F. Haas

Die Mathematik der Inder.

Lembaga Kebudajaan
Indonesia

V-203.

11 hal

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.
28-6-2010
279/PW-Mus-10
0010-27317860
10080306 57

V, 203

Vorträge und Abhandlungen.

Die Mathematik der Inder.

Vortrag, gehalten im Vereine „Mittelschule" in Wien am 21. November 1903 von Prof. Dr. **Karl Haas.**

Dieselben Eigenschaften, welche den indischen Geist in Dichtung, Kunst und Philosophie charakterisieren, Tiefsinn und großartige, ja ausschweifende Phantasie, treten auch in der indischen Mathematik zu Tage.

Alle indischen Mathematiker sind eigentlich von Haus aus Astronomen, die jene mathematischen Vorkenntnisse, welche die Astronomie erfordert, in den Einleitungskapiteln zu ihren Werken, die stets in Versen abgefaßt sind, entwickeln.

Die wichtigsten dieser Gelehrten sind:

Aryabhatta, geb. 476 n. Chr. in Patald putra am oberen Ganges; er schrieb ein Werk *Aryabhattigam,* dessen drittes Kapitel der Mathematik gewidmet ist.

Brahmagupta, geb. 598 n. Chr., schrieb *Brahmasphuta-sidhanta,* das verbesserte System des Brahma. Zwei Kapitel desselben sind der Mathematik gewidmet.

Bhaskara Âcârya, d. h. Bhaskara der Gelehrte, geb. 1114 n. Chr., schrieb *Siddhântaçiromani,* die Krönung des Systemes. Zwei Kapitel desselben, *Lilâvati* (die Reizende) und *Vijaganita* (die Wurzelrechnung), enthalten mathematische Unterweisungen.

Endlich wären noch die Werke *Sûrya Sidhanta,* das Wissen der Sonne, und die geometrischen Kapitel des theologischen Werkes der *Çulvasutras* zu erwähnen.

Eine großartige Erfindung des indischen Geistes ist die Stellungsarithmetik, an die wir von Jugend auf so gewohnt sind, daß die meisten sie als etwas ganz Selbstverständliches hinnehmen, denn wie Nathan der Weise sagt:

> Der Wunder höchstes ist,
> Daß uns die wahren echten Wunder
> So alltäglich werden können, werden sollen.

Ein Blick auf die schwerfällige Art, wie der Römer und Grieche große Zahlen schreibt, und anderseits auf die Leichtigkeit, mit der wir dieselben darstellen, läßt dies sofort hervortreten.

Während die Griechen einen besonderen Namen für die Potenzen von 10 nur bis 10.000 hinauf besitzen, haben die Inder besondere Namen für weit höhere Potenzen, so beispielsweise

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI

arbuta für hundert Millionen,
padma für zehntausend Millionen,
akshauhini für 100 Trillionen (Zahl mit 20 Nullen).

Ja in der *Lalitavistara* kommt sogar noch das Wort *Tallakshana* für eine Zahl vor, die mit 1 und 53 Nullen geschrieben wird.

Der Inder kennt nicht bloß wie wir 4 elementare Rechnungsarten, sondern 6, indem er noch die Potenz- und Wurzelrechnung in die elementaren Rechnungen einbezieht. Unseren vier Spezies steht sein *shadvidham*, d. i. die sechsfache Rechnung gegenüber.

Die Subtraktion wird auf zwei verschiedene Arten geübt, z. B. 348 von 821

821
— 348
473

wird entweder so gefunden: 8 von 11 gibt 3, 4 von 11 gibt 7, 3 von 7 gibt 4,

oder

8 von 11 gibt 3, 5 von 12 gibt 7, 4 von 8 gibt 4.

Die Multiplikation wird auf sehr verschiedene Art durchgeführt: durch Zerlegung des Multiplikators in Faktoren, mit denen nacheinander multipliziert wird, durch Zerlegung in Summen und Differenzen, in der bei uns üblichen Art, doch mit eigentümlicher schräger Anordnung der einzelnen Teilprodukte. Endlich noch ein besonderes, sehr rasches Verfahren, bei welchem das Endprodukt sofort hingeschrieben werden kann. Die Inder nannten dieses Verfahren: *Vajrabhyâsa*, d. h. blitzbildend.

Es besteht darin, daß zunächst die Einer gebildet und hingeschrieben werden, dann die Zehner, dann die Hunderter u. s. w.

Ich will das Verfahren für ein Produkt zweier dreizifferiger Zahlen allgemein und an einem besonderen Beispiele erläutern:

$$(a_0 + 10\,a_1 + 100\,a_2)\,(b_0 + 10\,b_1 + 100\,b_2)$$
$$= a_0\,b_0 + 10\,(a_1 + b_1) + 100\,(a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0)$$
$$+ 1000\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1) + 10.000\,a_2\,b_2$$

875
429
375375

$5 \times 9 = 45$ bleibt 4
$2 \times 5 + 7 \times 9 + 4 = 77$ bleibt 7
$8 \times 9 + 5 \times 4 + 7 \times 2 + 7 = 113$ bleibt 11
$2 \times 8 + 7 \times 4 + 11 = 55$ bleibt 5
$8 \times 4 + 5 = 37$.

(Natürlich könnte man dieses Verfahren auch auf die Multiplikation von mehr als zwei Faktoren ausdehnen, z. B.:

21
33
— 39
27027

$1 \times 3 \times 9 = 27$
$2 \times 3 \times 9 + 3.9.1 + 3.3.1$
$2 + 54 + 27 + 9 = 92$
$9 + 1.3.3 + 3.2.3 + 9.2.3$
$9 + 9 + 18 + 54 = 90$
$9 + 2.3.3 = 27.$)

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Natürlich setzt eine derartige Methode eine gewisse Gewandtheit im Kopfrechnen voraus. Daß eine solche existierte, geht auch aus einer Anekdote des *Lalitavistara* hervor, welcher sich mit der Jugend des *Bodhisattva* beschäftigt.

Bei einer Brautwerbung muß sich der junge Held einer Prüfung in körperlichen und geistigen Fertigkeiten unterziehen, so auch im Rechnen. Es wird da unter anderem von ihm verlangt, daß er die Anzahl der Elementarteilchen angebe, die auf eine *Yojana* (sprich *Jodschana*), ein indisches Längenmaß, gehn. 7 solche Elementarteilchen geben ein sehr feines Stäubchen, 7 dieser ein feines Stäubchen, 7 davon wieder ein vom Winde aufgewirbeltes Stäubchen, 7 dieser ein Stäubchen von der Fährte eines Hasen, 7 letzterer ein Stäubchen von der Spur eines Widders, 7 von diesen ein Stäubchen von der Spur eines Stieres, 7 von diesen gehn auf ein Mohnkorn, 7 solche auf ein Senfkorn, 7 dieser auf ein Gerstenkorn, 7 Gerstenkörner gehn auf die Länge eines Fingergelenkes, 12 von diesen geben eine Spanne, 2 Spannen eine Elle, 16.000 Ellen eine *Yojana* (*Jodschana*), in Summa:

$$7^{10}\ 2^{10}.3.5^3 = 108\ 470\ 495\ 616\ 000.$$

Was das Rechnen mit Wurzeln anlangt, so kennt Bhaskara bereits das Rationalmachen des Nenners, ferner die Formel:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

auch kommt bei ihm folgende Zerlegung vor:

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

Ich gehe nun zur Behandlung der Gleichungen über.

Die unbekannte Zahl heißt *sunya*, d. h. leer und wird durch einen Punkt dargestellt. *Sunya* heißt auch Null, diese wird ebenfalls durch einen Punkt dargestellt. Der Gedanke, der dieser Doppelbedeutung zu Grunde liegt, ist offenbar folgender: Eine Stelle muß leer bleiben, wenn ihre Ausfüllung nicht vorhanden ist, also auch wenn diese Ausfüllung noch unbekannt ist.

Die Inder kennen bereits die Röhrenaufgaben und auch die Kurieraufgaben und letztere sowohl für den Fall, wo die Bewegungsrichtung beider Kuriere die nämliche ist, als auch für den Fall, daß die Bewegungsrichtungen entgegengesetzte sind.

Von den Methoden zur Auflösung sei hervorgehoben:

Die Umkehrung *Viloma kriyâ*, bei welcher die Reihenfolge der Operationen bei der Auflösung die entgegengesetzte von jener beim Ansatze ist; mit der letzten wird begonnen, dann kommt die vorletzte u. s. f.

Außerdem wird für jede Operation die ihr entgegengesetzte gesetzt, Multiplikation für Division und umgekehrt, Addition für Subtraktion und umgekehrt, Potenzierung für Radizierung und umgekehrt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Zur Erläuterung diene ein Beispiel aus *Bhaskaris Lilávati:*

„Schönes Mädchen mit den leuchtenden Augen, sage mir, so du die richtige Methode der Umkehrung verstehst, welches ist die Zahl, die mit 3 vervielfacht, sodann um $\frac{3}{4}$ des Produktes vermehrt, durch 7 geteilt, um $\frac{1}{3}$ des Quotienten vermindert, dann quadriert, um 52 vermindert, durch Ausziehung der Quadratwurzel, Addition von 8 und Division durch 10 die Zahl 2 gibt?"

Der Ansatz ist:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{3x \cdot \frac{7}{4}}{7} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 - 52} + 8}{10} = 2$$

Ausführung nach der Methode der *Viloma kriyâ:* $(2 \times 10 - 8)^2 + 52 = 196$.

$$\sqrt{196} = 14$$

$$14 \cdot \tfrac{3}{2} = 21 \qquad 21 \cdot 4 = 84 \qquad 84 : 3 = \mathbf{28}$$

Probe.

$28 \times 3 = 84 \quad 84 + 63 = 147 \quad 147 : 7 = 21 \quad 21 - 7 = 14 \quad 14^2 = 196 \quad 196 - 52 = 144$

$$\sqrt{144} - 12 \qquad 12 + 8 = 20 \qquad 20 : 10 = 2$$

Eine zweite Methode ist die der angenommenen Zahl: *Ishta Karman.*

Beispiel:

Verfünffacht man eine Zahl, zieht $\frac{1}{3}$ des Produktes ab, dividiert den Rest durch 10 und addiert $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Zahl, so erhält man 68.

Nimmt man an, die Lösung sei 3, so erhält man nach den geforderten Operationen $\frac{17}{4}$, das ist aber der 16. Teil von 68; mithin muß man das 16fache von 3 nehmen, die gesuchte Zahl ist also 48.

Angenehm fallen die indischen Gleichungen durch ihr poetisches Gewand auf. Ein paar Beispiele:

„Von einem Schwarme Bienen läßt sich $\frac{1}{5}$ auf einer Kadambablüte, $\frac{1}{3}$ auf einer Silindhablüte nieder. Eine Zahl Bienen, gleich dem 3fachen Unterschiede dieser beiden, flog nach den Blüten eines Kutaja, eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin- und herschwebte, gleichzeitig angezogen von dem lieblichen Dufte eines Jasmins und eines Pandanus. Sage mir, reizendes Mädchen, die Anzahl der Bienen?"

„Bei verliebtem Ringen riß eine Perlenschnur, $\frac{1}{6}$ fiel zu Boden, $\frac{1}{5}$ blieb auf dem Lager liegen, $\frac{1}{3}$ behielt das Mädchen, $\frac{1}{10}$ nahm der Geliebte an sich, 6 Perlen blieben aufgereiht. Sage mir, wie viele Perlen hat die Schnur enthalten?"

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Merkwürdig ist bei Gleichungen mit mehreren Unbekannten die Bezeichnung der einzelnen Unbekannten nach Farben: Die schwarze, die rote, die grüne u. s. w., wo wir x, y, z u. s. w. setzen.

Unter diesen Gleichungen fällt uns ein Problem auf, welches aus der Geschichte der griechischen Mathematik als das *Epanthem* des *Thymarides* bekannt ist. Es sind die Differenzen zwischen der Summe von n Unbekannten und jeder einzelnen dieser n Unbekannten gegeben, man hat die Unbekannten zu suchen.

$$\begin{array}{llll} s-x_1=d_1 & s-x_2=d_2 \ldots & & s-x_n=d_n \\ ns-s=\Sigma d & s=\frac{\Sigma d}{n-1} & & x_1=\Sigma-d_1 \\ & & & x_2=\Sigma-d_2 \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Bezüglich der Gleichungen zweiten Grades haben wir bei den Indern einen Fortschritt gegenüber Diophant in der Hinsicht, als nicht mehr drei Formen quadratischer Gleichungen, nämlich

$$ax^2+bx=c \qquad bx+c=ax^2 \qquad ax^2+c=bx,$$

wo a, b, c sämtlich positiv sind, vorkommen. Bei Brahmagupta ist aus diesen drei Formen bereits eine geworden, weil er schon negative Koeffizienten verwendet.

Bei Brahmagupta folgt aus $ax^2+bx=c$

$$x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}$$

was sein Kommentator *Çridhara* auf die Form

$$x=\frac{-b+\sqrt{de^2+4ac}}{2a}$$

bringt.

Bhaskara kennt bereits Doppelsinnigkeiten (2 Wurzelwerte) und Unmöglichkeiten (imaginäre Lösungen).

Unter den Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten sind Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck bemerkenswert: Berechnung der drei Seiten aus ihrer Summe und dem Flächeninhalte und Berechnung aus der Summe und dem Produkte der drei Seiten (Parallelepiped aus den drei Seiten).

Für die Auflösung unbestimmter Gleichungen ersten Grades hat schon Aryabhatta eine Methode, die er *Kuttaka*, d. h. Zerstäubungsmethode, nennt. Er sucht zunächst das gemeinschaftliche Maß zwischen den Koeffizienten der Unbekannten und notiert die Quotienten bei diesem Verfahren, die er in eine Reihe hinschreibt, der er am Schlusse die Addition (die Zahl, welche in der Gleichung weder x noch y enthält) und die Null beifügt. (Dabei wird eine gerade und eine ungerade Zahl Quotienten ausdrücklich unterschieden.) Nun vervielfacht man das drittletzte Glied mit dem vorletzten und addiert das letzte, streicht das letzte Glied und erhält so eine neue Reihe, in welcher nun

PERPUSTAKAAN NASIONAL

das früher vorletzte das letzte Glied und das Produkt aus dem drittletzten und vorletzten + dem letzten das vorletzte Glied ist.

Auflösung von $100x + 90 = 63y$.

Die Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes zwischen 63 und 100 ergibt die Quotienten

$1_1 \quad 1_1 \quad 1_1 \quad 2_1 \quad 2_1 \quad 1$;

wir fügen dieser Reihe noch 90 und 0 bei

1_1	1_1	1_1	2_1	2_1	1_1	90	0	$1 \times 90 + 0$
1	1	1	2	2_1	90	90		$2 \times 90 + 90$
1	1	1	2	270	90			$270 \times 2 + 90 = 630$
1	1	1	630	270				
1	1	900	630		$x = 1530$			$y = 2430$
1_1	$153 \cdot 0_1$	900		2	$y = 30$			$x = 1530 - 24.63$
2430								$= 18$

Kurzer Algorithmus

100	63	1	27
37	26	1	17
11	4	1	10
3	1	2	7
		2	3
		1	1
			1

$x = 17.90 - 63n$
$y = 27.90 - 100n.$

$60x + 16 = 13y$

60	13	4	23
8	5	1	5
3	2	1	3
1		1	2
		1	1
			1

$x = -5.16 + 13n \qquad x = 11$
$y = -23.16 + 60 \,.\, n \qquad y = 52$
$\quad -368$
$\quad 420$

Es ist dies die Methode der Kettenbrüche, die im Abendlande erst 1767 von Lagrange gelehrt wurde.

Wir gehn nun über zu den unbestimmten Gleichungen zweiten Grades.

Man suche eine Zahl, die sowohl um 5 vermehrt als um 7 vermindert, ein Quadrat gibt.

$$x + 5 = y^2 \qquad x - 7 = z^2$$
$$y^2 - 5 = z^2 + 7$$
$$y^2 - z^2 = 12$$

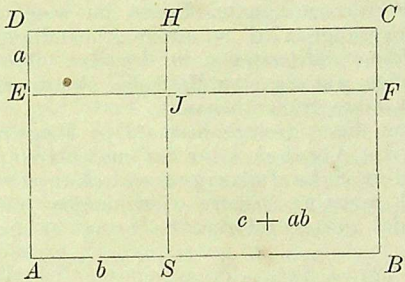
geht auf die Zerlegung von $y^2 - z^2$ in $y + z$ und $y - z$ hinaus, wobei sowohl $y + z$ als $y - z$ gerade Zahlen sein müssen.

$$\text{I} \quad \begin{cases} xy = 7x + 13y + 107 \\ xy - 7x - 13y = 107 \\ xy - 7x - 13y + 91 = 198 \\ (x - 73)\ (y - 7) = 198 \end{cases}$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

II
$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$
Die Faktoren von 198 sind demnach:
1 . 2 11 22
3, 6 33 66
9 18 99 198
daher
$x - 13 = 6 \qquad x = 19$
$y - 7 = 33 \qquad y = 40$
u. s. w.

Interessant ist die geometrische Herleitung, welche Bhaskara für diese Auflösung gibt.



$xy = ax + by + c$
$xy - ax - by = c$

Es sei $AB = x \quad AD = y \quad DE = a \quad AS = b$
Es ist $CDEF = ax \quad ASHD = by.$ Mithin $JSBF = xy - ax - yb + ab = c + ab$

$$(x - b)\ (y - a) = ab + c$$

Es handelt sich also um die Zerlegung von $ab + c$ in Faktoren.

Zu dieser Sorte von Aufgaben gehört auch das Problem rationaler rechtwinkliger Dreiecke. Die Inder kennen die Lösung

$$a \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} - b\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + b\right)$$

Bei Pythagoras und Plate kommen nur die Spezialfälle $b = 1$ und $b = 2$ vor

$$a \quad \frac{1}{2}\left(a^2 - 1\right) \cdot \frac{1}{2}\left(a^2 + 1\right)$$

$$a \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} - 2\right) \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + 2\right)$$

Der größte Triumph, den die indische Mathematik gefeiert hat, ist die Auflösung der sogenannten Pellschen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1,$$

welche die bedeutendsten Mathematiker des Okzidentes, Brouneker, Euler, Lagrange, Gauss, Jacobi, Dirichlet, Kronecker, in Atem gehalten hat.

Ein spezieller und berühmt gewordener Fall derselben begegnet uns schon im *Problema bovinum* des Archimedes, einem

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Juwel, das Lessing 1773 aus dem Staube der Wolfenbütteler Bibliothek ans Tageslicht zog.[1]) Dieses Problem führt auf die ganzzahlig zu lösende Gleichung

$$t^2 - 4729494\, u^2 = 1.$$

Dazu stellt der letzte Vers noch die Forderung, daß u durch 4657 teilbar sei. Amthor hat sich der Mühe der Auflösung der obigen Gleichung unterzogen und hat für u als kleinsten Wert eine Zahl von 41 Stellen erhalten. Sollte auch noch der erwähnten Teilbarkeitsbedingung genügt werden, so müsste u nach seiner Berechnung nicht weniger als 206.546 Ziffern haben.

Die Methode der Inder zur Auflösung der Pellschen Gleichung ist zu umfangreich, als daß ich selbe in der kurzen mir hier gegönnten Zeit erörtern könnte. Es ist im wesentlichen dieselbe, welche Lagrange 1767 in seiner Abhandlung *Sur la solution des problems indeterminés du deuxième degré* veröffentlicht hat. In Indien war dieselbe Methode, allerdings ohne Beweis, schon 1200 Jahre früher bekannt.

Bhaskara bemerkt bei dieser Gelegenheit: „Die Regeldetri ist Arithmetik, die Algebra aber ist makelloser Verstand. Was wäre dem Scharfsinnigen unbekannt?"

Bhaskara weiß auch einzelne höhere Gleichungen auf Gleichungen zweiten Grades zurückzuführen. So bringt er die Gleichung

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35$$

auf die Form

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27$$
$$(x - 2)^3 = 3^3,$$

woraus er die Lösung

$$x = 5$$

findet.

Die Gleichung

$$x^4 - 2\,(x^2 + 200\,x) = 9999$$

bringt er durch Addition von $4x^2 + 400x + 1$ auf beiden Seiten auf die Form

$$(x^2 + 1)^2 = (2x \times 100)^2$$

und findet daraus

$$x = 11.$$

Arithmetische Reihen kommen bei Aryabhatta, Brahmagupta und Bhaskara vor, bei Bakhshali findet sich folgende Aufgabe: „Ein Reisender legt am ersten Tage zwei Wegeinheiten zurück, jeden folgenden zwei mehr; ein zweiter Reisender legt am ersten Tage drei Wegeinheiten, an jedem folgenden zwei mehr zurück. Wann treffen sie zugleich an einem Punkte ein?" Diese Aufgabe ist so einfach, daß sie rasch durch einen kleinen Versuch gelöst werden kann. Wird allgemein a_1 und d_1, a_2 und d_2 gesetzt, so ist Bedingung für die Lösung:

[1]) Zur Geschichte der Literatur aus den Schätzen der herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel. Zweiter Beitrag.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

$$\left[2a_1 + (x-1)\,d_1\right]\frac{x}{2} = \left[2a_2 + (x-1)\,d_2\right]\frac{x}{2},$$

woraus

$$x = 2\,\frac{(a_1 - a_2)}{d_2 - d_1}$$

Auch das Addieren der von 1 an aufeinander folgenden Quadrat- und Kubikzahlen sowie der Kugeln in einem dreiseitigen Kugelhaufen kennen die Inder. Ebenso die geometrischen Progressionen.

Als älteste Spur einer mehr weniger bewußten Permutation ist die Tatsache aufzufassen, daß die Abbildungen des Vischnu 24 verschiedene Namen führen, je nach der Ordnung, in welcher er in seinen vier Händen seine vier verschiedenen Attribute, die Keule, die Scheibe, die Lotosblume und die Muschel hält. Auch die Kapitel der indischen Prosodie, in welchen die verschiedenen Möglichkeiten gezählt werden, welche bei Versen von gegebener Silbenzahl in Bezug auf Länge und Kürze der einzelnen Silben auftreten, sind hieher zu rechnen.

Auch die Zahl der Kombinationen findet sich bei Bhaskara, endlich die Summe, welche auftritt, wenn man alle Formen einer Permutation als dekadisch geschriebene Zahlen betrachtet.

Sollen z. B. die Permutationen von 1234 addiert werden, deren es 24 gibt, so ist es klar, daß, wenn man diese Permutationen untereinander schreibt, in jeder Vertikalreihe jede Ziffer gleich oft, also jede sechsmal auftreten wird. Wir erhalten also in jeder Kolonne die Summe

$$(1 + 2 + 3 + 4).\,6 = 6,$$

was im ganzen 66.660 ausmacht.

Interessant ist die leicht zu begründende Wahrnehmung, daß die Summe aller Permutationen einer dreizifferigen Zahl durch 111, aller vierzifferigen durch 1111, aller fünfzifferigen durch 11.111 u. s. f. teilbar ist.

Die Hauptquelle für die indische Geometrie sind die *Çulvasûtras*, Schriften von geometrisch-theologischem Charakter, wie sie sich, abgesehen von einigen ägyptischen Inschriften, in keiner Literatur wiederfinden. Der indische Gottesdienst, peinlich genau, kann der geometrischen Regeln nicht entbehren. Wenn der Altar nicht genau in der anbefohlenen Gestalt erbaut ist, wenn eine Kante nicht rechtwinklig zur anderen steht, wenn in der Orientierung nach den Weltgegenden ein Fehler begangen wurde, so nimmt die Gottheit das Opfer nicht an.

Die Ost-Westlinie führt den Namen *Praci* und wird nach dem *Surya Sidhanta* genau nach derselben Methode gefunden, deren sich (wohl nach griechischem Muster) Vitruvius und die römischen Feldmesser bedienten. Ist diese Linie gefunden, so werden zu ihr mit Hilfe eines Seiles, wie bei den alten Ägyptern, die rechten Winkel abgesteckt. Die Länge der *Praci* sei 36 Padas. An ihren Endpunkten wird ein Pflock eingeschlagen. An diese

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Pflöcke befestigt man ein Seil von 54 Padas Länge, welches durch einen Knoten in zwei Teile von 15 und 39 Padas Länge geteilt wird. Spannt man das Seil auf dem Erdboden, indem man den Knoten festhält, so entsteht am Ende der *Praci* ein rechter Winkel.

Die Konstruktion von Altären führt auf zwei Gruppen von Aufgaben.

Wird ein Altar von gegebener Gestalt vergrößert, so muß doch seine Gestalt in allen Verhältnissen dieselbe bleiben. Man hat also eine geometrische Figur zu bilden, einer gegebenen ähnlich und zu ihr in einem gegebenen Größenverhältnisse stehend.

Eine zweite Aufgabe, die bei der Konstruktion von Altären auftritt, ist die Verwandlung einer geometrischen Figur in eine andere flächengleiche.

Originell ist in den *Çulvasûtras* die Verwandlung des Rechteckes in ein Quadrat. Vom Rechtecke wird zunächst durch eine Gerade ein Stück abgeschnitten, das dem Quadrate der kleineren Seite gleichkommt. Der übrigbleibende Teil wird in zwei Hälften geteilt, von denen eine an der dem Quadrate und dem Rechtecke gemeinsamen Seite bleibt, der andere aber an die anstoßende Seite des Quadrates kommt. Es entsteht hiebei jene Figur, welche von den Griechen *Gnomon* genannt wird, und zwar ein *Gnomon*, der als Differenz zweier Quadrate aufgefaßt werden kann. Die Seite des kleineren Quadrates ist die Hälfte der Differenz zwischen den beiden Rechteckseiten, die des größeren aber die Summe aus dieser halben Differenz und der größeren Seite. Die Differenz der Quadrate aber wird nach dem pythagoreischen Lehrsatze konstruiert.

Hochinteressant ist eine andere Verwandlungsaufgabe.

In den *Çulvasûtras* wird nicht die Aufgabe gelehrt, den Kreis in ein Quadrat, sondern umgekehrt die Aufgabe, das Quadrat in einen Kreis zu verwandeln. Durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen wird, den Winkel derselben halbierend, eine Gerade gezogen, welche so lang ist wie die Diagonale und durch den Diagonalenschnittpunkt halbiert wird. Der über das Quadrat hinausragende Teil dieser Geraden wird in drei Teile geteilt und die Strecke von dem Diagonalenschnittpunkt bis zum ersten dieser Teilungspunkte (vom Quadrat ab gerechnet) wird als Radius des Kreises angenommen. Diese Zirkulatur des Quadrates benutzt also als Durchmesser $\frac{8}{10}$ der Diagonale. Kehren wir die Sache um, so können wir sagen $\frac{7}{8}$ des Kreisdurchmessers werden als Quadratseite genommen. Dieses Verfahren hat auch Vitruv und es findet sich auch in Albrecht Dürers: „Underweysung in der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt" (1525). Bei diesem Messungsverfahren ist $\pi = 3\frac{1}{16}$ angenommen.

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI

In den *Çulvasûtras* findet sich noch die rohere Annahme $\pi = 3$, ein Wert, der auch den Babyloniern schon geläufig war und auch schon in der Bibel vorkommt.

Aryabhatta kennt jedoch bereits

$$\pi = 3{\cdot}1416,$$

also auf vier Stellen genau, über den archimedischen Wert $\frac{22}{7}$ hinausgehend.

Von den Indern bekannten Flächenrechnungen seien jene des Rechteckes, des Dreieckes aus den Seiten des Trapezes und des Sehnenviereckes hervorgehoben.

Bezüglich des quadratischen Pyramidalstumpfes finden sich bei Brahmagupta drei Angaben:

Eine für den Praktiker $V_P \doteq h\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$,

eine annähernde $V_A = h\,\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$,

und die genaue, von der er angibt, daß sie gleich sei

$$V_P + \frac{V_A - V_P}{3}.$$

Nimmt man beispielsweise $a_1 = 7$ $a_2 = 5$ $h = 6$, so ist

$$V_P = 216 \quad V_A = 222 \quad V = 218 = 216 + \tfrac{6}{3}.$$

Das Urteil Cantors in seiner Geschichte der Mathematik lautet bezüglich der indischen Geometer: „Rechnen in unbegrenzter Möglichkeit oder Anschauen, darüber kommen sie hinaus."

Dementsprechend haben die Inder auch in dem des Rechnens am meisten bedürftigen Teile der alten Geometrie, der Trigonometrie, den größten Fortschritt gemacht. Derselbe besteht in einer Sinustabelle. Die Sehnen waren durch ihre Hälften verdrängt. Fast kann man hinzusetzen, daß dieser ungemein glückliche Wurf den Indern durch einen Zufall gelang; denn die Früchte dieser Abänderung pflückten nicht sie, sondern ihre Nachfolger, die Araber.

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI
PERPUSTAKAAN NASIONAL

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA