Koninklijke Paketvaart Maatschappij

Meetkundige Lichamen.

TAKAAN NASIONAL RI

V : -
130

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Bib ID: 0010-0823016756
Item ID: 000037945 28

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

V-130.-

Meetkundige Lichamen.

De pyramide.

Een pyramide is een lichaam, dat begrensd wordt door een willekeurigen veelhoek en verder door driehoeken, welke een gemeenschappelijk hoekpunt hebben.

De veelhoek draagt den naam van *grondvlak*, de overige grensvlakken noemt men *opstaande zijvlakken*, en het gemeenschappelijk hoekpunt heet *top* der pyramide.

De doorsneden der opstaande zijvlakken noemt men *ribben*. De loodlijn uit den top op het grondvlak neergelaten heet *hoogte*.

Een pyramide wordt benoemd naar het grondvlak. Is het grondvlak een driehoek, vierhoek, vijfhoek enz, dan heet de pyramide driezijdig, vierzijdig, vijfzijdig enz.

Een pyramide heet *regelmatig*, indien het grondvlak een regelmatige veelhoek is en het voetpunt van de hoogtelijn, uit den top op het grondvlak neergelaten, samenvalt met het middelpunt van het grondvlak. Van een regelmatige pyramide zijn de opstaande ribben gelijk, omdat de opstaande zijvlakken alle, congruente driehoeken zijn. (zie fig. 1).

Onder het *zijdelingsch* oppervlak eener pyramide verstaat men de som der oppervlakken van de opstaande zijvlakken.

Het geheele oppervlak verkrijgt men door bij het zijdelingsch oppervlak dat van het grondvlak te voegen. Het zijdelingsch oppervlak eener regelmatige pyramide wordt dus gevonden door het oppervlak van een der opstaande zijvlakken met het aantal te vermenigvuldigen.

Trekt men in een der opstaande zijvlakken van een regelmatige pyramide de hoogtelijn uit den top op de basis, dan noemt men deze hoogte de *schuine hoogte* der pyramide of wel de *apothema*.

Snijdt men een pyramide door een vlak, evenwijdig aan het grondvlak, dan wordt van de pyramide weer een pyramide afge-

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.

BAT. GEZANTSCHAP VAN K. EN W.

sneden en het overblijvende lichaam noemt men *afgeknotte* pyramide.

Op deze wijze ontstaat bij een regelmatige pyramide een regelmatige afgeknotte pyramide. (zie fig 2).

De evenwijdige vlakken eener afgeknotte pyramide heet grondvlak en bovenvlak. De afstand dezer vlakken heet hoogte.

Bij een regelmatige afgeknotte pyramide zijn de opstaande zijvlakken congruente gelijkbeenige trapezia. De hoogtelijn van elk der trapezia wordt de apothema der regelmatige afgeknotte pyramide genoemd.

Bij een afgeknotte pyramide spreekt men op dezelfde wijze als bij een pyramide van zijdelingsch oppervlak, terwijl men om het geheele oppervlak te verkrijgen bij dit zijdelingsch oppervlak de som der oppervlakken van grond- en bovenvlak voegen moet.

Gemakkelijk toont men aan:

1e. Het zijdelingsch oppervlak van een regelmatige pyramide is gelijk aan het halve produkt van de apothema met den omtrek van het grondvlak.

2e. Het zijdelingsch oppervlak van een regelmatige afgeknotte pyramide is gelijk aan het halve produkt van de apothema met de som der omtrekken van grond- en bovenvlak.

Zonder bewijs laten we nu de volgende eigenschappen of formules volgen:

Inhoud pyramide $= {}^1/_3 \times$ opp. grondvlak $\times$ hoogte.

Inhoud afgeknotte pyramide $= {}^1/_3 \times$ hoogte $\times$ (Opp. grondvlak + opp. bovenvlak $+ \sqrt{\text{opp. grondvlak} \times \text{opp. bovenvlak}}$).

Noemen we den inhoud I, de hoogte h, het oppervlak van het grondvlak G en dat van het bovenvlak B, dan gaan beide formules over in:

I (pyramide) $= {}^1/_3$ G $\times$ h.

en I (afgekn. pyr.) $= {}^1/_3$ h $(G + B + \sqrt{G\ B})$.

Het prisma.

Een prisma is een lichaam, dat begrensd wordt door twee evenwijdige vlakken en verder door vlakken, welke elkaar twee aan twee volgens evenwijdige lijnen snijden. (zie fig 3).

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

De evenwijdige vlakken noemt men grond- en bovenvlak, de overige grensvlakken opstaande zijvlakken. De afstand van grond- en bovenvlak van een prisma heet hoogte en de snijlijnen der opstaande zijvlakken onderling opstaande ribben.

Een prisma wordt benoemd naar het aantal zijden van het grondvlak. Is het grondvlak een driehoek, vierhoek, vijfhoek enz., dan heet het prisma driezijdig, vierzijdig, vijfzijdig enz.

Een prisma, waarvan de opstaande ribben scheefhoekig op 't grondvlak staan heet *scheef* prisma.

Staan de opstaande ribben loodrecht op het grondvlak, dan is het een *recht* prisma.

Een recht prisma, waarvan het grondvlak een regelmatige veelhoek is, noemt men *regelmatig*.

De som der oppervlakken van de opstaande zijvlakken noemt men *zijdelingsch* oppervlak van het prisma.

Het *geheele* oppervlak verkrijgt men, indien men bij het zijdelingsch oppervlak dat van grond- en bovenvlak voegt.

Een doorsnede van een prisma met een vlak, dat door twee evenwijdige ribben gaat, noemt men *diagonaalvlak* van het prisma.

Uit bovenstaande bepalingen volgt:

1e. dat de opstaande zijvlakken van een recht prisma rechthoeken zijn.

2e. dat de opstaande zijvlakken van een regelmatig prisma congruente rechthoeken zijn.

3e. dat het zijdelingsch oppervlak van een recht prisma gelijk is aan het produkt van den omtrek van het grondvlak en de hoogte.

Een prisma, waarvan het grondvlak een parallelogram is noemt men een *parallelopipedum*.

Een parallelopipedum, waarvan de opstaande ribben loodrecht op 't grondvlak staan, heet *recht* parallelopipedum.

Een recht parallelopipedum, waarvan het grondvlak een rechthoek is, heet *rechthoekig parallelopipedum*. (Zie fig. 4).

Een rechthoekig parallelopipedum, waarvan het grondvlak een vierkant is en welks opstaande ribben gelijk zijn aan eene zijde van dat vierkant, heet *kubus*.

Elk der deelen, waarin een prisma wordt verdeeld door een vlak, dat alle opstaande ribben snijdt en niet evenwijdig is met het grondvlak, heet *afgeknot* prisma.

De doorsnede van een scheef prisma met een vlak, dat loodrecht staat op de opstaande ribben, heet *loodrechte doorsnede*.

Staan de opstaande ribben loodrecht op het grondvlak, dan is de loodrechte doorsnede het grondvlak zelf.

Zonder bewijs laten we hier de volgende eigenschap volgen:

De inhoud van elk prisma de gelijk aan het produkt van het oppervlak van het grondvlak en hoogte.

Noemen we den inhoud I, het opp. van het grondvlak G, en de hoogte H, dan is

$$I = G \times H.$$

De inhoud van een kubus is alzoo gelijk aan de derde macht van zijn ribbe.

Omwentelingslichamen.

De cilinder.

Indien een rechthoek wentelt om een zijner zijden, ontstaat door die omwenteling een lichaam, dat den naam draagt van cilinder. (Zie fig. 5).

De zijde, waarom de rechthoek wentelt, heet *de as* van den cilinder en de zijde van den rechthoek, die evenwijdig is met de as, heet de *beschrijvende lijn* van den cilinder. Het vlak, dat door de beschrijvende lijn beschreven wordt, heet het *ronde oppervlak* van den cilinder. De vlakken, welke beschreven worden door de zijden van den rechthoek, die loodrecht op de as staan, noemt men *grond-* en *bovenvlak* van den cilinder.

De doorsnede van den cilinder en een vlak, dat door de as gaat, is een rechthoek en heet *asdoorsnede*.

De cilinder heeft een *ontwikkelbaar* oppervlak, d. w. z. men kan het zonder plooien met papier beplakken. Dit oppervlak — het ronde

oppervlak — is een rechthoek, die tot lengte heeft den omtrek van het grondvlak en tot hoogte de hoogte van den cilinder. Is nu de straal van het grondvlak = r en de hoogte = h, dan is:

$$\text{Rond oppervlak cilinder} = 2 \pi r \times h.$$

Wanneer men in en om een cilinder een regelmatig prisma beschrijft en het aantal zijden van die prisma's onophoudelijk verdubbelt, zal de inhoud van het ingeschreven prisma altijd kleiner zijn dan de inhoud van den cilinder, en de inhoud van het omgeschreven prisma altijd grooter zijn dan de inhoud van den cilinder. We kunnnen echter dit verschil zoo klein maken als we zelf willen door het aantal zijden van de grondvlakken maar groot genoeg te nemen. Derhalve is de cilinder de grens (limiet), waartoe de in- en omgeschreven prisma's naderen. We kunnen dus zeggen, dat de formule voor den inhoud van den cilinder dezelfde moet zijn als die voor den inhoud van het prisma. We hebben dus:

Inhoud cilinder = opp. grondvlak × hoogte, of wel

$$I = \pi r^2 h.$$

De kegel.

Als een rechthoekige driehoek wentelt om een der rechthoekszijden, ontstaat door die wenteling een lichaam, *kegel*, genaamd. (Zie fig. 6).

De rechthoekszijde, waarom de wenteling plaats heeft, heet *as* van den kegel, terwijl de andere rechthoekszijde bij die wenteling een cirkel beschrijft, die grondvlak genoemd wordt. De hypothenusa van den rechthoekigen driehoek beschrijft een gebogen vlak, het *kegelvlak* of *ronde oppervlak*. Dit ronde oppervlak noemt men ook wel *kegelmantel* of kortweg *mantel*. Denken we ons den kegel met papier beplakt, dan zouden we dit oppervlak kunnen doorsnijden volgens een beschrijvende lijn en daarna het papier vlak strijken. Men verkrijgt dan een cirkelsector, waarvan de lengte van den boog gelijk is aan den omtrek van het grondvlak van den kegel en de straal gelijk is aan de schuine hoogte (hypothenusa van den omwentelingsdriehoek).

Het ronde oppervlak van een kegel wordt derhalve gevonden door den omtrek van het grondvlak te vermenigvuldigen met de halve schuine hoogte.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Is r de straal van het grondvlak en s de schuine hoogte, dan is

$$\text{Rond oppervlak kegel} = \pi\ rs.$$

Denken we ons in en om een kegel regelmatige pyramiden beschreven, die denzelfden top hebben als de kegel en wier grondvlakken regelmatige in- en omgeschreven veelhoeken van het grondvlak van den kegel zijn. Indien we nu het aantal zijden van deze grondvlakken onophoudelijk verdubbelen, hebben deze pyramiden den kegelinhoud tot limiet. Derhalve:

$$\text{Inhoud kegel} = \text{limiet inh regelm. pyramide}$$

of $\text{Inhoud kegel} = \text{opp. grondvlak} \times {}^{1}/_{3}$ hoogte

of $$I = {}^{1}/_{3}\ \pi\ r^2\ h.$$

Een deel van een kegel, dat gelegen is tusschen het grondvlak en een vlak, evenwijdig aan het grondvlak, noemt men *afgeknotten* kegel. (Zie fig. 6).

Het grondvlak van den kegel is het grondvlak van den afgeknotten kegel. Het vlak, evenwijdig aan het grondvlak, draagt den naam van bovenvlak van den afgeknotten kegel, terwijl het deel van het ronde oppervlak van den kegel, gelegen tusschen grond- en bovenvlak van den afgeknotten kegel het ronde oppervlak van den afgeknotten kegel genoemd wordt. Men kan den afgeknotten kegel ook beschouwen te zijn ontstaan door de wenteling van een rechthoekig trapezium om hare rechthoekszijde. De schuine zijde beschrijft dan het ronde oppervlak, terwijl de beide evenwijdige zijden het grond- en het bovenvlak doorloopen. Beschouwt men den afgeknotten kegel als te zijn ontstaan door de snijdiug van den kegel met een vlak, evenwijdig aan het grondvlak, dan kan men het ronde oppervlak van den afgeknotten kegel vinden door het verschil te nemen van de ronde oppervlakken van den geheelen kegel en den afgesneden kegel, terwijl men den inhoud bepalen kan uit het verschil der inhouden van de beide kegels.

Noemt men den straal van het grondvlak van den afgeknotten kegel R, dien van het bovenvlak r, de hoogte h en de beschrijvende lijn s, dan gelden de volgende formules:

$$\text{Rond oppervlak afgekn. kegel} = \pi\ s\ (R + r)$$

en $$I = \tfrac{1}{3}\ \pi\ h\ (R^2 + r^2 + Rr)$$

PERPUSTAKAAN NASIONAL

Beide formules zijn geheel overeenkomstig met die van de regelmatige afgeknotte pyramide.

De bol.

Een bol is een lichaam, ontstaan door de wenteling van een halven cirkel om de middellijn.

Het oppervlak, dat door den halven cirkelomtrek beschreven wordt, noemt men *het oppervlak* van den bol.

Het middelpunt van den halven cirkel is tevens middelpunt van den bol. De lijn, die het middelpunt van een bol met een punt van het oppervlak verbindt, noemt men een *straal* van den bol. Eene lijn, die twee punten van het oppervlak van een bol verbindt draagt den naam van *koorde*. Eene koorde, welke door 't middelpunt gaat heet *middellijn* van den bol. De uiteinden der middellijn noemt men *tegenpunten*.

Eigenschap. De doorsnede van een bol en een plat vlak is een cirkel.

Bewijs: (Zie fig. 7).

Zij CD een plat vlak, dat het boloppervlak snijdt volgens de lijn CABD. Laat men nu uit M de loodlijn MO op dit vlak neer en verbindt men A en B met M en O, dan zijn de rechthoekige $\triangle\triangle$ AMO en BMO congruent (MO = MO, = MA = MB, straal van den bol en $\angle$ MOA = $\angle$ MOB = 90°). Derhalve AO = BO. Alle punten der lijn CABD liggen dus op gelijke afstanden van O dus is deze lijn een cirkel, waarvan O het middelpunt en OA de straal is.

Hieruit volgt dus, dat wanneer een bol door een plat vlak gesneden wordt, het middelpunt der doorsnede het voetpunt is van de loodlijn uit het middelpunt op het platte vlak neergelaten.

Kent men dien afstand MO = a en den straal van den bol MA = R, dan kan de straal der doorsnede berekend worden. Volgens de stelling van Pythagoras is:

$$R^2 = a^2 + r^2$$

$$\text{of } r^2 = R^2 - a^2$$

Uit deze formule volgt:

1e. Wanneer een bol door twee platte vlakken gesneden wordt op gelijken afstand van het middelpunt gelegen, zullen de doorsneden gelijke cirkels zijn.

PERPUSTAKAAN NASIONAL

2e. Wanneer de platte vlakken op ongelijke afstanden van het middelpunt liggen, heeft het vlak, dat het dichtst bij het middelpunt is, de grootste doorsnede.

Een doorsnede van een bol met een plat vlak, dat door het middelpunt van den bol gaat, noemt men een *grooten* cirkel van den bol.

Een doorsnede van een bol met een plat vlak, dat niet door het middelpunt van den bol gaat, noemt men een *kleinen* cirkel van den bol.

Twee groote cirkels van een bol deelen elkander middendoor, omdat de snijlijn der twee vlakken door het middelpunt gaat, en tevens een middellijn is zoowel van den bol als van de beide cirkels.

De lijn, die door het middelpunt van een cirkel van een bol gaat en loodrecht op het vlak van den cirkel staat, noemt men de *as* van den cirkel.

De punten, waarin de as van een cirkel van een bol het boloppervlak snijdt, noemt men de *polen* van den cirkel. De beide deelen waarin een bol door eenig plat vlak verdeeld wordt, dragen den naam van *bolsegmenten.*

De cirkelvormige doorsnede heet: *grondvlak* van het segment en de lijn, die de pool van den cirkel met zijn middelpunt vereenigt en dus loodrecht op het grondvlak staat, heet *hoogte* of *pijl* van het segment. Het deel van het oppervlak van den bol noemt men het *ronde oppervlak* van het bolsegment.

Zoo is in de vorige figuur het deel van den bol, begrensd door den cirkel CABD en het boloppervlak CED een bolsegment. De cirkel CABD is het grondvlak, de lijn OE de hoogte of pijl van het segment en het boloppervlak CED het ronde oppervlak van het segment.

Een deel van den bol, begrensd door een deel van het oppervlak van den bol en door twee cirkels van den bol, wier vlakken evenwijdig zijn, noemt men *bolschijf.*

Het gedeelte van het boloppervlak noemt men het *ronde oppervlak* van de bolschijf. De evenwijdige cirkelvlakken dragen den naam van *grond-* en *bovenvlak* van de bolschijf, terwijl de afstand der middelpunten van grond- en bovenvlak de *hoogte* van de bolschijf genoemd wordt.

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

De figuur CABDHF is een bolschijf; cirkel O is het grondvlak, cirkel G is het bovenvlak; OG is de hoogte, terwijl het boloppervlak tusschen de cirkels G en O gelegen het ronde oppervlak genoemd wordt.

Zonder bewijs laten we hier de volgende eigenschap volgen:

1e Het oppervlak van een bol is gelijk aan vier maal het oppervlak van een grooten cirkel.

Derhalve: $O = 4 \pi R^2$.

2e Het ronde oppervlak van een bolsegment of bolschijf wordt gevonden door den omtrek van een grooten cirkel van den bol (waartoe bolsegment of bolschijf behooren) te vermenigvuldigen met de hoogte.

Derhalve: $O = 2 \pi R h$., waarin O = het ronde opp. van bolsegment of bolschijf, h de hoogte voorstelt en R de straal van den bol is.

3e De inhoud van den bol is gelijk aan het oppervlak, vermenigvuldigd met $^1/_3$ van den straal.

Derhalve: $I = \frac{4}{3} \pi R^3$.

of $I = \frac{1}{6} \pi D^3$, waarin D = diameter.

4e De inhoud van een bolsegment is gelijk aan de helft van een cilinder, die het grondvlak van 't segment tot grondvlak, en tot hoogte heeft de hoogte van 't segment, vermeerderd met een bol, die de hoogte van het segment tot middellijn heeft.

Derhalve: $I = \frac{1}{2} \pi r^2 h + \frac{1}{6} \pi h^3$,

waarin I = inhoud, r = straal van het grondvlak en h = hoogte.

5e De inhoud van een bolschijf is gelijk aan de helft van de som van twee cilinders, die respectievelijk tot grondvlak hebben grond- en bovenvlak van de bolschijf en tot hoogte de hoogte van de bolschijf, vermeerderd met een bol, die de hoogte van de bolschijf tot middellijn heeft.

Derhalve: $I = \frac{1}{2} (\pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h) + \frac{1}{6} \pi h^3$

waarin I = inhoud, r_1 = straal van het grondvlak, r_2 = straal van het bovenvlak en h = hoogte van de schijf.

We laten hier een bewijs van den inhoud van den bol volgen.

Nemen we op het oppervlak van den bol een groot aantal punten aan en verbinden we deze punten, zoodat een groot aantal driehoeken ontstaan, dan kunnen we het bolvormig oppervlak beschouwen als de grens, waartoe de som van de oppervlakken van al die driehoekjes nadert, als we het aantal op den bol aangenomen punten voortdurend laten toenemen.

Denken we bovendien al die punten met het middelpunt van den bol verbonden, dan ontstaan pyramiden en de inhoud van den bol zal dan de grens zijn, waartoe de som der inhouden dezer pyramiden bij toename van het aantal punten nadert.

De inhoud van een zoo'n pyramide is $^1/_3$ grondvlak $\times$ hoogte. De hoogten dier pyramiden naderen allen tot den straal van den bol.

De inhoud van den bol = de grens van $^1/_3$ R. $\times$ (som van al die grondvlakjes),

of wel: Inhoud bol $= {}^1/_3$ R. $\times$ oppervlak bol.

of $I = {}^1/_3$ R. $\times 4 \pi R^2$.

of $I = {}^4/_3 \pi R^3$.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI
PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

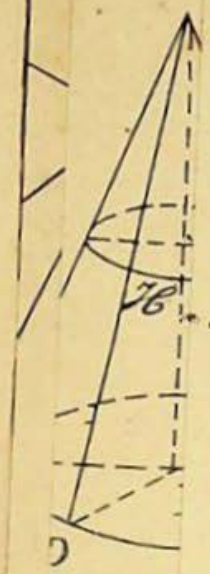

fig.

ogte.
(cirkel).
vende lij
tte kege
(cirkel).
vende li

Lembaga Kebudajaan Indonesia
Lembaga Kebudajaan Indonesia
Lembaga Kebudajaan Indonesia
Kebudajaan Genoot...
PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

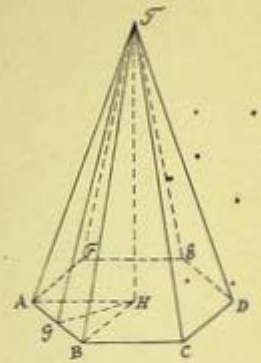

fig. 1

T A B C D E F = regelmatige zeszijdige pyramide.
A B C D E F = grondvlak (regelm. zeshoek).
T A B, T B C, enz. = opstaande zijvlakken.
T A, T B, enz. = " ribben.
T H = hoogte.
T G = apothema.
H = middelpunt grondvlak.

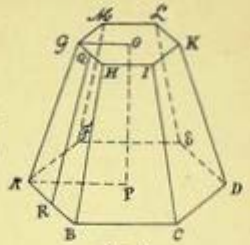

fig. 2

A B C Q E F G H I K L M = regelm. afgeknotte zeszijdige pyramide
A B C D E F = grondvlak } regelmatige zeshoeken.
G H I K L M = bovenvlak }
A B H G, enz. = opstaande zijvlakken.
O P = hoogte.
Q R = apothema.

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

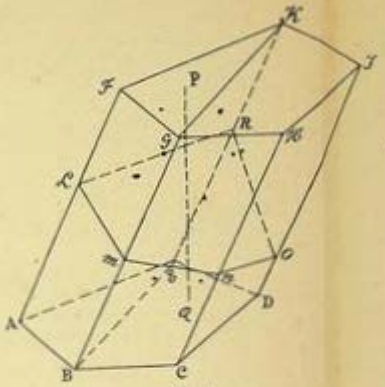

fig. 3

A B C D E F G H I K = scheef prisma.
A B C D E = grondvlak.
F G H I K = bovenvlak.
A F, B G, enz. = opstaande ribben.
A B, B C, enz. = ribben.
A B G F, B C H G, enz. = opstaande zijvlakken.
P Q = hoogte.
B E K G = diagonaalvlak.
A B C D E L M N O R } afgeknotte prisma's.
F G H I K L M N O R }

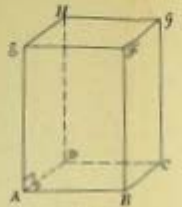

fig. 4

A B C D E F G H = rechthoekig parallelepipedum.
A B C D, B C G F, A B F E, enz. = rechthoeken.

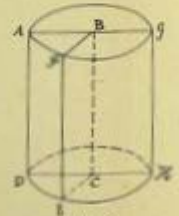

fig. 5

A F G H E D = cilinder.
B C = as.
A D = beschrijvende lijn.
A F G = bovenvlak (cirkel).
D E H = grondvlak („).
A D H G = asdoorsnede.
A D = B C = E F = G H = hoogte.

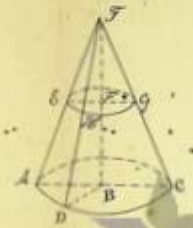

fig. 6

T A D C = kegel.
T B = as = hoogte.
A D C = grondvlak (cirkel).
T A = beschrijvende lijn [illegible]
E H G C D A = afgeknotte kegel [illegible]
E H G = bovenvlak (cirkel).
E A = beschrijvende lijn.
F B = hoogte.

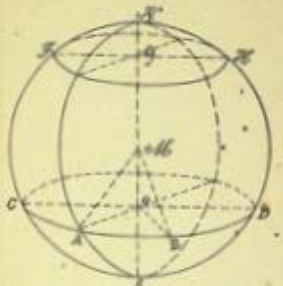

fig. 7

E C F H D = groote cirkel.
C A B D en F H = kleine cirkels.
E M G K = as v/d kl. cirkels.
E en K = polen.

Bataviaasch Genootschap
van Kunsten en Wetenschappen

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA



Lembaga Kebudajaan Indo
Postgraadsch Genoot

PERPUS