LEMBAGA KEBUDAJAAN
INDONESIA

V-90.

Marre
Le Messahat de Mohammad
ben Mousa al Khâreszmi

.KAAN NASIONAL RI
: -

hal - 14 Rp.

V 90.

LE MESSÂHAT

DE

MOHAMMED BEN MOUSSA AL KHÂREZMI

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI

EXTRAIT DES *ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA*,
TOMO VII. N.° 5.

V
90

LE MESSÂHAT

DE MOHAMMED BEN MOUSSA AL KHÂREZMI

EXTRAIT DE SON ALGÈBRE

TRADUIT ET ANNOTÉ

PAR

ARISTIDE MARRE

2.e Édition revue et corrigée
sur le texte arabe publié par Rosen

ROME
IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES
1866

BAT. KENNISCENTRUM VAN KENYA

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.
Tanggal : 28-6-2010
Nomor Indek : 197/PN. Museum/10
BIB - ID : 0010-3448060
ITEM - ID : 0309097060
Asal : Museum Pusat

A

MONSIEUR BARBET

ANCIEN PRÉSIDENT

DE LA SOCIÉTÉ DES CHEFS D'INSTITUTION DU DÉPARTEMENT DE LA SEINE

faible hommage
de respectueuse et sincère affection

de son ancien élève

Ar. Marre.

PRÉFACE

Abou Abdallah Mohammed ben Moussa Al Khârezmi est le plus ancien algébriste arabe connu. C'est l'opinion de Zakâria ben Mohammed ben Mahmoud Al Qazouïni et de presque tous les historiens et mathématiciens de sa nation. Ibn Khaldoûn déclare expressément que le premier, parmi les Arabes, qui écrivit sur l'Algèbre, fut Abou Abdallah Al Khârezmi.

Vers l'an 820 de J. C., à la demande de l'illustre Khalife Al Mamoun, Mohammed ben Moussa composa « un ouvrage abrégé sur le calcul par *djebr et* » *mokâbalah*, restreint à ce qu'il y a de plus aisé et de plus utile, c'est-à-» dire aux opérations dont on a sans cesse besoin dans les cas d'héritage, de » donation, de procès, dans les affaires du commerce et de la vie pratique, ou » encore pour la mesure des terres, le creusement des canaux et autres appli-» cations du calcul à la géométrie. » C'est ainsi que s'exprime notre auteur lui-même dans sa préface à son *Kitâb al mokhtessar fî hissâb aldjebr oua'l mokâbalah*. Ce petit traité eut de nombreux commentateurs, non seulement parmi les Arabes d'Espagne, honorés d'une mention spéciale à cet égard par Ibn Khaldoûn *, mais encore parmi leurs frères d'Orient : il nous suffira de citer le

* Ibn Khaldoûn nomme Al Korachi, comme l'auteur d'un des meilleurs commentaires de l'Algèbre de Mohammed ben Moussa. Ce pourrait bien être là le nom de l'auteur d'un des traités inédits qui se trouvent dans le même volume que le manuscrit de Mohammed ben Moussa, à la Bibliothèque Bodléyenne d'Oxford. Ce nom est complètement dépourvu de points diacritiques, c'est pourquoi M. Fréd. Rosen a lu par conjecture Al Jaza'ï, mais ce mot pourrait se lire Al Korachi, par la simple substitution d'un *chîn* au lieu d'un *aïn*, pour l'avant-dernière lettre. Le commentaire aurait été réuni tout naturellement ainsi sous la même couverture que le traité commenté. Sans toucher au corps du mot, on pourrait encore lire Al Khozâa'ï, nom bien connu dans les annales de l'Islam, puisqu'il fut porté par le Khalife Omrân ben Hossein Al Khozâa'ï.

célèbre Abou'l–wafâ Al Bouzdjâni, mort en 999 de J. C. L'auteur du lexique bibliographique intitulé : *Ta'rikh al hokama*, (1198 de J. C.), parlant des ouvrages hindous parvenus aux Arabes, s'exprime ainsi : « In manus nostras in- » cidit Liber Artis Logisticæ, a Mohammado ben Musa al Khuarezmita exornatus, » qui cæteros omnes brevitate methodi ac facilitate præstat, Indorumque in præ- » clarissimis inventis ingenium et acumen ostendit. » On sait qu'avant l'avènement d'Al Mamoun au Khalifat, c'est–à–dire avant 814 de J. C, et à la demande de ce prince, Mohammed ben Moussa avait déjà fait un Abrégé de Tables astronomiques dressées par un savant Hindou venu en 773 de notre ère à la cour d'Al Mansour, et traduites par Mohammed ben Ibrahim Al Fazâri *. Si l' on a pu contester la provenance hindoue de l'algèbre arabe, un fait historique demeure aujourd'hui incontestable : C'est que Mohammed ben Moussa Al Khârezmi est le véritable instituteur des nations de l'Europe moderne dans cette branche principale des Mathématiques. Les traductions latines de l'Algèbre de Mohammed ben Moussa, faites par les savants du moyen âge, furent la source où les savants du XVI.e siècle vinrent puiser leurs connaissances algébriques. L'*ars logistica*, le calcul par Djebr de Mohammed ben Moussa, devint l'*ars magna* de Cardan et des autres mathématiciens de l'Italie, de l'Espagne, de la France, de l'Angleterre et de l'Allemagne.

L'existence d'une copie du *Kitâb al mokhtessar fî hissâb aldjebr oua'l mokâbalah* de Mohammed ben Moussa Al Khârezmi, parmi les manuscrits arabes de la Bibliothèque Bodléyenne d'Oxford, avait été dûment constatée par le catalogue de Jean Uri, mais le premier, Colebrooke, en 1817, attira sur ce précieux ms. l'attention du monde savant par la Dissertation magistrale qu'il mit en tête de son beau livre intitulé : « Algebra, with Arithmetic and Mensura- » tion, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara ». En 1831, M. Rosen publia le texte arabe tout entier en l'accompagnant d'une traduction anglaise. Quelques années plus tard, M. Libri reproduisit, dans le 1er volume de son *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (PARIS 1835, NOTE IV, page 227, lignes 11–25; pages 228–264; page 265, lignes 1–14 – A PARIS 1838, NOTE XII, page 253, lignes 12–24; pages 254–296; page 297, lignes 1–14) une traduction latine que possédait la Bibliothèque royale de Paris; mais le chapitre relatif à la géométrie, le *bâb al messâhat*, manquait. En 1846, désireux de combler cette lacune autant qu'il était alors en mon pouvoir, je publiai dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*tome cinquième*, page 557, lignes 19–20; page 558–569; page 570, lignes 1–8) une traduction faite sur la version anglaise de Rosen, de cette partie du Traité de Mohammed ben Moussa. La traduction que je donne aujourd'hui diffère en certains endroits de la première, par la raison que, au lieu d'être exclusivement fondée sur la version anglaise, elle a été faite littéralement sur le texte arabe lui–même.

AR. MARRE.

* Ibn Al Adami : Préface à ses Tables astronomiques. — Casiri, tome I, p. 427, 428. — Colebrooke : Dissertation, p. 504 des Miscellaneous Essays.

BÂB AL MESSÂHAT

(CHAPITRE DU MESSÂHAT) *.

Sache que l' expression « un par un » appartient au *Messâhat*, et signifie » *derâa* par *derâa* » **. Tout quadrilatère dont les côtés et les angles sont égaux, qui a pour chacun des côtés *un*, a pour sa superficie entière *un*. Si dans un quadrilatère équilatéral et équiangle, chaque coté est *deux*, alors sa superficie est quatre fois la superficie de celui qui est égal à « *derâa* par *derâa* »; de même trois par trois, et ainsi de suite en montant ou en descendant, ainsi un–demi par un–demi un quart, et de même des autres fractions. Tout carré dont chaque côté est *un-demi derâa*, est égal à un quart de celui dont chaque côté est *un derâa*, et tu fais de même pour *un tiers par un tiers*, et *un quart par un quart*, et *un cinquième*

* De même que l'ouvrage traduit du sanscrit par Colebrooke renferme trois parties: Algebra, Arithmetic, Mensuration, c'est-à-dire : Algèbre, qui fait partie de la science du nombre, Calcul proprement dit, et ce que les Arabes nomment *Messâhat*, qui fait partie de la géométrie, de même la plupart des ouvrages purement élémentaires sur le calcul, composés par les Arabes, renferment ces trois parties successivement exposées. Chacune d'elles, quand elle est traité séparément, fait l' objet d'ouvrages spéciaux beaucoup plus développés.

Littéralement *messâhat* signifie l'art de mesurer; mais comme sa principale application a été de mesurer et de diviser les terres, on a souvent traduit ce mot par géodésie. Dans son *messâhat*, Mohammed ben Moussa ne se borne pas à donner la mesure des surfaces, il donne aussi le moyen de mesurer des solides; c'est pourquoi nous conservons le terme technique arabe, *messâhat*, en tête de notre chapitre, plutôt que de le traduire par le mot géodésie. Ibn Khaldoûn, dans ses Prolégomènes, dit qu'on a écrit sur la science du *messâhat* de bons et nombreux ouvrages, mais il n'en nomme aucun.

** Le *derâa* (coudée) est l'unité linéaire; nous n'en connaissons pas la valeur exacte. Cette première phrase du texte, telle que l'a reproduite M. Rosen, est fautive. M. Rosen l'a traduite ainsi : « *Know that the meaning of the expression " one by one " is mensuration : one yard (in length) by* » *one yard (in breadth) being understood* ». A la page 196, dans une note sur ce passage, il dit: « *I am* » *uncertain whether my translation of the definition which Mohammed gives of mensuration be cor-* » *rect. Though the diacritical points are partly wanting in the manuscript, there can, I believe, be* » *no doubt as to the reading of the passage.* » Mohammed ben Moussa n'a point songé à donner une définition du *Messâhat*. En lisant la proposition *illâ* au lieu du pronom personnel féminin *hya*, on rétablit le véritable sens. La définition attribuée à Mohammed ben Moussa, si c' en était une, serait fausse et incomplète.

par un cinquième, et *un demi tiers par un demi tiers* *, ou plus ou moins que cela. Dans tout carré, si l'un des côtés (est multiplié) par *un*, c'est la racine de ce carré; si par deux, deux racines; que ce carré soit petit on grand.

Dans tout triangle équilatéral, si tu multiplies la colonne par la moitié de la base sur laquelle tombe la colonne; c'est la mesure du triangle **.

Dans tout rhombe équilatéral, si tu multiplies une des deux diagonales par la moitié de l'autre, c'est sa mesure.

Dans tout cercle, si tu multiplies le diamètre par 3 et $\frac{1}{7}$, c'est la circonférence dont il est ceint, c'est le procédé usité par les gens du vulgaire.

La famille des géomètres a deux autres méthodes; l'une d'elles, c'est que tu multiplies le diamètre par lui-même, puis par dix, et qu'ensuite tu prends la racine du tout; ce qui en résulte, c'est la circonférence. La seconde, celle des astronomes, c'est que tu multiplies le diamètre par 62832, et que tu divises cela par 20000; ce qui en résulte est la circonférence. Et tout cela diffère peu l'un de l'autre ***.

Et la circonférence, si tu la divises par 3 et $\frac{1}{7}$, tu obtiens le diamètre.

Dans tout cercle, si tu multiplies la moitié du diamètre par la moitié de la circonférence, c'est sa mesure; en effet dans tout polygône équilatéral et équiangle,

---

* M. Rosen a traduit « *two thirds by a half* » c'est-à-dire $^2/_3$ par $\frac{1}{2}$. C'est $^1/_2$ tiers par $^1/_2$ tiers qu'il faut lire. La suite des fractions réprésentant la longueur de chaque côté étant $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, Mohammed ben Moussa a exprimé cette dernière à la façon arabe.

** Mohammed ben Moussa, versé dans les sciences des Hindous, ne donne point ici la formule particulière qui convient à l'aire du triangle équilatéral. Il donne le moyen général de mesurer un triangle quelconque; il n'oublie pas qu'il écrit pour le vulgaire et non pour des mathématiciens. Une seule règle, qui convienne à tous les cas, lui paraît suffisante.

*** Mohammed ben Moussa nous donne ici trois valeurs distinctes du rapport de la circonférence au diamètre, trois formules différentes. La première donne $\pi = \frac{22}{7}$, c'est le rapport d'Archimède. La deuxième donne $\pi = \sqrt{10}$, et la troisième, celle particulièrement en usage parmi les astronomes et la plus exacte, donne $\pi = \frac{62832}{20000}$. Ces trois valeurs sous la forme décimale, sont :

$$\pi = \frac{22}{7} = 3,\ 1424\ \ldots\ , \qquad \pi = \sqrt{10} = 3,\ 16227\ \ldots\ ; \qquad \pi = \frac{62832}{20000} = 3,\ 14160\ \ldots$$

La première et la troisième formule se trouvent dans le Lilavati de Bhascara, page 87 de l'introduction de Colebrooke. Seulement la troisième est donnée par le géomètre hindou sous la forme $\frac{3927}{1250}$; en multipliant par 16 chacun des termes, Mohammed ben Moussa voulut probablement lui substituer un rapport équivalent plus facile à retenir de mémoire, et plus aisé à calculer. C'est par erreur que M. Rosen a dit que la seconde se rencontrait dans le Vija Ganita de Bhascara, p. 308, 309; elle n'est pas mentionnée par cet auteur, mais bien par deux de ses prédécesseurs, Brahmagupta et Aryabhatta, qui savaient parfaitement qu'elle n'était qu'une valeur approchée du rapport.

Voici une note marginale du ms. d'Oxford, faite sur le passage qui nous occupe en ce moment: « Cela est une approximation, non pas l'exacte vérité; personne ne peut déterminer l'exacte vérité de » ce rapport, et trouver la circonférence réelle, excepté Celui qui sait tout : car la ligne n'est pas » droite de telle sorte que son exacte longueur puisse être trouvée. Cela s'appelle une approximation, » de même que l'on dit des racines carrées des nombres irrationnels, qu'elles sont une approxima- » tion et non pas l'exacte vérité. Dieu seul sait quelle est la racine exacte. La meilleure méthode » ici donnée, c'est de multiplier le diamètre par 3 et $\frac{1}{7}$, car elle est la plus aisée et la plus expé- » ditive. Dieu sait mieux ! ».

parmi les triangles, quadrilatères, pentagones, et ceux d'un plus grand nombre de côtés, si tu multiplies la moitié du périmètre par la moitié du diamètre du cercle inscrit, c'est sa mesure.

Dans tout cercle, si tu multiplies le diamètre par lui-même, et que tu en retranches le septième et le demi-septième, c'est sa mesure. Et cela concorde avec la formule de la première classe *.

Tout segment de cercle est assimilé à un arc. Il faut nécessairement que ce segment soit égal au demi-cercle, ou plus petit que le demi-cercle, ou plus grand que le demi-cercle. Cela est indiqué par la flèche de l'arc : si elle est égale à la moitié de la corde, le segment est égal à la moitié du cercle; si elle est plus petite que la moitié de la corde, il est plus petit que la moitié du cercle; si la flèche est plus grande que la moitié de la corde, il est plus grand que la moitié du cercle. Si tu veux connaître de quel cercle il est, multiplie la moitié de la corde par elle-même, divise par la flèche, et ajoute le résultat à la flèche; ce que tu obtiens, c'est le diamètre du cercle dont ce segment fait partie **.

Si tu veux connaître l'aire de l'arc, multiplie la moitié du diamètre du cercle par la moitié de l'arc, et garde ce produit; puis retranche la flèche de l'arc de la moitié du diamètre du cercle, si l'arc est plus petit que la demi-circonférence, ou bien s'il est plus grand que la demi-circonférence, retranche la moitié du diamètre du cercle de la flèche de l'arc; ensuite multiplie ce qui reste par la moitié de la corde de l'arc, et retranche ce produit de celui que tu as gardé si l'arc est plus petit que la demi-circonférence, ou bien additionne-les ensemble si l'arc est plus grand que la demi-circonférence. Alors le résultat obtenu après l'addition ou bien la soustraction, c'est l'aire de l'arc ***.

Dans tout solide quadrangulaire, si tu multiplies la longueur par la largeur, puis par la profondeur, c'est sa mesure. Si la base n'est pas quadrangulaire, mais qu'elle soit circulaire ou triangulaire ou autre, à condition que la profondeur reste égale et parallèle, pour opérer le *messâhat* de ce solide, tu calcules la surface de la base, tu sais sa mesure, tu la multiplies par la profondeur, et c'est la mesure (du solide).

---

* L'aire du cercle dont le diamètre est d, si l'on suppose $\pi = \frac{22}{7}$, est en effet égale à $\frac{22}{7\times4}\,d^2$ ou $\left(1 - \frac{4}{7} - \frac{4}{7\times2}\right)d^2$. Bhascara, p. 89 du Lilavati, donne la valeur $\frac{44}{14}\,d^2$, comme bonne dans la pratique, lorsqu'on n'a pas besoin d'une grande approximation.

** Le théorème sur lequel repose ce calcul est énoncé par Aryabhatta, ainsi qu'il suit : « dans » un cercle, le produit des flèches est égal au carré de la demi-corde des deux arcs. » Quant au procédé de Mohammed ben Moussa, il est exprimé par Bhascara exactement dans les mêmes termes.

*** C'est ce qu'exprime plus brièvement Behâ-Eddin dans son *Kholâçat al hissâb* : « Quant aux » deux segments, dit-il, marque bien le centre, et achève les deux secteurs; alors il se forme là un » triangle; retranche-le du plus petit secteur, il en résulte le plus petit segment; ou bien ajoute-le » au plus grand secteur, il en résulte le plus grand segment. »

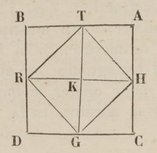
Les géomètres Hindous avaient la formule :

$$\text{Segment} = \frac{24}{20}\, f\left(\frac{c+f}{2}\right)$$

f désignant la flèche, et c la corde (page 96 du Lilavati de Bhascara).

Pour la pyramide, qu'elle soit triangulaire, quadrangulaire, circulaire, tu multiplies un tiers de la superficie de sa base par sa colonne, c'est là sa mesure *.

Sache que dans tout triangle rectangle, chacun des deux plus petits côtés étant multiplié par lui–même, les produits additionnés égalent le produit du plus grand côté multiplié par lui–même. Voici qui le démontre : Je trace un quadrilatère équilatéral et équiangle ABC D, je coupe le côté AC en deux moitiés au point H, et je mène HR, puis je coupe le côté AB en deux moitiés au point T, et je mène TG. La surface ABCD est devenue quatre surfaces ayant leurs côtés et leurs angles égaux, savoir : surface AK, surface CK, surface BK et surface DK. Ensuite je tire du point H au point T une ligne, elle coupe la surface AK en deux moitiés. Cette surface a donné naissance à deux triangles, qui sont les triangles ATH et HKT. Or, il est bien évident pour nous que AT est la moitié de AB, que AH lui est égal comme moitié de AC, et que la ligne TH leur sous–tendante est la corde d'un angle droit. Je tire de même des lignes de T à R, de R à G, et de G à H. L'ensemble des carrés donne naissance à huit triangles égaux, et il est bien clair pour nous que quatre de ces triangles sont la moitié de la plus grande surface, c'est–à–dire de AD. Il est évident pour nous que la ligne AT (multipliée) par elle–même est la mesure de deux des triangles, et que AH par elle–même est la mesure de deux triangles qui leur sont égaux, la somme est donc la mesure de quatre triangles. Mais d'autre part le côté HT par lui–même est la mesure de quatre triangles. Enfin il est clair pour nous que la ligne AT par elle–même et AH par elle–même donnent une somme égale au résultat de la multiplication de TH par elle–même, c'est là ce que nous voulions montrer. Voici la figure **



* Mohammed ben Moussa range sous une même dénomination les parallélipipèdes, les prismes et les cylindres, et sous une autre dénomination commune, les pyramides et les cônes. C'est ainsi que dans le Lilavati, Stance 217, cette première classe de solides se nomme *sama-chata*, et la seconde *souchi-chata* (solides aigus). Le terme arabe « *makrouttah* » qui désigne indistinctement pyramides et cônes, vient du verbe « *Kharatt* », dont l'une des significations: « être délié, effilé, menu, mince » conduit directement à la même source de dérivation que pour le terme sanscrit.

Nous remarquerons encore que la hauteur des solides de la première catégorie a le nom spécial de profondeur, tandis que la hauteur des solides de la seconde catégorie s'appelle colonne (*aamoud*), comme la hauteur d'un triangle.

On voit enfin par ce passage que le mot *messâhat* peut s'appliquer non seulement à la mesure du sol et des surfaces planes, mais aussi à la mesure des solides, et qu'ainsi il a parfois une acception plus générale que celle qu'on lui attribue d'ordinaire.

** La démonstration de Mohammed ben Moussa ne s'applique qu'au cas du triangle rectangle isocèle. Elle parle aux yeux, et s'adresse évidemment à des gens que Platon n'aurait pas admis à ses leçons; ce qui nous fait voir une fois de plus et surabondamment que notre auteur était bien loin d'exposer tout ce qu'il savait, mais qu'il tâchait de vulgariser la science en la simplifiant et la mettant à la portée des plus petits. L'élégante démonstration du carré de l'hypoténuse universellement connue, se trouve dans les éléments d'Euclide ou supposés d'Euclide, car Kâdhi Zadeh Al Roumi (vir bene meritus, selon Hadji Khalfa) et le fameux Al Kendi, l'un des douze plus grands génies qui aient paru parmi les hommes selon Cardan, assurent qu'Euclide n'est pas l'auteur des Eléments qui portent son nom. Al Kendi attribue cet ouvrage de géométrie à Abolonious Al Nedjâr Al Iskanderâni. Le traité complet était divisé en quinze livres ou sections. Longtemps après la mort d'Apollonius vivait à Alexandrie un roi qui aimait et cultivait la géométrie. Parmi les mathématiciens ses contemporains brillait Euclide. Le roi le chargea de rétablir l'ouvrage en son entier et de l'expliquer. De la treize livres exposés par Euclide et qui reçurent son nom. Ensuite Hypsiclès, son disciple, découvrit les deux autres, le quatorzième et le quinzième, les ajouta aux précédents et les offrit au roi. Tel est en substance le récit d'Alkendi. (voir Hadji Khalfa, Tome 1er p. 380.)

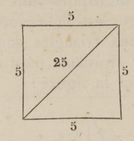
Mohammed ben Moussa ne devait pas ignorer l'ingénieuse et charmante démonstration des Hindous, fondée sur le développement algébrique de $(a-b)^2$.



$$c^2 = 4\,\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

Sache qu'il y a cinq espèces de quadrilatères, la première dont les côtés sont égaux et les angles droits; la deuxième avec angles droits et côtés inégaux, la longueur étant plus grande que la largeur; la troisième se nomme rhombe et c'est celle dont les côtés sont égaux et les angles différents; la quatrième est le rhomboïde, sa longueur et sa largeur sont différentes et ses angles inégaux, mais les deux longueurs sont égales entre elles et ses deux largeurs aussi égales *; la cinquième, dont les côtés et les angles sont inégaux **.

Pour la mesure des quadrilatères dont les côtés sont égaux et les angles droits, ou les côtés inégaux et les angles droits, si tu multiplies la longueur par la largeur, le résultat est la mesure. Exemples : 1° Une pièce de terre quadrangulaire dont chacun des côtés a cinq derâa, sa mesure est de vingt–cinq derâa. Voici la figure :

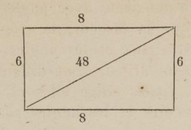


2° Une pièce de terre quadrangulaire; ses deux longueurs sont huit derâa, huit derâa, et ses deux largeurs six et six. Pour avoir sa mesure, tu multiplies six

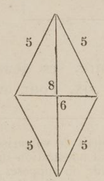
* Comme on le voit, Mohammed ben Moussa appelle longueurs les deux côtés parallèles les plus grands, et largeurs les deux autres côtés paralleles, dans le rhomboïde ou parallélogramme.

** Ce sont ces quadrilatères avec côtés et angles inégaux que Behâ Eddin nomme trapèzes. La dénomination sanscrite Vishama Chatourasra qui répond au mot trapèze, s'applique chez les Hindous au quadrilatère irrégulier quelconque. C'est la signification que donne également Euclide au trapèze, c'est celle là que lui ont conservée les Anglais jusqu'à présent, et que les Français avaient gardée intacte jusqu'à la fin du siècle dernier.

par huit, ce qui donne quarante – huit derâa; c'est là sa mesure. Voici la figure:

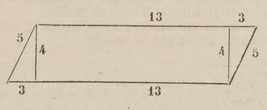


Soit le rhombe équilatéral dont chaque côté est cinq derâa, l'une de ses diagonales est huit, et l'autre six derâa. Apprends quelle est sa mesure, lorsque tu connais les deux diagonales ou l'une d'elles. Si tu connais les deux diagonales en même temps, c'est que tu multiplies l'une d'elles par la moitié de l'autre, c'est là sa mesure; ainsi tu multiplies huit par trois, ou quatre par six, ce qui fait vingt–quatre derâa, et c'est la mesure. Si tu connais une seule diagonale, tu sais bien qu'il y a deux triangles dans chacun desquels deux côtés sont cinq derâa, cinq derâa, leur troisième côté étant la diagonale. Calcule–les selon le calcul des triangles. Voici la figure :



Pour le rhomboïde on fait comme pour le rhombe.

Pour la dernière espèce de quadrilatères, tu connais sa mesure par le moyen de la diagonale, cela conduit au calcul des triangles. Apprends–le. Voici la figure du rhomboïde :



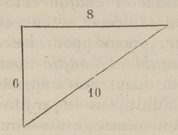
Les triangles. – Il y en a trois espèces : rectangles, acutangles et obtusangles.

Du rectangle. – Dans ce triangle, si tu multiplies chacun des deux plus petits côtés par lui–même, puis que tu fasses l'addition, cette somme est égale au résultat de la multiplication du plus grand côté par lui–même.

De l'acutangle. – Dans ce triangle, si tu multiplies chacun des deux plus petits côtés par lui–même, puis que tu fasses l'addition, la somme est plus grande que le plus grand côté multiplié par lui–même.

De l'obtusangle. – Dans tout triangle obtusangle, si tu multiplies chacun des deux plus petits côtés par lui–même, puis que tu fasses l'addition, la somme est plus petite que le plus grand côté multiplié par lui–même.

Le triangle rectangle est celui qui a deux colonnes et un diamètre (pour côtés); il est la moitié d'un quadrangle. Tu connais sa mesure, en multipliant un des deux côtés adjacents à l'angle droit par la moitié de l'autre. Ce qui en résulte, c'est sa mesure. Exemple d'un triangle rectangle : un de ses côtés six derâa, un de ses côtés huit derâa, et le diamètre dix. Pour faire le calcul, tu multiplies six par quatre, ce qui donne vingt–quatre derâa, et c'est la mesure. S'il te plaît de faire le calcul du triangle par la colonne, ce n'est que sur le plus grand côté que tombe sa colonne, car les deux plus petits côtés sont deux colonnes. Si tu veux cela, alors multiplie sa colonne par la moitié de sa base; ce qui en résulte, c'est sa mesure. Voici la figure :

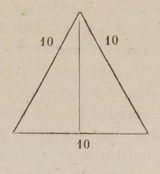


La deuxième espèce. – Soit à mesurer un triangle équilatéral acutangle dont chaque côté a dix derâa. Tu détermines d'abord son *masquèt al hadjar* * et sa colonne. Sache que dans tout triangle isocèle, si tu mènes la colonne sur la base, elle tombe à angles droits sur le milieu de la base, si les deux côtés sont égaux; s'ils sont inégaux, le *masquèt al hadjar* n'est pas au milieu de la base. Mais nous savons que dans ce triangle–ci, sur quelque côté que tu opères, le *masquèt al hadjar* ne sera jamais qu'en son milieu; et c'est cinq derâa. Pour connaître la colonne, tu multiplies le cinq par lui–même, et tu multiplies un des côtés, c'est–à–dire dix, par lui–même, ce qui fait cent; tu retranches de ce produit celui de cinq par lui–même, c'est–à–dire vingt–cinq; il reste soixante–quinze. Tu en prends la racine, c'est la colonne, et elle est devenue un côté des deux triangles rectangles. Si tu veux la mesure, multiplie la racine de 75 par la motié de la base, qui est 5; pour cela tu multiplies le 5 par lui–même, afin d'avoir la racine de 75 par la racine de 25; multiplie 75 par 25, c'est 1875;

---

* *Masquèt al hadjar*, à la lettre : *le lieu où tombe la pierre*. C'est le pied de la hauteur du triangle, ou de la colonne selon l'expression arabe.

prends–en la racine, c'est la mesure du triangle. Et c'est 43 et peu de chose *. Voici la figure :



Si tu as un triangle acutangle dont les côtés sont inégaux, sache que sa mesure se connaît par son *masquèt al hadjar* et sa colonne. Soit un triangle dont un côté est 15 derâa, un côté 14 derâa, et un côté 13 derâa. Si tu veux connaître son *masquèt al hadjar*, prends pour base celui des côtés qu'il te plaira, prenons celui de 14. Son *masquèt al hadjar* tombe sur ce côté à la distance *chéy* (x) à partir de celui des deux côtés adjacents que tu voudras. Posons le *chéy* à partir de l'adjacent 13. Multiplions–le par lui–même, il devient un *mâl* (x^2); retranchons–le de treize par lui–même, c'est–à–dire de 169, cela devient 169 *moins mâl*. Nous savons que la racine de cela, c'est la colonne. Il nous est resté de la base 14 *moins chéy*. Nous multiplions ce reste par lui–même, il en résulte 196 *et mâl moins* 28 *chéy*. Nous le retranchons de 15 *par lui–même*, le reste est 29 *derhems* ** *et* 28 *chéy moins mâl*. La racine est la colonne. Or la racine de 169 *moins mâl*, c'est encore la colonne. Toutes deux sont donc égales. Compare–les, c'est que tu rejettes le mâl avec le mâl, car les deux mâl sont négatifs. Alors il reste 29 *et* 28 *chéy* égal à 169. Rejette 29 de 169, il reste 140 égal à 28 chéy. Un seul chéy est 5. C'est le *masquèt al hadjar* à partir du côté adjacent, 13. Le complément de la base, contigu à l'autre côté, c'est 9. Si tu veux connaître la colonne, multiplie ce 5 par lui–même, puis soustrais le produit du côté contigu, 13, multiplié par lui–même. Il reste 144. La racine de cela est la colonne. C'est 12. La colonne tombe toujours sur la base suivant deux angles droits, et c'est pour cela qu'on la nomme justement colonne. Multiplie

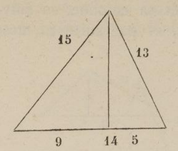
---

* $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75}$,

$S = h \times \frac{b}{2} = \sqrt{75} \times 5 = \sqrt{75} \times \sqrt{25} = \sqrt{1875} = 43$ et $\frac{30}{100}$ à moins de 0,01.

** Le mot *derhem* est employé par les algébristes arabes pour désigner les quantités numériques, les termes tout connus de l'équation, et les distinguer des *chéy*, ou termes en x, et des *mâl*, ou termes en x^2.

la colonne par la moitié de la base, c'est–à–dire par 7, tu obtiens 84 et c'est la mesure du triangle *. Voici la figure ** :



La troisième espèce; Obtusangle. C'est le triangle qui a un angle obtus. Ce triangle a pour chaque côté un nombre différent; soit un de ses côtés six, un côté cinq, un côté neuf. Tu connaîtras sa mesure par son *masquèt al hadjar*

---

* Voici la marche suivie par Mohammed ben Moussa :

$$15^2 - (14 - x^2) = 13^2 - x^2$$
$$15^2 - 196 - x^2 + 28x = 169 - x^2$$
$$29 + 28x = 169$$
$$28x = 140$$
$$x = 5$$
$$\text{Colonne} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$
$$\text{Triangle} = 12 \times \tfrac{14}{2} = 12 \times 7 = 84.$$

Pour trouver dans un triangle quelconque le pied de la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets, Behâ Eddîn emploie la formule

$$x = \frac{a}{2} - \frac{(b+c)(b-c)}{2a} .$$

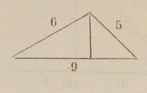
Pour $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$, cette formule donne

$$x = 7 - \frac{28 \times 2}{2 \times 14} = 7 - 2 = 5 .$$

** La hauteur et les troi côtés du triangle sont les quatre nombres entiers consécutifs, 12, 13, 14, 15. Nous résumerons ici les observations auxquelles ces mêmes nombres, qui se rencontrent dans un exemple de triangle donné par Brahmegupta, ont conduit M. Chasles (Aperçu historique). « Ces » nombres sont très-remarquables en ce qu'ils sont ceux choisis à plusieurs siècles d'intervalle, non » seulement par les Hindous, mais aussi par Héron d'Alexandrie, Héron le jeune, les trois fils de » Moussa ben Chaker, Léonard de Pise, Jordan, Luca di Burgo, Georges Valla, Tartalea, etc. » L'usage général de ces trois nombres semblait dire qu'ils avaient une origine commune; mais M. Chasles, en y réfléchissant davantage, ne tarda pas à reconnaître que ces nombres n'offraient probablement pas les secours historiques qu'il avait espérés d'abord. « En effet, dit-il, on aura cherché naturellement, » pour les trois côtés du triangle à proposer en exemple, trois nombres pour lesquels l'aire de ce » triangle, et conséquemment la hauteur fussent exprimées en nombres rationnels. Cette question se » réduit à construire deux triangles rectangles en nombres rationnels, ayant un côté commun. C'est » ainsi que Brahmegupta a fait. Maintenant parmi tous les systèmes de deux triangles rectangles expri- » més en nombres rationnels entiers, et ayant un côté commun, on aura pris celui où ces nombres » sont les plus petits ; ce ont ceux qui ont pour côtés, le premier 5, 12, 13, et le second 9, 12, 15. » Plaçant ces deux triangles de manière que leurs deux côtés égaux se confondent, et que les autres » côtés des angles droits soient dans le prolongement l'un de l'autre, on forme le triangle acutangle » qui a sa base égale à 14, et ses deux autres côtés égaux à 13 et à 15. C'est ainsi que différents » géomètres, chacun de son côté, auront pu être conduits au triangle exprimé par les nombres 13, » 14, 15. »

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI

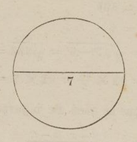
et sa colonne. Or le *masquèt al hadjar* intérieurement ne tombe que sur le plus grand côté. Prends celui–ci pour base. Si tu posais un des deux plus petits côtés pour base, le *masquèt al hadjar* serait projété en dehors d'elle. Tu trouveras son *masquèt al hadjar* et sa colonne, en suivant la même marche que je t'ai enseignée dans l'acutangle, et par suite sa mesure. Voici la figure :



Des cercles. – Nous avons terminé l'exposé de leurs propriétés et de leur mesure dans la première partie du livre.

Soit un cercle dont le diamètre est sept derâa, sa circonférence sera vingt–deux derâa. Pour sa mesure, tu multiplies la moitié du diamètre *; c'est–à–dire $3\frac{1}{2}$ par la moitié de la circonférence dont il est ceint, c'est–à–dire par 11, cela fait $38\frac{1}{2}$, et c'est sa mesure.

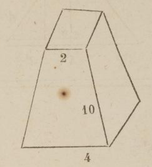
Si cela te plait, multiplie le diamètre qui est 7 par lui–même, cela fait 49; retranches–en son septième et son demi–septième, c'est–à–dire $10\frac{1}{2}$, il reste $38\frac{1}{2}$, et c'est la mesure. Voici la figure :



Si l'on dit : dans un pilier pyramidal la base est quatre derâa par quatre derâa, la hauteur dix derâa, et la tête deux derâa par deux derâa. Nous savons bien que toute pyramide entière a la tête terminée en pointe, et que un tiers de la mesure de sa base multiplié par sa colonne, c'est sa propre mesure. Comme ce pilier–ci n'est pas terminé en pointe, nous voulons savoir de combien l'élever pour rétablir la tête, car il n'a pas de tête. Or nous avons appris que le dix est à la hauteur totale comme le deux est au quatre; mais le deux est la moitié du quatre, donc puisque cela est ainsi, le dix est la moitié de la hauteur. Et la hauteur totale est vingt derâa. Maintenant que nous connaissons la hauteur, prenons un tiers de la mesure de la base, c'est $5\frac{1}{3}$, multiplions–le par la hauteur qui est vingt derâa; cela s'élève à 106 derâa et $\frac{2}{3}$ derâa. Nous en

* Il est à remarquer que ni Mohammed ben Moussa, ni Behà Eddîn n'emploient de mot simple équivalent au nôtre, *rayon*. Ils expriment toujours le *rayon*, en disant *demi-diamètre*. Les Hindous ont un mot *carcata*, ouverture de compas, à la lettre *écrevisse*, pour désigner le rayon (p. 90 du Lilavati de Bhascara.)

retrancherons ce que nous avions ajouté afin de le terminer en pointe, c'est–à–dire un tiers de la mesure 2 par 2, ou $1\frac{1}{3}$, multiplié par dix[3], ce qui fait 13 et $\frac{1}{3}$. Et c'est là la mesure de ce que nous lui avons ajouté pour qu'il fût terminé en pointe. Si nous enlevons cela de 106 derâa et $\frac{2}{3}$ derâa, il reste 93 derâa et $\frac{1}{3}$, et c'est là la mesure du pilier pyramidal *. Voici la figure :



Si la base de la pyramide était un cercle, alors retranche du résultat de la multiplication de son diamètre par lui–même, son septième et la moitié de son septième; ce qui reste, c'est sa mesure.

Si l'on dit: une pièce de terre est un triangle dont deux côtés sont dix derâa, dix derâa, et la base douze derâa; elle est circonscrite à une pièce de terre qui est un carré, combien chaque côté du carré ? Pour le déterminer, il faut que tu connaisses la colonne du triangle; multiplie la moitié de la base, c'est–à–dire six, par elle–même, ce qui donne 36, retranche cela de l'un des deux plus petits côtés multiplié par lui–même, c'est–à–dire de 100, il reste 64, prends–en la racine, 8; c'est la colonne. La mesure du triangle est 48 derâa, résultat dela multiplication de la colonne par la moitié de la base, qui est six. Nous posons un des côtés du carré, *chéy* (x); nous le multiplions par lui–même, il en résulte *mâl* (x^2), nous le gardons. Nous savons qu'il nous est resté deux triangles aux deux côtés du carré, et un triangle au–dessus de lui. Or les deux triangles fixés aux deux côtés du carré sont égaux entre eux, leurs colonnes étant les mêmes et formant entre elles un angle droit. Leur mesure, c'est que tu multiplies *chéy* par 6 *moins* $\frac{1}{2}$ *chéy*, ce qui est 6 *chéy moins* $\frac{1}{2}$ *mâl*; telle est la mesure de la somme des deux triangles qui sont fixés aux deux côtés du carré. La mesure du triangle placé au dessus, c'est que tu multiplies *huit moins chéy*, qui est sa colonne, par *la moitié de chéy*. C'est *quatre chéy moins un demi mâl*. Tout cela additionné ensemble c'est la mesure du carré et la mesure des trois triangles;

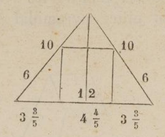
* $10 : H :: 2 : 4$, $H = 20$.

Pyr. entière $= 5\frac{1}{3} \times 20 = 106\frac{2}{3}$

Pyr. complémentaire $= \frac{4}{8} \times 10 = 13\frac{4}{3}$

Pyr. tronquée ou Pilier pyramidal $= 106\frac{2}{3} - 13\frac{4}{3} = 93\frac{1}{3}$.

et c'est *dix chéy*. Tu l'égales avec 48, qui est la mesure du grand triangle. Il suit de là *qu'un chéy* est 4 *deráa* et $\frac{4}{5}$ *deráa*. Et c'est là chaque côté du carré *. Voici la figure :



---

* $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

$S = 8 \times 6 = 48$

$S = x^2 + (6 - \frac{x}{2})x + (8 - x)\frac{x}{2}$

d'où $x^2 + 6x - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^2}{2} = 48$

$10\,x = 48$

$x = \frac{48}{10} = 4\,\frac{1}{5}$.

F I N.

PARAF : .....

PERPU