EENIGE RANDPROBLEMEN DER CONFORME AFBEELDING

JOH. H. WANSINK

NASIONAL RI

95 hal - pp.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

V : -169.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL

EENIGE RANDPROBLEMEN DER CONFORME AFBEELDING

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

V-169.

Eenige Randproblemen der Conforme Afbeelding

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Jhr. Dr. B. C. DE SAVORNIN LOHMAN HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TE VERDEDIGEN TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE OP MAANDAG 20 APRIL 1931, DES NAMIDDAGS TE 3 UUR

DOOR

JOHAN HENDRIK WANSINK

GEBOREN TE AALTEN

H. J. PARIS
AMSTERDAM MCMXXXI

KON. BAT. GENOOTSCHAP VAN K. EN W.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Bib Id : 0010-4909|1160
Item Id : 212796769

PERPUSTAKAAN NASIONAL

AAN MIJN OUDERS EN MIJN VROUW

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De voltooiing van dit proefschrift schenkt mij een welkome gelegenheid, U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, dank te zeggen voor Uw aandeel in mijn wetenschappelijke vorming.

Deze dank geldt in de eerste plaats U, Hooggeleerde WOLFF, Hooggewaardeerde Promotor. Ik beschouw het als een groot voorrecht in de gelegenheid geweest te zijn Uw colleges te volgen. Van Uw heldere voordracht, van Uw bezielend onderwijs is voor mij steeds een groote bekoring uitgegaan. In het bijzonder ben ik U dankbaar voor de steun en leiding, die ik van U bij de bewerking van dit proefschrift heb ontvangen.

Hooggeleerde NIJLAND, KRAMERS, ORNSTEIN, MOLL, voor het onderwijs, dat U me hebt gegeven, ben ik U zeer erkentelijk, terwijl ik aan de uren, die ik voor practisch werk op het Physisch Laboratorium doorbracht, steeds met groot genoegen zal terugdenken.

Gaarne wil ik ook U, Hooggeleerde Emeritus DE VRIES, dank zeggen voor de buitengewone welwillendheid, waarmee U me de gelegenheid schonk, me volledig van de inhoud Uwer colleges op de hoogte te stellen, toen ik deze niet kon bijwonen. De steun en voorlichting, die ik van U, alsmede van U, Hooggeleerde ORNSTEIN heb ontvangen, toen ik na beëindiging der studie voor K^V tot universitaire studie besloot, zal ik steeds dankbaar gedenken.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

INHOUD

Blz.

INLEIDING 1

HOOFDSTUK I — RANDCORRESPONDENTIE, BIJ AFBEELDING VAN EEN JORDAN-GEBIED; STELLING VAN OSGOOD. . . . 6

§ 1 Definitie van eenvoudige Jordan-kromme; voorbeelden 6

§ 2 Eigenschappen van Jordan-krommen 8

§ 3 Algemeene Jordan-krommen; voorbeelden 9

§ 4 Bewijs van WOLFF van de Stelling van OSGOOD. . . 13

§ 5 Continuiteit der randcorrespondentie 19

§ 6 De correspondentie tusschen de rand Γ_z en de rand Γ_w, ingeval Γ_z een algemeene Jordan-kromme is 20

§ 7 Veelvuldigheid van een randpunt 21

HOOFDSTUK II — CONTRACTIETHEOREMA VAN SCHWARZ . . 25

§ 8 Dekpunt der transformatie in de oorsprong. . . . 25

§ 9 Dekpunt der transformatie niet in de oorsprong. . 28

§ 10 Algemeene formuleering van het theorema van SCHWARZ; monotonie van $\frac{u}{x}$ 30

§ 11 Niet-euclidische beschouwingen 36

§ 12 Het theorema van SCHWARZ in niet-euclidische formuleering 41

HOOFDSTUK III — UITBREIDINGEN VAN HET THEOREMA VAN SCHWARZ. 43

§ 13 *a*) Hulpstelling over de vergelijking $f(z) = z$ . . . 43

b) Stelling van WOLFF 44

c) Het lineaire geval 46

d) Omkeering van de Stelling van WOLFF. 47

§ 14 Contractietheorema van JULIA 48

a) Het contractietheorema in het rechterhalfvlak. . 48

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Blz.

b) Transformatie van het rechterhalfvlak op de eenheidscirkel 49
c) Verband tusschen de correspondeerende stralen der raakbundels 51
d) Tweede bewijs voor de Stelling van JULIA . . . 53
e) Verband tusschen de contractieconstante van JULIA μ en de halfvlakconstante λ 55
f) Invariantie van de n. e. afstand van de correspondeerende bundelexemplaren. 56
g) Vorm van de lineaire functie 57
h) Over verschillende waarden van de contractieconstante μ 57
§ 15 De Stelling van WOLFF als gevolg van die van JULIA. 58
§ 16 CARATHEODORY's omkeering van de Stelling van JULIA 58
§ 17 Uitbreiding van de Stelling van JULIA; hoekafgeleiden
a) Hoekbuurt (angulaire buurt) van een randpunt. 59
b) Uitbreiding van de Stelling van JULIA 60
c) Hoekafgeleide van $w = f(z)$, holomorf voor $x > 0$, met $u > 0$, in $z = 0$ 62
d) Hoekafgeleide van $w = f(z)$, holomorf voor $|z| < 1$, met $|w| < 1$, in $z = +1$ 63
e) Hoekafgeleide in het overdrachtelijk dekpunt der functie $f(z)$ van § 13*b* 64
f) Opmerking over de bewijzen van WOLFF, en LANDAU—VALIRON van de besproken uitbreiding van het theorema van JULIA 64

HOOFDSTUK IV — CONFORMITEIT DER AFBEELDING IN EEN RANDPUNT 65
§ 18 Definities van hoektrouw en conformiteit der afbeelding in een randpunt 65
§ 19 Analytische randkrommen 65
§ 20 Hoekafgeleide en angulaire conformiteit 67
§ 21 Criterium van CARATHEODORY—VALIRON 68
§ 22 Criterium van WOLFF 73
§ 23 Tweede criterium van CARATHEODORY 79
§ 24 Criterium van AHLFORS 80

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Blz.

HOOFDSTUK V — TOEPASSINGEN 84
§ 25 Deugdelijke en ondeugdelijke gebieden. 84
§ 26 Voorschrift voor het construeeren van deugdelijke gebieden 84
§ 27 Voorbeelden van deugdelijke gebieden in het R. H. V. 85
§ 28 Voorbeelden van ondeugdelijke gebieden in het R. H. V. 89

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

INLEIDING

Indien in het z-vlak een puntverzameling (z) gegeven is, en we voegen door middel van de functie $w = f(z)$ aan elk punt z een punt w van het w-vlak toe, dan ontstaat er een puntverzameling (w), die zichzelf kan overdekken en die we het *beeld* van de puntverzameling (z) noemen. We zeggen, dat de functie $w = f(z)$ de *afbeelding* van (z) op (w) tot stand brengt.

Is de puntverzameling (z) een *gebied* G_z en de functie $w = f(z)$ een niet-constante, *holomorfe* functie in G_z, dan heeft de afbeelding een aantal belangrijke eigenschappen, waarvan we de volgende noemen:

a) de puntverzameling G_w is weer een gebied (*stelling van de gebiedsoverdracht*),

b) als twee krommen elkaar in een punt P_z van G_z onder een hoek θ snijden, snijden de beeldkrommen van die beide krommen elkaar in het beeldpunt P_w van P_z onder diezelfde hoek θ, mits $f'(z)$ in P_z niet nul is (*stelling van de hoektrouw*),

c) *de plaatselijke vergrooting* N_z in een punt P_z van G_z is een functie van z, die niet afhankelijk is van de kromme door P_z, met behulp waarvan men de plaatselijke vergrooting definiëert,

d) ieder enkelgelaagd („*schlicht*"), enkelvoudig samenhangend gebied G_z in het z-vlak met minstens twee grenspunten kan door een in G_z holomorfe functie $w = f(z)$ één aan één en conform op een cirkelschijf G_w worden afgebeeld (*fundamenteele stelling van* RIEMANN) [1]).

Men zegt, dat de functie $w = f(z)$ G_z op G_w *glad* („*schlicht*") afbeeldt (in welk geval men de afbeeldingsfunctie ook wel „univalent" noemt), als de correspondentie tusschen G_z en G_w één aan één is. Noodige voorwaarde hiervoor is, dat $f'(z)$ nergens in G nul is.

Door de conforme afbeelding van een gebied G_z op de eenheidscirkelschijf G_w wordt, zonder dat aan de afbeeldingsfunctie eenige

[1]) L. BIEBERBACH, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1927, blz. 5—8.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

voorwaarde wordt opgelegd t.o.v. de grenspunten van G_z, automatisch *een correspondentie* tot stand gebracht *tusschen de randen* Γ_z *van* G_z *en* Γ_w *van* G_w. Reeds door SCHWARZ [2]) is gevonden (1870), dat de betrekking tusschen de punten der randen Γ_z en Γ_w één aan één en continu is, mits de rand Γ_z uit een eindig aantal *analytische bogen* bestaat.

De boog, gedefiniëerd door $x = x(t)$, $y = y(t)$, voor $t_1 \leqq t \leqq t_2$, heet dàn en dàn alleen analytisch, als het segment $t_1 \leqq t \leqq t_2$ in een gebied G ligt, waar $x(t) + iy(t)$ een holomorfe functie van t is; m.a.w. als ieder punt t_o van dat segment middelpunt is van een cirkel, waarin $x(t) + iy(t)$ kan ontwikkeld worden naar machten van $t - t_o$.

Door OSGOOD is in 1901 het vermoeden uitgesproken [3]), dat de correspondentie tusschen de randen Γ_z en Γ_w eveneens één aan één en continu is voor het geval Γ_z *een eenvoudige Jordan-kromme* is. Van deze *stelling van* OSGOOD zijn sinds 1912 vele bewijzen gegeven [4]). We geven in hoofdstuk I het *bewijs van* WOLFF (1930) [5]), terwijl we dit bewijs zullen vergelijken met die bewijzen van andere onderzoekers, welke er het nauwst aan verwant zijn.

Voor het geval Γ_z een *algemeene Jordan-kromme* is, wordt, na invoering van het begrip *randelement* (CARATHEODORY, die een analyse van de randen geeft, los van het probleem van de conforme afbeelding der binnengebieden, spreekt van „primenden" [6])) de stelling van OSGOOD aldus gewijzigd, dat er nu een correspondentie één aan één bestaat tusschen de punten van Γ_w en de randelementen van Γ_z. Aan de veelvuldigheid van een randpunt van Γ_z zien we een grens gesteld in WOLFF'S *stelling over de nulmaat* [5]) van de verzameling der punten op Γ_w, die met één grenspunt van G_z correspondeeren, met welke stelling we hoofdstuk I besluiten.

Uit de analytische voortzetbaarheid van de functie $w = f(z)$, die G_z één aan één en conform op $|w| < 1$ afbeeldt, over alle

---

[2]) H. A. SCHWARZ, Gesammelte Abhandlungen II, 1890, blz. 149—151.

[3]) W. F. OSGOOD, Enc. der Math. Wissenschaften IIB.1, **19**, 1901.

[4]) E. STUDY, Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche, 1912; blz. 55 e.v.; zie verder noot [22]).

[5]) J. WOLFF, Verslagen Kon. Akad. van Wetensch., 25 Jan. 1930; blz. 96—97.

[6]) C. CARATHEODORY, Math. Annalen 73; 1913; blz. 323, e.v.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

inwendige punten van analytische begrenzingsbogen, volgt, dat de afbeelding ook in deze punten nog conform is.

Om vervolgens het gedrag van de afbeeldingsfunctie $w = f(z)$ in de omgeving van een randpunt van Γ_z te kunnen onderzoeken, voor het geval dit punt géén inwendig punt van een analytische deelboog is, worden eerst in de hoofdstukken II en III eenige stellingen afgeleid, die alle steunen op het *lemma van* SCHWARZ (1870) [7]). Dit lemma doet uitspraak over het gedrag van een functie, holomorf in een cirkel, waarvan de functiewaarden in een cirkel liggen. Voor deze cirkels kiezen we òf eenheidscirkels, òf halfvlakken. Achtereenvolgens wordt het theorema van SCHWARZ besproken voor de gevallen, dat de transformatie $w = f(z)$ een dekpunt heeft in het middelpunt van de eenheidscirkel, in een willekeurig punt binnen de eenheidscirkel, en voor het geval, dat er omtrent een dekpunt der transformatie niets vooronderstelt wordt. Met behulp van de uitdrukkingswijze der niet-euclidische meetkunde wordt aan het theorema van SCHWARZ tenslotte een zeer eenvoudige formuleering gegeven: *de transformatie* $w = f(z)$ *blijkt de niet-euclidische afstand van twee punten binnen de eenheidscirkel niet te kunnen vergrooten* [8]).

Het kan zijn, dat de transformatie $w = f(z)$ slechts punten op de omtrek van $|z| = 1$ invariant laat. In dit geval stellen de *uitbreidingen door* WOLFF [9]) *en* JULIA [10]) *aan het lemma van* SCHWARZ *gegeven* (hoofdstuk III) ons toch in staat, conclusies te trekken over de aard van de transformatie van het binnengebied $|z| < 1$. In plaats van een cirkelbundel, die bij het lemma van SCHWARZ optreedt, waarbij één der nulcirkels van de bundel een binnenpunt van de eenheidscirkel is, vinden we nu een bundel van cirkels, die de eenheidscirkel en elkaar in een punt van die eenheidscirkel raken.

Kiezen we voor de cirkelschijven, genoemd in het theorema van SCHWARZ, rechterhalfvlakken, dan blijkt, dat voor het theo-

---

[7]) H. A. SCHWARZ, Gesammelte Abhandlungen II, 1890, blz. 108; e.v. en C. CARATHEODORY, Math. Annalen, 72; 1912; blz, 107 e.v.

[8]) C. CARATHEODORY, Sitzungsberichte Preuss. Ak. der Wissensch., 1929; IV, blz. 43 en M. A. BLOCH, Mémorial des Sciences Mathém. XX, blz. 8.

[9]) J. WOLFF, Comptes rendus, 7 April 1926.

[10]) G. JULIA, Journal de Mathématiques 83; 1918; blz. 72, e.v.; Acta Math., vol 42, 1918; blz. 349, e.v.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

rema van JULIA de eigenschap, dat $\lambda = \lim_{x \to \infty} \frac{u}{x}$ (y *constant*) onafhankelijk is van de gekozen y, van fundamenteele beteekenis is.

Ook door een limietovergang uit het lemma van SCHWARZ kan op eenvoudige wijze de stelling van JULIA worden bewezen.

De door CARATHEODORY [11]) gegeven omkeering van deze stelling toont, dat de voorwaarden, in de stelling van JULIA genoemd, zoo algemeen mogelijk zijn.

Een *uitbreiding van de stelling van* JULIA [12]) wordt gevonden door aan te toonen, dat, als van $w = f(z)$, holomorf in het rechterhalfvlak, de functiewaarden in het rechterhalfvlak liggen, $\frac{f(z)}{z}$ en $f'(z)$ een reëele, eindige *angulaire limiet* hebben voor $z \to \infty$; de waarde van deze limiet is gelijk aan de bovengenoemde λ. Voor $w = f(z)$, holomorf in $|z| < 1$ met $|w| < 1$, volgt hieruit, dat, als $z = +1$ en $w = +1$ correspondeerende grenspunten zijn, $\frac{1-w}{1-z}$ en $\frac{dw}{dz}$ een reëele, angulaire, limiet ($\neq 0$) bezitten voor $z \to +1$. Deze limiet zal eindig zijn, als er een tot $+1$ convergeerende suite (z_n) is, met beeldsuite (w_n), waarop het quotient $\frac{1-|w_n|}{1-|z_n|}$ begrensd blijft. Men zegt dan, dat $f(z)$ een *hoekafgeleide* heeft in $+1$.

In hoofdstuk IV worden *criteria* besproken voor de *angulaire conformiteit* van de afbeelding van een gebied G_z op een cirkelschijf in een randpunt z_0 van de contour Γ_z van G_z. Van belang is de door CARATHEODORY [13]) en door VALIRON [14]) bewezen eigenschap (1929), dat de angulaire conformiteit in z_0 verzekerd zal zijn, indien Γ_z ligt tusschen twee elkaar in z_0 rakende cirkels.

Uit dit hoofdstuk blijkt voorts:

---

[11]) C. CARATHEODORY, zie [8]), blz. 45.

[12]) J. WOLFF, Comptes rendus, 13 Sept. 1926, C. CARATHEODORY, zie [8]), blz. 49, en E. LANDAU en G. VALIRON, Journal of the London Math. Society, Vol. IV, 1929, blz. 162 en 163.

[13]) C. CARATHEODORY, zie [8]), blz. 51, e.v.

[14]) G. VALIRON, Bulletin des Sciences Mathém. 1929; blz. 70 e.v.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

a) dat voor angulaire conformiteit van de afbeelding in een grenspunt van G_z het *niet noodzakelijk* is, dat de rand Γ_z in het beschouwde punt *een raaklijn* heeft, — onder toepassing van een *criterium van* AHLFORS, (1930)[15]), —

b) dat de afbeelding van een gebied G_z op $|w| < 1$ angulair conform kan zijn in een grenspunt z_o van G_z, terwijl de afbeeldingsfunctie $z = \varphi(w)$ discontinu is in het met z_o correspondeerend randpunt w_o en in geen enkele omgeving van dit punt begrensd is.

Een *tweede criterium* van CARATHEODORY[16]) en een *criterium van* WOLFF (1930)[17]) stellen voor de angulaire conformiteit niet slechts eischen aan de contour, maar ook aan de afbeeldingsfunctie. Het criterium van CARATHEODORY—VALIRON is evenwel als bijzonder geval in dat van WOLFF opgesloten.

In het laatste hoofdstuk wordt een *constructievoorschrift* afgeleid, dat ons in staat stelt begrenzingskrommen van gebieden in het rechterhalfvlak te vinden, waarvan de afbeelding op de eenheidscirkelschijf angulair conform is in het oneindig verre punt dier begrenzingskromme. Uit de toepassingen blijkt, dat de hier bewezen stelling de resultaten van VALIRON[18]) omvat.

---

[15]) LARS AHLFORS, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Nova Series A, Tome 1, 9, 1930.

[16]) Zie noot [13]), blz. 53.

[17]) J. WOLFF, Comptes rendus, 3 Maart 1930.

[18]) Zie noot [14]).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK I

RANDCORRESPONDENTIE, BIJ AFBEELDING VAN EEN JORDAN-GEBIED — STELLING VAN OSGOOD

§ 1 — Definitie van eenvoudige Jordan-kromme

Onder een *eenvoudige Jordan-boog* verstaan we een kromme, gedefiniëerd door de vergelijkingen:

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t), \tag{1}$$

als deze functies continu zijn voor $t_1 \leqq t \leqq t_2$ en slechts dàn gelijktijdig aan $x(t) = x(t')$, $y(t) = y(t')$ kan worden voldaan, als $t = t'$.

Indien men eischt dat $x(t_1) = x(t_2)$ en $y(t_1) = y(t_2)$ en dat uit $x(t) = x(t')$, $y(t) = y(t')$ voor $t_1 < t \leqq t' < t_2$ moet volgen: $t = t'$, noemt men de kromme door (1) bepaald een *eenvoudige gesloten Jordan-kromme*.

Stelt men $z = x + iy$, dan wordt de vergelijking van de eenvoudige Jordan-kromme: $z = z(t)$, continu voor $t_1 \leqq t \leqq t_2$, met $z(t_1) = z(t_2)$ en $z(t) \neq z(t')$ voor $t_1 < t < t' < t_2$, terwijl voor de eenvoudige Jordan-boog de voorwaarde $z(t_1) = z(t_2)$ vervalt, en $z(t) \neq z(t')$ is voor $t_1 \leqq t < t' \leqq t_2$.

De eenvoudige Jordan-krommen (resp. bogen) zijn, zooals uit de definitie onmiddellijk volgt, vrij van dubbelpunten. De boog wordt door haar vergelijking 1 aan 1 en continu afgebeeld op het lijnsegment (t_1, t_2), terwijl de transformatie

$$\xi = \cos \frac{t}{t_2 - t_1} \cdot 2\pi,\ \eta = \sin \frac{t}{t_2 - t_1} \cdot 2\pi$$

de kromme 1 aan 1 en continu afbeeldt op de eenheidscirkel van het ζ-vlak $(\zeta = \xi + i\eta)$.

Voorbeelden van Jordan-krommen. In de eerste plaats zijn alle dubbelpuntvrije analytische krommen (zie: inleiding, blz. 2) Jordan-krommen: de voorwaarde der continuiteit wordt vervangen door de, de continuiteit insluitende, voorwaarde der holomorfie

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

van $z(t)$ (met $|z'(t)| \neq 0$). Een voorbeeld van een Jordan-kromme, die geen analytische deelboog heeft, vinden we in de kromme van HELGE VON KOCH (zie fig. 1).

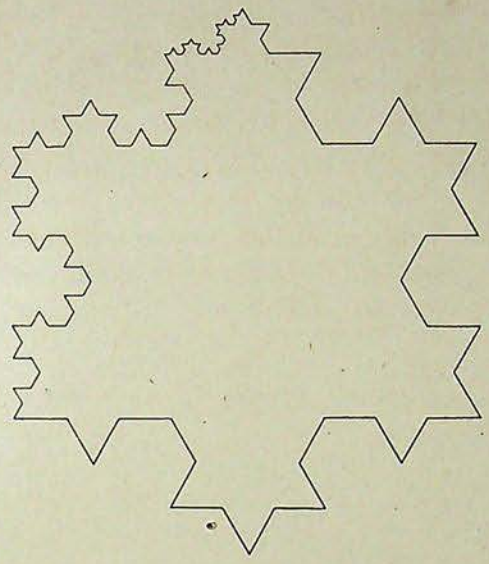


Fig. 1. De benaderende polygonen Γ_3, Γ_4 en Γ_5 van de kromme van Helge von Koch.

Beschouw de suite van gesloten polygonen Γ_n. Γ_1 is een gelijkzijdige driehoek, Γ_2 ontstaat uit Γ_1 door van elke zijde het middelste derde deel weg te nemen en te vervangen door 2 zijden van een gelijkzijdige driehoek buiten Γ. Γ_n ontstaat uit Γ_{n-1} door van elk lijnsegment, waaruit Γ_{n-1} bestaat het middelste derde deel weg te nemen, en te vervangen door 2 zijden van een gelijkzijdige driehoek, zoodanig, dat de oppervlakte van het door Γ_{n-1} omsloten gebied wordt vergroot. De kromme van HELGE VON KOCH is nu de kromme, bestaande uit de punten, die op de lijnsegmenten van de suite Γ_n gespaard blijven, en de verdichtingsunten dezer puntverzameling.

Het bewijs van de continuiteit van de kromme van HELGE VON KOCH vindt men in: Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik Bnd. 1, 1903, blz. 681 e.v.

Deze kromme heeft in geen enkel punt een raaklijn. Dit volgt onmiddellijk uit de overweging, dat in elk uiteinde van een lijn-

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

segment, dat gespaard blijft, een hoek van 30° is te construeeren, zóó dat op beide beenen van de hoek punten der kromme liggen, die zich in dat punt verdichten; dit geldt a fortiori voor de gespaarde punten op een lijnsegment, die geen eindpunten zijn, en eveneens voor de verdichtingspunten dezer punten.

We merken nog op, dat de booglengte van de kromme, alsmede van elke deelboog der kromme, oneindig groot is.

§ 2 — Eigenschappen van Jordan-krommen

Van de Jordan-krommen noemen we de volgende eigenschappen:

a) Iedere gesloten Jordan-kromme verdeelt het platte vlak in twee gebieden [19]).

b) Ieder punt van het binnengebied eener gesloten Jordan-kromme (d. i. het gebied, dat het oneindig verre punt niet bevat,) is door een continue kromme met elk punt der Jordan-kromme te verbinden; m.a.w. elk punt eener gesloten Jordan-kromme is vanuit het binnengebied dezer kromme bereikbaar [20]).

c) *Indien* $P_n\,(x_n y_n)$ *een puntensuite is op een Jordan-kromme, zóó dat voor* $n \to \infty$ P_n *nadert tot* $P_o\,(x_o y_o)$, *dan geldt voor de diameter* d_n *van boog* $P_o P_n$: $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$. (Onder de **diameter** van boog $P_o P_n$ verstaan we de bovenste grens van de afstanden van twee willekeurige punten van boog $P_o P_n$).

Deze derde eigenschap willen we bewijzen; de afstand

$$a_n = \sqrt{\{(x_o - x_n)^2 + (y_o - y_n)^2\}}$$

is een continue functie van continue functies van t, dus een continue functie van t. Geeft men $\varepsilon > 0$, dan is er een δ_x en een δ_y,

zóódat $\quad |x - x_o| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ voor $|t - t_o| < \delta_x$

en $\quad |y - y_o| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ voor $|t - t_o| < \delta_y$,

zoodat $\quad a_n < \varepsilon$ voor $|t_n - t_o| < \delta_x$ en δ_y.

Zij nu d_n de bovenste grens van de afstanden van 2 willekeurige

---

[19]) E. Schmidt, Sitzungsberichte Preuss. Akad. der Wiss. 1923, XXVIII, blz. 318, e.v.

[20]) C. Caratheodory, Mathem. Annalen 73 (1913), blz. 305, e.v.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

punten P' en P'' van bg P_oP_n, dan kunnen we aantoonen, dat er een puntenpaar op de boog is, waarvoor deze bovenste grens wordt bereikt. Immers, de afstand $a\,(P'P'')$ is een continue functie van de 4 coördinaten x', y', x'' en y'' van de punten P' en P'' en een continue functie neemt op elk gesloten interval haar bovenste grens minstens éénmaal aan.

Voor $P_n \to P_o$ zal de parameter t_n van P_n tot t_o naderen. Was er n.l. een deelrij (t_p) met $\lim_{p\to\infty} t_p = t^* \neq t_o$, dan zou P_o een dubbelpunt van de kromme zijn, in strijd met de definitie van Jordankromme.

Als nu $t_n \to t_o$, naderen ook de parameters van de beide punten van het puntenpaar, waarvoor de afstand op boog P_oP_n maximaal is, tot t_o, waaruit in verband met de eerste alinea van dit bewijs volgt:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

§ 3 — Algemeene Jordan-krommen

Onder een *algemeene Jordan-kromme* verstaat men de verzameling van de grenspunten P_z van een enkelvoudig samenhangend, schlicht gebied G_z.

In deze definitie verstaan we onder:

een *gebied*, een puntverzameling (z) met de eigenschap, dat bij elk punt van de verzameling een cirkel behoort met dat punt als middelpunt, waarvan alle binnenpunten tot (z) behooren, terwijl elk tweetal punten z_1 en z_2 uit (z) door een continue kromme (b.v. een polygoon), waarvan alle punten tot (z) behooren, kunnen worden verbonden;

een *grenspunt* van een gebied een punt, dat niet tot het gebied behoort, maar waarbij het gebied doordringt in elke cirkel met dat punt als middelpunt;

een *schlicht gebied* een gebied, waarbij elk punt der verzameling (z) slechts éénmaal als punt der verzameling in rekening wordt gebracht;

een *enkelvoudig samenhangend gebied* een gebied, waarbij elke gesloten kromme, wier punten alle tot dat gebied behooren, slechts punten van het gebied tot binnenpunten heeft (dan wel, als $z = \infty$ een punt van het gebied is: slechts punten van het gebied tot buitenpunten heeft).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

De verzameling van de verdichtingspunten P_z van een gebied G_z, die niet tot G_z behooren, noemt men de rand (contour) Γ_z van dat gebied. Γ_z bestaat uit alle grenspunten van G_z.

Stelling: De rand Γ_z van een gebied G_z is een gesloten puntverzameling.

Bewijs: Zij P een verdichtingspunt van grenspunten, dan ligt in elk interval I_P om P minstens één punt Q van Γ_z. We kunnen nu om Q een interval I_Q binnen I_P leggen: in I_Q dringt G_z door, dus dringt G_z ook in I_P door. Aan één der voorwaarden voor een grenspunt is dus voldaan. P kan géén punt van G_z zijn, want dan moest er een cirkel om P zijn, die geheel tot G_z behoort, terwijl P verdichtingspunt van Γ_z is, zoodat in elke cirkel om P punten van Γ_z liggen, die dus niet tot G_z behooren. Ook aan de tweede voorwaarde voor een grenspunt is dus voldaan. Elk verdichtingspunt van Γ_z behoort tot I_z; Γ_z is dus gesloten.

Stelling: $\bar{G}_z = G_z + \Gamma_z$ is een perfecte puntverzameling.

Bewijs: $\bar{G}_z$ is gesloten: want alle verdichtingspunten van G_z, die niet tot G_z behooren, liggen op Γ_z, dus in $\bar{G}_z$, en alle verdichtingspunten van Γ_z liggen op Γ_z, dus in $\bar{G}_z$. Verder is $\bar{G}_z$ dicht in zich zelf; immers, als P_z een punt van G_z is, ligt er een interval I_P om P, waarin G_z doordringt; en evenzoo, als P_z een punt van Γ_z is; P_z is dus in ieder geval verdichtingspunt van $\bar{G}_z$. $\bar{G}_z$ is bijgevolg gesloten èn dicht in zichzelf, dus perfect.

Stelling: De rand Γ_z van een enkelvoudig samenhangend gebied G_z, is een perfecte puntverzameling.

Bewijs: De rand van een enkelvoudig samenhangend gebied is een ééndeelig continuum, d.w.z. is een gesloten puntverzameling, die niet in twee gesloten puntverzamelingen zonder gemeenschappelijke punten kan worden gesplitst. Kon men deze splitsing n.l. wel uitvoeren, dan was het mogelijk een polygoon te construeeren, die de beide deelen van elkaar scheidde [21]), waaruit dan volgen zou, dat G_z niet enkelvoudig samenhangend was, zooals werd ondersteld.

Beschouw nu een punt P_z van Γ_z: was er een omgeving van P_z, waarin dit punt het eenige grenspunt was, dan zou P_z een geisoleerd grenspunt zijn, en de rand Γ_z was te splitsen in minstens twee gesloten deelen; n.l. P_z en $\Gamma_z - P_z$, in strijd met de vorige alinea.

---

[12]) Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie I, 1930, blz. 86.

KON. BAT. GENOOTSCHAP VAN K. EN W.

I_z is dus dicht in zichzelf, en gesloten, dus perfect.

Stelling: Als Γ_z de rand is van een enkelvoudig samenhangend gebied, dat begrensd is, d.w.z. gelegen binnen een cirkel met eindige straal, dan zal op elke halfstraal, vanuit een punt P_z van G_z getrokken, minstens één punt van Γ_z gelegen moeten zijn.

Bewijs: Op zoo'n halfstraal l ligt stellig een punt Q_z buiten G_z, omdat G_z binnen een bepaalde cirkel ligt. Beschouw de benedenste grens b van de afstanden van P_z tot de punten op l, die niet in G_z liggen. Past men b af op P_zQ_z, dan vindt men een punt S, dat op Γ_z ligt. Immers: er is géén cirkel om S, die geheel in G_z ligt, omdat in elke cirkel om S buitenpunten van G_z doordringen, op grond van de definitie van benedenste grens. In elke cirkel om S dringt echter G_z door: alle punten op PS (onverlengd) binnen die cirkel zijn n.l. punten van G_z; was er toch een buitenpunt bij, dan was de benedenste grens te verkleinen. S is dus punt van Γ_z.

Het aldus bepaalde punt van I_z is vanuit P_z langs l bereikbaar (zie de definitie van § 2*b*).

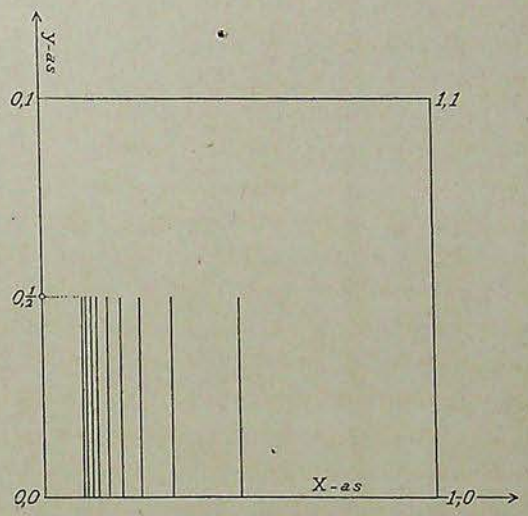


Fig. 2. Voorbeeld van een algemeene Jordan-kromme met niet bereikbare punten.

Een algemeene Jordan-kromme kan echter óók punten bevatten, die *niet bereikbaar* zijn, in tegenstelling met de eenvoudige Jordan-kromme (§ 2*b*).

Voorbeeld I: De punten van het deel: $x = 0$; $0 \leqq y < \frac{1}{2}$ van

PERPUSTAKAAN NASIONAL

de Jord. kromme, die bestaat uit de zijden van het vierkant met (0,0), (0,1), (1,1), (1,0) tot hoekpunten en de loodlijnen ter lengte van $\frac{1}{2}$, in de punten $x = \frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, 4 \ldots .)$ van de x-as op deze opgericht, zijn vanuit het binnengebied dezer kromme niet bereikbaar. — Zie fig. 2.

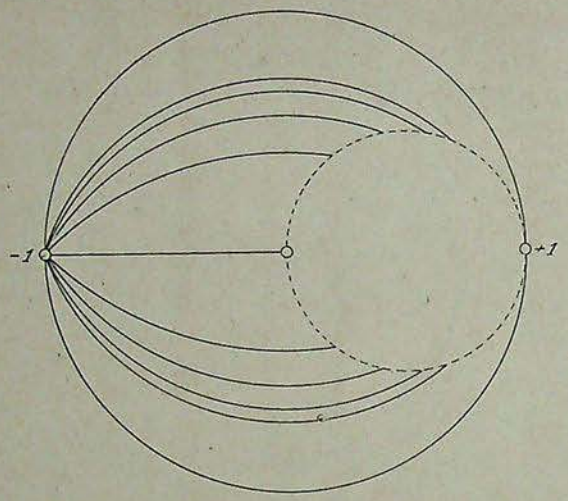


Fig. 3. Voorbeeld eener algemeene Jordan-kromme met 2 niet-puntvormige randelementen en met een randpunt van aftelbaar oneindige veelvuldigheid.

Voorbeeld II: (van CARATHEODORY [22])). Beschouw de eenheidscirkel, en die bogen van de cirkels door de punten

$$z = +1 \text{ en } z = -1,$$

die de reëele as snijden onder hoeken

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \ldots . \; (n = 2, 3, 4 \ldots .),$$

voorzoover deze bogen binnen de eenheidscirkel en buiten de cirkel $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ liggen. De cirkel vormt met deze bogen een Jordan-kromme, waarvan alle punten van de eenheidscirkel, met uitzondering van de punten $z = \pm 1$, niet bereikbaar zijn. — Zie fig. 3.

---

[22]) CARATHEODORY, Über die Winkelderivierten enz., blz. 52, zie [8])

PERPUSTAKAAN NASIONAL

De eigenschap van een eenvoudige Jordan-kromme, genoemd in § 2*a*, geldt evenmin voor elke algemeene Jordan-kromme.

Fig. 4 geeft een voorbeeld van een algemeene Jordan-kromme, die het vlak in 4 gebieden verdeelt. Het gebied is „spiraalvormig gewonden" om een cirkel met straal r, d.w.z. de rand bestaat uit twee deelen, die elk asymptotisch tot die cirkel na-

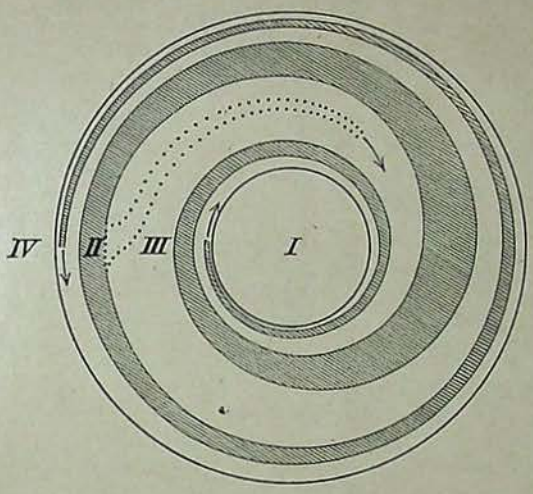


Fig. 4. Voorbeeld eener algemeene Jordan-kromme, die het vlak in 4 gebieden verdeelt.

deren, terwijl het gebied tevens „spiraalvormig gewonden" is binnen een cirkel met straal $R > r$, d.w.z. dat de genoemde deelen van de rand de cirkel met straal R van binnen asymptotisch benaderen [23]). *Door „vertakking der spiraalarmen" kan men uit dit voorbeeld een kromme afleiden, die het vlak in een willekeurig aantal gebieden (eventueel oneindig veel) verdeelt.*

§ 4 — Bewijs van Wolff van de Stelling van Osgood

Aan het *bewijs van* WOLFF [24]) *van de stelling van* OSGOOD over de continue, één-éénduidige correspondentie van de punten van de eenheidscirkel Γ_w ($|w| = 1$), op welks binnengebied door de

---

[23]) E. STUDY, Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche, 1913, blz. 44.

[24]) J. WOLFF, Sur la représentation conforme; Verslagen Kon. Ak. van Wetensch., 25 Jan. 1930; blz. 96.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

holomorfe functie $w = f(z)$ het enkelvoudig samenhangend, schlicht gebied G_z, begrensd door een eenvoudige Jordan-kromme Γ_z, één aan één en conform wordt afgebeeld, met de punten van deze kromme Γ_z, laten we een drietal hulpstellingen voorafgaan.

Hulpstelling I.

Onderstelling: *De holomorfe functie $w = f(z)$ beeldt het eindige gebied G_z af op het eindige gebied G_w; oppervlakte van $G_w = I_w$.*

Bewering: $$\int_{g_z} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dO = I_w.$$

Bewijs: Stellen we $z = x + iy$ en $w = u + iv$, dan zijn u en v functies van x en y, die voldoen aan de differentiaalvergelijkingen van CAUCHY—RIEMANN:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Met behulp van deze betrekkingen gaat de functionaaldeterminant

$$\begin{Vmatrix} u & v \\ x & y \end{Vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

over in $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Uit: $$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,.\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,.\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\overline{f'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,.\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,.\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

waarin $\overline{f'(z)}$ toegevoegd complex is t.o.v. $f'(z)$, volgt:

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \equiv f'(z)\,.\,\overline{f'(z)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \begin{Vmatrix} u & v \\ x & y \end{Vmatrix}.$$

Bijgevolg is:

$$I_w = \iint_{g_w} du\,.\,dv = \iint_{g_z} \begin{Vmatrix} u & v \\ x & y \end{Vmatrix} dx\,dy = \int_{g_z} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dO.$$

Hulpstelling II.

Onderstelling: *De functie $w = f(z)$, holomorf in G_z, beeldt G_z af op G_w.*

$z = \varphi(s)$ is de vergelijking van een kromme l_z in G_z.

l_w is de beeldkromme in G_w; lengte van $l_w = k_w$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Bewering: $\int_{l_z} \left| \frac{dw}{ds} \right| ds = k_w.$

Bewijs: Men heeft: $k_w = \int_{l_w} \sqrt{du^2 + dv^2}$

$$= \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2}\, ds,$$ als de eind-

punten van de kromme l_z door de parameterwaarden s_1 en s_2 bepaald worden, dus wegens $\frac{dw}{ds} = \frac{du}{ds} + i\frac{dv}{ds}$:

$$k_w = \int_{l_z} \left| \frac{dw}{ds} \right| ds.$$

Hulpstelling III. **Ongelijkheid van Schwarz**

Onderstelling: *$u(x)$ en $v(x)$ zijn sommeerbaar en $\geqq 0$ op de puntverzameling e: $a \leqq x \leqq b$.*

Bewering:

$$\left[\int_e u(x) \,.\, v(x)\right]^2 \leqq \int_e [u(x)]^2 \,.\, \int_e [v(x)]^2$$

Bewijs:

$$\int_e [u(x) + \lambda \,.\, v(x)]^2 = \int_e [u(x)]^2 + 2\lambda \,.\, \int_e u(x) \,.\, v(x) + \lambda^2 \,.\, \int_e [v(x)]^2$$

is een definiet positieve kwadratische vorm (pos. voor alle reële waarden van λ).

De discriminant van de vorm is dus positief.

Hieruit volgt de juistheid der bewering.

Methode van Wolff

Onderstelling: *$w = f(z)$, holomorf in G_z beeldt dit, enkelvoudig samenhangend, schlicht en eindig ondersteld gebied, af op de eenheidscirkelschijf G_w ($|w| < 1$).*
a_w is een punt van de rand Γ_w van G_w.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Bewering: *Er is een suite cirkelbogen binnen G_w, met a_w tot centrum, en met straal $\varrho_n \to 0$, zóódanig, dat voor de lengte l_{z_n} van de beeldkromme geldt:*

$$l_{z_n} \to 0 \text{ voor } n \to \infty.$$

Bewijs: Noem γ_{w_n} dàt deel van de cirkelomtrek met a_w als centrum en ϱ_n als straal, dat binnen G_w ligt.

Dan beweren we:

Er is een suite getallen $\varrho_n \to 0$ voor $n \to \infty$, waarvoor:

$$\varrho_n \int_{\gamma_{w_n}} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 ds \to 0, \text{ voor } n \to \infty \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Anders toch was er een $\varepsilon > 0$ en een $\delta > 0$, zóódat

$$\int_{\gamma_w} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 ds > \frac{\varepsilon}{\varrho} \text{ voor } \varrho < \delta,$$

waaruit zou volgen:

$$\iint \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 . ds\, d\varrho > \int_0^\delta \frac{\varepsilon}{\varrho} d\varrho = \infty,$$

waarbij de dubbelintegraal uitgestrekt wordt over het deelgebied van G_w, dat binnen de cirkelomtrek ligt om a_w als centrum en δ als straal, en de oppervlakte voorstelt van het beeldgebied van dit deelgebied. Hierdoor ontstaat een contradictie met hulpstelling I, omdat het totale beeldgebied G_z van G_w eindig ondersteld is.

De lengte l_{z_n} van γ_{z_n}, beeldkromme van γ_{w_n} wordt volgens hulpstelling II voorgesteld door:

$$\int_{\gamma_{w_n}} \left| \frac{dz}{dw} \right| ds.$$

Passen we nu hulpstelling III toe,

$$u(x) = \left| \frac{dz}{dw} \right| \text{ en } v(x) = 1 \text{ nemend,}$$

dan vinden we:

$$l_{z_n}^2 < \left[\int_{\gamma_{w_n}} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 ds \right] . \left[\int_{\gamma_{w_n}} ds \right] < \varrho_n . \pi . \left[\int_{\gamma_{w_n}} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 ds \right] \to 0,$$

voor $n \to \infty$, op grond van (1).

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Hieruit volgt: de lengte l_{z_n} van de beeldkromme heeft nul tot limiet, wat we bewijzen wilden.

Gevolgen: a) Zij nu Γ_z een eenvoudige Jordan-kromme, dan trekken de krommen γ_{z_n} zich samen tot één bepaald punt a_z van Γ_z.

Bewijs: We beschouwen de gebieden D_{z_n}, begrensd door γ_{z_n} en een deel van Γ_z (en waarvan de punten beeldpunten zijn van binnenpunten der cirkels om a_w met ϱ_n als straal). We voegen aan D_{z_n} de rand toe, en noemen het afgesloten gebied $\overline{D}_{z_n}$.

Beschouw de doorsnee: $D = \overline{D}_{z_1} . \overline{D}_{z_2} . \overline{D}_{z_3} . \ldots . \overline{D}_{z_n} . \ldots .$

Deze is, als doorsnee van oneindig veel in elkaar gedoosde, *gesloten* puntverzamelingen, niet leeg. De doorsnee kan géén enkel punt van G_z bevatten, doordat elk punt van G_w buiten de cirkel met a_w als middelpunt en ϱ_n als straal komt te liggen, vanaf zekere n.

De doorsnee bestaat dus uit één of meer punten van Γ_z.

Uit de in § 2*c* bewezen stelling volgt, dat de doorsnee D niet meer dan één punt van Γ_z kan bevatten, omdat, als de afstand van 2 punten van Γ_z tot nul nadert (met name van de punten, waarin γ_{z_n} op Γ_z steunt), de diameter van het deel van Γ_z tusschen deze punten ook tot nul nadert. Dit ééne punt is het in de stelling bedoelde punt a_z.

b) Voor een puntensuite $(w_n) \to a_w$ convergeert de beeldsuite z_n tot a_z, en omgekeerd.

Bewijs: Buiten elke cirkel ϱ_n (middelpunt a_w) ligt slechts een eindig aantal punten w_n, dus buiten elk gebied $\overline{D}_{z_n}$ ligt slechts een eindig aantal beeldpunten z_n, en dus géén verdichtingspunt. Het eenige verdichtingspunt van (w_n) ligt dus in de doorsnee van alle $\overline{D}_{z_n}$, in het punt a_z. Analoog als we de rol van a_z en a_w verwisselen.

c) In het voorgaande was a_w een willekeurig punt op Γ_w, waardoor een punt a_z op Γ_z bepaald werd. Uit het bovenstaande volgt nog niet, dat met een willekeurig punt β_z op Γ_z één enkel punt β_w op Γ_w correspondeert. Dit deel van het bewijs is echter gemakkelijk te geven.

Immers, als er met een puntensuite $(z_n) \to \beta_z$ een puntensuite (w_n) correspondeerde, die 2 verdichtingspunten w_1 en w_2 op Γ_w

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

had, dan kunnen we bewijzen, dat er punten uit G_z zijn, die correspondeeren met 2 verschillende punten uit G_w, in strijd met de correspondentie één aan één der gebieden G_z en G_w.

Op grond van het voorgaande bestaat er toch zoowel voor punt w_1 als voor punt w_2 een suite, ϱ_{n_1} resp. ϱ_{n_2}, zoodat de cirkels met deze stralen om w_1 en w_2 beschreven zich samentrekken tot β_z. Neemt men nu ϱ_{n_1} en ϱ_{n_2} zóó klein, dat deze cirkels buiten elkaar vallen, dan zal een punt, dat ligt in de doorsnee van de beelden der lensvormige deelen van G_w, door de twee cirkels om w_1 en w_2 bepaald, twee beelden in het w-vlak moeten hebben, één in elk der genoemde lensvormige deelen, in strijd met de correspondentie één aan één der gebieden G_z en G_w.

Er is dus maar één punt β_w, met een tot dit punt convergeerend stelsel van contraheerende cirkels, wier beelden tot β_z convergeeren.

Hiermee is de correspondentie één aan één der krommen Γ_z en Γ_w volledig aangetoond, voor het geval Γ_n een eenvoudige Jordankromme is.

Opmerkingen: Van de talrijke bewijzen, die van de Stelling van OSGOOD gegeven zijn, noemen wij die van CARATHEODORY, COURANT, KOEBE, LINDELÖF en FABER [25]). Het bewijs van WOLFF is het nauwst verwant aan dat van COURANT en FABER.

Het *bewijs van* COURANT is gebaseerd op de gelijkmatige continuiteit der afbeeldingsfunctie $w = f(z)$, die, bij COURANT, G_z niet afbeeldt op de eenheidscirkelschijf, maar op een Schlitz-gebied: het w-vlak, minus een lijnsegment, evenwijdig aan de reëele as van het w-vlak. Het bewijs van die gelijkmatige continuiteit steunt o.m. op de oppervlakte-integraal uit hulpstelling I en de onge-

---

[25]) CARATHEODORY, Math. Annalen 73; 1913; Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der Konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis, blz. 305, e.v.

COURANT, Göttinger Nachrichten; 1914; Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei Konformer Abbildung; blz. 101, e.v.

KOEBE, Crelle's journal, Band 145; 1915; Abhandlungen zur Theorie der Konformen Abbildung; blz. 177, e.v.

LINDELÖF, Comptes rendus; 26 Jan. 1914. Sur la représentation conforme.

FABER, Sitzungsberichte Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, 1922; blz. 93, e.v.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

lijkheid van SCHWARZ (hulpstelling III). De rol van de boogintegraal uit hulpstelling II wordt in zekere zin overgenomen door de integraal $\int \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|_{\varrho \text{ constant}} d\theta$ langs een bepaalde boog van een cirkel met een punt P_z van Γ_z tot centrum, welk punt door COURANT tot oorsprong van een poolcoördinatensysteem (ϱ, θ) wordt gekozen.

De bewijsvoering is minder rechtstreeksch dan die van WOLFF, in wiens bewijs de bepaling van de suite tot nul naderende stralen ϱ_n met de eigenschap (1) van blz. 16 als het meest wezenlijke deel van de methode moet worden aangemerkt.

De *bewijsvoering van* FABER is nauwer aan die van WOLFF verwant. Ook dit bewijs steunt op oppervlaktebeschouwingen, booglengtebeschouwingen en de ongelijkheid van SCHWARZ. Echter wordt in het bewijs het gebruik der integralen uit hulpstelling I en II vermeden. FABER voert een quadrillagé van het z-vlak in en werkt met benaderingen van oppervlak en booglengte door Σ-sommen. We ontmoeten reeds een stelsel van tot een randpunt contraheerende cirkels, maar deze worden gelegd in het z-vlak met een randpunt P_z van de Jordan-kromme Γ_z tot middelpunt; tengevolge van het gedrag van Γ_z nabij P_z voert de benadering van oppervlak en booglengte tot minder eenvoudige formuleeringen dan het gebruik der bedoelde integralen in de bewijsvoering van WOLFF, waar het oppervlak een cirkelschijf, de boog één enkele cirkelboog is.

De *toepassing betreffende de nulmaat*, tot welke de methode van WOLFF aanleiding zal blijken te geven (zie § 7, blz. 23) ingeval van een algemeene Jordan-kromme als randkromme, ontbreekt zoowel bij FABER als bij COURANT.

§ 5 — Continuiteit der randcorrespondentie

Aan het bewijs van de stelling van OSGOOD ontbreekt nog het *bewijs van de continuiteit* in de correspondentie van de randpunten.

Onderstelling: (z_n) *is een puntensuite op* Γ_z; $\lim_{n\to\infty} z_n = z^*$,

w_n *is het punt op* Γ_w, *dat aan* z_n *op* Γ_z, *en*
w^* *is het punt op* Γ_w, *dat aan* z^* *op* Γ_z *volgens § 4 is toegevoegd.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Bewering: $\lim_{n\to\infty} w_n = w^*$.

Bewijs: Sla om z_n een cirkel met straal $\frac{1}{n}$, en om w_n eveneens; kies een punt z_n' uit het gebied, dat de eerste cirkelschijf gemeen heeft met het beeld van de doorsnee van de tweede met G_w. Noem het beeldpunt w_n'.

Dan geldt: $\lim_{n\to\infty} z_n' = z^*$, volgens de constructie,

$$\text{en } \lim_{n\to\infty} w'_n = w^*, \text{ volgens § 4. . . . . } (1)$$

Volgens de constructie is voorts: $\lim_{n\to\infty} (w_n' - w_n) = 0$,

$$\text{dus } \lim_{n\to\infty} w_n' = \lim_{n\to\infty} w_n \text{ . . . . . } (2)$$

Uit (1) en (2) volgt: $\lim_{n\to\infty} w_n = w^*$ [26]).

§ 6 — De correspondentie tusschen de rand Γ_z en de rand Γ_w, ingeval Γ_z een algemeene Jordan-kromme is

De conclusie van § 4, gevolg *a*, dat de doorsnee D der samentrekkende gesloten gebieden $\bar{D}_{z_n}$ één punt is, vervalt, indien we de onderstelling, dat Γ_z een eenvoudige Jordan-kromme is, laten vervallen. De diameter van een deelboog P_1P_n eener algemeene Jordan-kromme kan n.l. zeer goed een positieve limiet hebben, ook al heeft men $\lim_{n\to\infty} P_n = P_1$ (zie § 2*c*). Dit is zeer eenvoudig aan voorbeeld I van § 3, te illustreeren.

Verbindt men het punt $(0, \frac{1}{2})$ uit voorbeeld I door een suite bogen l_{z_n} met de punten $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$, en wel zoodanig, dat de bijbehoorende afgesloten gebieden $\bar{D}_{z_n}$ blijven voldoen aan $\bar{D}_{z_{n+1}} \prec \bar{D}_{z_n}$, dan is het duidelijk, dat de doorsnee D in dit geval bestaat uit het lijnsegment: $x = 0$; 0 en $y \leqq \frac{1}{2}$.

Om de correspondentie tusschen de randen Γ_z en Γ_w in dit algemeene geval te overzien, voeren we het begrip randelement in.

Onder een *randelement*, toegevoegd aan een punt a_w van Γ_w. verstaan we de doorsnee van de suite gesloten gebieden $\bar{D}_{z_n}$, wier contouren bestaan ten deele uit deelbogen van Γ_z, ten deele uit

---

[26]) Zie: CARATHEODORY, Mathem. Annalen 73; 1913; blz. 315, e.v.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

de beelden van een suite tot a_w samentrekkende cirkelbogen.

Uit het theorema van WOLFF uit § 5 volgt nu terstond:
met elk punt a_w op Γ_w correspondeert één randelement van Γ_z.

Deze randelementen waren in het geval van een eenvoudige Jordan-kromme punten, maar behoeven dat volgens het bovenstaande niet te zijn bij een algemeene rand.

Om te bewijzen, dat met 2 verschillende punten w_1 en w_2 van Γ_w niet éénzelfde randelement kan overeenstemmen, moeten we eerst *aangeven, wanneer we 2 randelementen gelijk, wanneer verschillend noemen.*

Onder twee *gelijke randelementen,* bepaald door de suites

$$(\bar{D}_{z_n}) \text{ en } (\bar{D}'_{z_n})$$

van samentrekkende gesloten gebieden, verstaat men randelementen, waarbij elke $\bar{D}_{z_n}$ met elke $\bar{D}'_{z_n}$ punten van het gebied G_z gemeen heeft; men noemt de randelementen *verschillend,* als er een n en een n' zijn te bepalen, zóódat $\bar{D}_{z_n}$ en $\bar{D}'_{z_n}$ géén punten van G_z meer gemeen hebben.

Indien nu met 2 verschillende punten w_1 en w_2 van Γ_w één randelement R_z van Γ_z correspondeerde, dan kon men een suite punten (z_n) aangeven gelegen in $(\bar{D}_{z_{1_n}})$ en in $(\bar{D}_{z_{2_n}})$, waarvan de beelden in het w-vlak, voor n groot genoeg, zouden liggen in 2 buiten elkaar gelegen cirkels om w_1 en w_2, zoodat de correspondentie één aan één der binnengebieden opgeheven zou zijn.

Doordat, zooals gemakkelijk valt in te zien, met elke puntensuite, die tot één of meer punten van eenzelfde randelement R_z van Γ_z convergeert, een puntensuite (w_n) correspondeert, die minstens 1 verdichtingspunt op Γ_w heeft, correspondeert er met dit randelement op grond der bewezen stellingen juist één punt van Γ_n.

Hiermee is de één-éénduidige correspondentie tusschen de punten van Γ_w en de randelementen van Γ_z bewezen.

§ 7 — Veelvuldigheid van een randpunt

Indien in één punt van de rand Γ_z van een gebied G_z n verschillende randelementen liggen, noemt men dit randpunt een *n-voudig randpunt.*

De randpunten van een eenvoudige Jordan-kromme zijn op grond van § 4 alle enkelvoudig.

Als men een kromme l_z in G_z kan leggen, die van een rand-

PERPUSTAKAAN NASIONAL

punt P_z naar dit randpunt teruggaat, maar die randpunten van G_z tot binnenpunten heeft, dan is P_z een meervoudig randpunt. Men kan zeggen, dat elk in P_z uitmondend uiteinde van l_z een randelement bepaalt. De krommen k_{z_n}, die, op P_z samentrekkend, de verschillende randelementen helpen bepalen, vindt men b.v., door op zoo'n uiteinde een tot P_z convergeerende puntenreeks (z_n) aan te nemen, en een stel concentrische cirkels te leggen met P_z als middelpunt door de punten z_n. De bogen, die men krijgt, door uitgaande van z_n de door dit punt gaande cirkel te vervolgen, naar weerskanten, tot men een randpunt ontmoet, kan men kiezen tot bogen k_{z_n}.

Voorbeeld van aftelbaar oneindige veelvuldigheid

Beschouw het tweede voorbeeld van § 3, blz. 12. Beschrijft men een cirkel met $z = -1$ tot middelpunt en ϱ_n (< 1) tot straal, dan wordt deze cirkel door de algemeene Jordan-kromme in aftelbaar oneindig veel bogen verdeeld (waarvan we die buiten de eenheidscirkel buiten beschouwing laten) en die zich voor $\varrho_n \to 0$ alle tot verschillende randelementen, alle éénpuntig en in -1 gelegen, samentrekken. Met $z = -1$ correspondeeren op de eenheidscirkel Γ_w aftelbaar veel punten.

Voorbeeld van oneindige veelvuldigheid van de machtigheid van het continuum [27]).

Beschouw de bovenste helft van de om O beschreven eenheids-

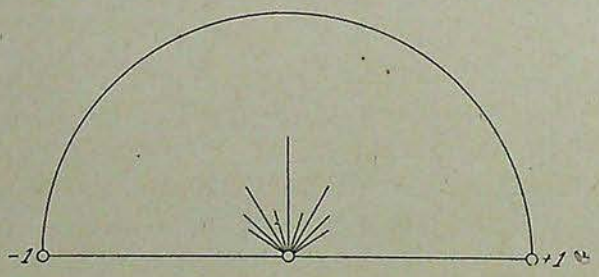


Fig. 5. Voorbeeld van een randpunt van oneindige veelvuldigheid met de machtigheid van het continuum (Caratheodory).

cirkel, en pas op de imaginaire as een stuk ter lengte van $\frac{1}{2}$ af, op de stralen met argument $\frac{1}{3}\pi$ en $\frac{2}{3}\pi$ stukken ter lengte van $\frac{1}{3}$, alge-

[27]) C. CARATHEODORY, Math. Annalen 73; 1913; blz. 363.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

meen: op de stralen met argument $\frac{p}{q}\pi$ (p en q onderling ondeelbaar) stukken ter lengte van $\frac{1}{q}$. Al deze lijnsegmenten met halve cirkel en middellijn vormen de rand Γ_z van een gebied G_z. Zie fig. 5.

De oorsprong O is vanuit gebied G_z bereikbaar langs elke straal met argument $a\pi$, als a onmeetbaar is. Twee verschillende stralen definiëeren 2 verschillende randelementen, zooals blijkt uit het feit, dat men die stralen door een kromme binnen G_z kan verbinden, die randpunten van G_z tot inwendige punten heeft. Het aantal randelementen, dat in O is vereenigd, bezit bijgevolg de machtigheid van het continuum.

Voor de verzameling van de beeldpunten op de eenheidscirkel Γ_w geldt nu de volgende stelling [28]).

Onderstelling: *P_z is randpunt van G_z en behoort tot een oneindig aantal randelementen R_z van Γ_z;*
$w = f(z)$ beeldt G_z af op de eenheidscirkel G_w; rand: Γ_w.
De randelementen R_z correspondeeren met de puntverzameling (a_w) op Γ_w.

Bewering: *De puntverzameling (a_w) is van de maat nul.*

Bewijs: De bewijsvoering loopt parallel met die van § 4, blz. 7.

Beschouw een cirkel met P_z als middelpunt en ϱ_n als straal, en noem de bogen van deze cirkel, voorzoover ze binnen G_z liggen, achtereenvolgens:

$$\gamma_{z_n}^{(1)} \; ; \; \gamma_{z_n}^{(2)} \; ; \; \gamma_{z_n}^{(3)} \; ; \; \ldots . \; \gamma_{z_n}^{(m)} \ldots .$$

Dan beweren we:
er is een suite getallen $\varrho_n \to 0$, voor $n \to \infty$, waarvoor:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varrho_n \cdot \int_{\gamma_{z_n}^{(m)}} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 ds \to 0 \text{ voor } n \to \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Anders toch was er een $\varepsilon > 0$ en een $\delta > 0$, zóódat

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\gamma_z^{(m)}} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 ds > \frac{\varepsilon}{\varrho} \text{ voor } \varrho < \delta,$$

---

[28]) J. Wolff, Verslagen K. A. v. W. 25 Jan. 1930; blz. 97.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

waaruit zou volgen:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \iint_{g_z^{(m)}} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 ds\, d\varrho > \int_0^{\delta} \frac{\varepsilon}{\varrho} . d\varrho = \infty.$$

Met $G_z^{(m)}$ wordt bedoeld het deelgebied van G_z, dat binnen de cirkelomtrek om a_w als middelpunt en δ als straal ligt, voorzoover het begrensd wordt door boog $\gamma_z^{(m)}$. De dubbelintegraal over dit gebied is gelijk aan de oppervlakte van het beeldgebied van dit deelgebied. De som der dubbelintegralen stelt een deel van de eindig onderstelde oppervlakte van het beeldgebied G_z voor, en kan dus niet ∞ zijn. Hieruit volgt het bestaan van een suite getallen (ϱ_n) met de eigenschap (1).

Noemen we $l_{w_n}^{(m)}$ de lengte van de boog in het w-vlak, die beeld is van $\gamma_{z_n}^{(m)}$ en S_n de som van de lengten dezer beeldkrommen, dan geldt, op grond van de ongelijkheid van SCHWARZ:

$$S_n^2 = \left[\int_{\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{w_n}^{(m)}} \left|\frac{dw}{dz}\right| ds\right]^2 < \left[\int_{\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{w_n}^{(m)}} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 . ds\right] . \left[\int_{\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{w_n}^{(m)}} ds\right]$$

$$< 2\pi . \varrho_n \left[\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\gamma_{w_n}^{(m)}} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 ds\right] \to 0 \text{ voor } n \to \infty \text{ op grond van (1).}$$

Hieruit volgt, dat de som van de lengten der beeldkrommen voor $n \to \infty$ nul tot limiet heeft.

De puntverzameling op Γ_w, waarop deze krommen zich samentrekken, is dus van de maat nul.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

HOOFDSTUK II

CONTRACTIETHEOREMA VAN SCHWARZ

§ 8 — Dekpunt der transformatie in de oorsprong

a) Als $f(z)$ holomorf is voor $|z| < 1$ en $|f(z)| < 1$ voor $|z| < 1$, terwijl $f(0) = 0$, geldt voor elk punt z met $|z| < 1$ de ongelijkheid:

$$|f(z)| \leqq |z|$$

Bewijs: $z = 0$ is nulpunt van $f(z)$, waaruit de holomorfie van

$$\psi(z) = \frac{f(z)}{z} \text{ voor } |z| < 1 \text{ volgt.}$$

De modulus van $\psi(z)$ bereikt voor $|z| \leqq \varrho < 1$ zijn maximum op de rand van deze cirkelschijf, dus:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqq \frac{1}{\varrho}, \text{ voor elke } \varrho > |z| \text{ en } < 1,$$

waaruit volgt: $|f(z)| \leqq |z|$ [29]).

b) Indien voor één punt $z = z_1$ geldt: $|f(z_1)| = |z_1|$, geldt de gelijkheid $|f(z)| = |z|$ voor álle punten z met $|z| < 1$; de functie is dan lineair in z, en wel: $f(z) = e^{i\theta} \cdot z$, θ reëel.

Bewijs: Volgens de stelling van de gebiedsoverdracht moet, indien $\psi(z)$ geen constante is, door $w = \psi(z)$ een omgeving van z_1 op een omgeving van $\psi(z_1)$ worden afgebeeld, zoodat, ingeval $|\psi(z_1)| = 1$ is, er punten z zijn met $|\psi(z)| > 1$, in strijd met § 8*a*.

$\psi(z)$ is dus een constante, waarvan wegens $|\psi(z_1)| = 1$, de modulus 1 is.

$$\therefore \psi(z) = e^{i\theta} \text{ en } f(z) = e^{i\theta} \cdot z.$$

Opmerking: bij *a* en *b*. We kunnen, indien we de eenheidscirkels C_w^1 en C_z^1 van w-vlak en z-vlak op elkaar gelegd denken, dit theorema van SCHWARZ ook a.v. in woorden brengen:

---

[29]) H. A. SCHWARZ en C. CARATHEODORY, t.a.p., noot [7]).

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Als $w = f(z)$ de eenheidscirkelschijf van het z-vlak afbeeldt op een gebied binnen de eenheidscirkel van het w-vlak en O vastlaat, dan zal het beeld van elk punt z komen te liggen binnen of op de cirkelomtrek door z met O als middelpunt. Indien het beeld van eenig punt z op de genoemde cirkel komt te liggen, geldt deze eigenschap voor alle punten. De transformatie is dan een rotatie om O.

c) *Voor $f(z)$ geldt, indien de functie niet lineair is, $|f'(0)| < 1$.*

Bewijs: Uit *a* volgt:

$$|f'(0)| = \lim_{z \to 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leqq 1.$$

Indien het gelijkteeken geldt, zal de transformatie $y = \frac{f(z)}{z}$ een omgeving van $z = 0$ met een omgeving van $y = 1$ doen correspondeeren. Dit beteekent echter, dat er in een omgeving van $z = 0$ punten zijn, waarvoor $\left| \frac{f(z)}{z} \right| > 1$, in strijd met § 8*a*, tenzij $f(z) \equiv e^{\theta i} z$.

De stelling volgt ook uit de integraal van CAUCHY.

Indien $f'(0) \neq 0$ (anders toch was het gestelde zonder bewijs duidelijk), is er een omgeving van $z = 0$ met $f'(0) \neq 0$, waarin we een cirkel met 0 als middelpunt en ϱ als straal kunnen leggen, zóódat:

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\odot_\varrho} \frac{f(t)}{t^2} dt.$$

Hieruit volgt, door het schattingstheorema voor de integraal toe te passen:

$$|f'(0)| < \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varrho \cdot \frac{\varrho}{\varrho^2} = 1.$$

d) *De eenige functies, die de eenheidscirkelschijf conform op zichzelf afbeelden met de oorsprong als dekpunt, zijn de lineaire functies van de vorm: $w = e^{i\theta} \cdot z$, θ reëel.*

Bewijs: Nu is niet alleen $|w| \leqq |z|$ voor $|z| < 1$, maar ook $|z| \leqq |w|$ voor $|w| < 1$, waaruit $|w| = |z|$, dus $w = e^{i\theta} \cdot z$ volgt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

e) **Uniciteitsstelling** *t.o.v. de afbeelding van een enkelvoudig samenhangend gebied G_z op de eenheidscirkelschijf G_w^1* [30]).

Onderstelling: $w = f_1(z)$ *en* $w = f_2(z)$ *beelden beide het enkelv. samenhangend gebied* G_z *af op* G_w ($|w| < 1$). $z = 0$ *is een punt van* G_z; $f_1(0) = f_2(0) = 0$. *Beide afbeeldingen laten de richting van de positieve reële as in O invariant.*

Bewering: $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Bewijs: Als $z = \varphi_1(w)$ de inverse functie is van $w = f_1(z)$, is $f_2\{\varphi_1(w)\}$ een holomorfe functie in G_w, die deze cirkelschijf op zichzelf afbeeldt en $w = 0$ invariant laat. Volgens de vorige stelling is dus $|f_1(z)| = |f_2(z)|$, m.a.w.: $f_1(z) = e^{i\theta} \cdot f_2(z)$. Alle richtingen in de oorsprong worden dus door deze transformatie over een hoek θ gedraaid: omdat voor één richting (die der pos. reële as) gegeven is, dat $\theta = 0$, is $\theta \equiv 0$ en dus $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

f) *Als $f(z)$ holomorf is in een gebied G_z, dat een cirkelschijf $|z| < r$ bevat, terwijl G_z deelgebied is van $|z| < R$ (met $R > r$), dan zal, indien aan de holomorfe functie $w = f(z)$ behalve de voorwaarde $f(0) = 0$ de voorwaarde $|f'(0)| = 1$ wordt opgelegd en deze functie G_z afbeeldt op de cirkelschijf G_w ($|w| < \varrho$), voldaan zijn aan:* $r \leqq \varrho \leqq R$. [31])

Bewijs: Stelt men $\frac{w}{\varrho} = w'$ en $\frac{z}{r} = z'$, dan wordt de cirkelschijf: $|z'| < 1$ afgebeeld op een gebied $|w'| < 1$, zoodat volgens § 8*c* $\left|\frac{dw'}{dz'}\right| \leqq 1$ is voor $z' = 0$; het gelijkteeken geldt slechts als G_z samenvalt met het gebied $|z| < r$.

Uit $\frac{dw'}{dz'} = \frac{dw'}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dz'} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{r}{\varrho}$ en $\left|\frac{dw}{dz}\right| = 1$ voor $z = 0$,

volgt: $r \leqq \varrho$ . . . . . (1)

Stelt men

$$\frac{w}{\varrho} = w' \text{ en } \frac{z}{R} = z'',$$

---

[30]) Caratheodory, Math. Annalen 72, 1912, blz. 111.

[31]) Faber, t.a.p., zie noot [25]).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dan wordt de cirkelschijf: $|w'| < 1$ afgebeeld op het gebied

$$|z''| < 1,$$

zoodat volgens § 8c $\left|\frac{dz''}{dw'}\right| \leqq 1$.

is voor $w' = 0$; het gelijkteeken geldt slechts, als G_z samenvalt met het gebied $|z| < r$.

Uit $\frac{dz''}{dw'} = \frac{dz''}{dz} \cdot \frac{dz}{dw} \cdot \frac{dw}{dw'} = \frac{dz}{dw} \cdot \frac{\varrho}{R}$ en $\left|\frac{dz}{dw}\right| = 1$ voor $w = 0$

volgt: $\varrho \leqq R$ . . . . . (2)

Valt G_z noch met $|z| < r$, noch met $|z| < R$ samen, dan is:

$$r < \varrho < R.$$

Gevolg: De in deze stelling bedoelde functie beeldt $|z| < \lambda r$ $(\lambda \leqq 1)$ af op een gebied binnen $|w| = \lambda\varrho$.

Bewijs: Uit § 8a volgt $\left|\frac{w}{\varrho}\right| < \left|\frac{z}{r}\right|$, waaruit de eigenschap volgt.

§ 9 — Dekpunt der transformatie niet in de oorsprong

a) Als $f(z)$ holomorf is voor $|z| < 1$ en $|f(z)| < 1$ voor $|z| < 1$, terwijl $f(z) = z$ een wortel $z = a$ heeft binnen $|z| = 1$, — m.a.w. als a dekpunt is van de transformatie $w = f(z)$, — zal het beeld $w = f(z)$ van elk punt z uit $|z| < 1$ komen te liggen binnen of op de cirkelomtrek door z, die tot de bundel behoort, waarvan de eenheidscirkel en het als nulcirkel beschouwde punt a twee exemplaren zijn.

De tweede nulcirkel van deze bundel is het punt $\frac{1}{\bar{a}}$, als $\bar{a}$ de toegevoegd complexe waarde van a is; we stellen de bedoelde bundel voor door $\left(a, \frac{1}{\bar{a}}\right)$, d.i. door de nulcirkels, die hem bepalen.

Indien voor één punt z' het punt $w' = f(z')$ op de cirkel door z' uit de bundel $\left(a, \frac{1}{\bar{a}}\right)$ ligt, geldt deze eigenschap voor alle punten en de functie $w = f(z)$ is lineair.

Voor de afgeleide in het punt a geldt: $|f'(a)| < 1$.

Bewijs: Door de lineaire transformaties:

$$\zeta = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \text{ en } \omega = \frac{w - a}{1 - \bar{a}w}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

worden de eenheidscirkels in z- en w-vlak omgezet in de eenheidscirkels van ζ- en ω-vlak, terwijl het punt $z = w = a$ overgaat in het punt $\zeta = \omega = 0$, en het punt $z = w = \frac{1}{\bar{a}}$ in het punt

$$\zeta = \omega = \infty.$$

De cirkels van de bundel $\left(a, \frac{1}{\bar{a}}\right)$ correspondeeren met de concentrische cirkels met middelpunt 0.

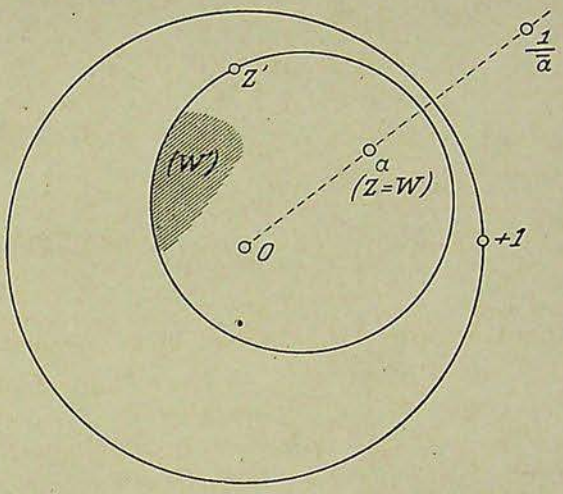


Fig. 6. Transformatie w = f(z), met dekpunt a (niet in O).

Hieruit volgen (zie fig. 6) in verband met § 8*a* en *b* terstond de eigenschappen der beide eerste alinéa's.

$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}$ geeft: $|f'(a)| < 1$, met behulp van § 8*c*.

De analytische uitdrukking van de stelling wordt thans:

$$\left|\frac{w - a}{1 - \bar{a}w}\right| \leqq \left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right|,$$

terwijl, als het gelijkteeken voor eenig punt z geldt, de functie $w = f(z)$ bepaald wordt door:

$$\frac{w - a}{1 - \bar{a}w} = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \qquad \theta \text{ reëel.}$$

(elliptische transformatie).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

b) Nemen we *in plaats van de eenheidscirkel het rechterhalfvlak* (*R.H.V.*) als holomorfiegebied van $f(z)$, en noemen we $\underline{a}$ het spiegelpunt van het dekpunt a t.o.v. de imaginaire as, dan leeren de transformaties:

$$\zeta = \frac{z - a}{z - \underline{a}}, \quad \omega = \frac{w - a}{w - \underline{a}},$$

waarbij de functie $w = f(z)$ overgaat in een functie $\omega = F(\zeta)$, holomorf voor $|\zeta| < 1$, met $|\omega| < 1$, en 0 als dekpunt, ons

$$\left|\frac{w - a}{w - \underline{a}}\right| \leqq \left|\frac{z - a}{z - \underline{a}}\right|.$$

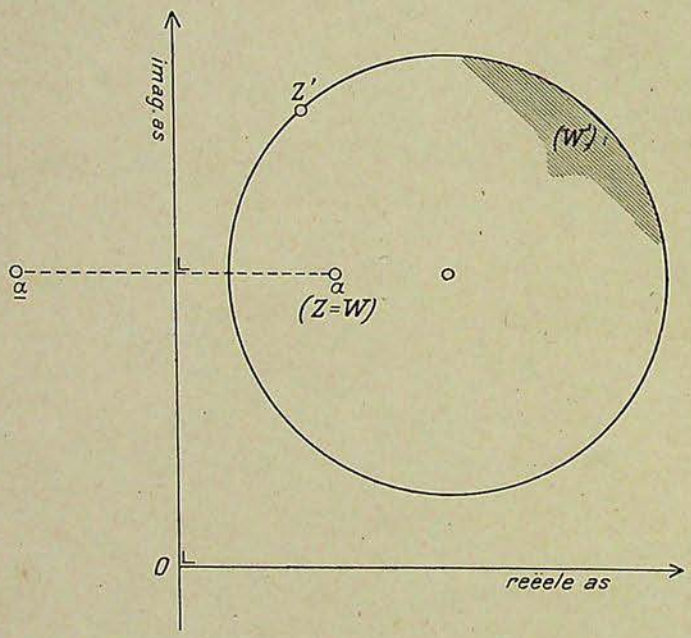


Fig. 7. Samentrekkende cirkelbundel $(a, \underline{a})$, als $f(a) = a$.

De geometrische inkleeding blijft vrijwel gelijk; de te beschouwen cirkelbundel is de bundel $(a, \underline{a})$. Zie fig. 7.

§ 10 — Algemeenere formuleering van het theorema van Schwarz; monotonie van $\frac{u}{x}$

Een eenvoudige transformatie van de eenheidscirkels G_z en G_w in zichzelf levert ons het volgende contractie-theorema.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

a) Als $w = f(z)$ *holomorf is voor* $|z| < 1$ *en* $|f(z)| < 1$ *voor* $|z| < 1$, *terwijl* $f(z_o) = w_o$, *dan geldt voor elk punt uit* $|z| < 1$ *de ongelijkheid*

$$\left|\frac{w - w_o}{w - \bar{w}_o w}\right| \leqq \left|\frac{z - z_o}{1 - \bar{z}_o z}\right|.$$

Indien voor één punt het gelijkteeken geldt, geldt het algemeen en is de functie $f(z)$ *lineair; ze is dan van de vorm:*

$$\frac{f(z) - w_o}{1 - \bar{w}_o . f(z)} = e^{i\theta} \frac{z - z_o}{1 - \bar{z}_o z}, \quad \theta \text{ reëel.}$$

Voor elk punt z *uit* G_z *geldt:* $|f'(z)| \leqq \frac{1}{1 - |z|^2}$.

Bewijs: De transformaties:

$$\zeta = \frac{z - z_o}{1 - \bar{z}_o z} \quad \text{en} \quad \omega = \frac{w - w_o}{1 - \bar{w}_o w}$$

zetten de eenheidscirkels van z- en w-vlak om in de eenheidscirkels van ζ- en ω-vlak; door deze transformaties wordt $\omega = F(\zeta)$ een hol. functie voor $|\zeta| < 1$, met $|\omega| < 1$, terwijl $F(0) = 0$. We kunnen dus § 8 toepassen, waaruit de stelling volgt.

Uit $\left|\frac{w - w_o}{z - z_o}\right| \leqq \left|\frac{1 - \bar{w}_o w}{1 - \bar{z}_o z}\right|$ volgt voor $w \to w_o$

$$|f'(z_o)| \leqq \frac{1 - |w_o|^2}{1 - |z_o|^2}, \text{ dus: } |f'(z)| \leqq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Een *meetkundige interpretatie* voor dit geval krijgen we a.v.

In een bundel cirkels bepaald door de nulcirkels a_1 *en* a_2 *is aan elk exemplaar een getal* λ *toegevoegd, dat aangeeft de constante verhouding van de afstanden van een punt van de cirkelomtrek tot de punten* a_1 *en* a_2. *Aan de eene nulcirkel is het getal 0, aan de andere het getal* ∞ *toegevoegd, aan de machtlijn van de bundel het getal 1; voor de cirkels, die* a_1 *als binnenpunt bevatten is* $\lambda < 1$, *voor die welke* a_2 *als binnenpunt bevatten is* $\lambda > 1$. *Voor elke cirkel, die binnen de cirkel ligt met* $\lambda = \lambda_1 < 1$ *is* $\lambda < \lambda_1$, *en voor elke cirkel, die binnen de cirkel ligt met* $\lambda = \lambda_1 > 1$, *is* $\lambda > \lambda_1$. (Zie fig. 8).

Zie nu § 9*a*. Door de transformatie $\omega = \frac{w - w_o}{1 - \bar{w}_o w}$ wordt, daar $\left|\frac{w - w_o}{w - \frac{1}{\bar{w}_o}}\right|$ de verhouding van de afstanden van punt w tot de

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

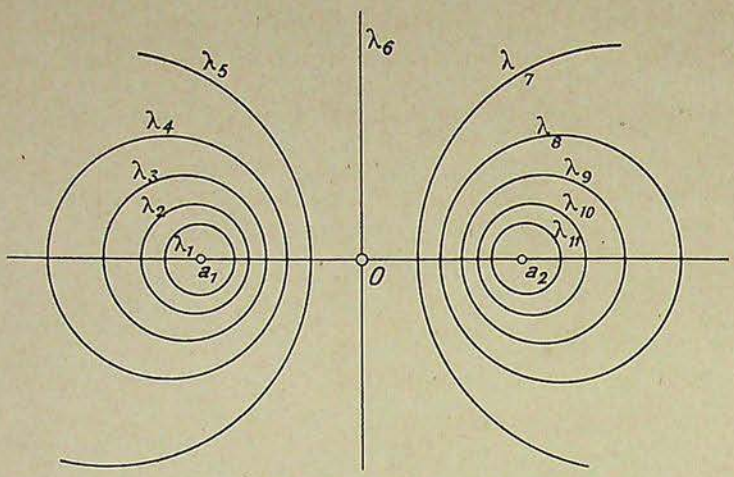


Fig. 8. Cirkelbundel met indices λ:
$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots . < \lambda_9 < \lambda_{10} < \lambda_{11}$.

nulcirkels van bundel $\left(w_o, \frac{1}{\overline{w_o}}\right)$ voorstelt, welke verhouding we λ_w noemen (constant op de cirkel door w van deze bundel) de cirkel van de bundel door w omgezet in een cirkel met straal $\varrho_w = \frac{\lambda_w}{|\, w_o \,|}$, om O van het ω-vlak.

Evenzoo wordt de cirkel met index λ_z uit het z-vlak [cirkel door z uit de bundel $\left(z_o, \frac{1}{\overline{z_o}}\right)$] omgezet in de cirkel met straal $\varrho_\zeta = \frac{\lambda_z}{|\, z_o \,|}$ van O van het ζ-vlak. Het geval $z_o = 0$, dat we hier moeten uitzonderen, beschouwen we hieronder afzonderlijk.

We hebben dan de formuleering:

Als z ligt op de cirkel met index $\lambda_z = \varrho \,|\, z_o \,|$ van de bundel $\left(z_o, \frac{1}{\overline{z_o}}\right)$, ligt het beeldpunt $w = f(z)$ binnen of op de omtrek van de cirkel uit de bundel $\left(w_o, \frac{1}{\overline{w_o}}\right)$ met index $\lambda_w = \varrho . |\, w_o \,|$. Ligt voor eenig punt z het beeldpunt w òp de omtrek van de genoemde cirkel, dan geldt deze eigenschap voor alle punten, en $f(z)$ is lineair.

b) Voor $z_o = 0$ wordt de stelling uit *a*:

$$\left| \frac{w - w_o}{1 - \overline{w}_o w} \right| \leqq |\, z \,|,$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

waarbij het gelijkteeken slechts geldt in het geval w lineair in z is.

Ligt z op de cirkel om O met straal ϱ, dan ligt het beeldpunt $w = f(z)$ binnen of op de cirkelomtrek uit de bundel $\left(w_o, \frac{1}{\overline{w}_o}\right)$ met index $\lambda_w = \varrho \,.\, |\, w_o\,|$.

Voor elk punt z met beeldpunt w geldt de ongelijkheid:

$$\frac{1 - |\, w\,|}{1 - |\, z\,|} \geqq \frac{1 - |\, w_o\,|}{1 + |\, z\,|\,.\,|\, w_o\,|} > \frac{1 - |\, w_o\,|}{1 + |\, w_o\,|}.$$

Bewijs: Stel in een figuur de punten $w = w_o$ en $w = \frac{1}{\overline{w}_o}$ door A en A' voor en het snijpunt van AA' met de eenheidscirkel S. (Zie fig. 9).

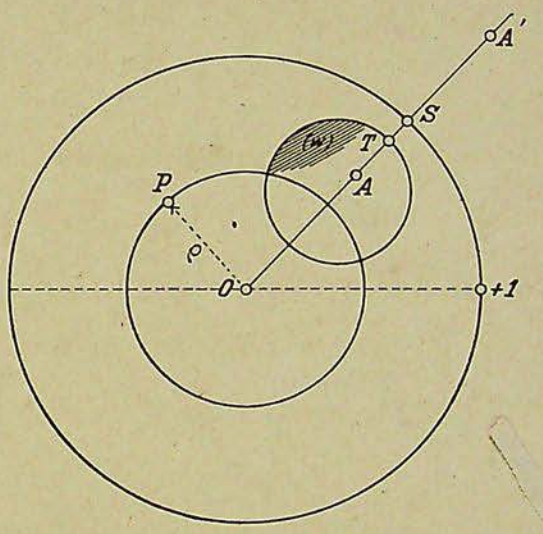


Fig. 9.

Bij de ongelijkheid: $\frac{1 - |\, w\,|}{1 - |\, z\,|} > \frac{1 - |\, w_o\,|}{1 + |\, w_o\,|}$.

Het beeldpunt P' van een punt P (de afstand tot O zij $\varrho = |\, z\,|$), valt in de cirkel van bundel $\left(w_o, \frac{1}{\overline{w}_o}\right)$ met index $\varrho\,|\, w_o\,|$.

Noemen we het snijpunt van deze cirkel met $AS\,T$, dan is

$$AT : TA' = \varrho\,|\, w_o\,| : 1, \text{ en } AA' = \frac{1 - |\, w_o\,|^2}{\overline{w}_o},$$

waaruit:

$$AT = \frac{\varrho\,(1 - |\, w_o\,|^2)}{\overline{w}_o}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Voor de afstand van S tot de cirkel, waarin het punt P' moet liggen, vinden we:

$$\frac{(1-\varrho)\,(1-|w_o|}{1+|z|\,.\,|w_o|}, \text{ met } \varrho = |z|,$$

waaruit de te bewijzen ongelijkheden volgen.

c) In verband met de te maken toepassingen bespreken we, ook nu, afzonderlijk het geval, dat *het holomorfiegebied van* $f(z)$ *het rechterhalfvlak* is, in plaats van de eenheidscirkel. De formuleering van het contractie-theorema wordt iets eenvoudiger dan in het geval, waarin $f(z)$ in de eenheidscirkel wordt beschouwd [32]).

Onderstelling: $w = u + iv$; $z = x + yi$;
$w = f(z)$ *is holomorf voor* $x > 0$;
$u > 0$; $f(z_o) = w_o$; $\underline{w}_o$ *en* $\underline{z}_o$ *zijn de spiegelpunten van* w_o *en* z_o *t.o.v. de imaginaire as.*

Bewering: $\left|\frac{w-w_o}{w-\underline{w}_o}\right| \leqq \left|\frac{z-z_o}{z-\underline{z}_o}\right|$; *het gelijkteeken geldt slechts, indien* $w = f(z)$ *lineair is, en dan steeds.*

Bewijs: De transformatie $\zeta = \frac{z-z_o}{z-\underline{z}_o}$, $\omega = \frac{w-w_o}{w-\underline{w}_o}$ levert ons, evenals in § 9*b*, terstond de stelling.

Deze is nu a.v. in te kleeden:

Als z ligt op de cirkel met index $\lambda_o = \varrho$ *uit de bundel* $(z_o, \underline{z}_o)$, *ligt het beeldpunt w op of binnen de cirkel met index* $\lambda_w = \varrho$ *uit de bundel* $(w_o, \underline{w}_o)$.

Denken we ons het z-vlak en het w-vlak met de imaginaire assen op elkaar geplaatst en de punten $z = iy_o$; $w = iv_o$ op elkaar, dan liggen de cirkelbundels $(z_o, \underline{z}_o)$, $(w_o, \underline{w}_o)$ homothetisch.

Door de bundel $(z_o, \underline{z}_o)$ vanuit het punt iy_o met $\frac{u_o}{x_o}$ te vermenigvuldigen, worden de cirkels met gelijke index uit beide bundels dus tot dekking gebracht.

Hieruit volgt:

Voor de abscis van het beeldpunt $w = f(z)$ *van een punt z geldt:*

---

[32]) J. Wolff, Comptes rendus, 7 April 1926.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$u \geqq \frac{u_o}{x_o}$ *maal de minimale abscis van de cirkel door* z *van de bundel* $(z_o, \underline{z}_o)$.

d) In de onderstellingen van c) geldt: $|f'(z)| \leqq \frac{u}{x}$.

Bewijs: De ongelijkheid:

$$\left|\frac{w - w_o}{w - \underline{w}_o}\right| \geqq \left|\frac{z - z_o}{z - \underline{z}_o}\right|$$

is te schrijven als $\left|\frac{w - w_o}{w + u_o - iv_o}\right| \geqq \left|\frac{z - z_o}{z + x_o - iy_o}\right|$,

d.i. $$\left|\frac{w - w_o}{z - z_o}\right| \geqq \left|\frac{w - w_o + 2u_o}{z - z_o + 2x_o}\right|.$$

Voor $w \to w_o$ volgt hieruit: $|f'(z_o)| \leqq \frac{u_o}{x_o}$.

Omdat $x_o + iy_o$ een willekeurig punt uit het R.H.V. is, is hiermee de stelling bewezen.

e) Indien z_1 *en* z_2 *punten uit het R.H.V. zijn met dezelfde ordinaat* $(y_1 = y_2)$, *dan geldt voor de abscissen der beeldpunten* w_1 *en* w_2:

$$\frac{u_2}{x_2} \geqq \frac{u_1}{x_1}, \text{ als } x_2 > x_1.$$

Bewijs: Uit $\left|\frac{dw}{dz}\right| \geqq \frac{u}{x}$, volgt: $\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| \geqq \frac{u}{x}$, dus stellig $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \geqq \frac{u}{x}$.

Dan is: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x}\right) \geqq 0,$$

waaruit het monotone afnemen van $\frac{u}{x}$ voor stijgende x volgt.

Gevolg: Het quotiënt $\frac{u}{x}$ *nadert op elke rechte evenwijdig met de reëele as tot een limiet, welke onafhankelijk is van de gekozen rechte.* (fig. 10).

Bewijs: Dat het getal $\frac{u}{x}$ op een rechte d evenwijdig de reëele as tot een limiet λ_d nadert, volgt uit de stelling, dat een monotoon afnemend, (althans niet toenemend,) reëel getal, dat naar beneden begrensd is, een limiet heeft.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

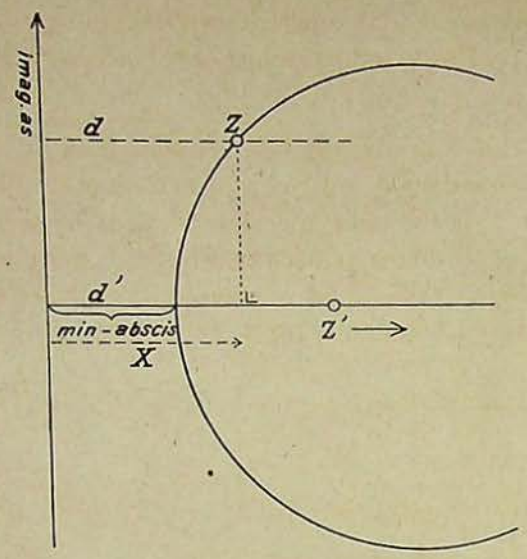


Fig. 10. Monotonie van $\frac{u}{x}$.

Noem nu de limiet, waartoe $\frac{u'}{x'}$ nadert, als z' op een rechte d' zich naar 't oneindige verplaatst: $\lambda_{d'}$.

Volgens c is nu: $u \equiv \frac{u'}{x'}$ maal de min. abscis van de cirkel door z uit bundel $(z', \underline{z}')$.

Deze minimale abscis heeft tot limiet x (voor $z' \to \infty$).

$$\therefore u \equiv \lambda_{d'} \,.\, x, \text{ of } \frac{u}{x} \equiv \lambda_{d'}.$$

Dit geldt voor elk punt z van d, dus: $\lambda_d \equiv \lambda_{d'}$.

Evenzoo is: $\lambda_{d'} \equiv \lambda_d$, door de rol van d en d' om te wisselen:

$$\therefore \lambda_d = \lambda_{d'}.$$

Gevolg: Als λ ***de*** *limiet is van* $\frac{u}{x}$ *voor* $x \to \infty$ *(y constant), dan geldt voor het beeldpunt w van een willekeurig punt z uit het RHV:*

$$u \equiv \lambda \,.\, x.$$

§ 11 — Niet-euclidische beschouwingen

Met behulp van de uitdrukkingswijze der niet-euclidische meetkunde zijn we in staat, aan het theorema van SCHWARZ, voor

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

het algemeene geval, dat omtrent een dekpunt der transformatie $w = f(z)$ niets wordt ondersteld, een eenvoudige formuleering te geven [33]).

a) We beschouwen daartoe *de eenheidscirkel als drager eener niet-euclidische meetkunde*, en wel van een meetkunde van LOBATSCHEWSKY of hyperbolische meetkunde. Het hyperbolische vlak worde zoodanig op de eenheidscirkelschijf van het euclidische vlak afgebeeld, dat de cirkels, die de eenheidscirkel orthogonaal snijden, de representanten worden van de niet-euclidische rechten; we noemen die cirkels *pseudo-rechten* [34]).

We kunnen gemakkelijk verifiëeren:

I door één punt gaan ∞^1 pseudo-rechten,

II door twee punten is één pseudo-rechte bepaald,

III de pseudo-rechten door een punt P vormen in Euclidische zin een cirkelbundel, die de (orthogonaal) toegevoegde bundel is van de bundel, die bepaald wordt door de eenheidscirkel en het punt P (als nulcirkel beschouwd,) als bundelexemplaren,

IV elke pseudo-rechte heeft 2 oneindig verre punten, n.l. de snijpunten met de eenheidscirkel,

V alle pseudo-rechten, getrokken door een punt P binnen de eenheidscirkel, dat niet op een pseudo-rechte l ligt, vallen uiteen in 2 groepen:

1° een groep, die l snijdt: (l_1).

2° een groep, die l niet snijdt: (l_2).

De twee cirkels door P, die de eenheidscirkel loodrecht snijden in de snijpunten van l met de eenheidscirkel, zijn de representanten van de 2 evenwijdigen, die men door een punt aan een rechte kan trekken. Ze behooren zelf tot de groep der niet-snijlijnen (k_1 en k_2). — Zie fig. 11.

---

[33]) HK. DE VRIES, De vierde dimensie.

[34]) Vgl. ook J. A. BARRAU, Analytische Meetkunde, Dl. I, hoofdstuk VI, waar we zien, dat de *groep der n. e. bewegingen* een drieledige ondergroep is van de achtledige groep der projectieve transformaties, welke ondergroep het binnengebied van een reëele kegelsnede (hier de eenheidscirkel) invariant laat.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

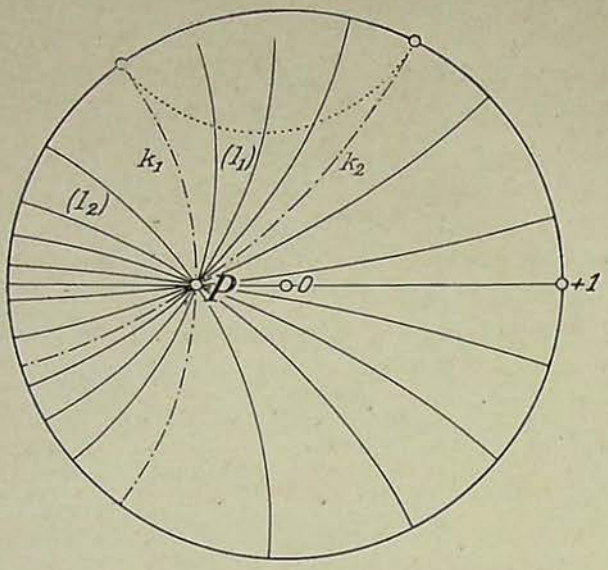


Fig. 11. De eenheidscirkel als drager eener n.e.-meetkunde.

VI Van een driehoek, begrensd door drie bogen van pseudo-rechten, is de som der hoeken kleiner dan 180° [35]).

b) Onder de *niet-euclidische afstand* $[w_1w_2]$ *van 2 punten* w_1 *en* w_2 binnen de eenheidscirkel C_w^1 zullen we verstaan:

$$[w_1w_2] = lg \mid (w_1w_2s_1s_2) \mid.$$

In deze definitie verstaan we onder $(w_1w_2s_1s_2)$ de dubbelverhouding:

$$\frac{w_1 - s_1}{w_1 - s_2} : \frac{w_2 - s_1}{w_2 - s_2},$$

waarbij s_1 en s_2 de snijpunten zijn van de cirkel door w_1 en w_2, die C_w^1 orthogonaal snijdt, en de punten $w_1w_2s_1s_2$ op die orthogonaalcirkel in de genoemde volgorde liggen.

Door deze definitie van afstand is voldaan aan *de eisch van de additie van afstanden:* als $w_1w_2w_3$ op éénzelfde pseudo-rechte liggen, is:

$$[w_1w_2] + [w_2w_3] = [w_1w_3].$$

---

[35]) Hk. de Vries, t.a.p., blz. 125.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Immers:

$$(w_1w_2s_1s_2) \times (w_2w_3s_1s_2) = \left(\frac{w_1 - s_1}{w_1 - s_2} : \frac{w_2 - s_1}{w_2 - s_2}\right) \times \left(\frac{w_2 - s_1}{w_2 - s_2} : \frac{w_3 - s_1}{w_3 - s_2}\right)$$
$$= \frac{w_1 - s_1}{w_1 - s_2} : \frac{w_3 - s_1}{w_3 - s_2}$$
$$= (w_1w_3s_1s_2).$$

Verder is de afstand van een punt w_1 tot een punt van C_w^1 oneindig.

Neemt men n.l. $w_2 \to s_1$, dan vindt men: $[w_1w_2] \to +\infty$, omdat de factor $w_2 - s_1 \to 0$ wordt.

Voorts is:

$$[w_1w_2] = -[w_2w_1], \quad \text{omdat} \quad (w_1w_2s_1s_2) \times (w_2w_1s_1s_2) = 1.$$

Voor de afstand van het middelpunt van C_w^1 tot een punt w vinden we:

$$[o, w] = \lg \left| \frac{o - s_1}{o - s_2} : \frac{w - s_1}{w - s_2} \right| = \lg \left| \frac{w - s_2}{w - s_1} \right| = \lg \frac{1 + |w|}{1 - |w|}.$$

Omdat *de dubbelverhouding van 4 punten invariant blijft bij lineaire transformatie, zal in het bijzonder elke lineaire transformatie, die de eenheidscirkel in zichzelf omzet, de n. e. afstand van 2 punten invariant laten.*

c) De cirkels van de bundel $\left(a, \frac{1}{\bar{a}}\right)$ *zijn aequadistante krommen: de afstand van de snijpunten van een willekeurige cirkel door a en* $\frac{1}{\bar{a}}$ *(orthogonale trajectorie van de bundel) met twee bundelexemplaren, is onafhankelijk van de gekozen trajectorie.*

Bewijs: Door de lineaire transformatie $\zeta = \frac{w - a}{1 - \bar{a}w}$ verandert de waarde van de dubbelverhouding $(P_1P_2S_1S_2)$ niet, als P_1P_2 de snijpunten van de orthogonale trajectorie met de beide bundelexemplaren zijn, en S_1S_2 de snijpunten met de eenheidscirkel C_w^1. — Zie fig. 12.

Door deze transformatie ontstaat uit de beide bundelexemplaren een tweetal concentrische cirkels, en uit de orthogonaalcirkel een middellijn. De waarde van de dubbelverhouding, door de beeldpunten P_1 en P_2 op die middellijn bepaald, is niet afhankelijk van de stand van die middellijn, waaruit de stelling volgt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

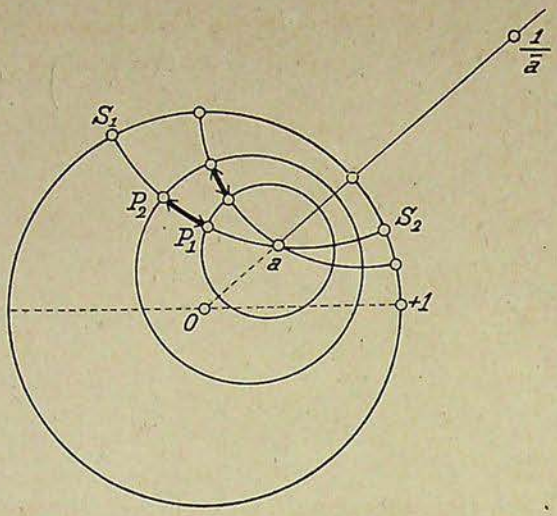


Fig. 12. De cirkels uit een cirkelbundel als aequadistante krommen in n.e. zin.

Twee cirkels, die C_w^1 in éénzelfde punt raken, zijn eveneens aequadistante krommen.

Bewijs: Een inversie doet nu de bundelexemplaren — van de raakbundel door de twee gegeven cirkels bepaald, — met hun orthogonaalcirkels overgaan in een quadrillage, waarbij de dubbelverhouding in een enkelverhouding ontaardt, die nu blijkbaar van de gekozen orthogonaalcirkel onafhankelijk is.

Opmerking: De cirkels die C_w^1 raken zijn representanten van de horicykels of grenskrommen der n. e. meetkunde, dat zijn krommen, waarvan alle normalen evenwijdig loopen (d.i. in onze figuur: elkaar op C_w^1 snijden).

d) **Formule voor de n. e. afstand van 2 punten:**

$$[w_1 w_2] = \lg \frac{1 + \left| \frac{w_2 - w_1}{1 - \bar{w}_1 w_2} \right|}{1 - \left| \frac{w_2 - w_1}{1 - \bar{w}_1 w_2} \right|}.$$

Bewijs: Door de lineaire transformatie: $y = \frac{w - w_1}{1 - \bar{w}_1 w_2}$ wordt de eenheidscirkel omgezet in zichzelf; de cirkelbundel $\left(w_1, \frac{1}{\bar{w}_1}\right)$ wordt

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

omgezet in een concentrische cirkelbundel; de n. e. afstand blijft invariant: $[y_1 y_2] = [w_1 w_2]$. De cirkel $w_1 w_2 s_1 s_2$ wordt een middellijn door $y_1 = 0$.

Nu is:

$$\begin{aligned}[w_1 w_2] &= \lg \mid (w_1 w_2 s_1 s_2) \mid \\ &= \lg \mid (y_1 y_2 s_{1_y} s_{2_y}) \mid \\ &= \lg \mid (0\, y_2 s_{1_y} s_{2_y}) \mid \\ &= \lg \frac{1 + \mid y_2 \mid}{1 - \mid y_2 \mid} \\ &= \lg \frac{1 + \left| \dfrac{w_2 - w_1}{1 - \bar{w}_1 w_2} \right|}{1 - \left| \dfrac{w_2 - w_1}{1 - \bar{w}_1 w_2} \right|}.\end{aligned}$$

§ 12 — Het theorema van Schwarz in niet-euclidische formuleering

We kunnen nu het theorema van SCHWARZ a.v. formuleeren.

a) Als $w = f(z)$ *holomorf is voor*

$$\mid z \mid < 1 \text{ en } \mid f'(z) \mid < 1 \text{ voor } \mid z \mid < 1,$$

terwijl $f(z_1) = w_1$, *dan geldt voor elke* $w = f(z)$ *de ongelijkheid*

$$[w_1 w] \leqq [z_1 z].$$

Indien het gelijkteeken voor één punt z geldt, geldt ze algemeen, en is w een lineaire functie van z; de transformatie is dan een *niet-eucl. beweging.*

Bewijs: Omdat de functie $\dfrac{1+x}{1-x}$ voor $0 \leqq x < 1$ monotoon toeneemt van 1 tot ∞, hebben we, in verband met § 11, laatste stelling, slechts te bewijzen:

$$\left| \frac{w - w_1}{1 - \bar{w}_1 w} \right| \leqq \left| \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \right|.$$

Dit is gebeurd in § 10*a*.

b) De ongelijkheid $[w_1 w] \leqq [z_1 z]$ laat zich a.v. in woorden brengen:

het beeldpunt w van een punt z komt te liggen binnen of op de niet-euclidische cirkel met w_1 *tot n. e. middelpunt, waarvan de n. e. straal gelijk is aan de n. e. straal van de n. e. cirkel door z, die* z_1 *tot n. e. middelpunt heeft* [36]).

[36]) CARATHEODORY, Über die Winkelderivierten enz., blz. 40, zie [8]).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

c) Uit het theorema van SCHWARZ volgt onmiddellijk, door aftrekking der correspondeerende n. e. stralen:

De n. e. afstand tusschen twee cirkels uit de bundel $\left(z_1, \frac{1}{\bar{z}_1}\right)$ *door de punten* z' *en* z'' *is gelijk aan de n. e. afstand tusschen de twee cirkels uit de bundel* $\left(w_1, \frac{1}{\bar{w}_1}\right)$, *waarbinnen of waarop volgens het theorema van* SCHWARZ *de punten* w' *en* w'' *moeten liggen.*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK III

UITBREIDINGEN VAN HET THEOREMA VAN SCHWARZ

§ 13 *a*) Hulpstelling over de vergelijking f (z) = z

Indien $w = f(z)$ *holomorf is voor* $|z| < 1$ *en* $|f(z)| \leqq k < 1$, *dan heeft de vergelijking* $f(z) = z$ *één wortel binnen de eenheidscirkel.*

Bewijs: We toonen deze stelling aan door middel van de *stelling over de argumentsvariatie:* de argumentsvariatie van $w = f(z)$ langs een contour Γ_z is gelijk aan 2π maal het aantal nulpunten van $f(z)$ binnen Γ_z, indien elk nulpunt met de juiste multipliciteit in rekening wordt gebracht, en $f(z) \neq 0$ op Γ_z.

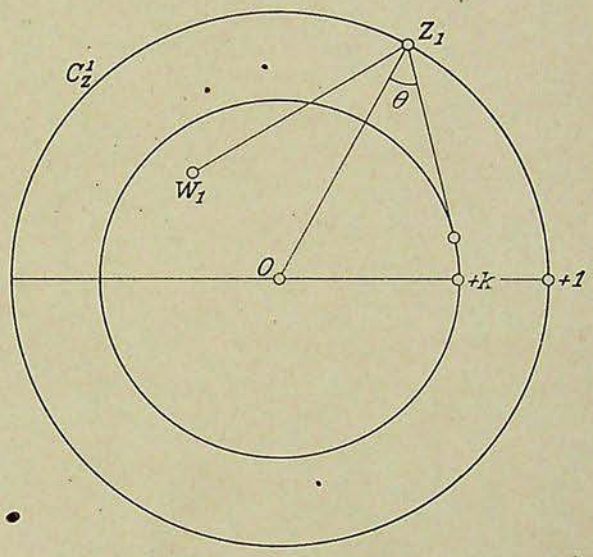


Fig. 13. Argumentsvariatie van $z - w$.

Voor een punt z_1 op C_z^1 ($|z| = 1$) geldt, als we $f(z_1) = w_1$ stellen:

$$\arg z_1 - \theta \leqq \arg (z_1 - w_1) \leqq \arg z_1 + \theta,$$

waarin θ de halve hoek is, waaronder men vanuit z_1 de cirkel $|z| = k$ ziet, dus $\theta = \text{bg sin } k < \pi/2$. — Zie fig. 13.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Wanneer nu z de cirkelomtrek C_z^1 éénmaal doorloopt in positieve zin, beginnende in z_1, zal arg z met 2π toenemen. Is arg* $(z_1 - w_1)$ de eindwaarde van arg $(z - w)$, dan blijkt uit:

$$\arg z_1 + 2\pi - \theta \leqq \arg^* (z_1 - w_1) \leqq \arg z_1 + 2\pi + \theta,$$

dat arg $(z - w)$ bij deze ééne omloop met 2π moet zijn toegenomen. De argumentsvariatie is dus 2π en $f(z) - z$ heeft één en niet meer dan één nulpunt binnen of op de cirkelomtrek $|z| = k$.

b) **Stelling van Wolff** [37])

Onderstelling: $f(z)$ *is holomorf voor* $|z| < 1$; $|f(z)| < 1$; $f(z) \neq z$, *voor* $|z| < 1$.

Bewering: *Er is één punt* a *op* $|z| = 1$ *met de eigenschap, dat de transformatie* $w = f(z)$ *de raakbundel van cirkels in* $z = a$ *doet samentrekken, d.w.z. dat het beeld van een punt* z *komt te liggen binnen of op het exemplaar door* z *van de cirkelbundel, waarvan de exemplaren in* $z = a$ *aan* C_z^1 *raken* ($z = a$ *heet overdrachtelijk dekpunt der transformatie*).

Bewijs: Beschouw de hulpfunctie $f_n(z) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) . f(z)$, dan geldt voor deze hulpfunctie: $|f_n(z)| < 1 - \frac{1}{n} < 1$, voor $|z| < 1$, zoodat de vergelijking $f_n(z) = z$ één wortel a_n heeft binnen de cirkel C_n om $z = 0$ als middelpunt, met $r_n = 1 - \frac{1}{n}$ als straal.

Beschouw de suite $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$

Zij a een limietpunt dezer suite, dan kunnen we een suite (a_{n_m}) extraheeren, die convergeert. Het limietpunt $a = \lim_{m \to \infty} a_{n_m}$ moet liggen binnen C_z^1 of op C_z^1.

Lag het punt a binnen C_z^1, dan zou uit:

$$\left(1 - \frac{1}{n_m}\right) . f(a_{n_m}) = a_{n_m}$$

door limietovergang voor $m \to \infty$ volgen:

$$f(a) = a.$$

---

[37]) J. Wolff, Sur une généralisation d'un theorème de Schwarz, Comptes rendus 1926, 7 April; blz. 500, e.v.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dit geval (dekpunt binnen C_z^1) is in de onderstelling uitgesloten.

Dus ligt a op C_z^1. Het beeldpunt $f_{n_m}(z')$ van een binnen C_z^1 gelegen punt z' ligt binnen of op de cirkelomtrek Γ_{n_m} door z' uit de bundel $\left(a_{n_m}, \frac{1}{\bar{a}_{n_m}}\right)$; voor $m \to \infty$ nadert Γ_{n_m} tot de cirkel I door z', die in a aan C_z^1 raakt. Elk punt buiten Γ ligt buiten I_{n_m} vanaf zekere m.

We beweren nu:

$$f(z') = \lim_{m \to \infty} f_{n_m}(z') \text{ ligt binnen of op } I.$$

Lag $f(z')$ buiten Γ, dan lag $f_{n_m}(z')$ buiten Γ vanaf zekere m, dus ook buiten Γ_{n_m} vanaf zekere m. En $f_{n_m}(z')$ ligt binnen Γ_{n_m}, zoodat $f(z')$ niet buiten I kan liggen (zie fig. 14).

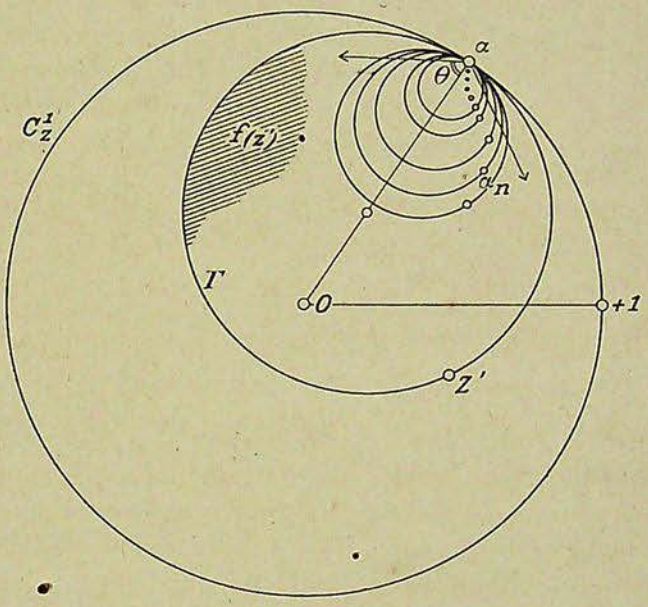


Fig. 14. Stelling van Wolff. Overdrachtelijk dekpunt der transformatie op C_z^1.

Het theorema is dus bewezen, indien we nog kunnen aantoonen, dat de suite (a_n) slechts één verdichtingspunt op C_z^1 heeft.

Waren er twee verdichtingspunten a_1 en a_2, dan moest het beeldpunt $f(z')$ van het punt z', waarin twee cirkels Γ_1 en Γ_2,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

die resp. in a_1 en a_2 aan C_z^1 raken, elkaar uitwendig raken, binnen of op Γ_1 en tevens binnen of op Γ_2 liggen; dus zou $f(z') = z'$ zijn. Dit is in strijd met de onderstelling, dat

$$f(z) \neq z \text{ voor } |z| < 1. \text{ (zie fig. 15).}$$

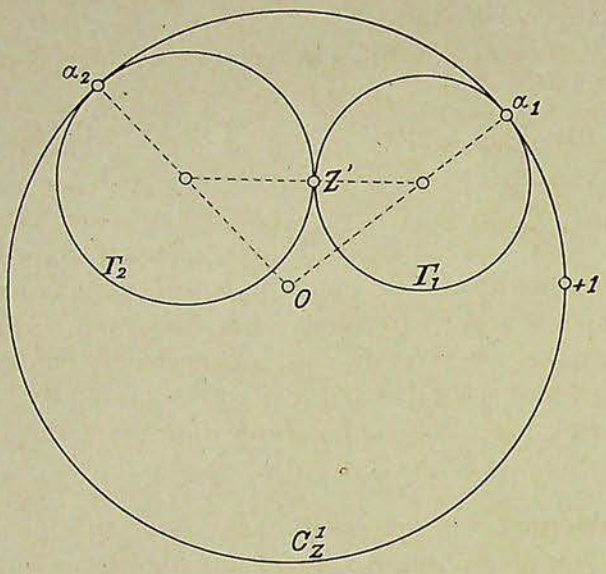


Fig. 15. Aantal overdrachtelijke dekpunten op C_z^1 hoogstens één.

Uit de bewezen stelling volgt onmiddellijk:

de beeldsuite (w_n) *van elke tot* a *convergeerende suite* (z_n) *convergeert tot* a, *mits:* $arg\ a - \theta \leqq arg\ (a - z_n) \leqq arg\ a + \theta$; $\theta < \frac{\pi}{2}$.

Door deze beperking voor het gebied, waarin z_n tot a mag naderen, wordt bereikt, dat $\varrho_n \to 0$ voor $n \to \infty$, als ϱ_n de straal van de cirkel door z_n is, die in a aan C_z^1 raakt. (zie fig. 14). Hieruit volgt de stelling.

c) **Het lineaire geval**

Indien voor één punt z geldt, dat het beeldpunt w ligt òp de genoemde cirkel, is dan $f(z)$ *een lineaire functie en ligt het beeldpunt van elk punt z op de aangegeven cirkel.*

Beeldt C_z^1 door een lineaire transformatie $\left(\text{b.v. door } Z = \frac{z + a}{z - a}\right)$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

af op het R.H.V., zóódanig, dat het invariante punt a overgaat in het oneindig verre punt. De cirkel door een punt z binnen de eenheidscirkel, rakend in a aan de eenheidscirkel, wordt getransformeerd in een rechte, door het beeldpunt Z van z evenwijdig getrokken aan de imaginaire as.

Evenzoo in het W-vlak.

De functie $w = f(z)$ wordt getransformeerd in een functie

$$W = F(Z),$$

die holomorf is in het R.H.V., terwijl het reëele deel van $W \geqq$ het reëele deel van Z.

Het reëele deel van $W - Z$ is overal $\geqq 0$ en is een harmonische functie, die haar minimum op de rand van het gebied, waarin de functie beschouwd wordt, aanneemt, tenzij de functie een constante is. Indien voor eenig punt z het beeldpunt w ligt op de aangegeven cirkel, is voor de correspondeerende punten in het W- en het Z-vlak: $R\{W - Z\} = 0$. Dus is $R\{W - Z\} \equiv 0$. Het imaginaire deel, de geconjugueerde functie, is dus constant.

Dus is $W - Z = qi$ en $W = Z + qi$.

Deze transformatie is een translatie, waarbij alle punten over een afstand q in de richting der imaginaire as worden verschoven.

Door de inverse transformaties van die, welke C_z^1 en C_w^1 in de rechterhalfvlakken omzetten (met name: $z = a\dfrac{Z+1}{Z-1}$, enz.), vinden we w als lineaire functie van z, terwijl elk punt $w = f(z)$ ligt op de cirkel door z, die in a aan C_z^1 raakt.

(lineaire parabolische transformatie, met dekpunt α)

d) **Omkeering van de Stelling van Wolff**

Als $w = f(z)$ holomorf is voor $|z| < 1$, met $|f(z)| < 1$, en een invariant punt a op C_z^1 heeft, in welk punt de raakbundel door de transformatie $w = f(z)$ wordt gecontraheerd, is $f(z) \neq z$ binnen C_z^1.

De onderstelling, dat er een dekpunt β is binnen C_z^1 zou n.l. (vergelijk *b*, laatste gedeelte) leiden tot het bestaan van nog meert dekpunten, n.l. alle contactpunten van de cirkelbundels (C_z^1, a) en $\left(\beta, \dfrac{1}{\beta}\right)$.

Hieruit zou volgen: $f(z) \equiv z$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 14 — Contractietheorema van Julia [38])

a) Het contractietheorema in het rechterhalfvlak

Onderstelling: $w = f(z)$ *is holomorf voor* $x > 0$; $u > 0$;
$w = u + iv$; $z = x + iy$;
Er is een puntensuite (z_n) *met beeldsuite* (w_n), *waarvoor geldt:*

$$z_n \to 0,\ w_n \to 0 \text{ en } \frac{u_n}{x_n} \to \mu, \text{ voor } n \to \infty.$$

Bewering: *De oorsprong is overdrachtelijk dekpunt voor de transformatie* $\frac{f(z)}{\mu}$ (*vgl.* § 13*b*).

Bewijs: Stel $\frac{u_n}{x_n} = \mu + \varepsilon_n$, dan is $\varepsilon_n \to 0$ voor $n \to \infty$. Breng door z_n de rechte l_n evenwijdig aan de reëele as, dan volgt uit de monotonie van $\frac{u}{x}$ op deze rechte (vgl. § 10*e*), dat:

$\frac{u}{x} < \mu + \varepsilon_n$, voor alle punten op deze rechte met $x > x_n$.

Uit § 10*d* volgt: $\left|\frac{dw}{dz}\right| < \mu + \varepsilon_n$, voor genoemde punten.

Uit: $w = w_n + \int_{x_n}^{x} f'(z) \,.\, dz$ volgt:

$$\left|\frac{w - w_n}{x - x_n}\right| < \mu + \varepsilon_n, \text{ dus voor } n \to \infty:$$

$$\frac{|w|}{x} \leqq \mu, \text{ voor } x > 0,\ y = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

dus stellig: $\frac{u}{x} \leqq \mu$ voor $x > 0$, $y = 0$.

Uit (1) volgt, dat voor $x \to 0$, $y = 0$, $w \to 0$ is. $\ldots\ldots$ (2)

Stelt men nu: $\frac{1}{z} = z' = x' + iy'$,

$$\frac{\mu}{w} = w' = u' + iv',$$

dan is $w'(z')$ een holomorfe functie van z' voor $x' > 0$, met $u' > 0$.

---

[38]) G. Julia, Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz, Acta Mathem., 42; 1918, blz. 349, e.v. en Journal de Mathém. 83; 1918; blz. 72, e.v.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Zij $\lambda = \lim \frac{u'}{x'}$ voor $y' = 0,\ x' \to \infty$.

Stel $w' = \lambda z' + \varphi(z')$, dan is $\varphi(z')$ holomorf voor $x' > 0$, en haar reëele deel is $\geqq 0$ wegens $u' \geqq \lambda x'$.

Verder is voor $y' = 0,\ x' \to \infty$, daar λ reëel is,

$$R \text{ . deel van } \varphi = o(x');$$

$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right| \leqq \frac{R \text{ . deel van } \varphi}{x'} \to 0$, dus $\frac{\varphi}{x'} \to 0$, waaruit volgt $\frac{u'}{x'} \to \lambda$. En daar uit (1) volgt $\left|\frac{w'}{x'}\right| \geqq 1$, is $\lambda \geqq 1$ of $u' \geqq x'$, dus:

het oneindig verre punt is randdekpunt van $w'(z')$, dus:

de oorsprong is randdekpunt voor $\frac{w(z)}{\mu}$, w.t.b.w.

Zij nu Γ_z de cirkel door een punt z uit het rechterhalfvlak, die in de oorsprong aan de imaginaire as raakt, en de middellijn van deze cirkel d. Dan is de vergelijking:

$$x^2 - dx + y^2 = 0.$$

Het beeldpunt w ligt nu binnen of op de cirkelomtrek:

$$u^2 - \mu du + v^2 = 0,$$

zoodat voor het punt w geldt:

$$u^2 - \mu du + v^2 \leqq 0.$$

Hieruit volgt: $$\frac{u^2 + v^2}{\mu u} \leqq \frac{x^2 + y^2}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Deze ongelijkheid is de analytische uitdrukking voor de stelling, dat de oorsprong randdekpunt is voor $\frac{w(z)}{\mu}$.

Opmerking: Indien voor één punt uit het z-vlak in de laatste ongelijkheid het gelijkteeken geldt, geldt het gelijkteeken voor alle punten. Passen we n.l. de transformaties $z' = \frac{1}{z}$ en $w' = \frac{\mu}{w}$ weer toe, dan is voor het bedoelde punt $u' = x'$, en dat deze gelijkheid dan voor alle punten geldt, wordt bewezen als in § 13*c*.

b) **Transformatie van het rechterhalfvlak op de eenheidscirkel**

Transformeer nu de rechterhalfvlakken op de eenheidscirkels $|Z| < 1$ en $|W| < 1$ door de transformaties:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$Z = \frac{1-z}{1+z} \text{ en } W = \frac{1-w}{1+w}.$$

Met de oorsprong van de halfvlakken correspondeert het punt $+1$ op de eenheidscirkels.

Stelt men

$$W = \varrho_W \,.\, e^{i\theta_W},\ Z = \varrho_Z \,.\, e^{i\theta_Z} \text{ (met } \varrho_W,\ \varrho_Z,\ \theta_W \text{ en } \theta_Z \text{ reëel)},$$

dan vindt men achtereenvolgens:

$$w = \frac{1-W}{1+W},\ u^2+v^2 = \left|\frac{1-W}{1+W}\right|^2;$$

$$u+iv = \frac{1-\varrho_W \,.\, e^{i\theta_W}}{1+\varrho_W \,.\, e^{i\theta_W}} = \frac{1-\varrho_W^2-2i\,.\,\varrho_W\,.\,\sin\theta_W}{1+\varrho_W^2+2\varrho_W\ .\ \cos\theta_W},$$

zoodat: $$u = \frac{1-\varrho_W^2}{1+\varrho_W^2+2\varrho_W\,.\,\cos\theta_W} = \frac{1-|W|^2}{|1+W|^2}.$$

Dus is:

$$\frac{u^2+v^2}{u} = \frac{|1-W|^2}{1-|W|^2}, \text{ en evenzoo: } \frac{x^2+y^2}{x} = \frac{|1-Z|^2}{1-|Z|^2}.$$

Voorts gaat de voorwaarde $\frac{u_n}{x_n} \to \mu$ voor $n \to \infty$ over in:

$\frac{1-|W_n|^2}{1-|Z_n|^2} \cdot \frac{|1+Z_n|^2}{|1+W_n|^2} \to \mu$, d.i. wegens $(Z_n) \to 1$ en $(W_n) \to 1$:

$$\frac{1-|W_n|}{1-|Z_n|} \to \mu.$$

We kunnen nu het theorema a.v. formuleeren:

Indien $w = f(z)$ holomorf is voor $|z| < 1$ en $|f(z)| < 1$ voor $|z| < 1$, en er een puntenreeks (z_n) is, convergeerend tot $+1$, waarbij een beeldsuite (w_n) behoort, die ook tot $+1$ convergeert, zoodanig, dat:

$$\frac{1-|w_n|}{1-|z_n|} \to \mu \text{ voor } n \to \infty,$$

dan geldt: $$\frac{|1-w|^2}{1-|w|^2} \leqq \mu \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}, \text{ voor } |z| < 1 \quad \ldots\ (4)$$

(Ongelijkheid van Julia). [39])

μ zullen we noemen: *contractieconstante uit het theorema van Julia.*

[39]) C. CARATHEODORY, t.a.p., blz. 44 e.v., zie [8]).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

c) **Verband tusschen de correspondeerende stralen der raakbundels**

Omdat door de in *b* genoemde lineaire transformaties cirkels, in de oorsprong aan de imaginaire as rakend, omgezet worden in cirkels in + 1 aan de eenheidscirkel rakend, is de *meetkundige interpretatie* van de ongelijkheid van JULIA deze, dat het beeldpunt van een punt z binnen de eenheidscirkel komt te liggen binnen of op een bepaalde cirkelomtrek, die in + 1 aan de eenheidscirkel raakt.

We duiden (zie fig. 16) de punten + 1 en z door A en P aan,

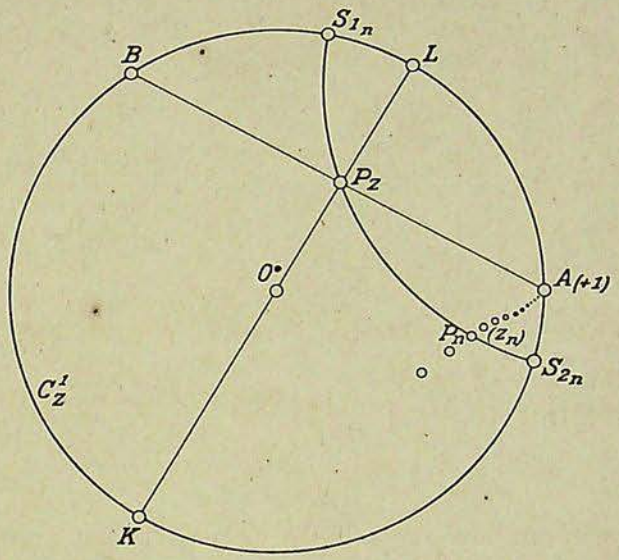


Fig. 16. $\frac{AP}{PB} = \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}$; orthogonaalcirkel van C_z^1 door P_z en P_{z_n}.

het tweede snijpunt van AP met de eenheidscirkel door B, en de uiteinden van de middellijn door P met K en L. Dan is:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP^2}{AP \,.\, PB} = \frac{AP^2}{KP \,.\, PL} = \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}.$$

Duiden we in het w-vlak de overeenkomstige punten met accenten aan, dan wordt de ongelijkheid van JULIA:

$$\frac{A'P'}{P'B'} \leqq \mu \,.\, \frac{AP}{PB}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Noemen we de straal van de cirkel door z, die in $+1$ aan de eenheidscirkel raakt, r_z, en de straal van de cirkel, die in $+1$ aan de eenheidscirkel raakt, en waarop of waarbinnen w ligt, r_w, dan kunnen we uit het contractietheorema een betrekking afleiden tusschen de stralen r_z en r_w.

Denk de eenheidscirkels op elkaar geplaatst, met de punten $z = +1$ en $w = +1$ op elkaar. Noemen we het snijpunt van

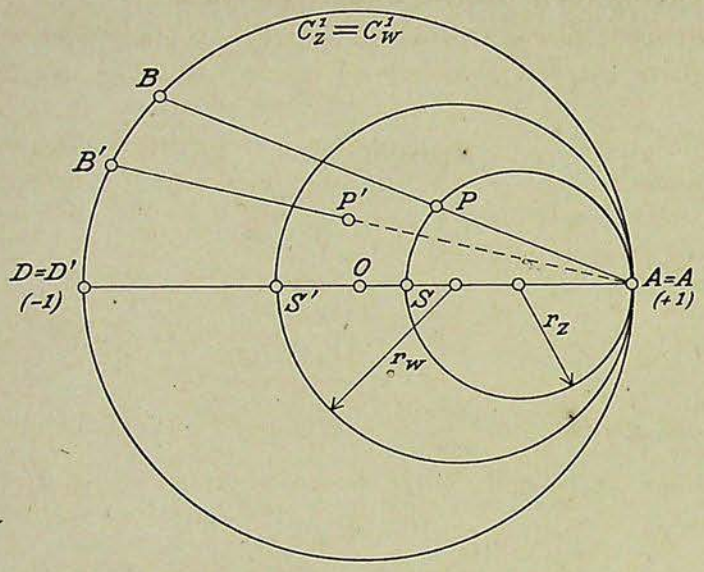


Fig. 17. Stelling van JULIA: $\frac{A'P'}{P'B'} \leqq \mu \frac{AP}{PB}$.
Verband tusschen r_z en r_w.

cirkel (r_z) met de reëele as S, en het snijpunt van cirkel (r_w) met de reëele as S', dan vindt men (fig. 17) gemakkelijk:

$$\frac{AS'}{S'D} = \mu \cdot \frac{AS}{SD},$$

waaruit $\quad 2r_w : (2 - 2r_w) = \mu \cdot 2r_z : (2 - 2r_z),$

dus:
$$\frac{r_w}{1 - r_w} = \mu \frac{r_z}{1 - r_z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

of:
$$r_w = \frac{\mu r_z}{1 - r_z (1 - \mu)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6^*)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opmerking: Tusschen de in (4), (5), (6) optredende grootheden bestaat het volgende verband:

$$\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} = \frac{r_z}{1-r_z} = \frac{AP}{PB}.$$

(Analoog in het w-vlak).

d) **Tweede bewijs voor de Stelling van Julia**

Een tweede bewijs van de Stelling van JULIA vinden we door *de volgende limietovergang uit het contractietheorema van Schwarz* (§ 12).

Noem s_{1_n} en s_{2_n} de snijpunten van de orthogonaalcirkel door z en z_n met C_z^1, en $s_{1_n}^1$ en $s_{2_n}^1$ de snijpunten van de orthogonaalcirkel door w en w_n met C_w^1. (zie fig. 16).

Uit $[w_n w] \leqq [z_n z]$ volgt:

$$\left|\frac{w_n - s_{1_n}^1}{w_n - s_{2_n}^1}\right| : \left|\frac{w - s_{1_n}^1}{w - s_{2_n}^1}\right| \leqq \left|\frac{z_n - s_{1_n}}{z_n - s_{2_n}}\right| : \left|\frac{z - s_{1_n}}{z - s_{2_n}}\right|.$$

Uit de stelling: $\lim \frac{\text{boog}}{\text{koorde}} = 1$ (in een cirkel), als de lengte van de koorde tot nul nadert, leiden we af, in verband met

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-|w_n|}{1-|z_n|} = \mu$$

dat

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{w_n - s_{2_n}^1}{z_n - s_{2_n}}\right| = \mu$$

Er komt dus, als we het punt, waarin de orthogonaalcirkel door z en $+1$ de cirkel C_z^1 nogmaals snijdt, s_1 noemen, en het overeenkomstige punt in het w-vlak s_1':

$$\left|\frac{w-1}{z-1}\right| \leqq \mu \cdot \left|\frac{1-s_1}{1-s_1'}\right| \cdot \left|\frac{w-s_1'}{z-s_1}\right| \quad \ldots\ldots (7)$$

Stellen we de punten z en s_1, w en s_1' resp. door P en S_1, P' en S_1' voor, $z = +1$ door A en $w = +1$ door A', dan vindt men.

$$1 - z = \varrho \cdot e^{-\theta i} \text{ en } s_1 = e^{\alpha i}$$

stellend (waarbij blijkt, dat de plaats van P door de hoeken θ en α bepaald wordt), met analoge aanduiding in het w-vlak:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\frac{|z-1|\,.\,|z-s_1|}{|1-s_1|} = \frac{PA\,.\,PS_1}{S_1A}$$

$$= \frac{PA\,.\,PS_1\,.\,PC}{S_1A\,.\,PC}$$

$$= \frac{PA}{S_1A\,.\,PC}\cdot[1-|z|^2]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,.\,[1-|z|^2] \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

omdat, als D het tegenpunt van A is in de eenheidscirkel, uit de gelijkvormigheid van $\triangle DS_1A$ en $\triangle CAP$ gemakkelijk blijkt:

$$S_1A\,.\,PC = PA\,.\,2 \text{ (zie fig. 18).}$$

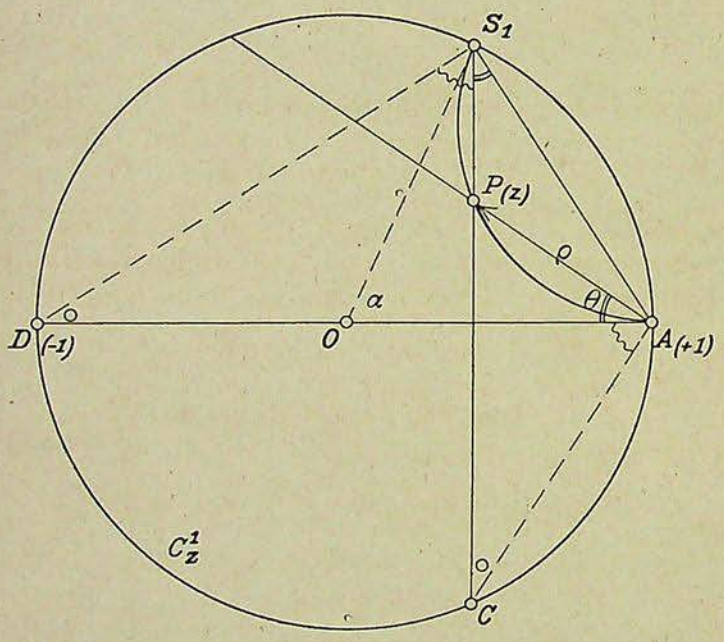


Fig. 18. Stelling van JULIA (tweede bewijs).

Analoog: $$\frac{|w-1|\,.\,|w-s_1'|}{|1-s_1'|} = \tfrac{1}{2}\,[1-|w|^2] \quad \ldots\ldots (9)$$

Uit (7), (8), (9) volgt:

$$\left|\frac{w-1}{z-1}\right|^2 \leqq \mu\,\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2},$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

of $$\frac{|1-w|^2}{1-|w|^2} \leqq \mu \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}.$$

Dit is de ongelijkheid van JULIA (zie *b*).

e) **Verband tusschen de contractieconstante van Julia μ en de halfvlakconstante λ**

We kunnen de vergelijking van een cirkel met straal r_z, die in het punt $+1$ aan de eenheidscirkel raakt (en binnen de cirkel ligt) als volgt schrijven:

$$z = (1 - r_z) + r_z \cdot e^{i\theta_z} \quad (\theta_z \text{ variabel}).$$

Door de transformatie: $z' = \frac{1+z}{1-z}$ wordt deze cirkel omgezet in de rechte:

$$z' = \frac{1-r_z}{r_z} + \frac{i}{r_z} \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\theta_z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Evenzoo wordt het beeld van de binnen $|w| = 1$ gelegen cirkel met straal r_w, die in $+1$ aan de cirkel raakt, voorgesteld door:

$$w' = \frac{1-r_w}{r_w} + \frac{i}{r_w} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\theta_w \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

De binnengebieden van de cirkels met stralen r_z en r_w correspondeeren met de halfvlakken rechts van de rechten (10) en (11).

Indien nu $\lim_{x' \to \infty} \frac{u'}{x'}$ (y constant) $= \lambda$ is, dan is:

$u' \leqq \lambda x'$, voor elk punt z' in het R.H.V.,

zoodat uit (10) en (11) volgt:

$$\frac{1-r_w}{r_w} \leqq \lambda \frac{1-r_z}{r_z},$$

d.i. $$\frac{r_w}{1-r_w} \leqq \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{r_z}{1-r_z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Vergelijking met (4) en (6) doet zien, dat dus het contractietheorema van JULIA geldt, met $\mu = \frac{1}{\lambda}$ als contractieconstante. *De afleiding voor het contractietheorema met deze constante, is onafhankelijk van de beide bewijzen, in a) en d) van het theorema van Julia gegeven.*

Noemen we $\underline{\mu}$ de kleinste contractieconstante uit de ongelijkheid van JULIA, dan is $$\underline{\mu} \leqq u = \frac{1}{\lambda}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dus: $$\mu \,.\, \lambda \leqq 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Omgekeerd, indien $\underline{\mu}$ een contractieconstante van JULIA is, en dus volgens (5): $\dfrac{r_w}{1-r_w} \leqq \underline{\mu} \dfrac{r_z}{1-r_z}$ geldt,

volgt uit (10) en (11):

$$u' \leqq \frac{1}{\underline{\mu}}\, x', \text{ dus: } \frac{u'}{x'} \leqq \frac{1}{\underline{\mu}},$$

dus ook $$\lambda = \lim_{x' \to \infty} \frac{u'}{x'} \,(y \text{ const.}) \leqq \frac{1}{\underline{\mu}},$$

of: $$\lambda \,.\, \underline{\mu} \leqq 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Uit (13) en (14) volgt: $\lambda \,.\, \underline{\mu} = 1$, m.a.w.:

de kleinste contractieconstante $\underline{\mu}$ uit het theorema van Julia voor de eenheidscirkels, en de halfvlakconstante λ zijn elkaars reciproke waarden.

f) **Invariantie van de n. e. afstand van de correspondeerende bundelexemplaren**

De n.e. afstand van 2 cirkels Γ_{z_1} en Γ_{z_2} uit de raakbundel van cirkels $(C_z^1, +1)$, welke cirkels resp. door de punten z_1 en z_2 gaan, is gelijk aan de n.e. afstand van de 2 cirkels Γ_{w_1} en Γ_{w_2} uit de raakbundel van cirkels $(C_w^1, +1)$, binnen of op welke exemplaren volgens het theorema van Julia de punten $w_1 = f(z_1)$ en $w_2 = f(z_2)$ gelegen moeten zijn.

Bewijs: Deze stelling, die men door limietovergang uit § 12 kan bewijzen, kan ook bewezen worden door gebruik te maken van de in *c* gevonden betrekking tusschen de stralen van correspondeerende cirkels:

$$\frac{r_w}{1-r_w} = \mu \,.\, \frac{r_z}{1-r_z}.$$

Omdat we weten, dat Γ_{z_1} en Γ_{z_2} aequadistante krommen zijn, (zie § 11*c*) hebben we, de snijpunten dezer cirkels met de reëele assen S_{z_1} en S_{z_2} noemend, — en analoog voor Γ_{w_1} en Γ_{w_2} — slechts de gelijkheid aan te toonen van de dubbelverhoudingen:

$$(S_{w_1},\ S_{w_2},\ +1,\ -1) \text{ en } (S_{z_1},\ S_{z_2},\ +1,\ -1).$$

Rekenen we deze dubbelverhoudingen uit, dan blijkt:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$(S_{w_1}, S_{w_2}, +1, -1) = \frac{2r_{w_1}}{2-2r_{w_1}} : \frac{2r_{w_2}}{2-2r_{w_2}}$$
$$= \mu \cdot \frac{2r_{z_1}}{2-2r_{z_1}} : \mu \frac{2r_{z_2}}{2-2r_{z_2}}$$
$$= \frac{2r_{z_1}}{2-2r_{z_1}} : \frac{2r_{z_2}}{2-2r_{z_2}}$$
$$= (S_{z_1}, S_{z_2}, +1, -1).$$

Opmerkingen: 1. De stelling komt neer op de eigenschap, dat bij lineaire transformatie, de waarde eener dubbelverhouding, en daarmee de n.e. afstand, invariant blijft.

2. Met deze stelling vinden we opnieuw (vgl. § 14*a*), dat het gelijkteeken in de ongelijkheid van JULIA algemeen geldt, indien het voor één punt geldt. Immers, als z_1 het punt is, waarvoor het gelijkteeken geldt, en z_2 is een punt van de cirkel door z_1 en $+1$, die C_z^1 orthogonaal snijdt, dan geldt voor w_2:

$$[w_1 w_2] \geqq [z_1 z_2],$$

volgens de zoo juist bewezen stelling, en

$$[w_1 w_2] \leqq [z_1 z_2], \text{ volgens § 12.}$$

dus $$[w_1 w_2] = [z_1 z_2].$$

De betrekking tusschen w en z is dus lineair en het gelijkteeken geldt algemeen.

g) **Vorm van de lineaire functie**

De vorm der lineaire functie $w = f(z)$, voor het geval in de ongelijkheid van JULIA het gelijkteeken geldt, welke vorm door CARATHEODORY vermeld wordt op blz. 43 van de geciteerde verhandeling: Über die Winkelderivierten enz., is a.v. te bepalen.

Na transformatie van de eenheidscirkels op de halfvlakken door middel van: $w' = \frac{1+w}{1-w}$, $z' = \frac{1+z}{1-z}$,

heeft men: $\mu w' = z' + qi$,

uit welke drie betrekkingen volgt:

$$w = \frac{(1+z) - (1-z) \cdot (\mu - qi)}{(1+z) + (1-z) \cdot (\mu + qi)}.$$

h) **Over verschillende waarden van de contractieconstante μ**

Indien niet voor *alle* suites (z_n), die tot $+1$ convergeeren, en

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

waarvoor de suites der beeldpunten (w_n) eveneens tot $+1$ convergeeren, $\lim_{n\to\infty} \frac{1-|w_n|}{1-|z_n|} = \infty$ is, is er minstens één suite, waarvoor $\frac{1-|w_n|}{1-|z_n|} < M$ (eindig) is, en uit deze suite is nu een deelsuite te extraheeren, met een limiet μ. waarvoor b.v. genomen kan worden de limes superior van de suite $\frac{1-|w_n|}{1-|z_n|}$.

Voor deze μ, en tevens voor alle grootere, geldt de ongelijkheid van JULIA.

Uit § 10*b* volgt, dat de reëele grootheid μ niet nul is.

Indien geen M te vinden is, kan men zeggen, dat de ongelijkheid van JULIA nòg geldt, met $\mu = \infty$. De bijbehoorende waarde in het halfvlak van λ is 0. Het contractietheorema leert in dit geval slechts, dat het beeldpunt van elke z met $|z| < 1$ binnen de eenheidscirkel ligt.

Alléén voor $\mu \leqq 1$ heeft het zin, het theorema van JULIA een *contractietheorema* te noemen.

§ 15 — De Stelling van Wolff als gevolg van die van Julia

De stelling van Wolff volgt ten deele uit die van Julia.

Immers, wegens $\left(1-\frac{1}{n}\right).f(a_n) = a_n$ heeft men voor de suite (a_n) en de beeldsuite $\{f(a_n)\}$, die beide tot het punt a op de eenheidscirkel convergeeren (voor welk punt we in de stelling van JULIA het punt $+1$ namen):

$$\frac{1-|f(a_n)|}{1-|a_n|} = \frac{1-\frac{|a_n|}{1-1/n}}{1-|a_n|} \to 1 \text{ voor } n \to \infty.$$

waaruit WOLFF's contractietheorema volgt met $\mu = 1$.

We merken echter op, dat de stelling van WOLFF het *bewijs* inhoudt van het bestaan van een invariant punt op de contour

$$|z| = 1.$$

§ 16 — Caratheodory's omkeering van de Stelling van Julia [40])

Onderstelling: a) $w = f(z)$ *is holomorf voor* $|z| < 1$, *en niet* $\equiv 1$.

b) *Er is een positief getal* μ, *zoodat voor* $|z| < 1$ *geldt:*

[40]) C. CARATHEODORY, t.a.p., blz. 45., zie noot [8]).

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$0 \leqq \frac{|1-w|^2}{1-|w|^2} \leqq \mu \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}.$$

Bewering: *a)* $|f(z)| < 1$.

b) er zijn puntenreeksen (z_n) *met*

$$\left.\begin{matrix} z_n \to +1 \\ w_n \to +1 \end{matrix}\right\} \text{voor } n \to \infty,$$

$$\text{en } \lim_{n\to\infty} \frac{1-|w_n|}{1-|z_n|} \leqq \mu.$$

Bewijs: $|w| < 1$; was er n.l. een z_1 met $|w_1| = |f(z_1)| \geqq 1$, dan zou het middelste lid uit b van de onderstelling oneindig groot of negatief kunnen worden, in strijd met de voorwaarden, dat dit lid $\geqq 0$ is, en $\leqq \mu \cdot \frac{|1-z_1|^2}{1-|z_1|^2}$, zoodat dit middelste lid eindig en positief moet zijn.

Neemt men een willekeurige suite punten (x_n) op de reëele as, met $x_n \to +1$ voor $n \to \infty$, dan volgt, wegens form. (6) van § 14*c*, uit de onder b gegeven ongelijkheid.

$$\frac{1-|f(x_n)|}{1-x_n} \leqq \frac{|1-f(x_n)|}{1-x_n} \leqq \frac{2r_w}{2r_z} \leqq \mu \frac{1-r_w}{1-r_z} \to \mu \text{ voor } n \to \infty.$$

Hiermee is het bestaan van puntenreeksen, voldoende aan de drie voorwaarden uit de bewering, bewezen.

§ 17 — Uitbreiding van de stelling van Julia — hoekafgeleiden

a) Hoekbuurt (angulaire buurt) van een randpunt

Als een enkelvoudig samenhangend gebied G_w binnen de eenheidscirkel G_z ligt, en de randen Γ_w en Γ_z resp. een punt w_o en een punt z_o bezitten, die met elkaar correspondeeren in de zin van § 6, bevat de stelling van JULIA een eigenschap over het gedrag van de functie $w = f(z)$, die G_z op G_w conform afbeeldt, in de buurt der randpunten z_o, w_o.

Dit gedrag kan nader onderzocht worden door bestudeering van de afgeleide $f'(z)$ van $f(z)$. Hierbij beperken we ons t.o.v. het gebied, waarin $f'(z)$ wordt bestudeerd, tot een *hoekbuurt* (*angulaire buurt*) van een randpunt, d.i. het deelgebied van G_z, gelegen binnen een hoek, met het randpunt tot hoekpunt, welks beenen G_z binnendringen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Indien $f'(z)$ gelijkmatig tot a nadert, voor $z \to z_0$ in elke hoekbuurt van z_0, zeggen we dat $f(z)$ in z_0 de *hoekafgeleide* (*angulaire afgeleide*) a bezit.

b) **Uitbreiding van de Stelling van Julia** [41])

Onderstelling: $w = f(z)$ *is holomorf voor* $x > 0$; $u > 0$;
$z = x + iy$; $w = u + iv$.

Bewering: *Er is een* $c \geqq 0$, *zoodat* $f(z) = c \,.\, z + \varphi(z)$, *met*

a) $R[\varphi(z)] \geqq 0$ *voor* $x > 0$,

b) $\frac{\varphi(z)}{z} \to 0$ *voor* $z \to \infty$, *uniform in de hoekbuurt* $|z| < Mx$ *van* $z = \infty$ ($M > 0$ *en constant*),

c) $\varphi'(z) \to 0$ *voor* $z \to \infty$ *in deze hoekbuurt.*

Bewijs: We weten (§ 10):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{u}{x} (y \text{ constant}) = \lambda \text{ (onafhankelijk van } y).$$

Voor de c uit de bewering kiezen we deze limiet.

Omdat λ de benedenste grens is van alle $\frac{u}{x}$, hebben we

$$\varphi(z) = \xi + i\eta \text{ stellend: } \xi = u - \lambda x \geqq 0.$$

Uit § 13*c* blijkt, dat, wanneer voor eenig punt z uit het R.H.V. geldt $\xi = 0$, $\xi \equiv 0$ en $\varphi(z) =$ constant. Dan is dus stellig $\frac{\varphi(z)}{z} \to 0$.

We mogen voor het verdere bewijs dus onderstellen: $\xi > 0$.

Passen we nu het theorema van SCHWARZ (§ 10) toe, dan vinden we:

$$\left| \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{\varphi(z) - \underline{\varphi(z_0)}} \right| \leqq \left| \frac{z - z_0}{z - \underline{z_0}} \right| = \varrho < 1, \quad \ldots \quad (1)$$

indien $\underline{\varphi(z_0)}$ en $\underline{z_0}$ de spiegelpunten zijn van $\varphi(z_0)$ en z_0 t.o.v. de imaginaire as.

Stel nu:

---

[41]) Vergelijk: J. WOLFF, Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz, Comptes rendus, Sept. 1926, blz. 500, e.v.

E. LANDAU en G. VALIRON, A deduction from Schwarz's Lemma, Journal of the London Mathematical Society, Vol. IV, 1929, blz 162 en 163.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\frac{\varphi(z) - i\eta_o}{\xi_o} = t(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dan gaat (1) over in:

$$\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \leqq \varrho, \text{ dus stellig } \frac{|t|-1}{|t|+1} \leqq \varrho.$$

Hieruit volgt:

$$|t| \leqq \frac{1+\varrho}{1-\varrho} = \frac{(1+\varrho)^2}{1-\varrho^2} = \frac{\left[1+\left|\frac{z-z_o}{z-\underline{z}_o}\right|\right]^2}{1-\left|\frac{z-z_o}{z-\underline{z}_o}\right|^2}.$$

$$|t| \leqq \frac{[|z-\underline{z}_o| + |z-z_o|]^2}{|z-\underline{z}_o|^2 - |z-z_o|^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

De noemer van het rechterlid is:

$$[(x+x_o)^2 + (y-y_o)^2] - [(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2] = 4x \,.\, x_o.$$

De teller is kleiner dan:

$$[|z| + |\underline{z}_o| + |z| + |z_o|]^2 = 4\,[|z| + |z_o|]^2.$$

Dus:

$$|t| \leqq \frac{[|z| + |z_o|]^2}{x \,.\, x_o} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Uit (2) volgt:

$$\varphi(z) = t(z) \,.\, \xi_o + i\eta_o,$$

dus in verband met (4):

$$\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \leqq \left|\frac{\eta_o}{z}\right| + \frac{\xi_o}{x_o} \cdot \frac{[|z| + |z_o|]^2}{x \,.\, |z|}$$

$$\leqq \left|\frac{\eta_o}{z}\right| + \frac{\xi_o}{x_o} \,.\, M \,.\, \left[1 + \left|\frac{z_o}{z}\right|^2\right]$$

zoodat: $\limsup_{z\to\infty} \left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \leqq \frac{\xi_o}{x_o} \,.\, M$, voor $z \to \infty$ in de gegeven hoekbuurt.

Omdat $\frac{\xi_o}{x_o} = \frac{u_o}{x_o} - \lambda$ en $\frac{u_o}{x_o} \to \lambda$, voor $x_o \to \infty$ (y_o constant), kan men door behoorlijke keuze van z_o de waarde $\frac{\xi_o}{x_o}$ willekeurig klein maken, en $\frac{\xi_o}{x_o} \,.\, M$ dus eveneens. Hieruit volgt:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} = 0. \text{ (angulair)}$$

De bewering onder *b*) is dus bewezen.
Verder is:

$$|\varphi'(z)| \leqq \frac{\xi}{x} \leqq \frac{|\varphi(z)|}{x} \leqq M \cdot \frac{\varphi(z)}{z} \to 0,$$

in de gegeven hoekbuurt.
De stelling is hiermee volledig bewezen.

Gevolg: Als $w = f(z)$ *holomorf is voor* $x > 0$ *met* $u > 0$, *geldt:*

$$\frac{f(z)}{z} \to \lambda \text{ en } f'(z) \to \lambda$$

voor $z \to \infty$ *in elke hoekbuurt van* $z = \infty$, *indien* λ *de bekende beteekenis heeft.*

c) **Hoekafgeleide van $w = f(z)$, hol. voor $x > 0$ met $u > 0$, in $z = 0$**

Als $w = f(z)$ *holomorf is voor* $x > 0$ *met* $u > 0$, *en* $z = 0$, $w = 0$ *zijn correspondeerende randpunten, geldt:*

$$\frac{f(z)}{z} \to l \text{ en } f'(z) \to l$$

voor $z \to 0$ *in elke hoekbuurt van* $z = 0$, *waarbij de waarde* $l = \infty$ *moet worden toegelaten.*

Bewijs: Door de transformaties $z' = \frac{1}{z}$, $w' = \frac{1}{w}$ wordt elke hoekbuurt van $z = 0$ getransformeerd in een hoekbuurt van $z' = \infty$ (met dezelfde opening). $w = f(z)$ wordt getransformeerd in

$$w' = F(z'), \text{ holomorf voor } z' > 0 \text{ met } u' > 0.$$

Dus:

$$\frac{F(z')}{z'} \to \lambda' \text{ en } F'(z') \to \lambda' \text{ voor } z' \to \infty \text{ (angulair).}$$

Hieruit volgt: $\frac{w}{z} \to l = \frac{1}{\lambda'}$ (angulair), voor $\lambda' \neq 0$.

en, wegens $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dw'} \cdot \frac{dw'}{dz'} \cdot \frac{dz'}{dz}$,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

of $$\frac{dw}{dz} = \frac{z'^2}{w'^2} \cdot \frac{dw'}{dz'},$$

$$\frac{dw}{dz} \to l = \frac{1}{\lambda'} \text{ (angulair).}$$

Opmerking. Voor $\lambda' = 0$ gaat de stelling door met $l = \infty$. In de eerste plaats is: $\frac{w}{z} \to \infty$, terwijl ook $\frac{dw}{dz} \to \infty$ moet zijn, omdat uit $\left|\frac{dw}{dz}\right| < M$ gemakkelijk afgeleid zou kunnen worden: $\left|\frac{w}{z}\right| < M$.

d) **Hoekafgeleide van w = f (z), hol. voor | z | < 1 met | w | < 1, in z = + 1**

Met behulp van § 17*b* is het contractietheorema van JULIA, geformuleerd in § 14*b* a.v. uit te breiden.

Als $w = f(z)$ holomorf is voor $|z| < 1$ met $|w| < 1$, en het quotient $\frac{1 - |w_n|}{1 - |z_n|}$ is begrensd op een puntensuite $(z_n) \to +1$ met $(w_n) \to +1$, heeft $w = f(z)$ een hoekafgeleide $l > 0$ in $z = +1$.

Bewijs: We kunnen uit (z_n) een deelsuite extraheeren, — die we opnieuw als (z_n) aanduiden, — waarvoor geldt (zie § 14*h*):

$$\frac{1 - |w_n|}{1 - |z_n|} \to \text{eindige limes } \mu, \text{ voor } n \to \infty.$$

Toepassing van § 14*b* geeft, na transformatie op het R.H.V., als aangegeven in § 14*e*:

$$\text{alle } \frac{u'}{x'} \geqq \frac{1}{\mu},$$

dus: $$\lim_{x' \to \infty} \frac{u'}{x'} (y' \text{ constant}) = \lambda' \geqq \frac{1}{\mu}.$$

$w' = F(z')$ heeft dus een hoekafgeleide $\lambda' \geqq \frac{1}{\mu}$ in $z' = \infty$, terwijl ook $\frac{w'}{z'} \to \lambda'$ (angulair), volgens § 17*b*.

Uit: $z = \frac{z' - 1}{z' + 1}$, $w = \frac{w' - 1}{w' + 1}$ volgt nu:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\left.\begin{aligned} \frac{1-w}{1-z} &= \frac{1+z'}{1+w'} \to l = \frac{1}{\lambda'} \\ \frac{dw}{dz} &= \left(\frac{1+z'}{1+w'}\right)^2 \cdot \frac{dw'}{dz'} \to l = \frac{1}{\lambda'} \end{aligned}\right\} \text{voor } z \to 1 \text{ (angulair).}$$

(Elke hoekbuurt van $z' = \infty$ ligt in een hoekbuurt van $z = +1$, en omgekeerd).

Uit $\lambda' \geqq \frac{1}{\mu}$ volgt $l \leqq \mu$; de hoekafgeleide van $f(z)$ voor $z \to +1$ is dus eindig; uit de eindigheid van λ' volgt: $l \neq 0$.

Opmerking: Laten we de onderstelling, dat $\frac{1-|w_n|}{1-|z_n|}$ begrensd is, vervallen, dan vinden we in dit bewijs $\lambda' \geqq 0$; de conclusie, dat er een hoekafgeleide is in $z = +1$, vervalt nu voor het geval, dat $\lambda' = 0$ geldt. *In dit geval convergeeren:* $\frac{1-w}{1-z}$ en $\frac{dw}{dz}$ voor $z \to +1$ (angulair) *uniform tot* $+\infty$.

e) **Hoekafgeleide in het overdrachtelijk dekpunt der functie f (z) van § 13b**

Als $+1$ het overdrachtelijk dekpunt is der functie $w = f(z)$, holomorf voor $|z| < 1$, met $w \neq z$ voor $|z| < 1$, welks bestaan bewezen is in § 13*b*, volgt uit het bewijs onder *d*, dat de functie in dit overdrachtelijk dekpunt een hoekafgeleide $\leqq 1$ en > 0 heeft.

f) **Opmerking over de bewijzen van Wolff, en Landau-Valiron van de besproken uitbreiding van het theorema van Julia**

De stelling van § 17*b* wordt door VALIRON [42]) op name van hem en LANDAU geschreven. We merken echter op, dat deze stelling reeds volledig bewezen is in het artikel van WOLFF van Sept. 1926 uit de Comptes Rendus.

De stelling is voorts bewezen door CARATHEODORY, op blz. 49 en 50 van zijn in noot 8 geciteerde publicatie, die ongeveer tegelijk met die van VALIRON en LANDAU is verschenen (Maart 1929).

---

[42]) G. VALIRON, Bulletin des Sciences mathématiques, Maart 1929; blz. 76. E. LANDAU en G. VALIRON, Journal of the London Mathem. Society, vol. IV, 1929; blz. 162—163.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK IV

CONFORMITEIT DER AFBEELDING IN EEN RANDPUNT

§ 18 — Definities van hoektrouw en conformiteit der afbeelding in een randpunt — 1. Men zegt, dat de afbeelding van een gebied G_z op de eenheidscirkelschijf G_w ($|w| < 1$) *hoektrouw* is in het grenspunt z_o van G_z, indien met z_o een punt w_o op de grens Γ_w van G_w correspondeert, zóó, dat twee koorden k_{1_w} en k_{2_w}, die elkaar in w_o onder een hoek θ snijden, beelden zijn van krommen k_{1_z} en k_{2_z}, die elkaar in z_o onder dezelfde hoek θ snijden.

2. Men zegt, dat de afbeelding van een gebied G_z op de eenheidscirkelschijf G_w *conform* is in het grenspunt z_o van G_z (angulair conform), indien de plaatselijke vergrooting N_{z_n}, als z_n tot z_o convergeert, een eindige, van nul verschillende limiet heeft; z_n wordt hier beperkt tot een angulaire buurt van z_o (zie § 17*a*).

Uit de conformiteit in z_o volgt de hoektrouw in z_o, niet omgekeerd.

§ 19 — Analytische randkrommen — *Als $w = f(z)$ het gebied G_z, begrensd door de analytische kromme, of de uit analytische bogen bestaande contour, Γ_z, conform afbeeldt op de eenheidscirkelschijf G_w, contour Γ_w, dan is de afbeelding angulair conform in elk inwendig punt z_o der analytische bogen.*

Bewijs: Deze stelling volgt onmiddellijk uit de eigenschap, dat de afbeeldingsfunctie $w = f(z)$ over z_o voortzetbaar is. Door deze voortzetting wordt een omgeving van z_o afgebeeld op een omgeving van w_o, door een holomorfe functie $w = \psi(z)$, die in G_z met $w = f(z)$ samenvalt, èn die als beeld van een analytische deelboog van Γ_z, met z_o als inwendig punt, geeft een deelboog van de eenheidscirkel Γ_w, met het met z_o correspondeerend punt

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

w_o als inwendig punt. In z_o is $\frac{dw}{dz} \neq 0$, dus de afbeelding is conform. Was toch $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z_o} = 0$, dan moest het beeld van de analytische boog, waarop z_o ligt, een dubbelpunt of een meervoudig punt in w_o hebben.

b) In de hoekpunten van analytische begrenzingsbogen is i.h.a. conformiteit uitgesloten.

Bewijs: Is n.l. de hoek der analytische bogen, die in het randpunt z_o van Γ_z samenkomen $= \alpha > \pi$, dan kan men in G_z twee krommen trekken, die in z_o uitmonden, en elkaar daar onder een hoek $\beta > \pi$ snijden, terwijl de beeldkrommen in G_w elkaar in het met z_o correspondeerend punt w_o onder een hoek $\leqq \pi$ moeten snijden, zoodat hoektrouw is uitgesloten, en conformiteit dus eveneens.

Is de hoek $\alpha > \pi$, dan kan men in G_w twee in w_o uitmondende koorden trekken, die elkaar onder een hoek $\beta > \alpha$ snijden, terwijl de beeldkrommen in G_z elkaar onder een hoek $\leqq \alpha$ moeten snijden, zoodat ook nu hoektrouw is uitgesloten, en conformiteit dus eveneens.

Slechts in het geval $\alpha = \pi$ is conformiteit in z_o mogelijk. Als de beide bogen in z_o tangentiëel aaneensluiten, en $\left|\frac{dz}{dt}\right|_{t_o} \neq 0$ (waarin t_o de bij z_o behoorende parameter is), op beide bogen, dan heeft ieder dier bogen in z_o een van nul verschillende kromtestraal. De angulaire conformiteit in z_o volgt nu met behulp van het in § 21 te bewijzen criterium.

c) Uit de volgende paragrafen zal blijken, dat ook bij begrenzingskrommen van Jordan in punten, die géén inwendige punten van analytische deelbogen zijn, angulaire conformiteit mogelijk is. Het staat echter vast, dat hier een criterium niet gevonden zal kunnen worden, door de voortzetbaarheid der afbeeldingsfunctie over de desbetreffende punten te bewijzen. Indien n.l. deze functie over een punt z_o van Γ_z voortzetbaar is, dan volgt hieruit, dat z_o inwendig punt eener analytische deelboog is, in strijd met de onderstelling. Voor het opsporen van criteria voor randconformiteit bij niet-analytische begrenzingsbogen moeten we dus andere wegen inslaan.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 20 — Hoekafgeleide en angulaire conformiteit — *Als* $w = f(z)$, *holomorf in het R.H.V., in een punt* z_o *van de rand* Γ_z *een eindige, van nul verschillende hoekafgeleide heeft, is de afbeelding van het R.H.V. op het beeldgebied* G_w *angulair conform in* z_o.

Bewijs: Kies voor z_o de oorsprong en onderstel, dat met z_o $w = 0$ correspondeert. Stel de hoekafgeleide $\lambda_o \,.\, e^{i\theta_o}$. $(\lambda_o \neq 0)$.

Geef $\varepsilon > 0$; dan volgt uit $w = w_1 + \int_{z_1}^{z} f'(z)\,.\,dz$, dat men een δ kan bepalen, zóó dat voor $|z_1|$ en $|z| < \delta$ (in een angulaire buurt van $z = 0$) voldaan is aan: $\left|\frac{w - w_1}{z - z_1} - \lambda_o \,.\, e^{i\theta_o}\right| < \varepsilon$, dus ook

$$\left|\frac{w_1}{z_1} - \lambda_o \,.\, e^{i\theta_o}\right| \leqq \varepsilon.$$

Dus is: $\frac{w}{z} \to \lambda_o \,.\, e^{i\theta_o}$ voor $z \to 0$ (angulair). Hieruit volgt de angulaire conformiteit.

Opmerkingen: 1. Als G_z geheel in het R.H.V. ligt, en er is een hoekafgeleide in O, dan is de waarde van θ_o steeds 0, omdat voor $\theta_o \neq 0$ het beeldgebied van een hoek, met opening voldoend dicht bij π, in het R.H.V., ten deele buiten het R.H.V. zou komen te vallen.

2. *Uit* $f'(z) \to \lambda$ (*angulair*) *volgt, volgens deze paragraaf* $\frac{w}{z} \to \lambda$ (*angulair*).
Omgekeerd volgt uit $\frac{w}{z} \to \lambda$ (*angulair*), *dat* $f'(z) \to \lambda$ (*angulair*).
Dit is in § 17*b* bewezen voor een angulaire buurt van $z = \infty$. Voor een angulaire buurt van $z = 0$ volgt de stelling uit de transformatie $z' = \frac{1}{z}$, $w' = \frac{1}{w}$, waardoor $w = f(z)$ overgaat in een functie

$$w' = F(z').$$

Dan is voor $z' \to \infty$ (angulair): $\frac{w'}{z'} \to \frac{1}{\lambda}$, dus $\frac{dw'}{dz'} \to \frac{1}{\lambda}$.

Uit:
$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dw'} : \frac{dw'}{dz'} \cdot \frac{dz'}{dz} = \frac{z'^2}{w'^2} \cdot \frac{dw'}{dz'}$$

volgt nu:
$$\frac{dw}{dz} \to \lambda \text{ (angulair)}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Zijn z_o en w_o de correspondeerende randpunten, dan moet in deze stelling de uitdrukking $\lim_{z \to z_o} \frac{w}{z}$ vervangen worden door

$$\lim_{z \to z_o} \frac{w - w_o}{z - z_o},$$

de verandering in het bewijs ligt voor de hand.

§ 21 — Criterium van Caratheodory-Valiron

Onderstelling: 1° $w = f(z)$ *is holomorf voor* $x > 0$;
2° $z = \varphi(w)$, *de inverse functie van* $w = f(z)$, *is holomorf voor* $u > a$;
3° $w \to \infty$ *voor* $z \to \infty$ (*twee-dimensionaal*).

Bewering: $\underset{z \to \infty}{\text{ang. limiet}} \frac{w}{z} > 0.$

Bewijs: Voor $z \to \infty$, angulair, is $\frac{w}{z} \to \lambda \geqq 0$.

Voor $w \to \infty$, angulair, is $\frac{z}{w} \to \mu \geqq 0$,

omdat het gebied $(u > a)$ ook een halfvlak is.

Voor $z \to \infty$, $y = 0$, is $\frac{z}{w} \to \frac{1}{\lambda}$, van welke limiet we willen aantoonen, dat ze niet ∞ is.

Het beeld van de positieve, reële as noemen we Γ_w, welke kromme zich op grond van onderstelling 3° tot in het oneindige uitstrekt.

Nu is op Γ_w: $\frac{z}{w} \to \frac{1}{\lambda}$

en op de reële as: $\frac{z}{w} \to \mu$.

Omdat $\frac{z}{w}$ nooit negatief is, dus „begrensd in ruimere zin", — zie opmerking 2, — moeten deze twee limieten gelijk zijn; $\mu = \frac{1}{\lambda} \geqq 0$.
Uit: $\lambda \geqq 0$ en $\frac{1}{\lambda} \geqq 0$, en beide eindig, volgt: $\lambda > 0$.

De afbeelding van gebied G_w, dat door $z = \varphi(w)$ een aan een en conform afgebeeld wordt op het R.H.V., is dus onder de voorwaarden in de onderstelling genoemd, angulair conform in het oneindig verre punt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Opmerkingen: 1. Voor het geval, dat het holomorfiegebied van $w = f(z)$ de eenheidscirkelschijf is, vinden we voor het criterium de volgende vorm: *de afbeelding van een enkelvoudig samenhangend schlicht gebied G_w (rand Γ_w) op de eenheidscirkelschijf G_z (rand Γ_z) is angulair conform in elk punt w_o van Γ_w, waar Γ_w ligt tusschen twee elkaar in dat punt rakende cirkels* (zie fig. 19).

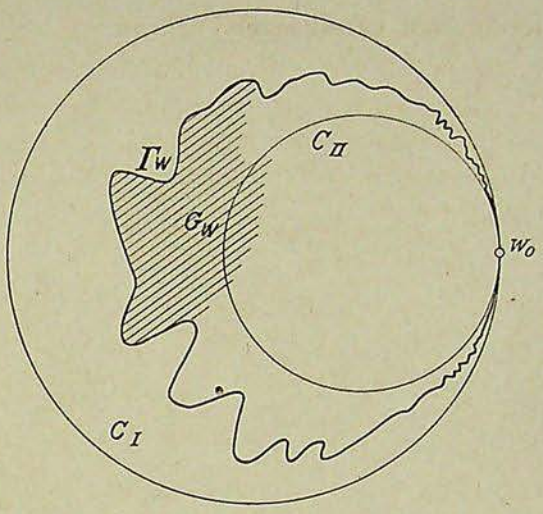


Fig. 19. Criterium van CARATHEODORY-VALIRON.

2. We hebben in bovenstaand bewijs gebruik gemaakt van de volgende stelling:

een functie $w = f(z)$, holomorf en begrensd in een gebied G_z en op de rand Γ_z links-continu en rechts-continu in een punt z_o, kan langs Γ_z in twee verschillende richtingen naar z_o géén twee verschillende limieten hebben.

Onderstelling: *Een voor $|z| < R$ holomorfe, begrensde functie $F(z)$ is in het punt A van de cirkel $|z| = R$ niet gedefiniëerd.*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{z \to A} F(z) = a_1 + ia_2 \; (= a) \\ \lim\limits_{A \leftarrow z} F(z) = b_1 + ib_2 \; (= b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{voor } z \text{ naderend tot } A \\ \text{langs de cirkelomtrek,} \\ \text{in twee verschillende} \\ \text{richtingen.} \end{array}$$

Bewering: $a = b$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bewijs: Omdat $F(z)$ begrensd is, is $F(z)$ gelijk aan haar Poisson-integraal

$$F(z) = \frac{R^2 - \varrho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F[R \cdot e^{\phi i}]}{r^2} \, d\varphi,$$

waarin $\varrho = |z|$, $r = |Re^{\phi i} - z|$. Zie fig. 20.

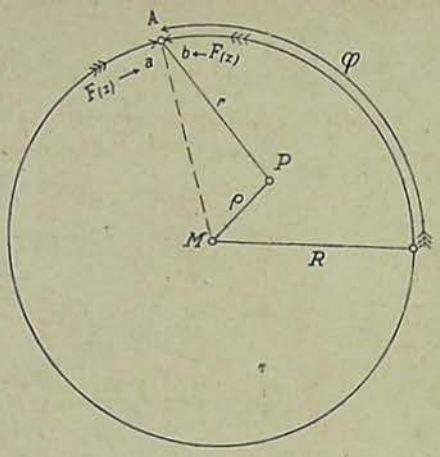


Fig. 20. Poisson-integraal.

Beschouw nu de functie ψ, d.i. de hoek tusschen de (halve) raaklijn AB in A en de voerstraal van A naar een punt z binnen de cirkel. Zie fig. 21.

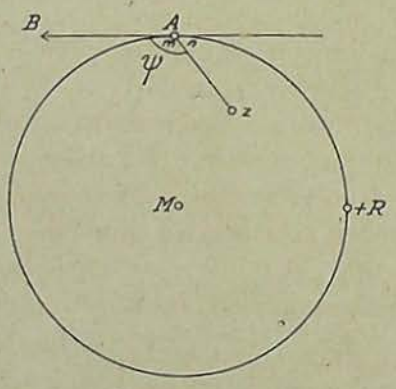


Fig. 21. De harmonische functie ψ.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Dan is, als we $F(z) = U(z) + i \,.\, V(z)$ stellen,

$$\frac{U(z) - a_1}{b_1 - a_1} - \frac{\psi}{\pi}$$

een harmonische functie binnen de cirkel. Deze neemt in A zoowel rechts als links de randlimiet nul aan. Definieeren we nu de waarde dezer harmonische functie in dit punt als nul, dan is de randwaardencollectie continu in A en moet de harmonische functie hier de tweedimensionale limiet nul hebben.

Dus: $$\frac{U - a_1}{b_1 - a_1} \to \frac{\psi}{\pi},$$

d.i. als we tot A naderen volgens een koorde, die de hoek π bij A in verhouding van m tot n verdeelt, zoodat

$$\psi = \frac{m}{m+n} \,.\, \pi,$$

dan is: $$U \to \frac{a_1 \,.\, n + b_1 \,.\, m}{m + n},$$

langs deze koorde.

Evenzoo: $$V \to \frac{a_2 \,.\, n + b_2 \,.\, m}{m + n},$$

langs deze koorde,

dus: $$F(z) \to \frac{a \,.\, n + b \,.\, m}{m + n},$$

langs deze koorde.

$F(z)$ nadert dus als $a \neq b$, langs twee verschillende koorden tot 2 verschillende limieten.

Een begrensde holomorfe functie, die in een randpunt een radiale limiet heeft, heeft echter, volgens Fatou, deze limiet angulair, zoodat twee verschillende limieten zijn uitgesloten.

Uit deze contradictie volgt: $a = b$.

Geven we, inplaats van de voorwaarden van het begrensd zijn, de voorwaarde, dat $f(z)$ de waarden van een bepaald deelgebied van het vlak niet aanneemt, of een continuum van waarden, b.v. een lijnsegment, niet aanneemt, dan vindt men door een passende transformatie het vorig geval terug, zoodat de stelling blijft gelden.

Ook deze functies noemen we begrensd, „in ruimere zin".

3. *Alle inwendige punten van analytische bogen voldoen aan het criterium van Caratheodory—Valiron*, waaruit dus opnieuw de

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

reeds in § 19*a* bewezen angulaire comformiteit in deze punten volgt. *Dat echter het bewezen criterium veel verder reikt, blijkt uit het voorbeeld van Caratheodory* uit hoofdstuk I, § 3, blz. 12. Het criterium geeft n.l. onmiddellijk de conformiteit in $z = +1$ van de afbeelding van het door die kromme begrensd deelgebied G_z van de eenheidscirkelschijf $|z| < 1$ op de eenheidscirkelschijf G_w ($|w| < 1$), als we met $z = +1$ $w = +1$ doen correspondeeren, en b.v. met $z = 0$ $w = -1$.

Toch is de functie $z = \varphi(w)$, die G_w op G_z afbeeldt, discontinu in $w = +1$. Dit is in verband met het feit, dat $w = +1$ beeldpunt is van de heele cirkelomtrek $|z| = 1$, incl. de punten $z = -1$, $z = +1$ (zie hoofdstuk I, § 6) duidelijk te maken a.v.: in elke omgeving van $w = +1$ liggen beeldpunten van $z = -1$, welk punt van aftelbaar oneindige veelvuldigheid is, dus liggen in elke omgeving van $w = +1$ ook beeldpunten van punten uit de omgevingen van $z = -1$. Er is dus een ε (zelfs > 1), zóódat er voor elke δ punten w zijn aan te geven, met $|z - 1| > \varepsilon$ en $|w - 1| < \delta$ Hieruit volgt de discontinuiteit van $z = \varphi(w)$ in $w = +1$.

Voor $z \to +1$ is $w \to +1$, wel angulair, maar niet tweedimensionaal.

4. Geen enkel punt van de kromme van HELGE VON KOCH voldoet aan het criterium van CARATHEODORY—VALIRON, zooals

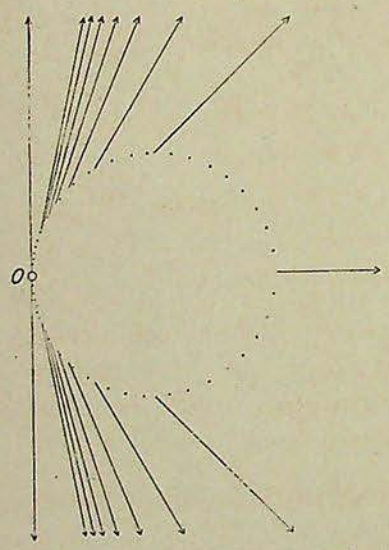


Fig. 22.
Voorbeeld van een gebied, waarop een cirkelschijf conform kan worden afgebeeld, zóó dat er angulaire conformiteit is in een randpunt, en toch de afbeeldingsfunctie in géén enkele omgeving van dit randpunt begrensd is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

reeds blijkt uit het feit, dat dit criterium voor de randconformiteit in een punt z_0 het bestaan van een raaklijn aan Γ_z in z_0 eischt. Toch mag men hieruit nog niet concludeeren, dat genoemde kromme géén enkel punt zou bezitten, waarin de afbeelding conform is.

5. Een eenvoudige transformatie doet het in 3 bedoelde gebied G_z overgaan in een gebied $G_{z'}$, bestaande uit het rechterhalfvlak minus een aftelbare verzameling van halfstralen, waarvan door $w = f(z')$ een afbeelding op $|w| < 1$ te verkrijgen is, die in $z' = 0$, $w = +1$ conform is, maar niet tweedimensionaal continu, terwijl, als $w = +1$ met $z' = 0$ correspondeert, de functie $z'(w)$ in géén enkele omgeving van $w = +1$ begrensd is (CARATHEODORY, t.a.p., blz. 54). — Zie fig. 22.

§ 22 — Criterium van Wolff

a) Hulpstelling I.

Onderstelling: $w = f(z)$ *is holomorf binnen cirkel* K_z *(middelpunt* m_z*; straal* r_z*); alle functiewaarden liggen, òf binnen cirkel* L_w*, òf buiten cirkel* L_w *(middelpunt* m_w*, straal* r_w*).*

(z_n), *in* K_z, $\to a_z$ *op* K_z
$(w_n) \to a_w$ *op* L_w } *voor* $n \to \infty$

(z_n, K_z) = *afstand van* z_n *tot cirkel* K_z, *d.i.*

$$r_z - |z_n - m_z|,$$

(w_n, L_w) = *afstand van* w_n *tot cirkel* L_w, *d.i.*

$$|r_w - |w_n - m_w||.$$

$$\frac{(w_n, L_w)}{(z_n, K_z)} < M \text{ (constant) op de puntensuite } (z_n).$$

Bewering: $w = f(z)$ *heeft een hoekafgeleide in* a_z.

Bewijs: Deze hulpstelling is slechts een andere formuleering van de in § 17*d* bewezen stelling over de hoekafgeleide. Immers, door enkele elementaire transformaties [translatie van het z- en het w-vlak; vermenigvuldiging t.o.v. de oorsprong met $\frac{1}{r_z}$ en $\frac{1}{r_w}$ en rotatie der eenheidscirkelschijven, die dan ontstaan, met nog eventueel een inversie van het nieuwe w-vlak]

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

gaat de laatste eisch, die in de onderstelling genoemd is, over in:

$$\frac{1 - |w_n'|}{1 - |z_n'|} < M' \text{ (constant)},$$

zoodat we de genoemde § 17*d* kunnen toepassen.

b) *Hulpstelling II:*

Onderstelling: *Een puntensuite* $(P_n) \to O$ *ligt geheel binnen of op de cirkel met straal* ϱ, *die in* O *aan de y-as raakt.*
In O *raken eveneens aan de y-as: een cirkel met straal* r *en een cirkel met straal* R;

$$\varrho < r < R.$$

d_{r_n} *is de afstand van* P_n *tot cirkel* r,
d_{R_n} *is de afstand van* P_n *tot cirkel* R.

Bewering: $\frac{d_{r_n}}{d_{R_n}}$ *is naar onderen en naar boven begrensd.* (Zie fig. 23).

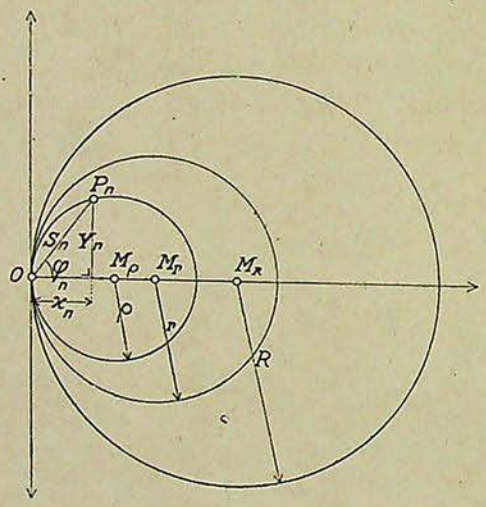


Fig. 23. Bij hulpstelling II van § 22.

Bewijs: Men heeft, $OP_n = s_n$ en $\angle P_nOX = \varphi_n$ stellend:

$$d_{r_n} = r - \sqrt{(r - x_n)^2 + y_n^2} = r - \sqrt{s_n^2 + r^2 - 2rs_n \cos \varphi_n}.$$

$$d_{R_n} = R - \sqrt{(R - x_n)^2 + y_n^2} = R - \sqrt{s_n^2 + R^2 - 2R_{s_n} \cdot \cos \varphi_n}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Binnen cirkel ϱ is:

$$x^2 + y^2 - 2x\varrho < 0, \text{ dus: } s < 2\varrho \cos\varphi.$$

Nu is:

$$\frac{d_{r_n}}{d_{R_n}} = \frac{r - \sqrt{s_n^2 + r^2 - 2rs_n \cos\varphi_n}}{R - \sqrt{s_n^2 + R^2 - 2Rs_n \cos\varphi_n}}$$

$$= \frac{2r\cos\varphi_n - s_n}{2R\cos\varphi_n - s_n} \cdot \frac{R + \sqrt{s_n^2 + R^2 - 2Rs_n\cos\varphi_n}}{r + \sqrt{s_n^2 + r^2 - 2rs_n\cos\varphi_n}}$$

$> \frac{r-\varrho}{R}$ maal een vorm, die voor $n \to \infty$ tot $\frac{R}{r}$ nadert.

Hierbij volgt: $\frac{d_{r_n}}{d_{r_n}}$ is naar beneden begrensd.

Voorts volgt uit:

$d_{r_n} < d_{R_n}$ dat $\frac{d_{r_n}}{d_{R_n}}$ naar boven begrensd is.

d) Criterium van Wolff[41]).

Onderstelling: G_z is een enkelvoudig samenhangend gebied, dat door $w = f(z)$ conform wordt afgebeeld op de eenheidscirkelschijf G_w; z_o en w_o zijn correspondeerende randpunten op de randen Γ_o en Γ_w (zie: § 4 en § 6). *G_z bevat een cirkelschijf δ_z, waarvan de rand γ_z door z_o gaat, G_w bevat een cirkelschijf d_w, waarvan de rand c_w in w_o aan Γ_w raakt, en waarvan het beeld*

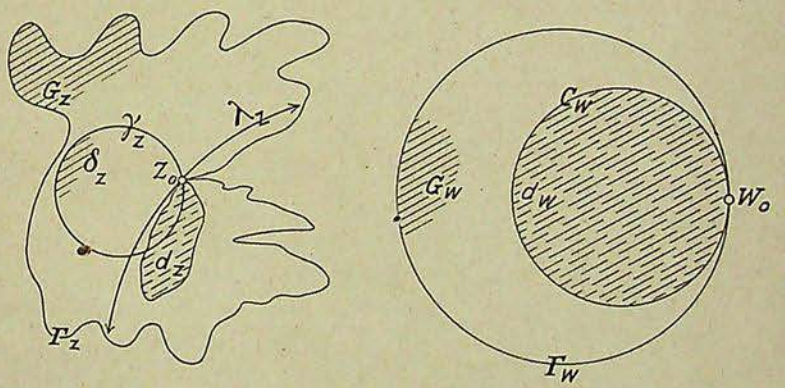


Fig. 24*a* Criterium van Wolff. Fig. 24*b*.

[41]) J. Wolff, Sur la dérivée angulaire dans la représentation conforme; Comptes rendus, 3 Maart 1930, blz. 575.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

d_z òf geheel binnen, òf geheel buiten een cirkel λ_z ligt, die door z_o gaat.

Bewering: *De afbeelding van G_z op G_w is conform in de randpunten z_o en w_o.* (Zie fig. 24*a* en *b*).

Bewijs: De cirkelschijf d_w wordt door de transformatie afgebeeld op een gebied, dat aan één kant van de cirkelomtrek λ_z ligt; indien dus voor eenige in d_w gelegen puntensuite $(w_n) \to w_o$ gold: $\frac{(z_n,\ \lambda_z)}{(w_n,\ c_w)}$ begrensd, zou volgens hulpstelling I de afbeelding conform zijn in de punten $(w_o,\ z_o)$.

De cirkelschijf δ_z wordt door de transformatie afgebeeld op een gebied, dat geheel binnen de cirkelomtrek Γ_w ligt; indien dus voor eenige in δ_z gelegen puntensuite $(z_n) \to z_o$ gold: $\frac{(w_n,\ \Gamma_w)}{(z_n,\ \gamma_z)}$ begrensd, zou volgens hulpstelling I de afbeelding conform zijn in de punten $(z_o,\ w_o)$.

Ontkennen we dus de stelling, dan moeten we hebben:

$$\frac{(z_n,\ \lambda_z)}{(w_n,\ c_w)} \to \infty \text{ voor elke puntensuite } (w_n) \to w_o, \text{ in } d_w \quad . \ . \ . \ (1)$$

en $$\frac{(w_n,\ \Gamma_w)}{(z_n,\ \gamma_z)} \to \infty \text{ voor elke puntensuite } (z_n) \to z_o, \text{ in } \delta_z \quad . \ . \ . \ (2)$$

We toonen aan, dat deze beide betrekkingen tot een contradictie voeren.

Maak t.o.v. de ligging van λ_z en γ_z twee onderstellingen:

1° γ_z en λ_z snijden elkaar. Er is dan een cirkelsikkel S_z, waar d_z niet in doordringt, zóódat het beeld S_w van S_z liggen moet binnen Γ_w, maar buiten c_w.

2° γ_z en λ_z raken elkaar. (Zie fig. 25). Zij nu δ'_z een cirkelschijf, binnen δ_z waarvan de rand γ'_z in z_o aan γ_z raakt, en d'_w een cirkelschijf binnen d_w, waarvan de rand c'_w in w_o aan c_w raakt. Dan kan het beeld δ'_w van δ'_z met d'_w géén puntensuite gemeen hebben, die tot w_o convergeert.

In verband met $\frac{(z_n,\ \lambda_z)}{(z_n,\ \gamma_z)}$ naar boven en naar onderen begrensd (hulpstelling II) volgt n.l. voor een dergelijke puntensuite, in d_z èn in δ'_z, uit (1):

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\frac{(z_n,\ \gamma_z)}{(w_n,\ c_w)} \to \infty \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

En in verband met $\dfrac{(w_n,\ \Gamma_w)}{(w_n,\ c_w)}$ naar boven en naar onderen begrensd, volgt uit die hulpstelling voor de beeldsuite in d'_w uit (2):

$$\frac{(w_n,\ c_w)}{(z_n,\ \gamma_z)} \to \infty \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Omdat (3) en (4) elkaar uitsluiten, heeft d_z met δ'_z géén tot z_o convergeerende puntensuite gemeen.

In elk geval kan men door z_o in G_z dus een verzameling segmenten σ_z trekken, die een positieve hoek θ (die in het tweede geval $= \pi$ is,) nabij z_o bedekken, en waarvan de beeldkrommen σ_w door w_o alle in G_w, maar buiten d'_w liggen.

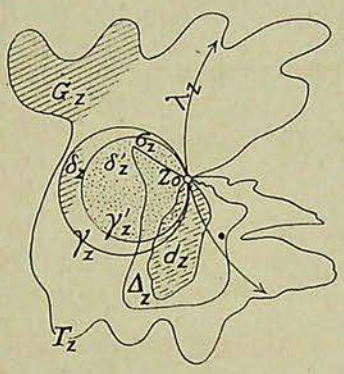


Fig. 25.

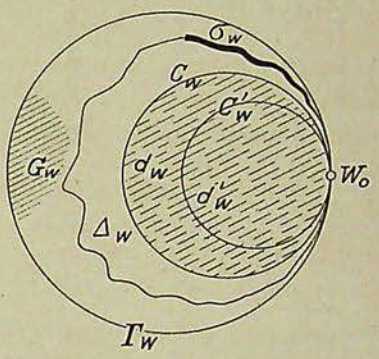


Fig. 26.

Criterium van WOLFF. *)

Beschouw nu een enkelvoudig samenhangend gebied $\triangle_z$ in G_z, dat z_o tot randpunt heeft, en één der segmenten σ_z als deel van de contour bevat, terwijl d_z deelgebied van $\triangle_z$ is (fig. 25). Men kan uit de segmentenverzameling (σ_z) het segment σ_z zóó kiezen in δ_z, dat $\triangle_z$ in de omgeving van z_o ligt binnen een hoek $q = 2\pi - \varepsilon$ (ε positief).

De rand van het beeld $\triangle_w$ van $\triangle_z$ ligt binnen Γ_w, maar buiten c'_w, zóódat volgens het criterium van CARATHEODORY—VALIRON de afbeelding, door de holomorfe functie $\zeta = \zeta(w)$ van $\triangle_w$ op de eenheidscirkelschijf $|\zeta| < 1$ conform is in w_o (fig. 26).

*) In fig. 25 mag de cirkel λ_z het gebied d_z *niet* snijden.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$\varphi(\zeta) = \dfrac{z - z_o}{w - w_o}$ is nu een holomorfe functie van ζ voor $|\zeta| < 1$; immers voor $|\zeta| < 1$ is w een holomorfe functie van ζ, de inverse van $\zeta = \zeta(w)$, en z is een hol. functie van w in $\triangle_w$, dus van ζ voor $|\zeta| < 1$, terwijl $|w - w_o| \neq 0$ voor $|\zeta| < 1$.

Voor de functie $\varphi(\zeta)$ gelden nu de volgende 3 eigenschappen:

1° $\varphi(\zeta) \to 0$ voor $\zeta \to \zeta_o$ op het beeld σ_ζ van σ_w (het beeld van σ_z).

Omdat n.l. σ_z de cirkel γ_z onder een bepaalde hoek snijdt, is $\dfrac{|z - z_o|}{(z,\ \gamma_z)}$ begrensd op σ_z. Omdat z op σ_z tot z_o nadert binnen δ_z, is volgens (2):

$$\frac{(z,\ \gamma_z)}{(w,\ \Gamma_w)} \to 0, \text{ dus ook } \frac{|z - z_o|}{(w,\ \Gamma_w)} \to 0.$$

Maar, $$\frac{|z - z_o|}{|w - w_o|} < \frac{|z - z_o|}{(w,\ \Gamma_w)} \to 0,$$

zoodat $\varphi(\zeta) \to 0$ voor $\zeta \to \zeta_o$ op σ_ζ.

2° $\varphi(\zeta) \to \infty$ op alle koorden van $|\zeta| < 1$, door ζ_o.

Omdat n.l. $\triangle_w$ en $|\zeta| < 1$ conform op elkaar zijn afgebeeld, zal het beeld van een koorde k_ζ, die de cirkel $|\zeta| = 1$ onder een hoek ψ snijdt, een kromme k_w zijn, die c_w in w_o onder een hoek ψ ontmoet. Deze kromme ligt dus in de omgeving van w_o stellig binnen d_w. Men vindt:

$$(w,\ c_w) \to |w - w_o| \sin \psi,$$

zoodat uit $\dfrac{(z,\ \lambda_z)}{(w,\ c_w)} \to \infty$ [zie (1)] volgt: $\dfrac{(z,\ \lambda_z)}{|w - w_o|} \to \infty$.

Nu is: $$\frac{|z - z_o|}{|w - w_o|} > \frac{(z,\ \lambda_z)}{|w - w_o|} \to \infty,$$

dus $\varphi(\zeta) \to \infty$ langs genoemde koorden.

3° We kunnen een cirkelsegment van $|\zeta| \leqq 1$ bepalen, ten deele begrensd door σ_ζ en een koorde door ζ_o, die elkaar onder een hoek φ snijden, zóódat in dit segment $\varphi(\zeta)$ een argument heeft, dat de waarden uit een bepaalde hoek niet aanneemt. Zie fig. 27.

Dit volgt uit: $\arg \varphi(\zeta) = \arg (z - z_o) - \arg (w - w_o)$; als we voor φ een hoek kiezen $< \frac{1}{2}\epsilon$ (zie boven), liggen de argumenten

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

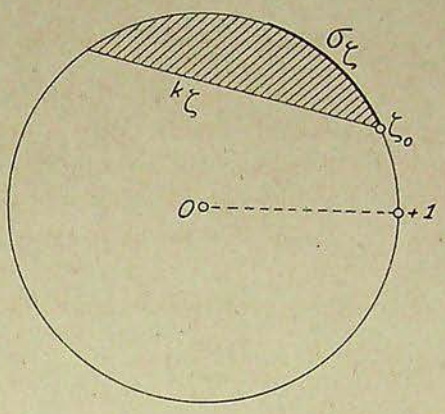


Fig. 27. Criterium van WOLFF.

van $\varphi(\zeta)$ in een hoek $\leqq 2\pi - \frac{1}{2}\varepsilon$, zoodat de waarden uit een hoek $\geqq \frac{1}{2}\varepsilon$ ontbreken.

$\varphi(z)$ is dus, in de ruime zin, begrensd.

Volgens opmerking II, § 21, blz. 69 kan een begrensde functie $\varphi(\zeta)$ de eigenschappen 1° en 2° niet bezitten.

Uit deze contradictie volgt de juistheid van het criterium.

Opmerking: Het kenmerk van Caratheodory—Valiron is als bijzonder geval opgesloten in dat van Wolff.

Immers, de cirkelschijf binnen G_z uit eerstgenoemd kenmerk doet de dienst van de schijf δ_z uit het kenmerk van WOLFF, en de cirkelomtrek, waarbinnen G_z ligt, doet de dienst van de cirkel λ_z uit het kenmerk van WOLFF. Elke cirkelschijf c_w, in $|w| < 1$ rakend aan $|w| = 1$ in het beschouwde randpunt, ligt aan één zijde van λ_z, omdat G_z in zijn geheel aan één zijde van λ_z ligt. Een afbeelding, die aan de voorwaarden van CARATHEODORY voldoet, voldoet dus tevens aan die van WOLFF.

§ 23 — Tweede criterium van Caratheodory — *Caratheodory geeft* (t.a.p. blz. 53) *een tweede criterium*, algemeener dan dat van § 4.

Onderstellingen: 1. *$w = f(z)$ beeldt het enkelvoudig samenhangend, schlicht gebied G_z af op de eenheidscirkelschijf G_w;*

2. *H_z is een deelgebied van G_z, dat met G_z een randpunt P_z gemeen heeft, welk randpunt met $w = +1$ correspondeert;*

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

3. *de rand A_z van H_z is in de omgeving van P_z analytisch;*
4. *het beeld H_w van H_z heeft een cirkelschijf, die in $w = +1$ aan de eenheidscirkel $|w| = 1$ raakt, tot deelgebied.*

Bewering: *de afbeelding van G_z op G_w is conform in $w = +1$.*

Bewijs: Beeld H_z door $u = \varphi(z)$ één aan één en conform af op de eenheidscirkelschijf H_u ($|u| < 1$), zóódat P_z correspondeert met $u = +1$. Dan is $z = \psi(u)$ een holomorfe functie van u in H_u, en $w = f\{\psi(u)\}$ een holomorfe functie van u in H_u, die H_u op H_w afbeeldt.

Volgens het criterium van CARATHEODORY—VALIRON is de afbeelding van H_u op H_w conform in $u = +1$ (zie: onderstelling 4); dus:

$\frac{dw}{du} \to$ eindige limes, $\neq 0$, voor $u \to 1$, met $|\arg(1-u)| \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$.

P_z is een inwendig punt van een analytische deelboog van A_z; dus $u = \varphi(z)$ is over P_z voortzetbaar, en:

$\frac{du}{dz} \to$ eindige limes, $\neq 0$, voor $z \to P_z$, tweedimensionaal, dus stellig angulair, in elk beeldgebied van de aangegeven angulaire omgevingen van $u = +1$.

Uit: $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dz}$ volgt nu:

$$\frac{dw}{dz} \to \text{eindige limes, } \neq 0, \text{ voor } z \to P_z \text{ (angulair).}$$

De afbeelding van G_z op G_w is dus conform in $w = +1$.

Opmerkingen: 1. CARATHEODORY stelt nog de eisch, dat een deel der reëele as van het w-vlak ($h < w < 1$) beeld is van een kromme l_z, die geheel in H_z ligt.

Deze voorwaarde is blijkens bovenstaand bewijs overbodig.

§ 24 — Criterium van Lars Ahlfors [42])

In een recent artikel heeft LARS AHLFORS de conformiteit der

[42]) LARS AHLFORS, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Nova Series A; Tome 1,no. 9, 1930; Untersuchungen zur Theorie der Konformen Abbildung und der ganzen Funktionen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

afbeelding in een angulaire buurt van een randpunt onderzocht, en daarbij o.a. de volgende resultaten verkregen.

Onderstel, dat het enkelvoudig samenhangend gebied G_z door $w = f(z)$ conform wordt afgebeeld op het rechterhalfvlak G_w. Als $\theta(r)$ het aantal radialen is van die boog in G_z van cirkel $|z| = r$, die gesneden wordt door het beeld van de reëele as van het w-vlak, *dan zal, als de afbeelding van G_z op G_w angulair conform is in $z = \infty$ (en ook $z = 0$ bereikbaar randpunt is), voldaan zijn aan:*

$$\int_1^r \frac{\pi - \theta(r)}{\theta(r)} \cdot \frac{dr}{r} \text{ is begrensd } (r \text{ willekeurig}).$$

(*Noodige voorwaarde voor angulaire conformiteit*).

Zij voorts m_p het grootste van de getallen 0 en max. $\frac{1}{2}[\pi - \theta_1(r)]$ in het interval $k^p \leqq r \leqq k^{p+1}$ (k pos., constant, > 1), als $\theta_1(r)$ het aantal radialen is van de grootste deelboog van

$$|z| = r \text{ binnen } G_z,$$

dan zal de afbeelding van G_z op G_w angulair conform zijn in $z = \infty$, indien voldaan is aan:

$$\sum_{p=0}^{\infty} m_p \text{ en } \int_1^{\infty} \{\theta(r) - \pi\} \frac{dr}{r} \text{ zijn convergent.}$$

(*Voldoende voorwaarde voor angulaire conformiteit*).

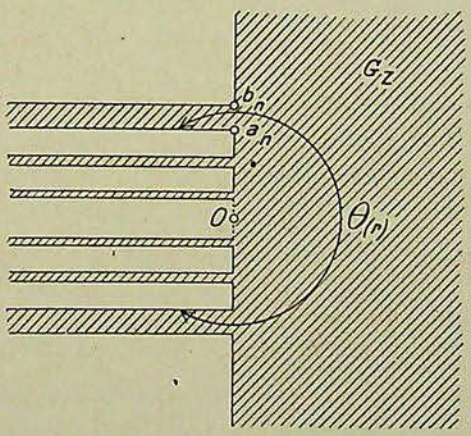


Fig. 28. Criterium van AHLFORS.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Met behulp van dit criterium blijkt, dat de afbeelding van het in fig. 28 aangegeven gebied G_z op het rechterhalfvlak G_w angulair conform is in $z = 0$. CARATHEORORY geeft dit voorbeeld aan het slot van zijn onder [8]) geciteerd artikel, als toepassing van het in § 23 genoemde criterium. Toepassing van het criterium van AHLFORS zal tevens doen zien, dat het gebied G_z door nog algemeenere gebieden kan worden vervangen.

G_z bestaat uit het rechterhalfvlak, plus een verzameling oneindig lange, horizontale strooken uit het linkerhalfvlak, die aan het R.H.V. grenzen in de intervallenverzameling (a_n, b_n), die zich in O verdicht. De intervallen worden zóó smal gekozen, dat de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{b_n}{a_n}$$

convergeert.

Transformeeren we het criterium van AHLFORS voor dit geval, waarin $z = 0$ in plaats van $z = \infty$ het te onderzoeken punt is, dan blijkt, dat we voor het aangegeven gebied G_z moeten bewijzen, dat

$$\int_0^1 \frac{\omega(r) \, . \, dr}{r} \text{ en } \sum_{p=1}^{\infty} m_p$$

convergent zijn.

m_p is het grootste der getallen 0 en max. $\frac{1}{2}[\pi - \theta_1(r)]$ in het interval $k^p \geqq r \geqq k^{p+1}$ (k positief, constant, < 1); $\omega(r) = \theta(r) - \pi$ heeft dezelfde beteekenis, als in het vorig geval. De Σ-som is nul, en voor de integraal merken we op, dat de integrand nul is, behalve op de aangegeven intervallenverzameling; hier is echter

$$\omega(r) < \pi.$$

AHLFORS bewijst, dat, hoe de rand Γ_z ook moge zijn, de integraal $\int_0 \frac{\omega(r) \, . \, dr}{r}$ (als LEBESGUE-integraal opgevat), bestaat (t.a.p. blz. 11).

Uit:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)\,dr}{r} < \pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{dr}{r} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{b_n}{a_n}\,,$$ dus eindig,

volgt nu, dat $\int_0^1 \frac{\omega(r)\,.\,dr}{r}$ convergent is, zoodat aan de voorwaarden van AHLFORS voor angulaire conformiteit is voldaan.

Tevens blijkt, dat de strooken in het linkerhalfvlak door algemeenere gebieden mogen worden vervangen, mits de intervallenverzameling op de imaginaire as dezelfde blijft.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

HOOFDSTUK V

TOEPASSINGEN

§ 25 — Als $w = f(z)$ het rechterhalfvlak G_z conform afbeeldt op het enkelvoudig samenhangend gebied G_w in het rechterhalfvlak, dat met G_z het oneindig verre punt tot gemeenschappelijk randpunt heeft, dan is volgens § 20 de afbeelding angulair-conform in dit randpunt, als λ, *de* limiet van $\frac{u}{x}$ voor $x \to \infty$, y constant, niet gelijk nul is.

Als voor $w = f(z)$ de bijbehoorende $\lambda > 0$ is, zullen we het gebied G_w, met het oog op het gedrag in het oneindige, een *„deugdelijk gebied"* noemen; is $\lambda = 0$, dan noemen we het gebied *niet-deugdelijk*.

De stelling van de volgende paragraaf zal ons een voorschrift aan de hand doen tot het construeeren van deugdelijke gebieden.

§ 26 — *Onderstelling:* $w = f(z)$ *is holomorf voor* $x = R(z) > 0$;

$$u = R(w) > 0\,;\ \lambda_f = \lim_{x \to} \frac{u}{x}\ (y \text{ constant}) < 1.$$

Bewering: *De puntverzameling* (z) *uit het rechterhalfvlak, waarvoor* $u < x$, *vormt een deugdelijk gebied.*

Bewijs: Zij $a = a + bi$ een punt uit het rechterhalfvlak G_z, (dus $a > 0$); dan is $R\{f(z) + a\} > 0$.

De vergelijking $f(z) + a = z$ heeft dan voor elk dier a's één en niet meer dan één wortel binnen G_z. Op de rand van G_z kan n.l. geen dekpunt der transformatie $f(z) + a$ liggen; immers, $z = \infty$ kan geen dekpunt zijn, omdat dan zou gelden $u + a \geqq x$, dus $\frac{u}{x} + \frac{a}{x} \geqq 1$, dus $\lim_{x \to \infty} \frac{u}{x} + (\to 0) \geqq 1$, zoodat $\lambda_f \geqq 1$ zou zijn, in strijd met de onderstelling; en wegens $u + a > a$ is een dekpunt op de imaginaire as eveneens onmogelijk.

Deze wortel van $f(z) + a = z$ is een holomorfe functie van a,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

die we $\zeta = \zeta(a)$ noemen; uit $f(\zeta) + a = \zeta$ volgt: $\frac{da}{d\zeta} = 1 - f'(\zeta)$.

Wegens:

$$|f'(\zeta)| \leqq \frac{R[f(\zeta)]}{R(\zeta)} \cdot \frac{R(\zeta) - R(a)}{R(\zeta)} < 1, \text{ is } \frac{da}{d\zeta} \neq 0 \text{ en bestaat } \frac{d\zeta}{da} \text{ dus.}$$

Bij elke a uit het rechterhalfvlak behoort één ζ, zóódat

$$f(\zeta) + a = \zeta, \text{ dus } u < x \text{ is;}$$

bij elke ζ, waarvoor $u < x$ is, is er één a te bepalen, zóódat

$$\zeta - f(\zeta) = a, \text{ met } R(a) \text{ positief.}$$

De punten a van het rechterhalfvlak correspondeeren dus één aan één met die der puntverzameling $(u < x)$. De afbeelding van het rechterhalfvlak op deze puntverzameling is bovendien conform, omdat de holomorfe functie $\zeta = \zeta(a)$ de afbeelding tot stand brengt. Volgens de stelling van de gebiedsoverdracht is de puntverzameling $(u < x)$ dus een gebied.

Uit $R(\zeta) > R(a)$ volgt voor de λ van $\zeta(a)$:

$$\lambda = \lim_{a \to \infty} \frac{R(\zeta)}{a}, \quad (a \text{ reëel}) \geqq 1.$$

§ 27 — *Voorbeeld I:* Neem voor $w = f(z)$ de functie

$$f(z) = \sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}} \cdot (\cos \tfrac{1}{2}\varphi + i \sin \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Deze functie is holomorf in het R.H.V. en de functiewaarden liggen in het rechterhalfvlak. $\lambda_f = \lim_{r \to \infty} \frac{r^{1/2}}{r} = 0 < 1$, dus de functie behoort tot de in § 26 beschouwde klasse. Het gebied G, waarvoor $u < x$, is dus een deugdelijk gebied.

De rand Γ wordt verkregen door $u = x$ te stellen.

De vergelijking der randkromme is in poolcoördinaten:

$$r^{1/2} \cos \tfrac{1}{2}\varphi = r \cos \varphi \text{ of: } r = \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi}{\cos^2 \varphi} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Het gebied G door de kromme omsloten bevat hoeken, die willekeurig dicht bij π liggen, zooals blijkt uit $r \to \infty$ voor $\varphi \to \pm \frac{\pi}{2}$.

Voor $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ is $x = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi}{\cos \varphi} \to \infty$, zoodat elke rechte evenwijdig aan de y-as door de kromme Γ wordt gesneden, en het criterium van CARATHEODORY-VALIRON (§ 21) voor deze kromme dus niet toereikend is.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Vergelijking der kromme in cartesische coördinaten:

$$x = \frac{1 + \cos\varphi}{2\cos\varphi} = \tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2x},$$

dus: $$x^2 + y^2 = 4x^2 (x - \tfrac{1}{2})^2.$$

Voor het beloop der kromme in het oneindige hebben we:

$$y^2 \infty 4x^4 \; ; \; |y| \infty 2x^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Voorbeeld II: Nemen $w = f(z) = \sqrt[n]{z}$, dan behoort ook deze functie tot de klasse, wegens $\lim_{r\to\infty} \frac{\sqrt[n]{r}}{r} = 0 < 1$.

De randkromme Γ, waarvoor $u = x$, is vinden we uit:

$$r\cos\varphi = \sqrt[n]{r}\cos\frac{1}{n}\varphi,$$

waaruit voor de vergelijking van de kromme volgt:

$$r = \left[\frac{\cos\frac{1}{n}\varphi}{\cos\varphi}\right]^{\frac{n}{n-1}}.$$

Voor $|\varphi| \to \frac{\pi}{2}$ is $r \infty |y|$, dus $x \infty |y|^{\frac{1}{n}} \cos\frac{\pi}{2n}$ . . . . . (3)

Voorbeeld III: Neem $f(z) = \frac{z + a}{lg(z + a)}$. We kiezen a positief en $> e$, dan zijn $\lg(z + a)$ en $f(z)$ holomorf voor $R(z) > 0$, terwijl $R[f(z)] > 0$ is.

$\lambda_f = \lim_{x\to\infty} \frac{x + a}{\lg(x + a)} = 0 < 1$, dus $f(z)$ behoort tot de beschouwde klasse.

Stel $z + a = \varrho \, . \, e^{i\theta}$ (ϱ en θ reëel), dan is:

$$u + iv = \frac{\varrho \, . \, e^{i\theta}}{\lg\varrho + i\theta},$$

waaruit volgt: $u = \frac{(x + a) \, . \, \lg\varrho + y \, . \, \theta}{(\lg\varrho)^2 + \theta^2}$,

waarin dus $\varrho = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$ en $\theta = \text{bg tg}\frac{y}{x + a}$.

De randkromme Γ wordt dus bepaald door

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$x = \frac{(x+a)\lg \varrho + y\theta}{(\lg \varrho)^2 + \theta^2} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Bij de beoordeeling van het gedrag der kromme in het oneindige bedenke men, dat $\lg x$ voor $x \to \infty$ zwakker oneindig wordt dan elke nog zoo lage macht van x.

Het rechterlid van (4) is t.o.v. x van dezelfde orde als $\frac{x}{\lg x}$, dus van een orde < 1, en t.o.v. y van dezelfde orde als $\frac{y}{(\lg y)^2}$.

Men vindt dus voor het gedrag in het oneindige:

$$x \infty \frac{y}{(\lg y)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Voorbeeld IV: Neem $f(z) = \frac{z+a}{lg\, lg\,(z+a)}$, a positief en $> e^e$, dan is $f(z)$ holomorf voor $R(z) > 0$, en $R[f(z)] > 0$.

$\lambda_f = \lim_{x\to\infty} \frac{x+a}{\lg \lg (x+a)} = 0 < 1$, dus $f(z)$ behoort tot de beschouwde klasse.

Stel $z + a = \varrho \,.\, e^{i\theta}$ (ϱ en θ reëel), dan is:

$$u + iv = \frac{\varrho \,.\, e^{i\theta}}{\lg [\lg \varrho + i\theta]} = \frac{\varrho e^{i\theta}}{\lg \varrho' + i\theta'}$$

met $\varrho' = \sqrt{(\lg \varrho)^2 + \theta^2}$ en $\theta' = \text{bg tg} \frac{\theta}{\lg \varrho}$.

Voor de vergelijking van de randkromme Γ van het gebied $G\,(u < x)$ vindt men:

$$x = \frac{(x+a)\lg \varrho' + y\theta'}{[\lg \varrho']^2 + \theta'^2} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Het rechterlid is t.o.v. x van dezelfde orde als $\frac{x}{\lg \varrho'}$, dus als $\frac{x}{\lg \lg \varrho'}$, of als $\frac{x}{\lg \lg x}$, d.i. van een orde < 1, en t.o.v. y van dezelfde orde als $\frac{y}{\lg y \,.\, (\lg \lg y)^2}$; immers $\theta' = \text{bg tg} \frac{\theta}{\lg \varrho}$ is van dezelfde orde als $\frac{1}{\lg y}$ en $\lg \varrho' \infty \lg \lg y$.

Men vindt dus voor het gedrag in het oneindige:

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

$$x \sim \frac{y}{\lg y \,.\, (\lg \lg y)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Voorbeeld V: Neem $f(z) = \frac{z+a}{lg\, lg\, lg\, (z+a)}$, a positief en $> e^{e^e}$, dan is $f(z)$ hol. voor $R(z) > 0$ en $R[f(z)] > 0$.

$\lambda_f = 0 < 1$, dus $f(z)$ behoort tot de beschouwde klasse.

Stel weer $z + a = \varrho \,.\, e^{i\theta}$ (ϱ en θ reëel), dan is:

$$u + iv = \frac{\varrho \,.\, e^{i\theta}}{\lg [\lg \{\lg \varrho + i\theta\}]} = \frac{\varrho \,.\, e^{i\theta}}{\lg [\lg \varrho' + i\theta']} = \frac{\varrho \,.\, e^{i\theta}}{\lg \varrho'' + i\theta''},$$

met $$\varrho' = \sqrt{(\log \varrho)^2 + \theta^2},\ \theta' = \text{bg tg}\, \frac{\theta}{\lg \varrho}\ ;$$

$$\varrho'' = \sqrt{(\log \varrho')^2 + \theta'^2} \text{ en } \theta'' = \text{bg tg}\, \frac{\theta'}{\lg \varrho'}.$$

Voor de vergelijking van de randkromme Γ van het gebied $G(u < x)$ vindt men:

$$x = \frac{(x+a) \,.\, \lg \varrho'' + y \,.\, \theta''}{(\lg \varrho'')^2 + \theta''^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Het rechterlid is t.o.v. x van dezelfde orde als $\frac{x}{\lg \varrho''}$, dus als $\frac{x}{\lg \lg \varrho'}$, of als $\frac{x}{\lg \lg \lg x}$, d.i. van een orde < 1.

Ten opzichte van y is θ'' van dezelfde orde als $\frac{\theta'}{\lg \varrho''}$, dus van dezelfde orde als $\frac{\theta}{\lg \varrho \,.\, \lg \varrho'}$, d.i. van dezelfde orde als $\frac{1}{\lg y \,.\, \log \lg y}$, terwijl $\lg \varrho'' \sim \lg \lg \varrho' \sim \lg \lg \lg y$; t.o.v. y is het rechterlid dus van dezelfde orde als

$$\frac{y}{\lg y \,.\, \lg \lg y \,.\, (\lg \lg \lg y)^2}.$$

Men vindt dus voor het gedrag in het oneindige:

$$x \sim \frac{y}{\lg y \,.\, \lg \lg y \,.\, (\lg \lg \lg y)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Duidt men met $\log_n z$ de n-maal herhaalde log van z aan, dan vindt men op analoge wijze, door uit te gaan van de functie:

$$f(z) = \frac{z+a}{log_n\,(z+a)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

a positief, en voldoende groot, een deugdelijk gebied G, met randkromme Γ, voor welker gedrag in het oneindige geldt:

$$x \sim \frac{y}{lg\, y \,.\, lg_2\, y \,.\, lg_3\, y \,.\, \ldots \,.\, lg_{n-1}\, y \,.\, (lg_n\, y)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

§ 28 — Parallel aan de onderzoekingen van § 27 willen we, tot slot, het gedrag in het oneindige nagaan van eenige ondeugdelijke begrenzingskrommen.

De functie $w = f(z) = \dfrac{z+a}{\lg_n (z+a)}$, $a > e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}}$ (n e's) . . (12)

is holomorf voor $x = R(z) > 0$, met $u = R(w) > 0$.

Wegens $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{w}{x} = 0$ $(y = 0)$ is het beeldgebied G_w van het R.H.V. een ondeugdelijk gebied.

De rand Γ_w van G_w is het beeld van de imaginaire as van het z-vlak.

a) Neem $n = 1$. Voor Γ_w geldt:

$$w = \frac{a + i\varrho \,.\, \sin\theta}{\lg\varrho + i \,.\, \theta}, \text{ met } \varrho\cos\theta = a,$$

$$= \frac{a \lg\varrho + \varrho \sin\theta \,.\, \theta + i \,.\, (\varrho \lg\varrho \sin\theta - a\theta)}{(\lg\varrho)^2 + \theta^2}.$$

Hier is, voor $\varrho \to \infty$:

$$u \sim \frac{\varrho}{(\lg\varrho)^2},\ v \sim \frac{\varrho}{\lg\varrho} \text{ en } \lg v \sim \lg\varrho,$$

dus: $$\frac{u}{v} \sim \frac{1}{\lg\varrho} \text{ of } u \sim \frac{v}{\lg v}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

b) Neem $n = 2$. Voor Γ_w geldt:

$$w = \frac{a + i\varrho\sin\theta}{\lg(\lg\varrho + i\theta)} = \frac{a + i\varrho\sin\theta}{\lg\varrho' + i\theta'}$$

(vergelijk de vorige §)

$$w = \frac{a \,.\, \lg\varrho' + \varrho\sin\theta \,.\, \theta' + i \,.\, (\varrho\sin\theta \,.\, \lg\varrho' - a \,.\, \theta')}{(\lg\varrho')^2 + \theta'^2}.$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Nu is: $\theta' = \text{bg tg}\,\frac{\theta}{\lg \varrho} \sim \frac{1}{\lg \varrho}$;

$$u \sim \frac{\varrho}{\lg \varrho \,.\, (\lg \varrho')^2} \sim \frac{\varrho}{\lg \varrho \,.\, (\lg_2 \varrho)^2};$$

$$v \sim \frac{\varrho}{\lg \varrho'} \sim \frac{\varrho}{\lg_2 \varrho},$$

en $\lg v \sim \lg \varrho$,

dus: $$u \sim \frac{v}{\lg v \,.\, \lg_2 v} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

c) Neem $n = 3$. Voor Γ_w geldt:

$$w = \frac{a + i\varrho \sin\theta}{\lg \lg (\lg \varrho + i\theta)} = \frac{a + i\varrho \sin\theta}{\lg \varrho'' + i\theta''},$$

(vergelijk de vorige §)

$$w = \frac{a \lg \varrho'' + \varrho \sin\theta \,.\, \theta'' + i\{\varrho \,.\, \sin\theta \,.\, \lg \varrho'' - a \,.\, \theta''\}}{(\lg \varrho'')^2 + \theta''^2}.$$

Thans is: $\theta'' \sim \frac{\theta'}{\lg \varrho'} \sim \frac{1}{\lg \varrho \,.\, \lg_2 \varrho}$,

$$u \sim \frac{\varrho}{\lg \varrho \,.\, \lg_2 \varrho \,.\, (\lg_3 \varrho)^2}\ ;\ v \sim \frac{\varrho}{\lg_3 \varrho},$$

en $\lg v \sim \lg \varrho$,

dus: $$u \sim \frac{v}{\lg v \,.\, \lg_2 v \,.\, \lg_3 v} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

d) Algemeen vindt men voor Γ_w:

$$w = \frac{a + i\varrho \sin\theta}{\lg \varrho^{(n-1)} + i\theta^{(n-1)}}$$

in doorzichtige notatie, d.i.

$$w = \frac{a \lg \varrho^{(n-1)} + \varrho \,.\, \sin\theta \,.\, \theta^{(n-1)} + i\{\varrho \,.\, \sin\theta \,.\, \lg \varrho^{(n-1)} - a \,.\, \theta^{(n-1)}\}}{\{\lg \varrho^{(n-1)}\}^2 + \{\theta^{(n-1)}\}^2}$$

Hier is:

$$\theta^{(n-1)} \sim \frac{\theta^{(n-2)}}{\lg \varrho^{(n-2)}} \ldots\ldots \sim \frac{1}{\lg \varrho \,.\, \lg_2 \varrho \ldots\ldots \lg_{n-1} \varrho};$$

$$u \sim \frac{\varrho}{\lg \varrho \,.\, \lg_2 \varrho \ldots \lg_{n-1} \varrho (\lg \varrho)^2};\ v \sim \frac{\varrho}{\lg_n \varrho},$$

en $\lg v \sim \lg \varrho$,

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

dus: $$u \sim \frac{v}{\lg v \,.\, \lg_2 v \,.\, \ldots \,.\, \lg_{n-1} v \,.\, \lg_n v}.$$

Schrijven we x en y inplaats van u en v, dan vinden we derhalve, dat de gebieden G_z in het R.H.V., met randkrommen Γ_z, waarvoor geldt:

$$x \sim \frac{y}{\lg y \,.\, \lg_2 y \,.\, \lg_3 y \,.\, \ldots \,.\, \lg_{n-1} y \,.\, \lg_n y}, \quad \ldots\ldots (16)$$

niet-deugdelijke gebieden zijn.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

STELLINGEN

I

De formule van JENSEN voor geheele functies:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi} \log |\, f(R \,.\, e^{\varphi i})\,|\, d\varphi = \int_{o}^{R} \frac{\nu(r)}{r}\, dr$$

is elementair bewijsbaar.

II

De ongelijkheid $|\,(1-u)\, e^{\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}}\,| < e^{k\,.\,|u|^{p+1}}$, die voorkomt in ,,Leçons sur les fonctions entières'' (blz. 51) van E. BOREL, kan als volgt verscherpt worden:

Als $p < \sigma \leqq p+1$, dan is voor alle complexe u:

$$|\,(1-u)\,.\,e^{\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}}\,| < e^{k\,|u|^{\sigma}},$$

waarin de constante k alléén van σ afhangt.

III

De redeneering van Prof. HK. DE VRIES, op blz. 16 en 17 van het Beknopt Leerboek der Projectieve Meetkunde, is, in tegenstelling met de bewering van den schrijver, niet toereikend om de diepere grond te openbaren voor de invariantie van de dubbelverhouding op een vierstraal.

IV

Een ruimte kromme ϱ^n is een p-voudige kromme op het regelvlak harer trisecanten; hierin is $p = h - (n-2)$, als h het aantal schijnbare dubbelpunten van ϱ^n is.

J. H. WANSINK

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

V

De stelling, die ARZELA geeft in het artikel: Sulle serie di Funzioni (Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' istituto di Bologna, Serie V, tomo VIII, blz. 1—4), kan uitgebreid worden door de intervallen verzamelingen (met lengte $> d$) te vervangen door gesloten meetbare puntverzamelingen (met x-maat $> d$).

VI

W. SEIDEL vermeldt in zijn artikel: Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen (Math. Annalen 104^2, 1931):

,,Bei dem Problem der konformen Abbildung des algemeinen einfach zusammenhängenden schlichten Gebietes mit mindestens zwei Randpunkten auf einer Kreisfläche hat OSGOOD zuerst eine scharfe Trennung zwischen dem Problem der konformen Abbildung des Inneren eines Gebietes auf das Innere einer Kreisfläche und dem Problem des Anschlusses dieser Abbildung an den Rand eingeführt''.

Deze bewering is onjuist; de scherpe scheiding, waarvan sprake is, is door H. A. SCHWARZ in zijn artikel: ,,Zur Theorie der Abbildung'' (1869) reeds ingevoerd.

VII

Het ééne uur Cosmographie, dat op de lesrooster van de Hoogere Burgerscholen met vijfjarige cursus A voorkomt, en wel als regel op de rooster van de derde klasse, is daar misplaatst.

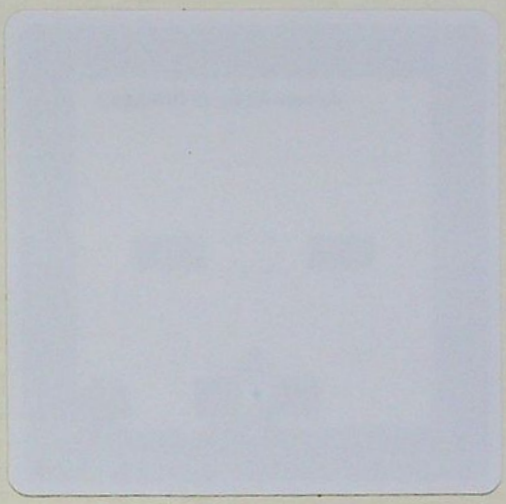
VIII

Het verdient géén aanbeveling om bij het onderwijs in Mechanica op de H.B.S. het begrip centrifugaalkracht in te voeren; invoering van dit begrip op de wijze, waarop REINDERSMA en VAN LOHUIZEN zulks doen (Nieuw Leerboek der Natuurkunde, deel II) sticht verwarring.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUST