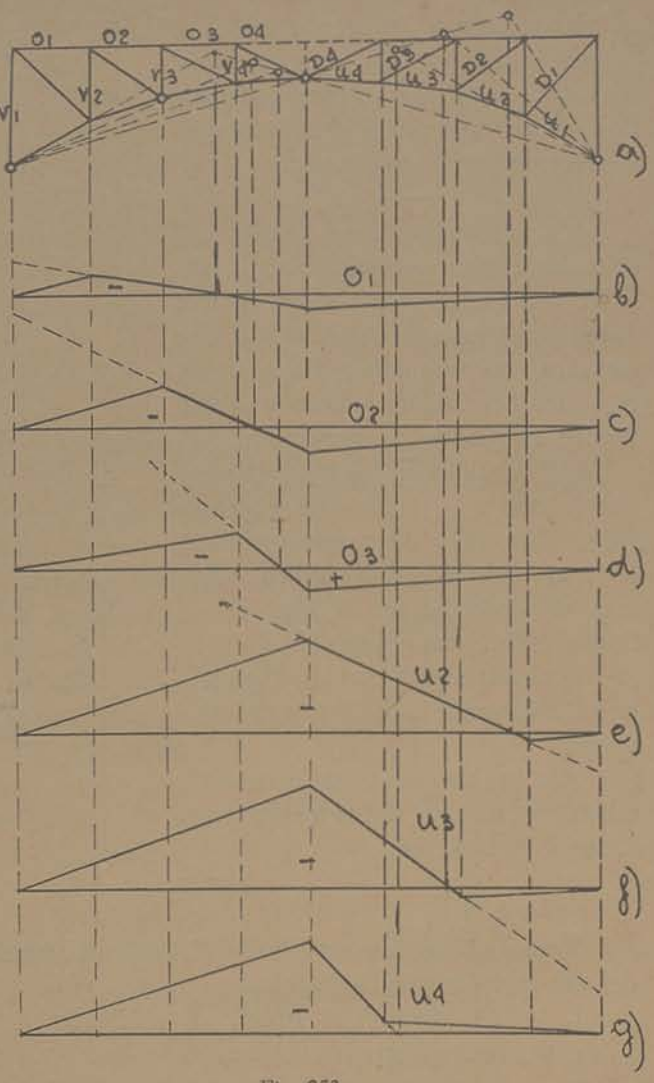


Fig. 253

STAAFKRACHTEN voor A en C = 1 ton.

Staaf	A = 1 ton	$\frac{A}{2}$	$S_H = \frac{1.L}{4.f}$	Staaf	A = 1 ton	$\frac{A}{2}$	S_H
O_1	— 1,05	— 0,57	+ 1,—	D_1	+ 1,50	+ 0,75	— 1,40
O_2	— 3,10	— 1,55	+ 2,30	D_2	+ 2,45	+ 1,23	— 1,55
O_3	— 6,30	— 3,15	+ 3,70	D_3	+ 3,70	+ 1,85	— 1,60
O_4	— 10,—	— 5,—	+ 4,75	D_4	+ 3,90	+ 1,95	— 1,—
U_1	0	0	— 2,05	V_1	— 1,00	— 0,5	+ 0,90
U_2	+ 1,10	+ 0,55	— 3,00	V_2	— 1,35	— 0,68	+ 0,85
U_3	+ 3,00	+ 1,50	— 4,20	V_3	— 1,65	— 0,83	+ 0,75
U_4	+ 6,35	+ 3,18	— 5,60	V_4	— 1,50	— 0,75	+ 0,40

enz.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Het snijpunt i-A en B-C levert het nulpunt e voor de betreffende vulstaaf.

Het verloop der invloedslijnen is verder zonder meer uit de figuren te volgen.

De staafkrachten worden als volgt bepaald:

1)

voor de randen.

Men houde rekening met een gedeeltelijke belasting door q (totale belasting inclusief eigengewicht) en een belasting alleen door het eigengewicht op het gedeelte waarover de invloedslijn van voorteeken verandert.

Voor staaf U_3 vindt men dus Umax. uit $q . F_1 - g . F_2$, terwijl min. U_3 gevonden wordt uit $g . F_1 - q . F_2$.

Hierbij is F_1 de oppervlakte van het positieve gedeelte, terwijl F_2 de oppervlakte van het negatieve gedeelte van het invloedsvlak is.

$q = p + g$.

Voor staaf U_3 wordt dus (in de figuur gemeten).

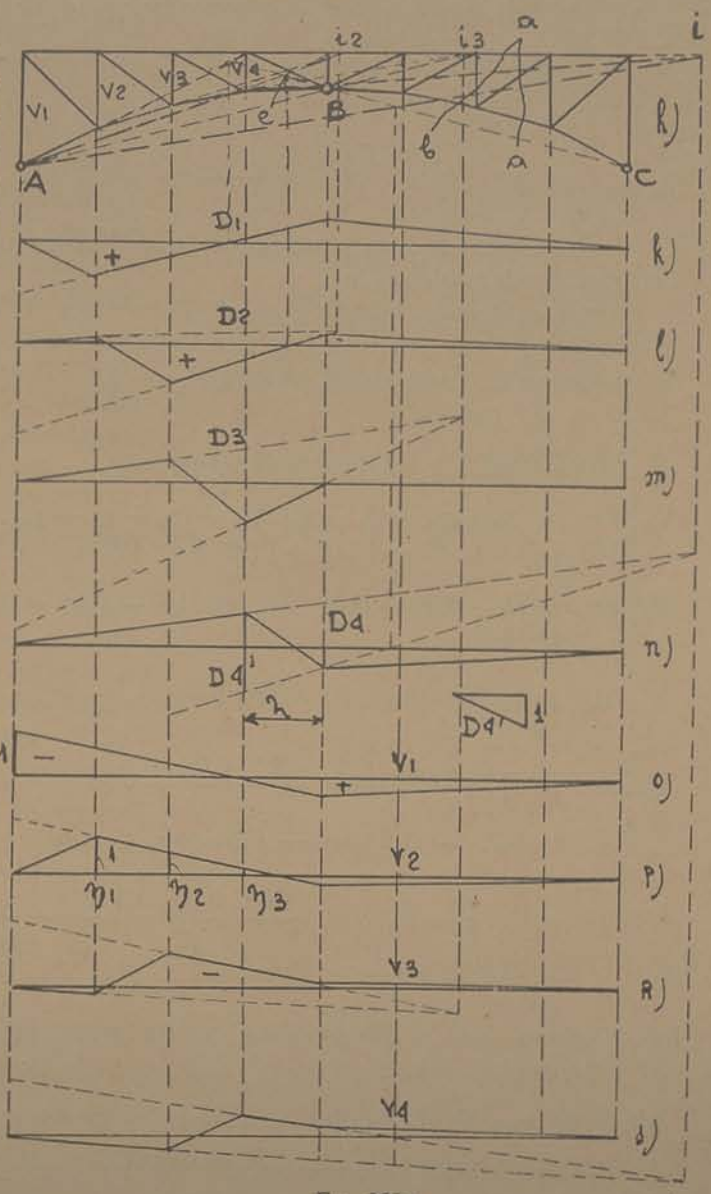


Fig. 253 a

$$F_1 = \frac{2 . 0{,}13}{2} = 0{,}13 \text{ cm}^2. \qquad F_2 = \frac{6 . 1{,}4}{2} = 4{,}2 \text{ cm}^2.$$

Daar in de cremona voor 1 ton = 0,5 cm. is gerekend, moeten de opgemeten hoogten der invloedslijnen nog met 2 worden vermenigvuldigd.

Bij een belasting à 1 ton per meter (= 10 kg. per cm) wordt bij een schaal 1 : 300 de waarde van 1 cm² gelijk aan 2 . 0,01 . 300 = 6 ton.

Men vindt hiernaar voor de gegeven belasting p en g:

$$\text{max. } U_3 = (0{,}7 \,.\, 0{,}13 - 0{,}3 \,.\, 4{,}2) \,.\, 6 = -\ 7{,}02 \text{ ton.}$$

$$\text{min. } U_3 = (0{,}3 \,.\, 0{,}13 - 0{,}7 \,.\, 4{,}2) \,.\, 6 = -\ 17{,}40 \text{ ,,}$$

Om de max. en min. spanningen in de vulstaven te bepalen handelt men op dezelfde wijze.

Door echter de belasting q of g over een veldafstand als een kracht P_1 of P_2 te rekenen, kan men volstaan met de ordinaten onder de knooppunten op te meten waarbij $P_1 = 0{,}7 \,.\, 3 = 2{,}1$ ton en $P_2 = 0{,}3 \,.\, 3 = 0{,}9$ ton.

Voor staaf V_2 vindt men dan (globaal):

V_2 max. $= (\eta_7 + \eta_6 + \eta_5 + \eta_4) \,.\, P_1 - (\eta_3 + \eta_2 + \eta_1) \,.\, P_2 = (0 + 0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}16) \,.\, 2{,}1 - (0{,}16 + 0{,}58 + 1) \,.\, 0{,}9 = -\ 0{,}95$ ton.

V_2 min. $= (0 + 0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}16) \,.\, 0{,}9 - (0{,}16 + 0{,}58 + 1) \,.\, 2{,}1 = -\ 3{,}40$ ton.

Uit de oppervlakten F_1 en F_2 berekend worden deze waarden:

$$V_2 \text{ max.} = F_1 \,.\, q - F_2 \,.\, g = \frac{13{,}5 \,.\, 0{,}08 \,.\, 0{,}7 \,.\, 2}{2} - \frac{10{,}5 \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}3 \,.\, 2}{2}$$

$$= 0{,}75 - 1{,}59 = -\ 0{,}84 \text{ ton.}$$

$$V_2 \text{ min.} = F_1 \,.\, g - F_2 \,.\, q = \frac{13{,}5 \,.\, 0{,}08 \,.\, 0{,}3 \,.\, 2}{2} - \frac{10{,}5 \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}7 \,.\, 2}{2}$$

$$= -3{,}36 \text{ ton.}$$

---

b) Horizontale lasten.

Methode van Prof. Kögler.

De invloedslijn voor horizontale krachten bepaalt men het eenvoudigst volgens de methode van prof. *Kögler.*

Deze methode is reeds omschreven bij de volwandige constructies waarom hier dus kan worden volstaan met een voorbeeld.

KERKHISTORISCH MUSEUM

Voorbeeld.

Op het portaal in figuur 254 werkt een winddruk W, deze is te ontbinden in W_1 en W_2 op de dichtsbij-liggende knooppunten.

De invloedslijnen fig. a, b, c, en d behoeven geen nadere verklaring.

De invloedslijn voor de momenten t.o. der punten m worden als volgt bepaalt.

De betreffende ordinaat y is uit te zetten als horizontale basis voor de invloedslijn in driehoek a-b-c.

Vanuit punt d op hoogte m trekt men c-d, waarna het geharceerde gedeelte het invloedsvlak voor het moment t.o.v. punt m voorstelt voor iedere willekeurige horizontale last.

Het niet geharceerde gedeelte is het invloedsvlak voor het overeenkomstige punt van de rechterhelft. (zie omschrijving bl. 147).

Na deeling van het moment door de loodrechte afstand van m tot aan de gegeven randstaaf is de grootte der bijbehoorende staafkracht bepaald.

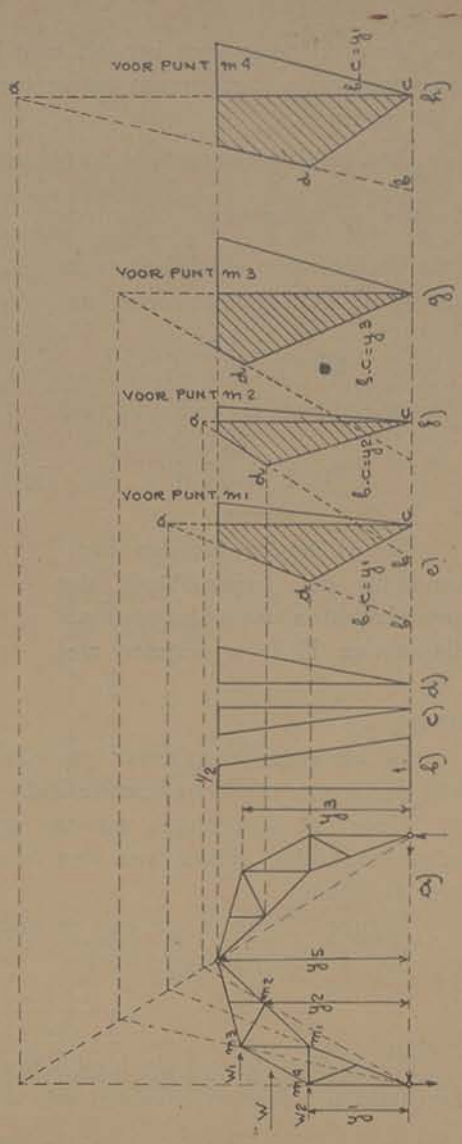


Fig. 254

---

§ 5) Invloedslijnen voor vakwerken op meerdere steunpunten.

a) Liggers met evenwijdige randen.

1) LIGGERS OP 3 STEUN-PUNTEN.

De invloedslijnen voor de reacties zijn geheel gelijk aan die voor den balk op drie steunpunten, waarbij de reacties berekend worden met behulp der formules 108-108b.

De randspanningen bepaalt men het eenvoudigst door de invloedslijn voor het momentenpunt ‚m' te teekenen, geheel als bij den balk op 3 steunpunten.

Aan de vermenigvuldigingsfactor voor $\Sigma P . \eta$ wordt nu de waarde $\frac{1}{h}$ toegevoegd, waardoor deze factor voor een punt m in het eerste veld gelijk wordt aan:

$$x_m \cdot \frac{L_2}{L . \delta aa . h}$$

of voor een punt m_1 in het 2e veld

$$x_{m_1} \cdot \frac{L_1}{L . \delta aa . h} .$$

De vulstaven worden berekend uit de invloedslijnen der dwarskrachten waarbij voor de diagonalen D is te rekenen met $\frac{Q}{\sin . \alpha}$.

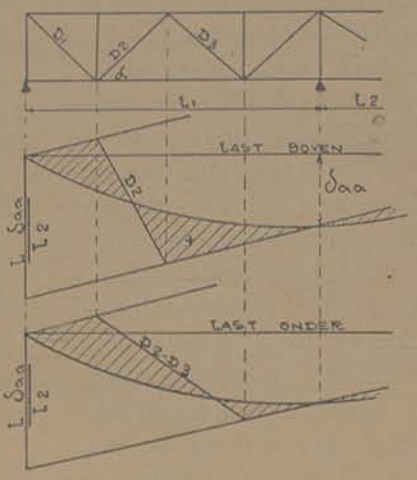


Fig. 255

Bij het opteekenen dezer invloedslijnen is na te gaan of de belasting aan de boven- of de onderzijde ligt.

Door het aanbrengen van een snede over 3 staven is onmiddellijk te vinden welke punten van den belasten rand op de invloedslijn zijn over te halen.

Figuur 255 geeft van een en ander een voorbeeld.

De vermenigvuldigingsfactor voor D wordt voor $\Sigma P . \eta$ gelijk aan:

$$\frac{L_2}{L . \delta aa . \sin \alpha} .$$

Verticalen die tot de hoofdconstructie behooren worden eveneens berekend uit de invloedslijnen der dwarskrachten, zoodat voor het 1e veld de vermenigvuldigingsfactor gelijk is aan: $\frac{L_2}{L . \delta aa}$ terwijl voor verticalen in het 2e veld deze factor gelijk is aan: $\frac{L_1}{L . \delta aa}$.

De punten der door de snede getroffen belaste rand, worden hierbij op de invloedslijn overgehaald (zie ook fig. 205).

---

2) LIGGERS OP 4 STEUNPUNTEN.

Liggers op 4 steunpunten en met evenwijdige randen worden geheel op dezelfde wijze berekend met inachtname van hetgeen bij den enkelen balk op 4 steunpunten is behandeld.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

b)

Invloedslijnen voor vakwerken met niet evenwijdige randen.

Daar het totale traagheidsmoment der doorsnede boven het middensteunpunt niet gelijk is aan dat der overige doorsneden zal ook de doorbuiging δaa voor $X = 1$ ton niet gelijk zijn aan die van een ligger met evenwijdige randen.

Om echter voorloopig de profielen te kunnen bepalen is het voldoende het vakwerk te beschouwen als een doorloopende ligger met evenwijdige randen.

Als liggerhoogte is dan een gemiddelde waarde h te kiezen (fig. 256) waarna voor verschillende staven door middel van de buigingslijn de staafkrachten worden bepaald.

Al naar gelang de vorm der oorspronkelijke constructie afwijkt van den ligger met evenwijdige randen vermindert of vermeerdert men de randspanningen naar verhouding der hoogte h.

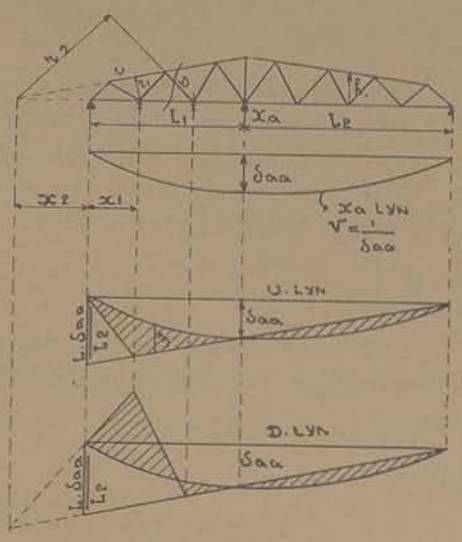


Fig. 256

Na het voorloopig bepalen der profielen wordt een meer nauwkeuriger vorm der buigingslijn voor $X = 1$ ton geteekend met behulp van het verschuivingsplan van Williot, de enkele stavenrij-methode of het elastisch gewicht, een en ander als aangegeven in fig. 134 e.v.

Is deze buigingslijn voor de werkelijke belasting (ligger op 2 steunpunten) bepaald, dan worden de diverse invloedslijnen geteekend als bij den ligger met evenwijdige randen.

Figuur 256 geeft hiervan een voorbeeld.

Voor randstaaf 0 in het eerste veld is dus de staafkracht:

$$O = x_1 \cdot \frac{L_2}{L \cdot \delta aa \cdot r_1} \cdot \Sigma P \cdot \eta \quad \ldots\ldots \quad 120)$$

terwijl voor een diagonaal D in het eerste veld de staafkracht:

$$D = x_2 \cdot \frac{L_2}{L \cdot \delta aa \cdot r_2} \cdot \Sigma P \cdot \eta \quad \ldots\ldots \quad 121)$$

(Een gelijkmatige temperatuurswisseling heeft op den ligger op meerdere steunpunten alleen invloed als de diverse steunpunten niet evenhoog liggen).

§ 6) Invloedslijnen voor tweescharnier-vakwerk constructies.

Bepaalt men de buigingslijn der belaste randstaaf voor de vrij opgelegde constructie en tevens de hierbij behoorende horizontale verschuiving δaa, (zie hoofdstuk VII) dan is de horizontale reactie:

$$H = \frac{1}{\delta aa} \cdot \Sigma P \cdot \eta$$

Door de onder de knooppunten vallende ordinaten η te deelen door δaa ontstaat de invloedslijn der horizontale voetreactie, de z.g.n. *H-lijn*, waarvan de constructie in figuur 162b/e is aangegeven.

Met behulp dezer H-lijn zijn de invloedslijnen der rand- en vulstaven op de volgende wijze te bepalen.

a) *Randstaven.*

Stelt men voor een willekeurige punt m de vergelijking der uitwendige krachten op, dan is:

$$Mm = Mo_m - H \cdot y_m$$

waarvoor ook is te schrijven:

$$Mm = y_m \left(\frac{Mo_m}{y_m} - H \right).$$

Hierbij is Mo_m het buigmoment van een met dezelfde belasting belaste rechte balk A-B.

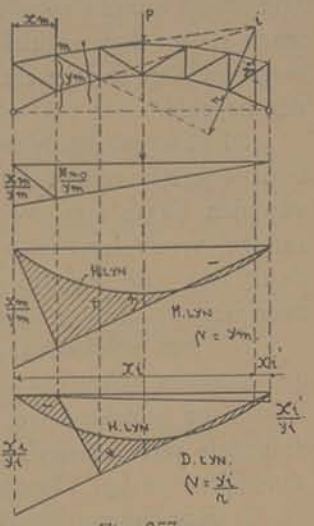


Fig. 257

Men teekent dus het momentenvlak $Mo_m \cdot \frac{1}{y_m}$ van den rechten balk en neemt hiervan af de in dezefde schaal geteekende H-lijn.

De tusschen deze beide lijnen opgemeten ordinaten η moeten dan voor het verkrijgen van Mm nog met y_m worden vermenigvuldigd.

In figuur 257 is deze invloedslijn voor punt m geteekend.

Wil men hieruit staaf u_2 bepalen, dan moet de algebraïsche som der onder Σ P opgemeten ordinaten vermenigvuldigd worden met y_m en gedeeld worden door de loodrechte afstand van u_2 tot punt m.

Ligt punt m aan de onderzijde dan is de spanning in den bovenrand $= - \frac{Mm}{r}$.

b) Vulstaven.

Om de invloedslijn voor een vulstaaf te kunnen teekenen bepaalt men eerst het snijpunt i der betreffende randen.

Volgens het voorgaande vindt men voor:

$D = \frac{Mo_i}{r} - H.\frac{y_i}{r}$ waarvoor ook is te schrijven:

$$D = \frac{y_i}{r}\left(Do.\frac{r}{y_i} - H\right).$$

De vermenigvuldigingsfactor voor de ordinaten is dus $\frac{y_i}{r}$.

Do is de spanning in staaf D van de vrij opgelegde constructie en belast met A=1 ton, wat gelijk is aan $\frac{x_i}{r}$; deze waarde kan positief of negatief zijn.

Verder wordt Do vermenigvuldigd met $\frac{r}{y_i}$ of gedeeld door $\frac{y_i}{r}$ welke laatste waarde gelijk is aan de staafkracht D voor H = 1 ton.

De onder A uit te zetten ordinaat voor de Do-lijn is nu $\frac{x_i}{r}.\frac{r}{y_i} = \frac{x_i}{y_i}$ waarvoor ook volgens het bovenstaande is te schrijven $\frac{D_{A=1}}{D_{H=1}}$.

Bij deze laatste waarden is dus D bepaald uit de cremona's voor A en H = 1 ton.

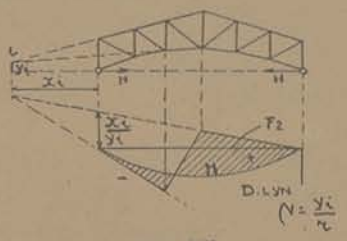


Fig. 258

In figuur 258 is $D_{A=1}$ zoowel als $D_{H=1}$ positief, terwijl de vermenigvuldigingsfactor $\frac{y_i}{r} = D_{H=1}$ eveneens positief is.

Hierdoor krijgt de H-lijn evenals de onder A uit te zetten ordinaat $\frac{x_i}{y_i}$ een positieve waarde welke waarden dus bij elkaar zijn te voegen (F_2 van figuur 258).

Men vindt verder voor $D = \frac{y_i}{r}.\Sigma P.\eta$.

ALPHABETISCHE INHOUD.

ONDERWERP	Blz.	ONDERWERP	Blz.
A-lijn	128-155	Maxwell.	61
Analytische methoden	17.	Meervoudige vakwerken	14
Arbeid	44	Methode Kögler	147-184
Balken met verschillend traagheidsmoment	70-73-153	Mohr	72
Balken op 3 steunpunten	62-150	Momenten-lijn	66-138-140-152
Balken op 4 steunpunten	63-154	Nagelafstanden	28-118
Buigingslijn	60-68-72	Reacties	60-76-127-144-151
Bijzondere methoden	172	Ritter-methode	10
Cremona	9-41	Staafverwisselingsmethode	12
Culmann-methode	11	Statisch bepaalde constructies	1-33
Doorbuiging van balken	66-68-73	Statisch onbepaalde constructies	9-44-84
Doorbuiging van vakwerken	26-81	Statische bepaaldheid	2
Dragers met trekband	104	Steunpunts-verlaging	153-158
Driescharnierkappen	33-39-143	Tabellen voor balken op meerdere steunpunten	160
Druklijn	34	Temperatuur	50-59-118-122
Elastisch gewicht	73-98-120	Tweescharnierkappen	52-88-94-109-119-188
Elasticiteitsvergelijkingen	60-63	Vakwerken (statisch bepaald)	2-6-162
Evenwichts-vergelijkingen	1	Vakwerken (statisch onbepaald)	46-58-185
Evenwichtsregel	5	Vakwerken (Driescharnier)	39-179
Gebogen spantstaven	18	Verschuivings-arbeid	44
Gerber-balken	140	Verschuivingsplan van Williot	81
„ -vakwerken	177	Virtueele arbeid.	44
Grondstelling	129	Volwandige tweescharnierkap.	109
Hoekveranderingsmethode	90	Volwandige driescharnierkap	35-143
Impost-lijn	34-116	Vormveranderings-arbeid	44
Ingeklemde spanten	8	Zimmermann-methode	15
Invloedslijnen	116-127		
Kernmomenten	35-117-148		
Knoopplaten	28		
K-verband	23		
Lichtkappen	6-20		
Liggers	21		
Liggers (driehoekige)	25		
Liggers. (vierhoekige)	26		

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Geraadpleegde Werken

Schrijver.	Titel.
W. L. Andree.	Die Statik des Eisenbaues.
Idem.	Die Statik des Kranbaues.
J. M. Bernhard.	Die Statik der Brückenkrane.
F. Bleich.	Stahlhochbauten. Bd. II.
M. Fischer.	Statik und Festigkeitslehre. Bd. I-III.
A. Gregor.	Eisenhochbau. Bd. I-II.
Hütte.	Des Ingenieurs Taschenbuch. Bd. I-III.
J. Klopper.	Leerboek der toegepaste Mechanica. Bd. I.
Th. Landsberg.	Das Verfahren der Einfluszlinien.
H. Müller-Breslau.	Graphische Statik der Baukonstruktionen. Bd. I-II.
R. Saliger.	Praktische Statik.
Vianello/David.	Der Eisenbau.

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.